

Университет ИТМО

Факультет ПИиКТ.

Кафедра ВТ.

# **Домашнее задание №2 по дисциплине**

**Моделирование**

**Вариант 21/1**

**Выполнил :**

**Шишкин Никита Дмитриевич**

**Группа Р3300**

**Преподаватель :**

**Муравьева-Витковская Людмила Александровна**

**Санкт-Петербург**

**2019 год.**

## Постановка задачи и исходные данные.

### Цель работы

Исследование систем массового обслуживания с неоднородным потоком заявок (неоднородных СМО) и обслуживанием в соответствии с заданной дисциплиной обслуживания (ДО) методом Марковских случайных процессов.

### Этапы исследования

- Построение и описание исследуемой системы массового обслуживания.
- Разработка марковской модели исследуемой системы.
- Проведение расчетов по разработанной модели с использованием программы MARK и получение результатов.
- Анализ полученных результатов.
- Детальный анализ зависимостей характеристик системы при изменении нагрузки.

### Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем:

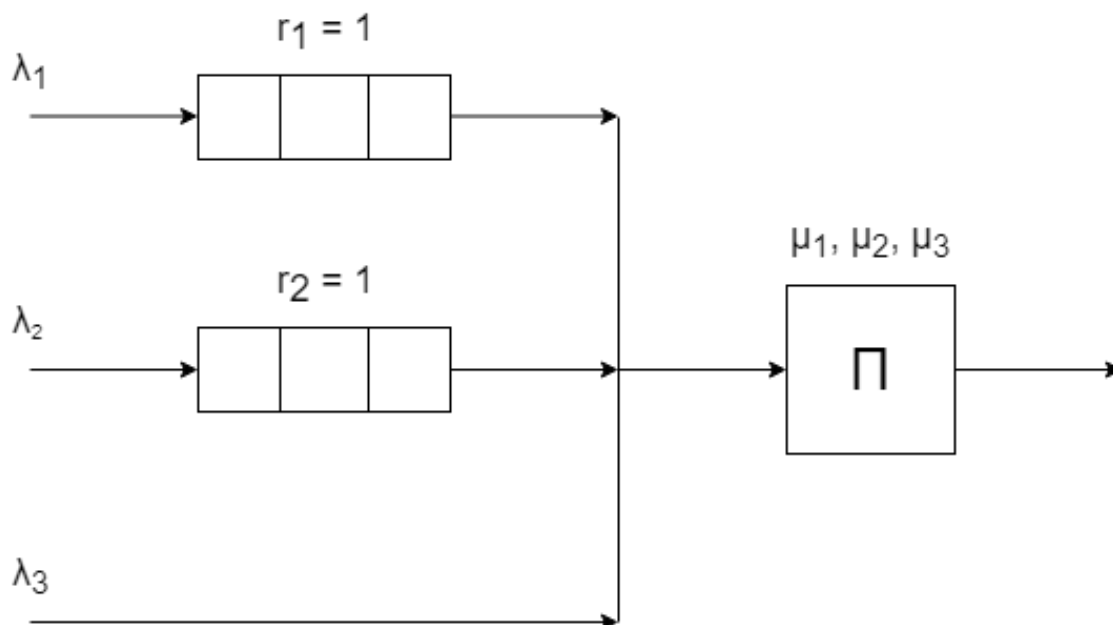
Вариант	Организация системы							
	К	П	ЕН	ВЗП	ДО	ПНП	ДБ	ДП
	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8
21	3	1	1/1/0	-	ОП	1-2-3	(в)	-

ДБ (в) - поступающая заявка любого класса при отсутствии свободного места в накопителе данного класса теряется.

### Параметры нагрузки:

Вариант	Интенсивность потока, $c^{-1}$			Ср. длит. обслуживания, с		
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
1	0.1	0.2	0.2	4.0	2.0	1.0

## Описание исследуемой системы.



- Система одноканальная – один обслуживающий прибор.
- Поток заявок неоднородный – три класса заявок.
- Емкости накопителей у первого и второго классов ограниченные – по одному месту для ожидания заявок каждого класса. Накопители отдельные. У третьего класса накопитель отсутствует.
- Дисциплина буферизации – поступающая заявка любого класса при отсутствии свободного места в накопителе данного класса теряется.
- Дисциплина обслуживания – с относительными приоритетами. Заявки класса 1 имеют приоритет по отношению к заявкам класса 2 и 3, а заявки класса 2 имеют приоритет по отношению к заявкам класса 3.

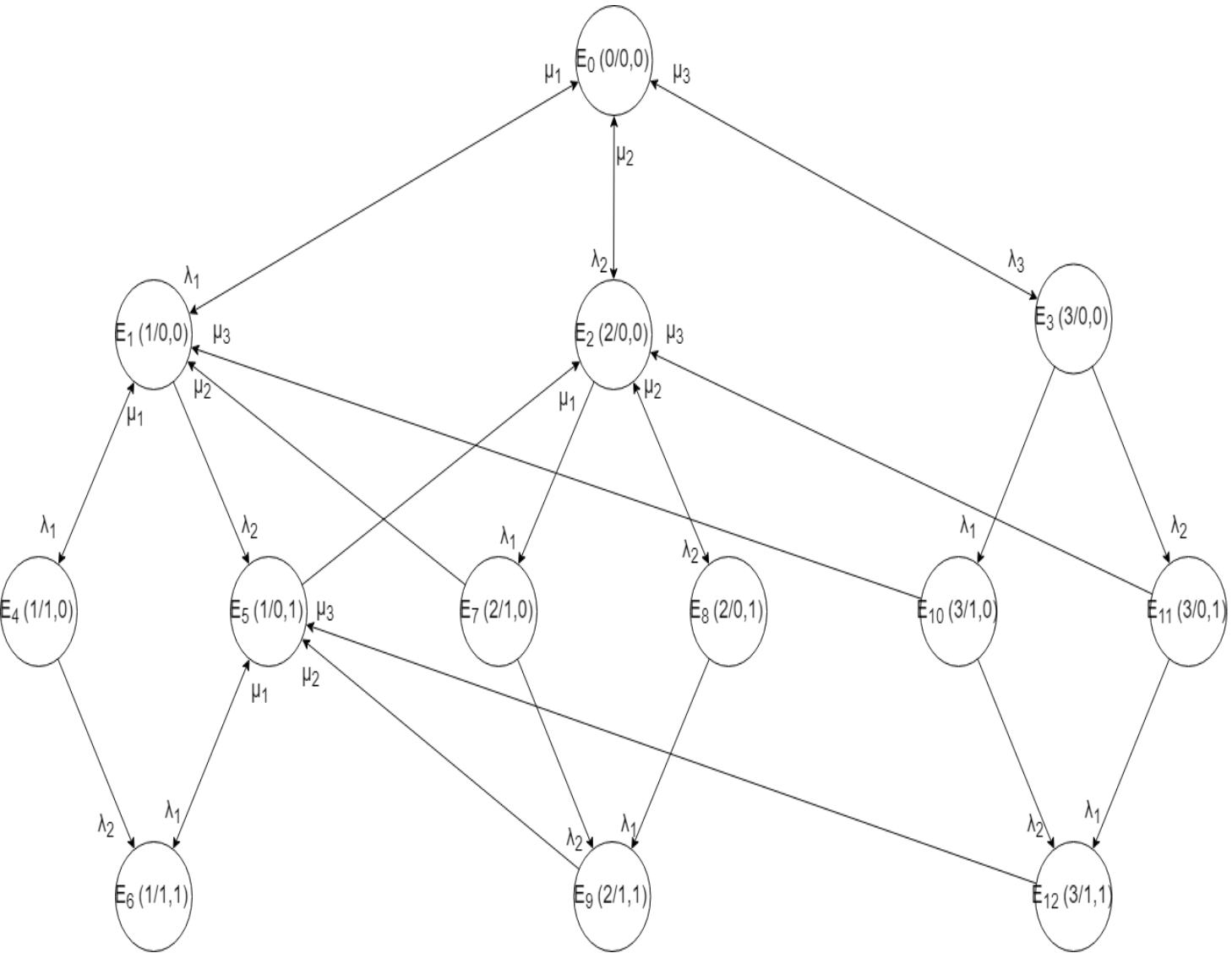
## Кодирование состояний случайного процесса.

Для описания состояний марковского процесса будем использовать распределение заявок между прибором и накопителями. Закодируем состояния следующим образом:  $(\Pi/O_1, O_2)$  где:

- $\Pi = \{0, 1, 2, 3\}$  – состояние обслуживающего прибора, задаваемое классом заявки, находящейся на  $\Pi$
- $O_1, O_2 = \{0, 1\}$  – состояние накопителей 1 и 2 соответственно.

Состояние		E <sub>0</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>7</sub>
Прибор	П	0	1	2	3	1	1	1	2
Накопители	O <sub>1</sub>	0	0	0	0	1	0	1	1
	O <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	1	1	0
		E <sub>8</sub>	E <sub>9</sub>	E <sub>10</sub>	E <sub>11</sub>	E <sub>12</sub>			
		П	2	2	3	3	3		
		O <sub>1</sub>	0	1	1	0	1		
		O <sub>2</sub>	1	1	0	1	1		

Размеченный граф переходов Марковского процесса.



## Матрица интенсивностей переходов.

$E_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\mu_1$		0	0	$\lambda_1$	$\lambda_2$	0	0	0	0	0	0	0
2	$\mu_2$	0		0	0	0	0	$\lambda_1$	$\lambda_2$	0	0	0	0
3	$\mu_3$	0	0		0	0	0	0	0	0	$\lambda_1$	$\lambda_2$	0
4	0	$\mu_1$	0	0		0	$\lambda_2$	0	0	0	0	0	0
5	0	0	$\mu_1$	0	0		$\lambda_1$	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	$\mu_1$		0	0	0	0	0	0
7	0	$\mu_2$	0	0	0	0	0		0	$\lambda_2$	0	0	0
8	0	0	$\mu_2$	0	0	0	0	0		$\lambda_1$	0	0	0
9	0	0	0	0	0	$\mu_2$	0	0	0		0	0	0
10	0	$\mu_3$	0	0	0	0	0	0	0	0		0	$\lambda_2$
11	0	0	$\mu_3$	0	0	0	0	0	0	0	0		$\lambda_1$
12	0	0	0	0	0	$\mu_3$	0	0	0	0	0	0	

## Стационарные вероятности состояний

Номер состояния	Обозначение	Вероятность
1	$E_0(0/0,0)$	0.3198
2	$E_1(1/0,0)$	0.0979
3	$E_2(2/0,0)$	0.1724
4	$E_3(3/0,0)$	0.0492

5	$E_4(1/1,0)$	0.0217
6	$E_5(1/0,1)$	0.1453
7	$E_6(1/1,1)$	0.0755
8	$E_7(2/1,0)$	0.0246
9	$E_8(2/0,1)$	0.0575
10	$E_9(2/1,1)$	0.0213
11	$E_{10}(3/1,0)$	0.0041
12	$E_{11}(3/0,1)$	0.0089
12	$E_{12}(3/1,1)$	0.0017

## Результаты расчета характеристик функционирования СИСТЕМЫ

Хар-ка	Класс заявок	Расчетная формула	Значение
Нагрузка	1	$y_1 = \lambda_1 / \mu_1$	0.4
	2	$y_2 = \lambda_2 / \mu_2$	0.4
	3	$y_3 = \lambda_3 / \mu_3$	0.2
	Сумм.	$y = y_1 + y_2 + y_3$	1
Загрузка	1	$\rho_1 = p_1 + p_4 + p_5 + p_6$	0.3404
	2	$\rho_2 = p_2 + p_7 + p_8 + p_9$	0.2759
	3	$\rho_3 = p_3 + p_{10} + p_{11} + p_{12}$	0.064
	Сумм.	$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$	0.6802
Длина очереди	1	$l_1 = p_4 + p_6 + p_7 + p_9 + p_{10} + p_{12}$	0.149
	2	$l_2 = p_5 + p_6 + p_8 + p_9 + p_{11} + p_{12}$	0.3102
	3	$l_3 = 0$	0
	Сумм.	$l = l_1 + l_2 + l_3$	0.4593
Число заявок	1	$m_1 = p_1 + 2p_4 + p_5 + 2p_6 + p_7 + p_9 + p_{10} + p_{12} = \rho_1 + l_1$	0.4894
	2	$m_2 = p_2 + p_5 + p_6 + p_7 + 2p_8 + 2p_9 + p_{11} + p_{12} = \rho_2 + l_2$	0.5861
	3	$m_3 = p_3 + p_{10} + p_{11} + p_{12} = \rho_3 + l_3$	0.064
	Сумм.	$m = p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + 3p_6 + 2p_7 + 2p_8 + 3p_9 + 2p_{10} + 2p_{11} + 3p_{12} = m_1 + m_2 + m_3$	1.1395
Ср. время ожидания	1	$w_1 = l_1 / \lambda_1'$	1.7516
	2	$w_2 = l_2 / \lambda_2'$	2.249
	3	$w_3 = 0$	0
	Сумм.	$w = (\lambda_1' w_1 + \lambda_2' w_2 + \lambda_3' w_3) / (\lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3') = l / \lambda'$	1.6003
Ср. время пребывания	1	$u_1 = m_1 / \lambda_1' = w_1 + b_1$	5.7516
	2	$u_2 = m_2 / \lambda_2' = w_2 + b_2$	4.249
	3	$u_3 = m_3 / \lambda_3' = w_3 + b_3$	1
	Сумм.	$u = (\lambda_1' u_1 + \lambda_2' u_2 + \lambda_3' u_3) / \lambda' = m / \lambda' = w + \rho / \lambda'$	3.9705
	1	$\pi_1 = p_4 + p_6 + p_7 + p_9 + p_{10} + p_{12}$	0.149

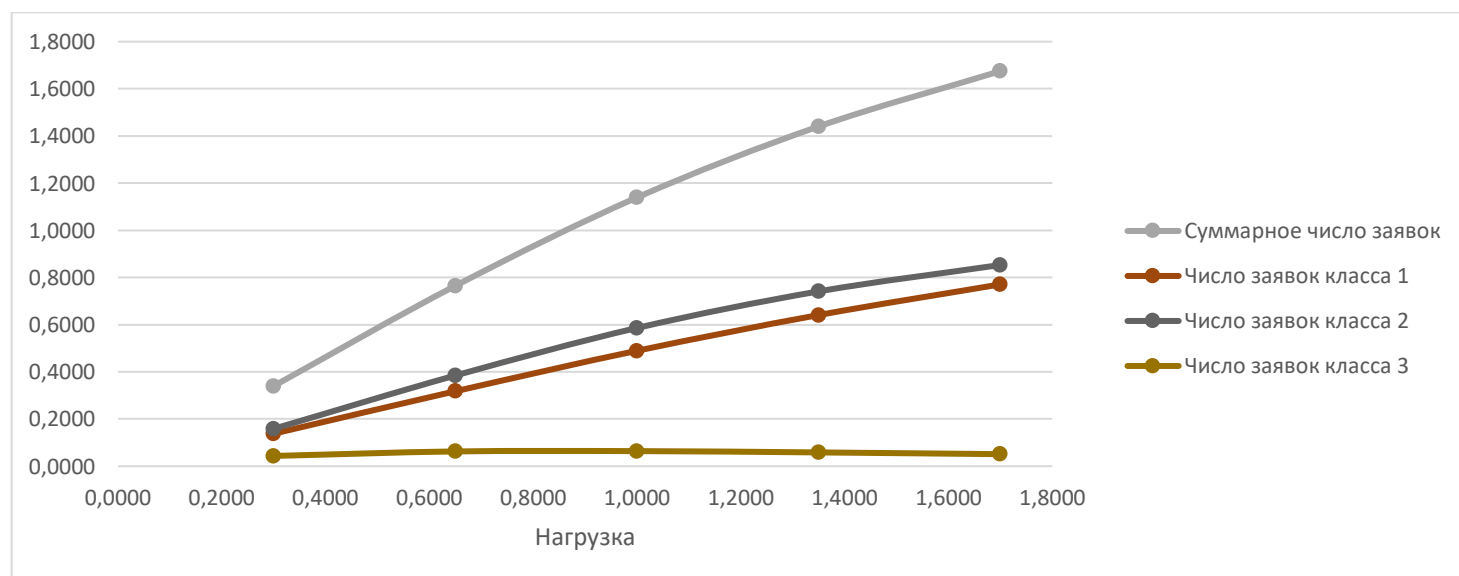
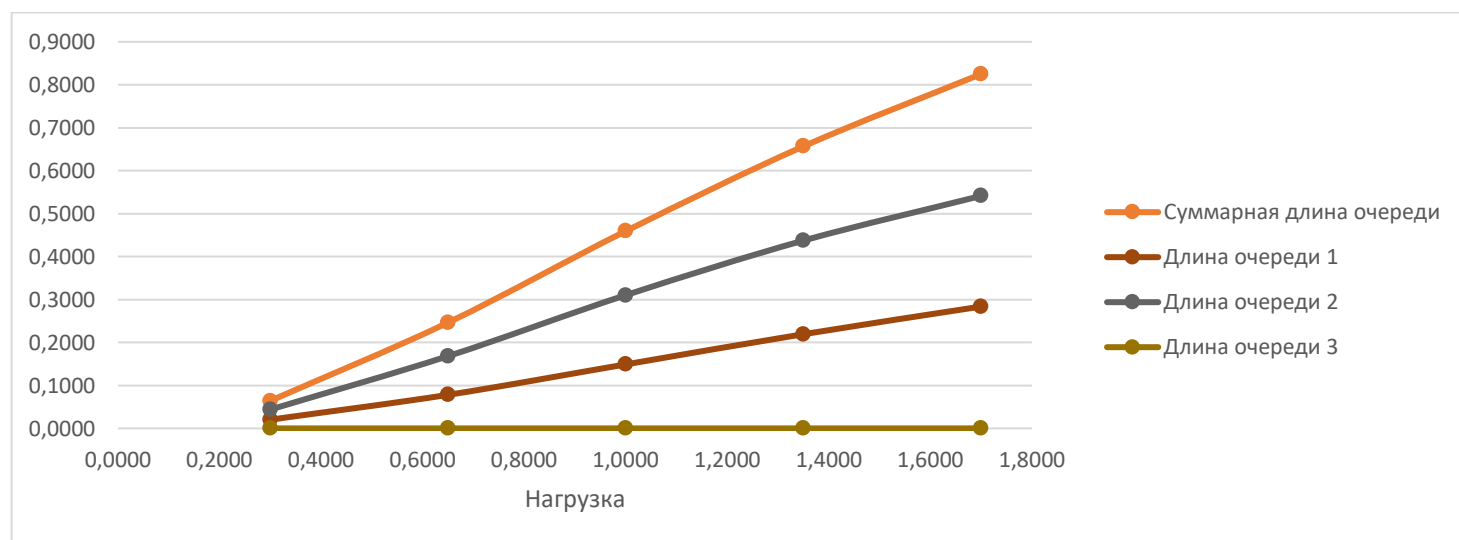
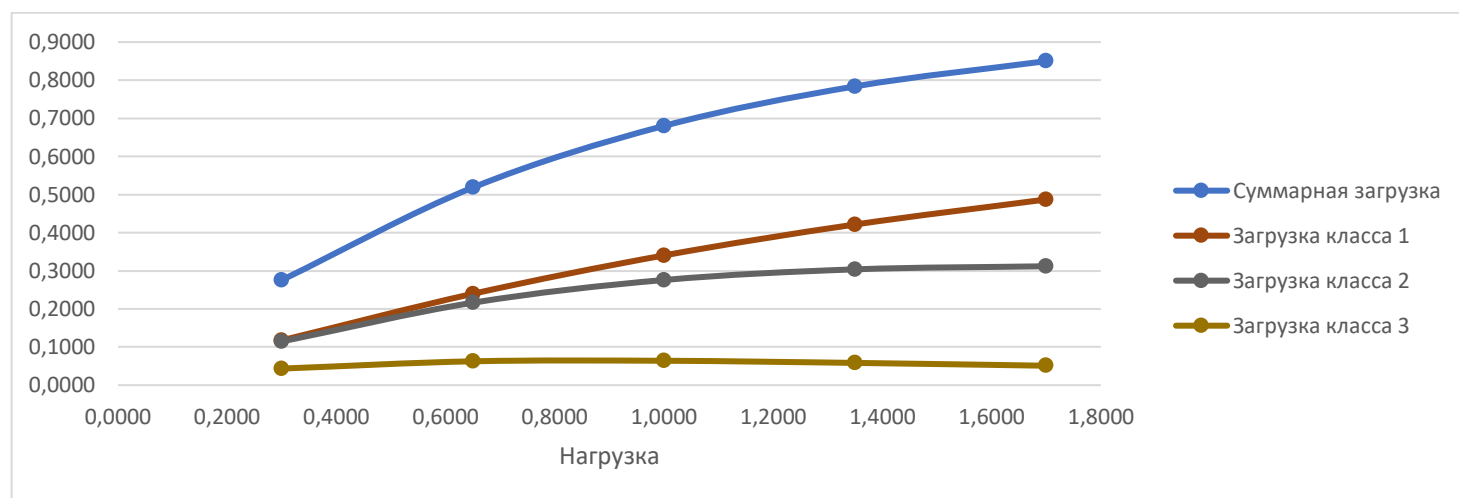
Вер-ть потери	2	$\pi_2 = p_5 + p_6 + p_8 + p_9 + p_{11} + p_{12}$	0.3102
	3	$\pi_3 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12}$	0.6802
	Сумм.	$\pi = (\pi_1 \lambda_1 + \pi_2 \lambda_2 + \pi_3 \lambda_3) / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$	0.426
Пропускная способность	1	$\lambda_1' = \lambda_1 * (1 - \pi_1)$	0.0851
	2	$\lambda_2' = \lambda_2 * (1 - \pi_2)$	0.138
	3	$\lambda_3' = \lambda_3 * (1 - \pi_3)$	0.064
	Сумм.	$\lambda' = \lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3' = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) * (1 - \pi)$	0.287

## Результаты варьирования параметров

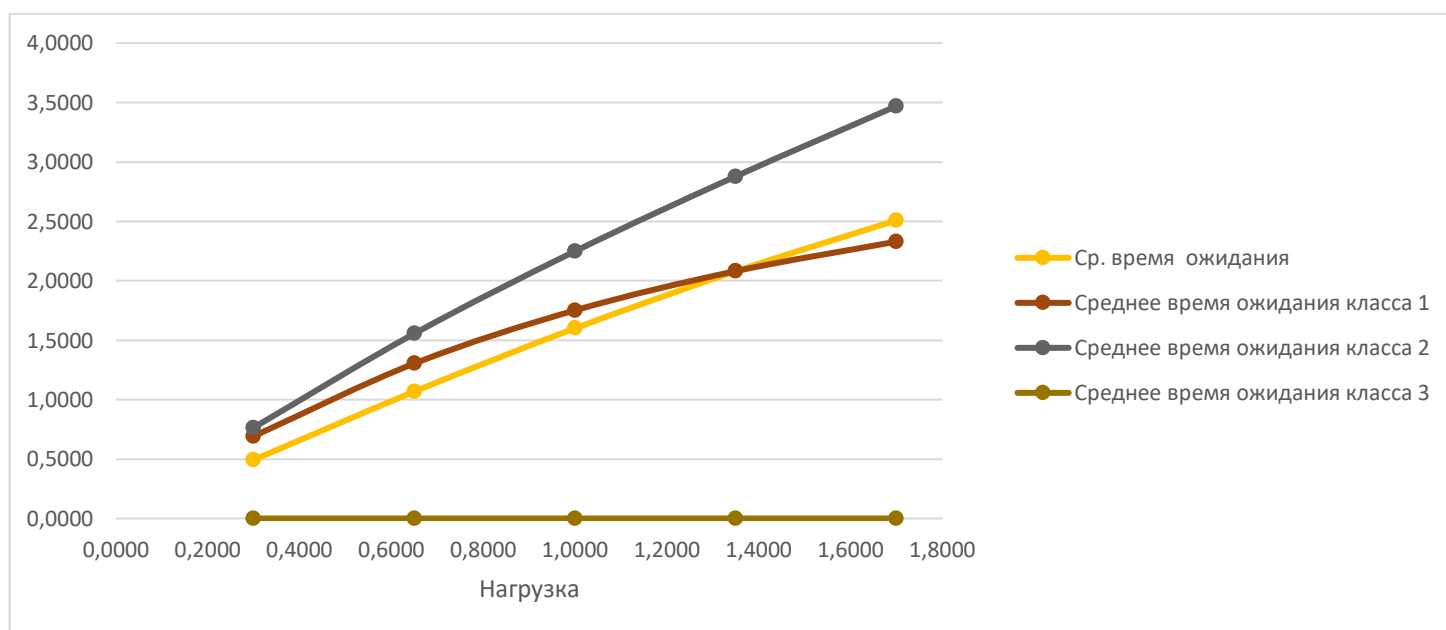
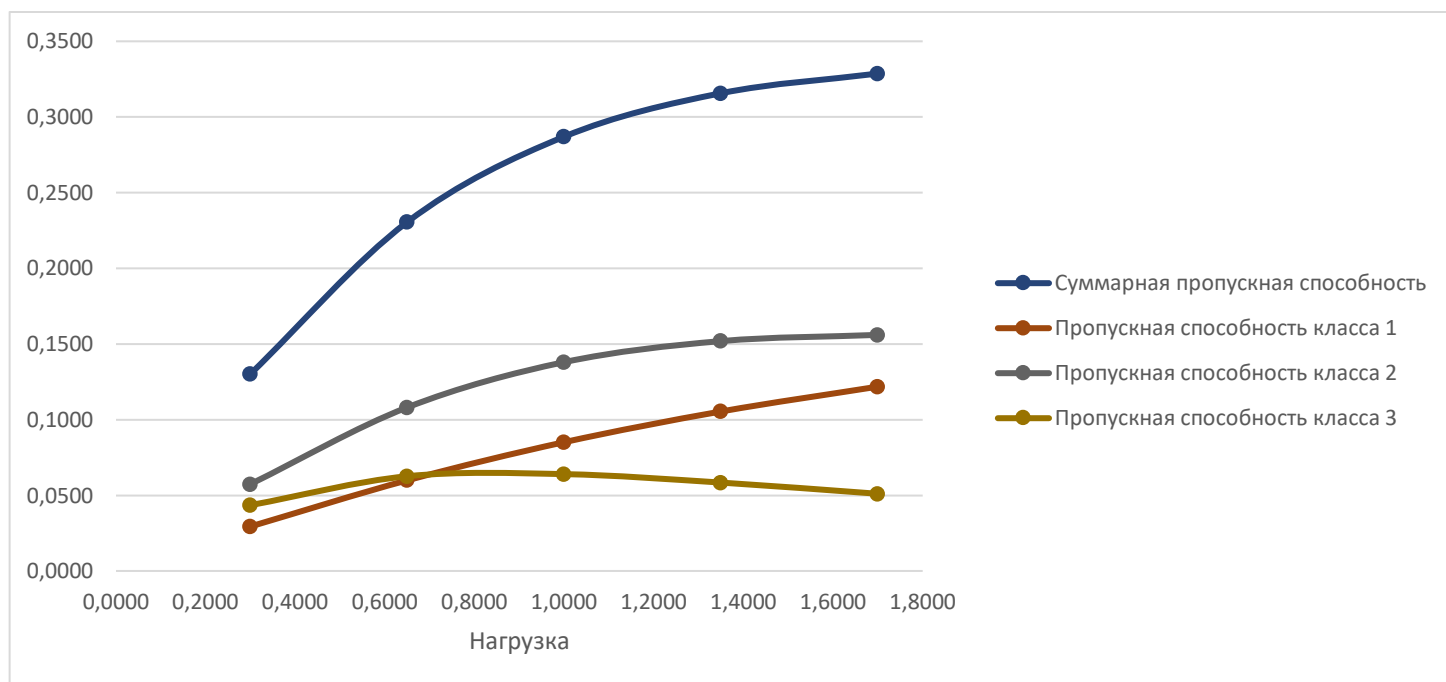
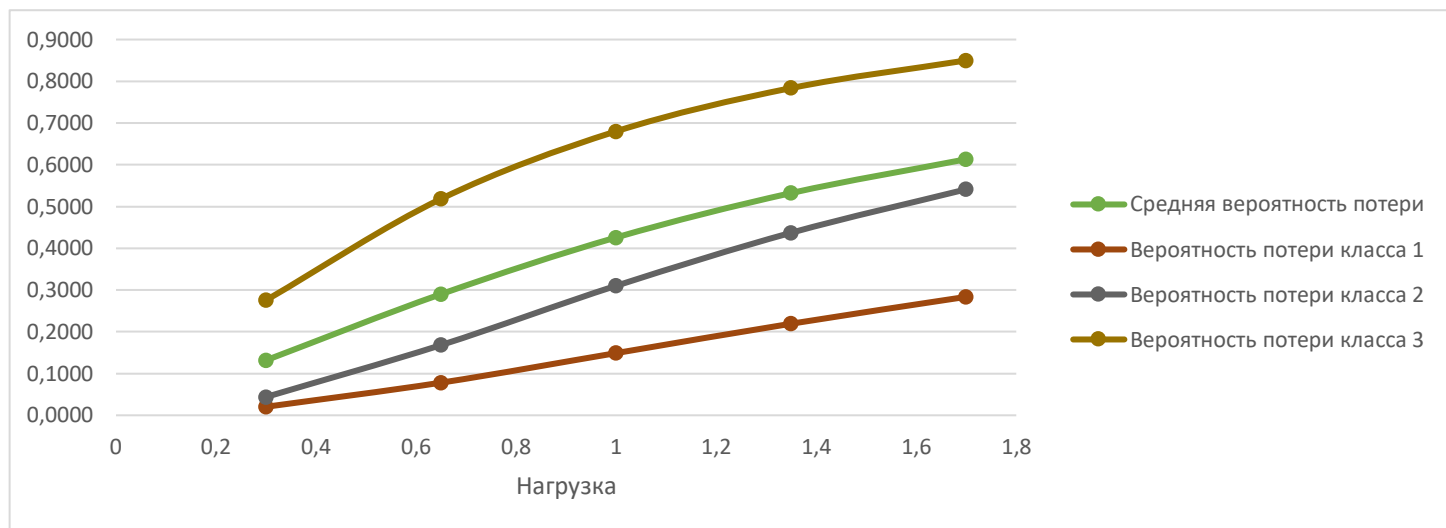
Хар-ка	Класс заявок	Интенсивности потоков заявок					Ср. длительности обслуживания				
		$\lambda_1 = 0.03$ $\lambda_2 = 0.06$ $\lambda_3 = 0.06$	$\lambda_1 = 0.065$ $\lambda_2 = 0.13$ $\lambda_3 = 0.13$	$\lambda_1 = 0.1$ $\lambda_2 = 0.2$ $\lambda_3 = 0.2$	$\lambda_1 = 0.135$ $\lambda_2 = 0.27$ $\lambda_3 = 0.27$	$\lambda_1 = 0.17$ $\lambda_2 = 0.34$ $\lambda_3 = 0.34$	$b_1 = 1.6$ $b_2 = 0.8$ $b_3 = 0.4$	$b_1 = 2$ $b_2 = 1$ $b_3 = 0.5$	$b_1 = 2.66$ $b_2 = 1.33$ $b_3 = 0.66$	$b_1 = 4$ $b_2 = 2$ $b_3 = 1$	$b_1 = 8$ $b_2 = 4$ $b_3 = 2$
Нагрузка	1	0,12	0,26	0,4	0,54	0,68	0,16	0,2	0,2667	0,4	0,8
	2	0,12	0,26	0,4	0,54	0,68	0,16	0,2	0,2667	0,4	0,8
	3	0,06	0,13	0,2	0,27	0,34	0,08	0,1	0,1333	0,2	0,4
	Сумм.	0,3	0,65	1	1,35	1,7	0,4	0,5	0,6667	1	2
Загрузка	1	0,1176	0,2397	0,3404	0,4215	0,4871	0,1545	0,1899	0,245	0,3404	0,5335
	2	0,1147	0,2163	0,2759	0,3038	0,3119	0,1481	0,1781	0,22	0,2759	0,3097
	3	0,0435	0,0626	0,064	0,0584	0,051	0,0517	0,0575	0,0629	0,064	0,0448
	Сумм.	0,2757	0,5185	0,6802	0,7838	0,85	0,3543	0,4254	0,5279	0,6802	0,888
Длина очереди	1	0,0204	0,0782	0,149	0,2194	0,2837	0,0343	0,0506	0,0814	0,149	0,3331
	2	0,0439	0,1683	0,3102	0,4373	0,5413	0,0743	0,1096	0,175	0,3102	0,6129
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Сумм.	0,0642	0,2464	0,4593	0,6567	0,825	0,1086	0,1602	0,2564	0,4593	0,946
Число заявок	1	0,1379	0,3178	0,4894	0,6409	0,7708	0,1888	0,2405	0,3264	0,4894	0,8666
	2	0,1586	0,3845	0,5861	0,7412	0,8532	0,2224	0,2877	0,395	0,5861	0,9226
	3	0,0435	0,0626	0,064	0,0584	0,051	0,0517	0,0575	0,0629	0,064	0,0448
	Сумм.	0,34	0,7649	1,1395	1,4405	1,675	0,4628	0,5856	0,7843	1,1395	1,834
Ср. время ожидания	1	0,6926	1,3044	1,7516	2,0814	2,3299	0,3549	0,5327	0,886	1,7516	4,9943
	2	0,765	1,5561	2,249	2,8789	3,4702	0,4013	0,6156	1,0607	2,249	7,9157
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Сумм.	0,4934	1,0684	1,6003	2,0802	2,5095	0,2642	0,413	0,7299	1,6003	5,681
Ср. время пребывания	1	4,6926	5,3044	5,7516	6,0814	6,3299	1,9549	2,5327	3,5526	5,7516	12,9943
	2	2,765	3,5561	4,249	4,8789	5,4702	1,2013	1,6156	2,394	4,249	11,9157
	3	1	1	1	1	1	0,4	0,5	0,6667	1	2
	Сумм.	2,6111	3,3166	3,9705	4,563	5,0952	1,1265	1,5096	2,2327	3,9705	11,0141
Вероятность потери	1	0,0204	0,0782	0,149	0,2194	0,2837	0,0343	0,0506	0,0814	0,149	0,3331
	2	0,0439	0,1683	0,3102	0,4373	0,5413	0,0743	0,1096	0,175	0,3102	0,6129
	3	0,2757	0,5185	0,6802	0,7838	0,85	0,3543	0,4254	0,5279	0,6802	0,888
	Сумм.	0,1319	0,2903	0,426	0,5323	0,6133	0,1783	0,2241	0,2974	0,426	0,667
Пропускная способность	1	0,0294	0,0599	0,0851	0,1054	0,1218	0,0966	0,0949	0,0919	0,0851	0,0667
	2	0,0574	0,1081	0,138	0,1519	0,156	0,1851	0,1781	0,165	0,138	0,0774
	3	0,0435	0,0626	0,064	0,0584	0,051	0,1291	0,1149	0,0944	0,064	0,0224
	Сумм.	0,1302	0,2306	0,287	0,3157	0,3287	0,4109	0,3879	0,3513	0,287	0,1665

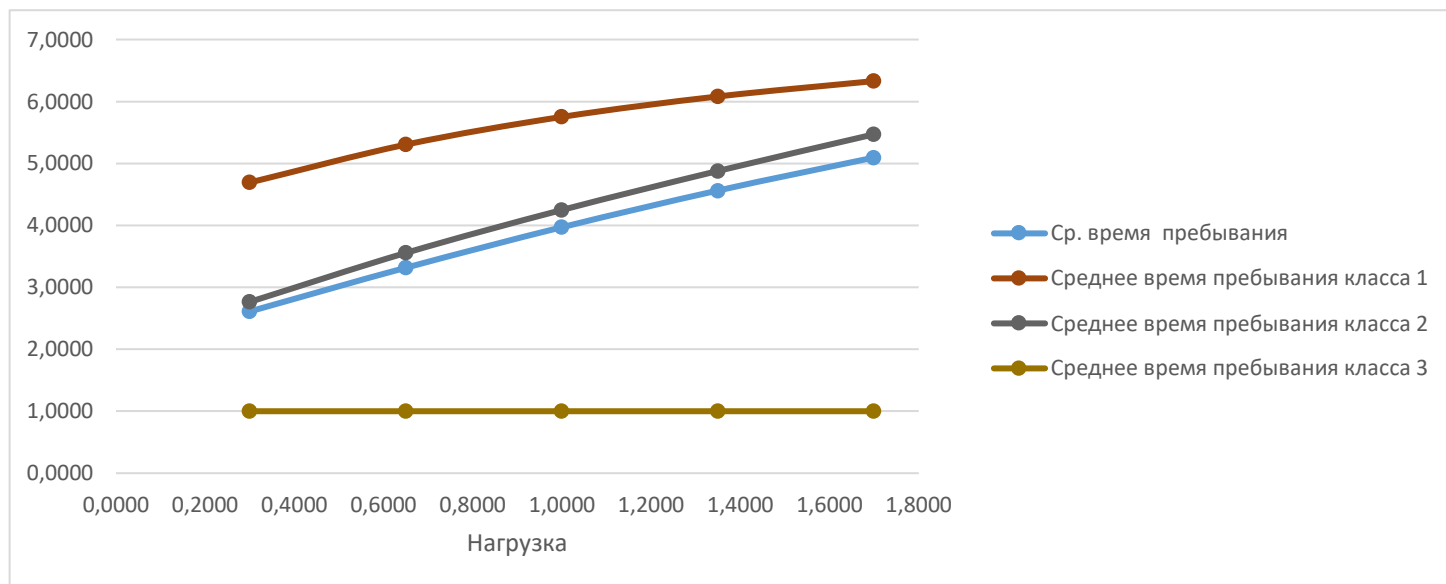
## Графики функционирования системы.

а.) При пропорциональном варьировании интенсивностей потоков заявок для каждого класса.









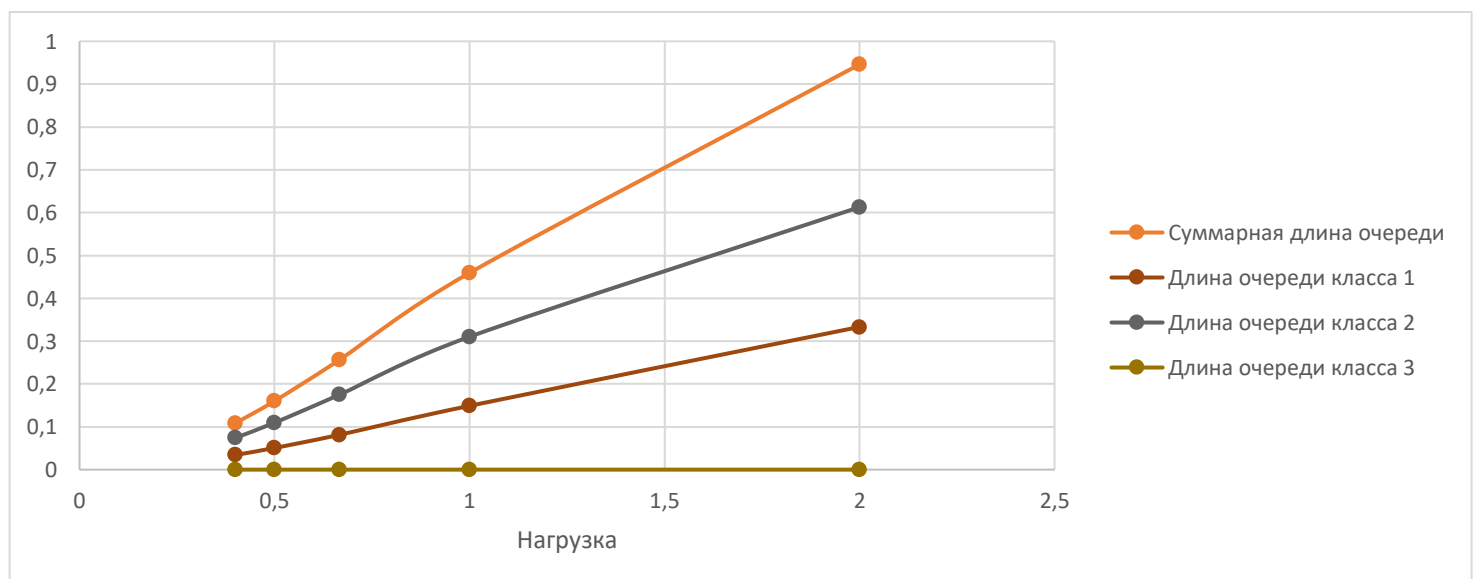
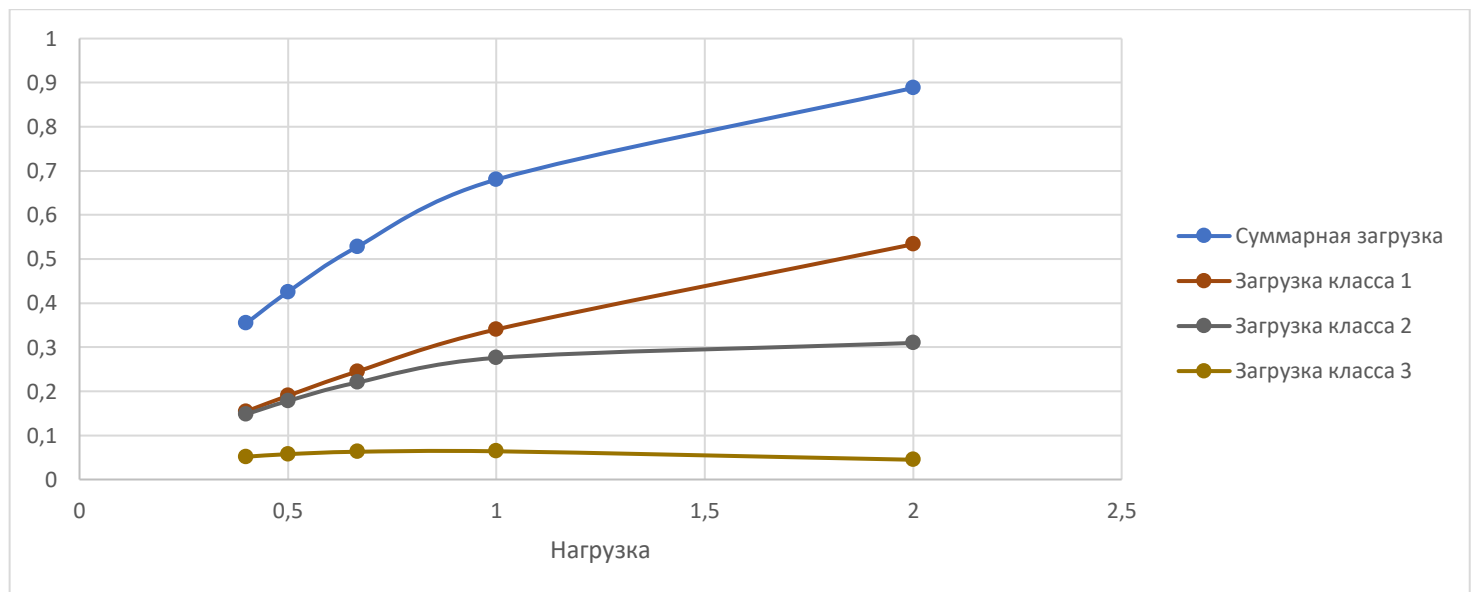
### Анализ:

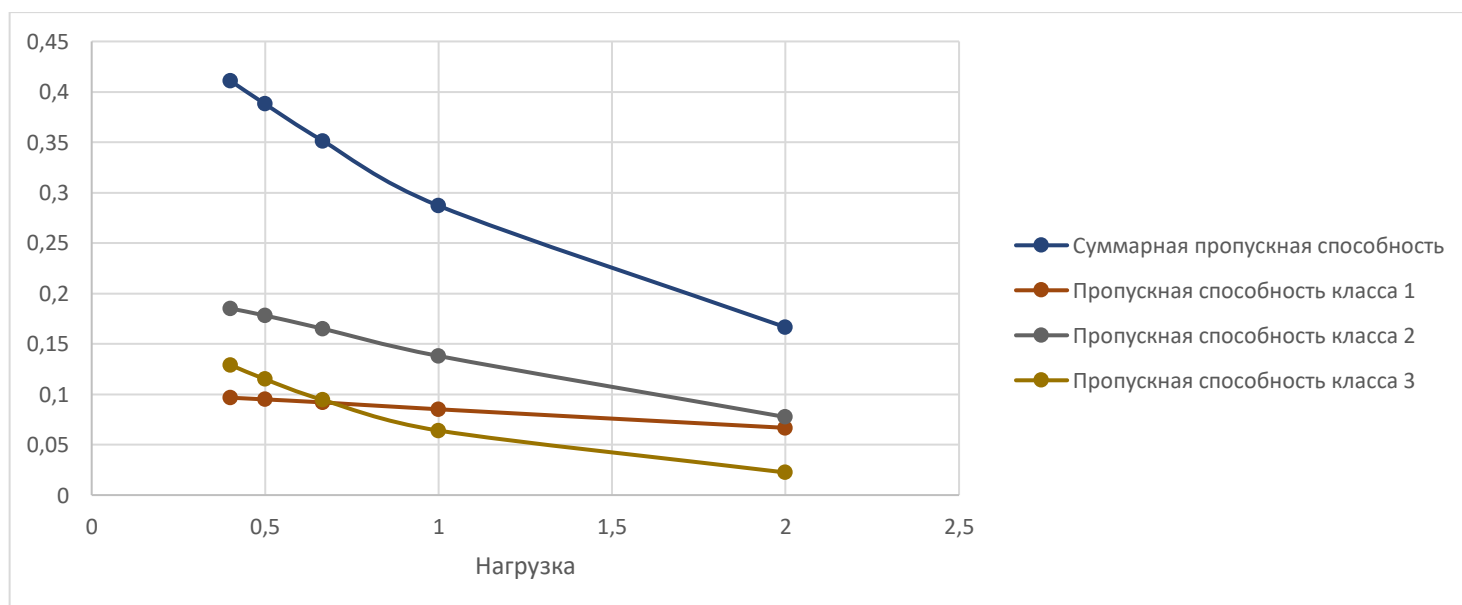
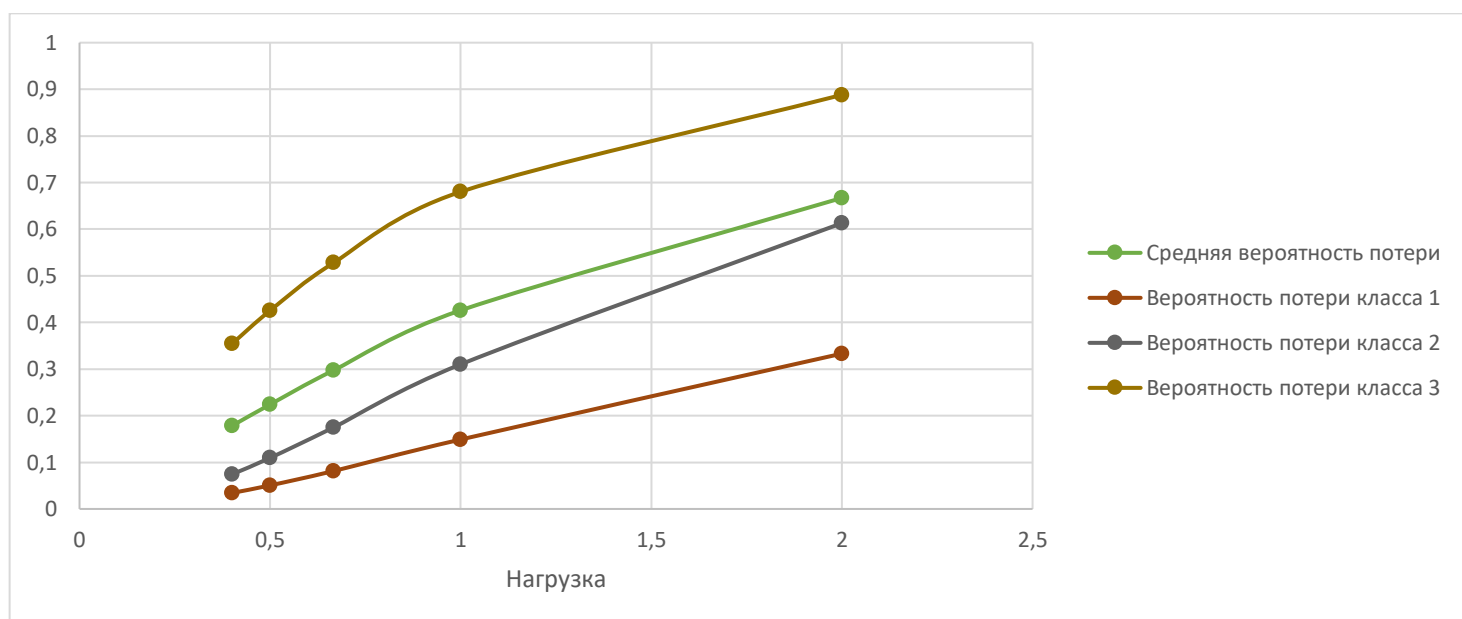
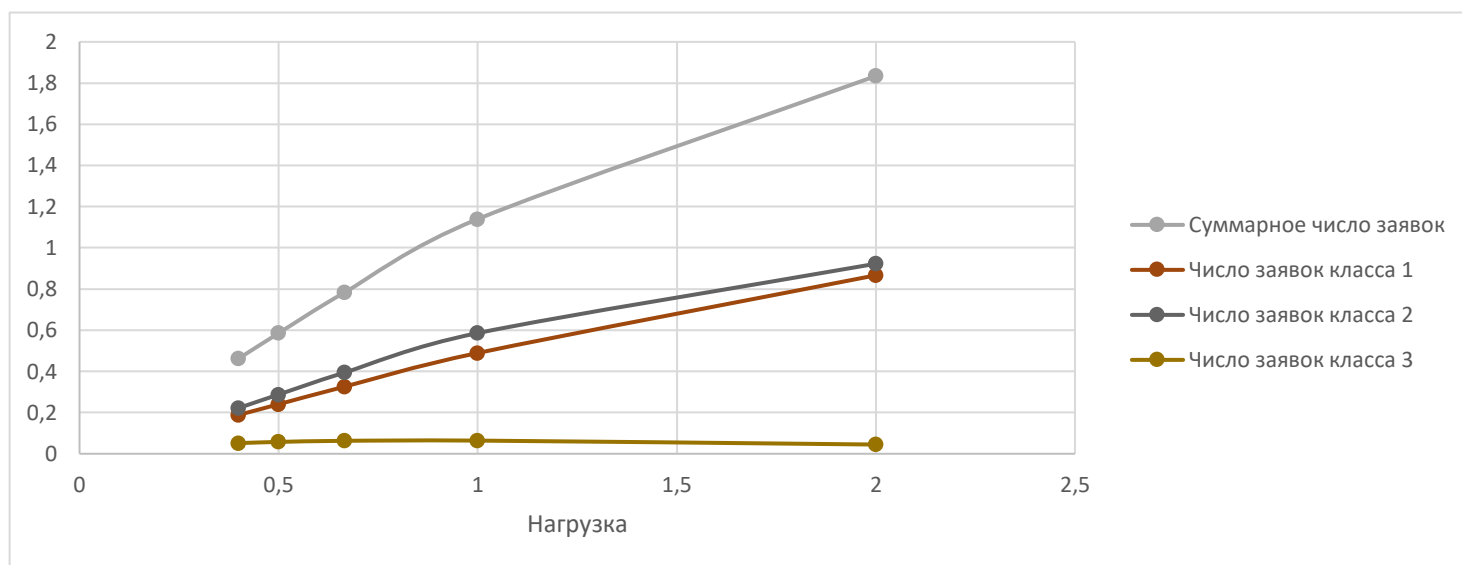
- Загрузка системы от нагрузки зависит практически линейно (при небольших значениях), однако при увеличении нагрузки зависимость несёт всё менее линейный характер, загрузка возрастает медленнее постепенно приближаясь к 1. (своему предельному значению). Наибольший вклад в загрузку вносит первый класс заявок,
- Средняя длина очереди линейно зависит от нагрузки. Аналогично ведут себя и очереди для отдельных классов, причем у высокоприоритетных заявок средняя длина очереди будет меньше, чем у низкоприоритетных.
- Среднее число заявок почти линейно зависит от нагрузки, однако на графике видно, что постепенно оно возрастает всё медленнее и зависимость постепенно перестает носить линейный характер. Немного иначе ведут себя заявки для отдельных классов, для класса 1 (самый высокий приоритете) зависимость даже при больших нагрузках сохраняет линейный характер, в то время как у низкоприоритетных классов с увеличением нагрузки линейный характер зависимости пропадает. (Особенно хорошо это видно на примере заявок класса 3).
- Вероятность потери ведет себя практически линейно, постепенно приближаясь к единице (при больших значениях нагрузки, зависимость перестанет быть линейной, т.к. есть предельное значение). По классам же распределение повторяет приоритеты, т.е. самая низкая вероятность потери самого приоритетного класса, самая высокая у самого низкоприоритетного класса и т.д.
- Пропускная способность же испытывает наибольший прирост в интервале нагрузки 0.3-1 ведя себя практически линейно, затем скорость прироста значительно падает, и пропускная способность приближается к своему максимальному значению, а после него будет убывать. (Поскольку хоть суммарная интенсивность потока входных заявок может быть сколь угодно большой, множитель  $(1 - \pi)$  становится всё ближе к нулю, т.к. вероятность потери весьма быстро приближается к максимальному значению (1), как видно на графике). Схожим образом ведут себя и зависимости для отдельных классов, однако видно, что, поскольку вероятность потери возрастает с

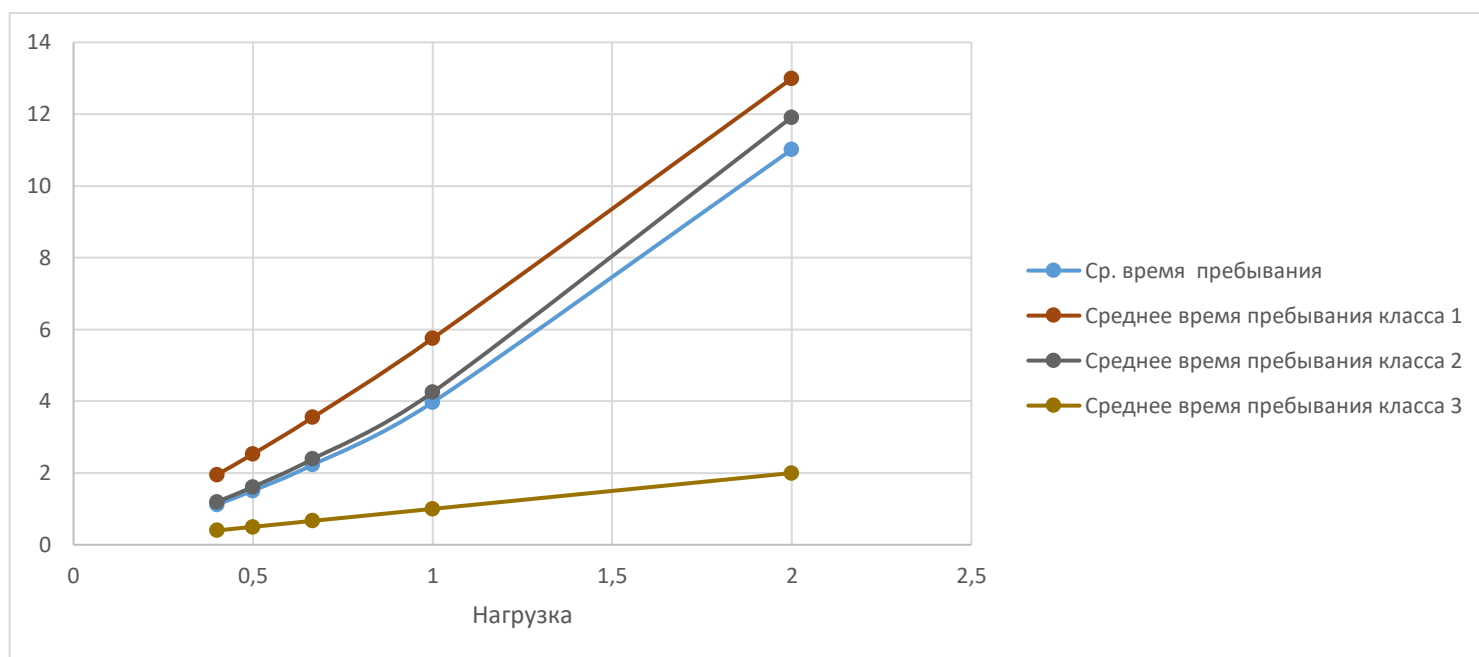
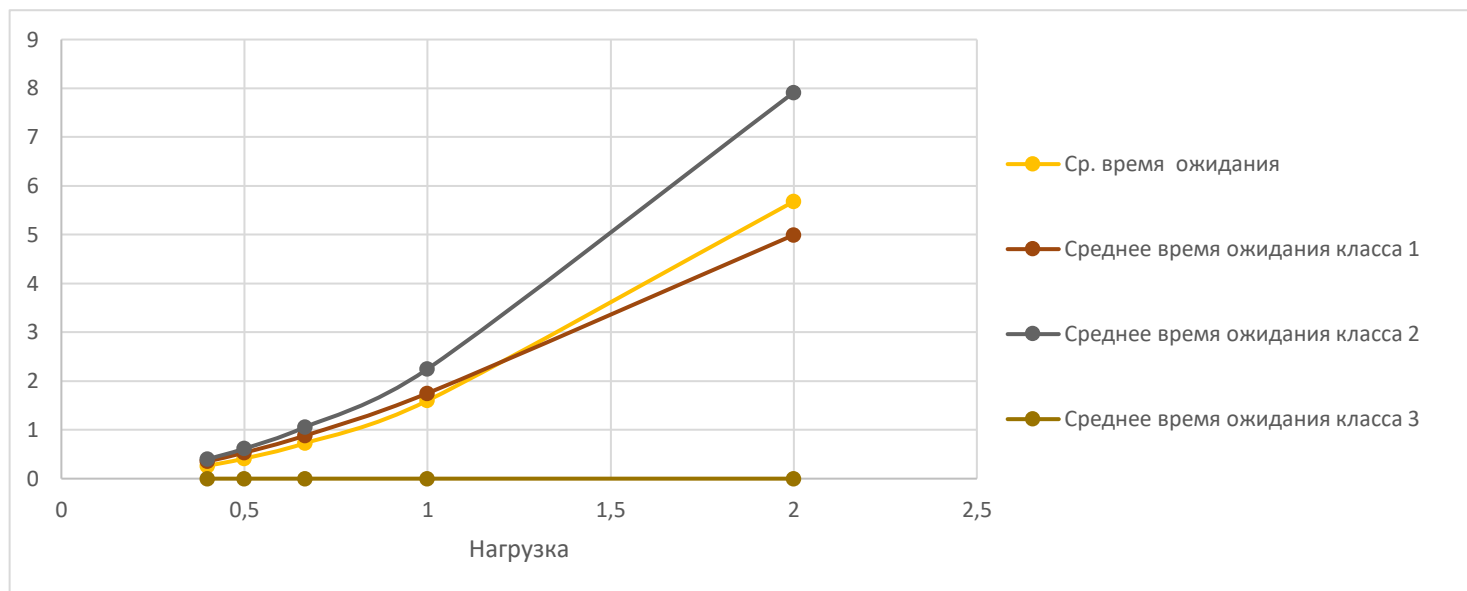
уменьшением приоритета, заявки класса 1 сохраняют линейный характер роста пропускной способности, в то время как классы 2 и 3 его теряют и постепенно пропускная способность начинает уменьшаться.

- Среднее время ожидания и среднее время пребывания зависят от нагрузки также линейно. Разница в значениях между ними составляет  $\rho/\lambda'$  и заметно, что она постепенно возрастает, кроме того, она будет увеличиваться при больших значениях нагрузки. Это обусловлено тем, что загрузка имеет предельное значение (1), а пропускная способность, как было показано в прошлом пункте, будет убывать после достижения некоего максимального значения, т.е.  $\rho/\lambda'$  становится больше. Для разных классов заявок характер зависимости практически такой же, однако рост данных характеристик для классов с высоким приоритетом происходит медленнее чем для классов с низким.

а.) При пропорциональном варьировании ср. длительности обслуживания заявок для каждого класса.







### Анализ:

- Загрузка системы от нагрузки зависит практически линейно (при малых значениях), однако при увеличении нагрузки темпы роста загрузки падают, и она всё медленнее стремится к 1 (своему предельному значению). При увеличении нагрузки разница во влиянии на суммарную загрузку от разных классов заявок становится всё больше: чем больше приоритет, тем больше загрузка от данного класса.
- Длина очереди линейно зависит от нагрузки. Причем, с увеличением нагрузки длина очереди высокоприоритетных заявок растёт медленнее чем у низкоприоритетных, т.к. у них приоритет на извлечение заявки из очереди (В среднем, они будут меньше там находиться, что видно на графике времени ожидания).
- Число заявок также линейно зависит от нагрузки, однако на графике видно, что при загрузке со значением 2, рост перестаёт быть линейным, что также применимо и к большим значениям нагрузки. Кроме того, из-за возрастающей разнице в

оказываемой загрузке, в системе (в среднем) начинает находиться всё больше высокоприоритетных заявок.

- Вероятность потери ведет себя линейно на заданных значениях нагрузки, при больших значениях нагрузки, характер зависимости перестанет быть линейным, т.к. есть предельное значение. Кроме того, чем выше приоритет, тем меньше вероятность потери заявки данного класса и темп её роста (Хорошо видно примере заявок 1-го и 2-го класса).
- Пропускная способность в свою очередь линейно убывает, стремясь к нулю. (Так как суммарная интенсивность потока заявок постоянна, а множитель  $(1 - \pi)$  стремится к нулю, поскольку вероятность потери стремится к 1 при увеличении длительности обслуживания, что подтверждает график). Ожидаемо, темпы убывания пропускной способности с ростом нагрузки меньше у заявок с более высоким приоритетом, т.к. медленнее возрастает вероятность потери.
- Среднее время ожидания и среднее время пребывания зависят от нагрузки нелинейно. При одинаковом приросте нагрузки, при малых её значениях обе характеристики испытают небольшой прирост, при больших же - значительный. В зависимости от класса, также меняются и темпы роста данных величин, чем больше приоритет, тем медленнее возрастает время ожидания, а следовательно, и время пребывания заявок данного класса.

### Выводы по работе:

Вычислив различные характеристики данной системы, а также проанализировав их зависимость от нагрузки, при пропорциональном изменении интенсивностей потоков заявок и времен ожидания, можно сделать следующие выводы:

- ДО ОП оказывает значительное влияние на характеристики системы, различия между их значениями для разных классов заявок становятся только заметнее с увеличением нагрузки.
- Лучше всего характеристики у класса с самым высоким приоритетом, соответственно, чем ниже приоритет класса, тем хуже будут зависимости его характеристик от параметров системы. В качестве примера можно привести зависимость вероятности потери от нагрузки. У первого класса заявок она практически линейная и даже при больших значениях нагрузки (2) составляет  $<0.4$ , у второго и третьего класса же при такой же нагрузке вероятности потери  $>0.5$  и  $>0.8$  соответственно.
- При увеличении нагрузки система всё меньше времени обрабатывает низкоприоритетные заявки (падает как их пропускная способность, так и в целом среднее число заявок данного класса в системе), практически всё время прибор занят заявками с более высоким приоритетом. Как следствие, влияние на суммарную загрузку от низкоприоритетных заявок уменьшается с ростом нагрузки.

В итоге, можно сказать, что ДО ОП влияет на характеристики системы следующим образом: улучшает их для более приоритетных классов ценой ухудшения для менее приоритетных. Расстановкой приоритетов между различными классами заявок, можно регулировать желаемые характеристики для данного класса. В данной системе самым приоритетным был выбран класс с наибольшей длительностью обработки и несмотря на то, что нагрузка оказываемая им и вторым классом одинакова (0.4), характеристики лучше у первого вследствие его высокого приоритета.