

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

**КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ
И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МОСКВА 2007

ББК 22.336

К 60

УДК 537.86

Рецензенты: А.В. Березин, А.С. Логгинов.

К 60 Колачева Н.М., Израилович М.Я., Соломатина Л.В.,
Колебания в механических и электрических системах / Государ-
ственное образовательное учреждение высшего профессиональ-
ного образования «Московский государственный институт ра-
диотехники, электроники и автоматики (технический универси-
тет)».- М., 2007.- 72 С.

ISBN

Пособие содержит основные положения теории колебаний. Теоретические сведения дополнены полезными для усвоения материала иллюстрациями и примерами, в которых анализируются колебательные процессы в различных физических системах. Теоретический материал, изложенный в пособии, изучается студентами вечернего и заочного отделений, для которых оно предназначено, на разных курсах университета: «Механические колебания» изучаются на первом курсе, а с «Электрическими колебаниями» студенты знакомятся на втором курсе. Данное пособие объединяет в себе теорию как механических, так и электромагнитных колебаний.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей вечернего и заочного отделений технических вузов.

Табл.: нет. Ил.: 29. Библиогр.: 7 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.

© Н.М. Колачева, М.Я. Израилович
Л.В. Соломатина, 2007

ВВЕДЕНИЕ

Среди процессов, как свободно протекающих в природе, так и используемых в технике, колебания занимают во многих отношениях выдающееся, часто первенствующее место. Не случайно, на символике МИРЭА изображены распространяющиеся от антенны радиоволны, что отражает специфику профиля подготовки университетом специалистов высокой квалификации в области проектирования и эксплуатации радиотехнических систем, электронно-акустических устройств и во многих других областях современных средств связи и коммуникации. А радиоволны, как и волны вообще, представляют собой колебательный процесс, распространяющийся в пространстве. Из вышесказанного следует особо важная роль колебательных процессов в физике – науке о природе, изучающей наиболее общие свойства материального мира и являющейся фундаментом современной техники, включая её авангардные направления, такие как: радиоэлектроника, квантовая электроника, космическая техника и т.д.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов всех специальностей, обучающихся на вечернем и заочном отделениях МИРЭА, поскольку студенты этих отделений по многим объективным причинам (уменьшенный объем часов аудиторных занятий по сравнению с дневным отделением, дефицит личного времени и т.д.) вынуждены овладевать знаниями в большей степени самостоятельно, нежели под непосредственным руководством преподавателей.

Необходимость в издании данного учебного пособия вызвана тем, что колебательные процессы в соответствии с учебной программой по физике излагаются в различных частях курса – как в I-ой части «Механика и молекулярная физика», так и во II –ой части «Электричество и магнетизм». При этом к моменту изучения колебаний в электрическом контуре студентам приходится тратить дополнительные усилия для возобновления ранее полученных знаний. Данное пособие связывает в единую систему общие закономерности, присущие как механическим, так и электрическим колебательным системам. Оно содержит также конкретные иллюстративные примеры, полезные для формирования представлений о физической сути рассматриваемых явлений.

1. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ, ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ И УРАВНЕНИЕ

Колебаниями называют процессы, точно или приблизительно повторяющиеся во времени. Например, это могут быть:

- изменение координаты шарика, подвешенного на нити и отклоненного от вертикали;
- изменение силы тока в электрической цепи;
- колебания температуры воздуха в течение дня: её повышение в середине дня и понижение ночью;
- пульсация крови в сосудах человека, вызванная работой сердца.

Физическое тело или совокупность тел, которые при выведении их из состояния устойчивого равновесия совершают колебания, называются **колебательной системой**. При колебаниях значения физических величин, характеризующих колебательную систему, повторяются через определенные промежутки времени. Наименьший промежуток времени, через который колебательная система возвращается в первоначальное состояние, называется **периодом колебаний** T . За период T система совершает одно полное колебание.

Колебания характеризуются также частотой ν и циклической частотой ω . **Частотой колебаний** ν называется величина обратная периоду и численно равная числу полных колебаний, совершаемых системой в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Единица частоты в СИ – герц (Гц).

Циклической или круговой частотой ω называется величина равная произведению 2π и частоты колебаний

$$\omega = 2\pi\nu$$

или

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Циклическая частота измеряется в рад/с.

Повторяющиеся изменения величины x при колебаниях

удовлетворяют условию:

$$x(t + nT) = x(t), \quad \text{где } n=0,1,2,\dots$$

То есть она является периодической функцией времени. Если изменения во времени колеблющейся величины происходят по закону синуса или косинуса, то такие колебания называются **гармоническими**. Они описываются уравнением типа:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.1)$$

Гармонические колебания это наиболее простой тип колебательного движения. Однако важность изучения их вызвана тем, что, во-первых, в природе существует много колебательных процессов, которые с большой точностью можно считать гармоническими и, во-вторых, - различные периодические процессы можно рассматривать как наложение нескольких гармонических колебаний.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса рассматривают колебания: механические, электромагнитные, электромеханические и т.д. Несмотря на различный физический характер, все колебательные процессы обнаруживают одни и те же физические закономерности, на которых остановимся подробнее.

В формуле (1.1) величина x называется смещением. **Смещение** – это координата колеблющейся точки, которую отсчитывают от положения равновесия. Стоящая в скобках величина

$$\omega t + \varphi$$

называется фазой колебаний.

Фаза колебаний – это аргумент, функцией которого является состояние колебательной системы в каждый момент времени. Фаза измеряется в угловых единицах – радианах (долях π). Значение фазы в момент $t = 0$ называется **начальной фазой** колебаний. Выбор начального момента совершенно произволен. Можно выбрать этот момент так, что начальная фаза будет равна нулю. Тогда уравнение гармонического колебания (1.1) примет вид:

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (1.2)$$

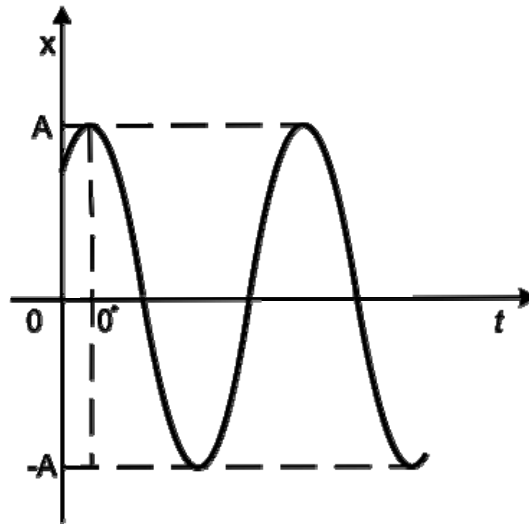


Рис 1.1

На рис. 1.1 приведен график зависимости x от t , соответствующий уравнению (1.1)

На графике отмечена точка O' - другое начало отсчета времени, в этом случае зависимость $x(t)$ соответствует уравнению (1.2). Поскольку функция косинус изменяется в пределах от -1 до $+1$, то смещение x может принимать значения $-A \leq x \leq A$. Максимальная величина смещения называется **амплитудой** $|x_{\max}| = A$.

Определим скорость и ускорение колеблющейся точки, считая, что её смещение меняется со временем по закону (1.2). Дифференцируя это выражение по времени, найдем **скорость** колеблющейся точки.

$$V = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t = A\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.3)$$

Дифференцируя (1.3) ещё раз по t , найдем **ускорение** точки.

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t = A\omega^2 \cos(\omega t + \pi) \quad (1.4)$$

В последних равенствах амплитудное значение скорости $V_0 = A\omega$, а амплитудное значение ускорения $a_0 = A\omega^2$. Как видно

из (1.3) и (1.4), скорость и ускорение колеблющейся точки меняются со временем также по гармоническому закону с той же самой угловой частотой ω и периодом T . Колебания скорости опережают колебания смещения по фазе на $\pi/2$. Колебания ускорения-колебания смещения по фазе на π (рис. 1.2).

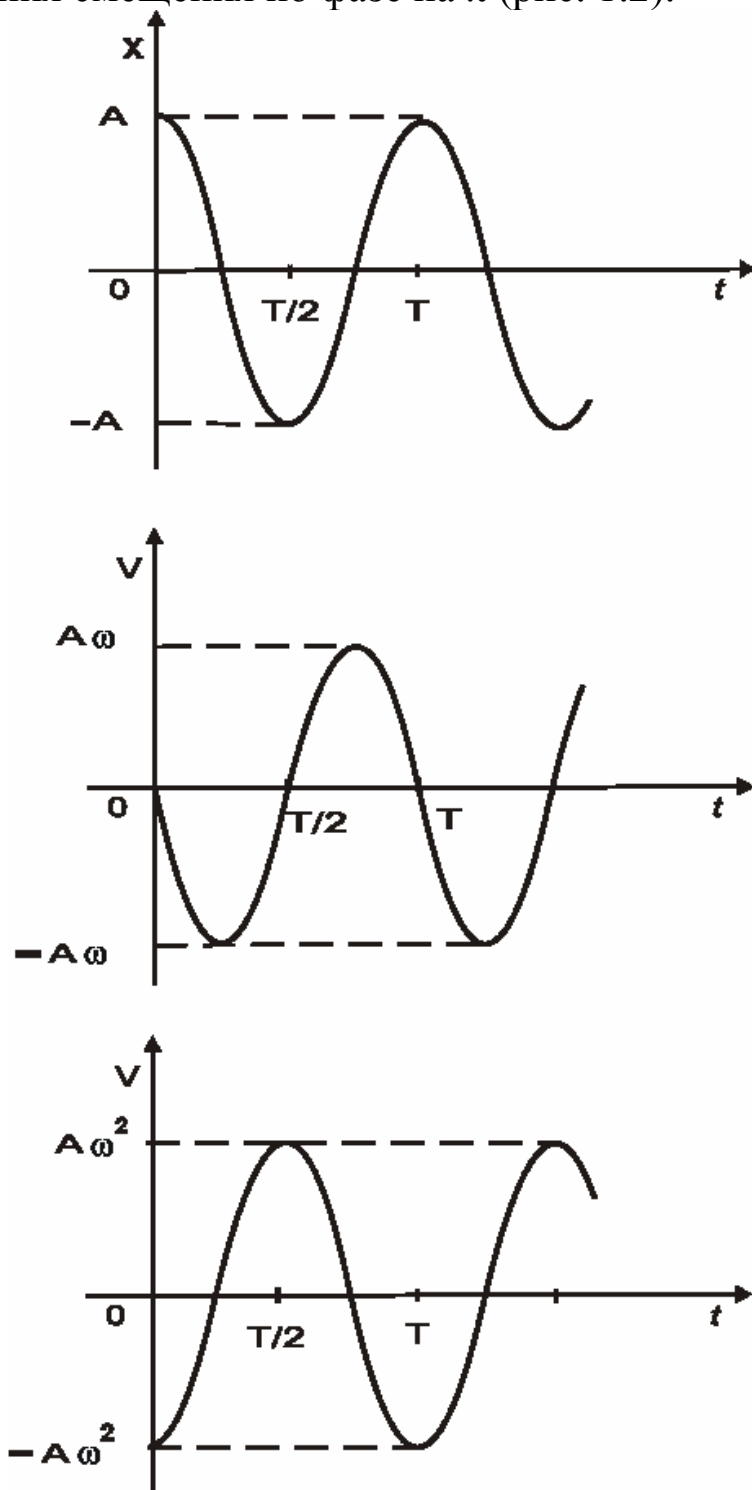


Рис. 1.2

Таким образом, когда смещение x максимально, ускорение точки тоже максимально, но имеет отрицательное значение. Следовательно, сдвиг по фазе, равный π , означает, что колебания величин x и a происходят в противофазе.

Перепишем уравнение (1.4) в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x$$

С точки зрения математики выражение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

или

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка.

Его часто записывают в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.5)$$

и называют **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**.

Решение этого уравнения имеет вид (1.2)

Следует иметь ввиду, что приведенные в этом параграфе сведения по кинематике колебаний полностью применимы к описанию колебаний любой природы.

2. МЕТОД ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ И КОМПЛЕКСНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Гармонические колебания представляют с помощью векторных диаграмм.

Из произвольной точки O на оси x под углом φ , равным начальной фазе, откладывается вектор \vec{A} , равный по модулю амплитуде колебаний (рис. 2.1).

В произвольный момент времени t вектор \vec{A} повернется от начального положения ($t=0$) на угол ωt и составит с осью x угол $\omega t + \varphi$ равный фазе колебаний в момент времени t .

Таким образом, если вращать вектор \vec{A} против часовой стрелки вокруг выбранного начала координат (точка 0) с постоянной угловой скоростью, равной циклической частоте ω , то проекция вектора \vec{A} будет перемещаться по оси x и принимать значения от $-A$ до $+A$, а в любой момент времени определяться по закону

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

то есть будет представлять собой изображаемое на векторной диаграмме гармоническое колебание.

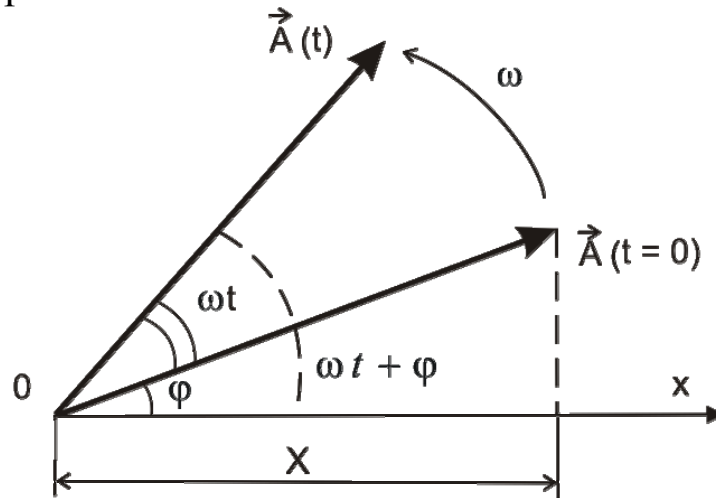


Рис 2.1

Представление гармонических колебаний при помощи векторных диаграмм, как увидим в дальнейшем, оказывается очень полезным при сложении колебаний, имеющих одинаковые частоты.

В физике часто применяется еще один метод, в котором колеблющуюся величину представляют комплексным числом.

Комплексное число – это число вида

$$z = x + iy,$$

где x и y – вещественные числа;

$i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Число x называется вещественной частью комплексного числа z .

Символически это записывается в виде

$$x = \operatorname{Re} z$$

Число y называется мнимой частью. Записывается

$$y = \operatorname{Im} z$$

Вещественному числу x соответствует точка на оси x . Комплексному числу z можно сопоставить точку на плоскости с координатами x, y (рис. 2.2)

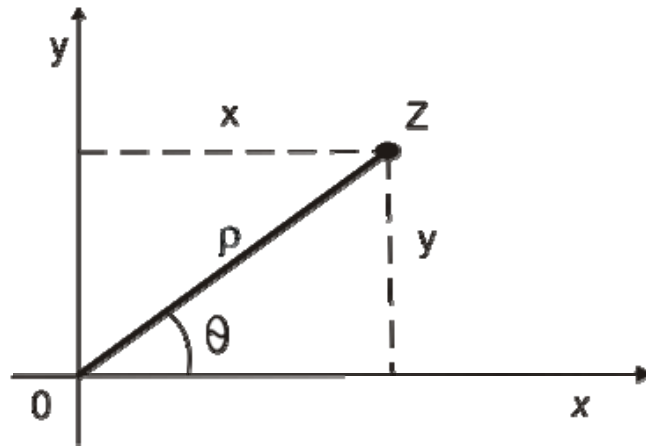


Рис 2.2

Введем полярные координаты ρ и θ и свяжем обе пары координат соотношениями

$$x = \rho \cos \theta;$$

$$y = \rho \sin \theta;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Используя теперь формулу Эйлера

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta ,$$

уравнение гармонических колебаний

$$x = A \cos (\omega t + \varphi)$$

можно представить в комплексной форме

$$x = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

то есть вещественная часть комплексного числа представляет собой гармоническое колебание.

Использование этого метода облегчает решение дифференциальных уравнений колебаний, которые имеют сложную форму, обусловленную учетом сил сопротивления среды и наличием внешней вынуждающей силы.

3. МЕХАНИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК

Рассмотрим динамику колебаний механических систем.

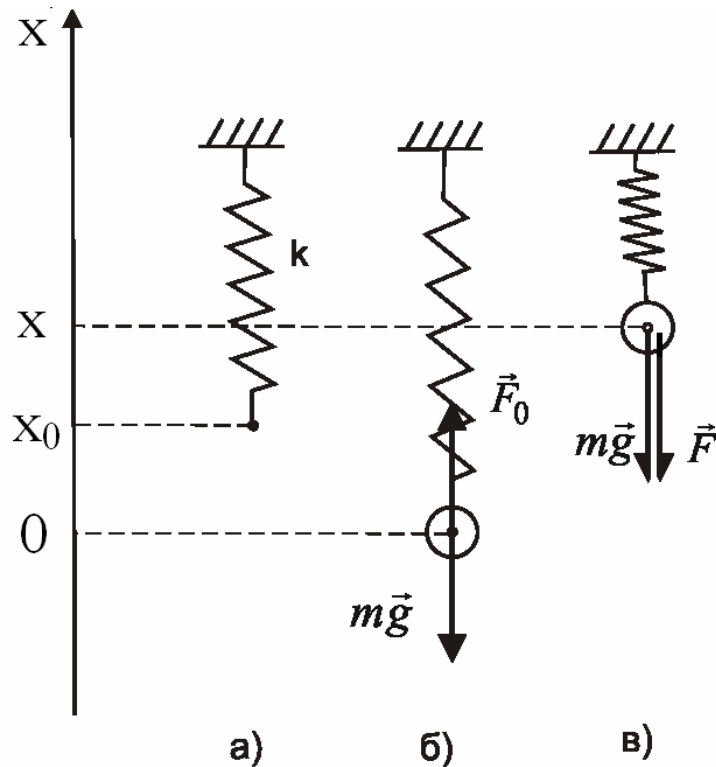


Рис. 3.1

Пусть имеем пружину с коэффициентом жесткости k (рис 3.1.а). Прикрепим к этой пружине груз массы m . Тогда пружина растянется на некоторую величину (рис 3.1.б). Ось x выберем вертикально вверх и примем за начало отсчета точку O , соответствующую состоянию равновесия пружины с грузом (рис 3.1.б). В этом положении (б) пружина растянута на величину x_0 по сравнению с недеформированным состоянием (а).

При равновесии на груз действуют упругая сила $F_0 = kx_0$ со стороны пружины и сила тяжести $m\vec{g}$, которые равны по модулю и противоположны по направлению. Следовательно,

$$mg = kx_0 \quad (3.1)$$

Если груз сместить от положения равновесия вверх или вниз и отпустить, то он начнет колебаться. Пусть в некоторый момент времени координата груза равна x . В этот момент (рис 3.1.в) на груз действуют упругая сила \vec{F} и сила тяжести $m\vec{g}$. Пружина при этом сжата на величину $x - x_0$. Сила \vec{F} направлена вниз и ее проекция на ось x равна $F_x = -k(x - x_0)$. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось x

$$ma_x = F_x + (mg)_x$$

Учитывая, что $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, получим

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - mg = -kx + kx_0 - mg.$$

Подставляя (3.1), будем иметь

$$m\ddot{x} = -kx \quad (3.2)$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.3)$$

Обозначив $\frac{k}{m} = \omega^2$, придем к уравнению (1.5). Следовательно, закон движения груза на пружине соответствует дифференциальному уравнению гармонических колебаний, для которых зависимость координаты от времени имеет вид

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4)$$

Циклическая частота при этом равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.5)$$

Она зависит от механических свойств колеблющейся системы: массы груза и коэффициента жесткости k пружины и не зависит от амплитуды колебаний и времени. Величина $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ называется **собственной частотой** колебательной системы.

Решение (3.4) содержит две постоянные амплитуду A и начальную фазу φ . Эти величины определяются из начальных условий. В качестве начального момента времени принимается момент $t=0$. Предполагается, что в этот момент известны значения координаты $x(0) = x_0$ и скорости $\dot{x}(0) = V_0$. Подставляя это в

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t + \varphi), \\ \dot{x} &= -A \omega \sin(\omega t + \varphi),\end{aligned}$$

получим

$$x(0) = x_0 = A \cos \varphi \quad (3.6)$$

$$\dot{x}(0) = V_0 = -A \omega \sin \varphi \quad (3.7)$$

Из (3.6) следует $\cos \varphi = \frac{x_0}{A}$. Из (3.7) можно получить

$\sin \varphi = -\frac{V_0}{A \omega}$. Подставляя последние равенства в основное триго-

нометрическое тождество $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, получим

$$\frac{V_0^2}{A^2 \omega^2} + \frac{x_0^2}{A^2} = 1$$

Откуда можно найти **амплитуду колебаний**

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}} \quad (3.8)$$

и начальную фазу

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{V_0}{x_0 \omega} \quad (3.9)$$

Эти колебания имеют период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.10)$$

Механическая система может совершать гармонические колебания не только под действием упругой силы, но также под

действием силы или суммы сил любого происхождения, для которых будет иметь место выражение вида (3.2), то есть,

$$F_x = -kx \quad (3.11)$$

Такая зависимость силы от смещения характерна для упругой силы. Поэтому силу, действующую на систему, совершающую колебания и **возвращающую** ее в положение устойчивого равновесия, называют **квазиупругой силой**. Приставка «квази» (quasi, лат.) означает «якобы». Квазиупругая сила пропорциональна смещению и направлена в сторону противоположную смещению к положению равновесия, об этом свидетельствует знак «минус» в формуле (3.11). Коэффициент k в этом случае будет называться **коэффициентом квазиупругой или возвращающей силы**.

В рассматриваемом примере колебания совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колеблющуюся систему. Такие колебания называются **свободными** (или **собственными**). Термин «свободные» означает, что в процессе колебаний на систему не действует какие – либо внешние силы.

Колебания (3.4) являются **незатухающими**, поскольку с течением времени их амплитуда A остается неизменной, весь процесс является периодическим повторяющимся и протекает сколь угодно долго. Такой результат является следствием идеализации реальной физической системы, заключающейся в том, что при составлении уравнения движения не учитываются силы сопротивления. Такие силы в реальных системах всегда присутствуют, что вызывает затухание колебаний с течением времени (разделы 7, 8). Подобная идеализация является целесообразной и оправданной, особенно при малых силах сопротивления, так как она позволяет определить собственную частоту колебательной системы (3.5), а, следовательно, и период колебаний (3.10).

В качестве иллюстрации рассмотрим пример.

Пример 1. Вертикальные колебания корабля.

Плавающий корабль погружается в воду до уровня, при ко-

тором по закону Архимеда сила тяжести корабля с грузом равна выталкивающей силе (рис. 3.2а). Если при возникновении волнений на море или в силу каких-либо других причин, корабль погрузится в воду глубже на величину x (рис 3.2.б), то подъемная сила будет увеличиваться, в результате корабль будет выталкиваться к поверхности за счет возникновения избыточной силы

$$F_x = -\rho g S x, \quad (3.12)$$

где ρ - плотность воды, g – ускорение свободного падения, S – площадь горизонтального сечения корабля на уровне воды. Произведение $S \cdot x$ определяет объем вытесненной воды.

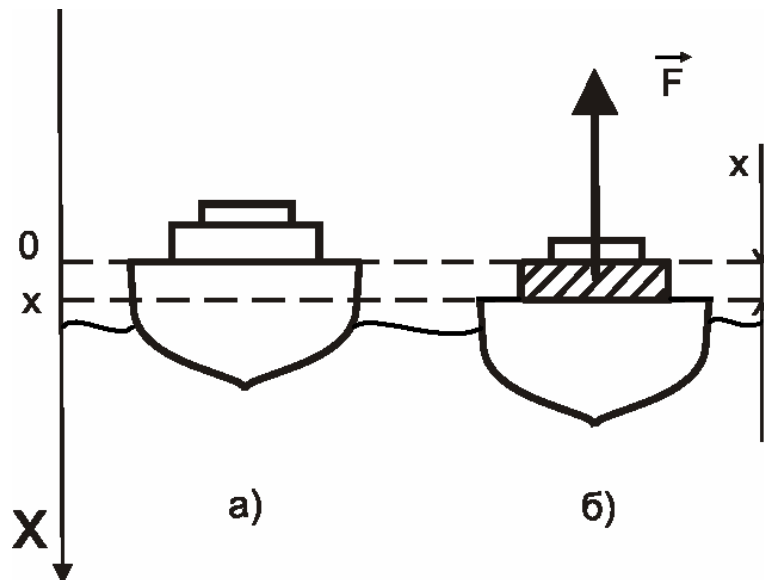


Рис 3.2

Используя второй закон Ньютона, запишем уравнение вертикальных колебаний корабля

$$m \ddot{x} = F_x = -\rho g S x$$

или

$$\ddot{x} + \frac{\rho g S}{m} x = 0 \quad (3.13)$$

Сопоставляя уравнения (3.13) и (3.3) видим, что в данном случае $k = \rho g S$. Подъемная сила F_x (3.12) является примером квазиупругой силы. Частота собственных вертикальных колебаний корабля в соответствии с (3.5) равна

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}},$$

где m – масса корабля с учетом груза. Период таких колебаний согласно (3.10) равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$$

Оценим эту величину для грузового судна водоизмещением $m = 10000$ тонн и площадью $S = 1000 \text{ м}^2$. Подставляя числовые значения, получим $T \approx 6 \text{ с}$.

4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР. ФИЗИЧЕСКИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ. ЭНЕРГИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Гармонический **осциллятор** (от *oscillare* (лат.) - колебаться) – это система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Примером гармонических осцилляторов являются пружинный, физический, математический маятники, колебательный контур (с малыми токами и напряжениями), колеблющаяся жидкость в коленах U-образной трубки, периодические смещения электронов относительно практически неподвижных ионов (рис. 4.1).

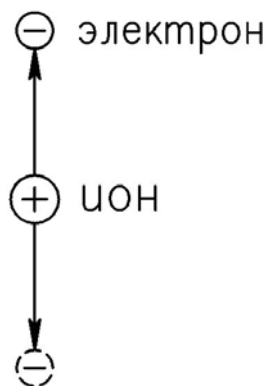


Рис 4.1

Колебания гармонического осциллятора являются важным

примером периодического движения и служат моделью для рассмотрения и решения многих задач как классической, так и квантовой физики.

Законы движения пружинного маятника рассмотрены в предыдущем разделе. Остановимся здесь на колебаниях физического и математического маятников.

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на невесомой нерастяжимой нити.

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. Предполагается, что вся масса сосредоточена в одной точке – центре масс (рис. 4.2).

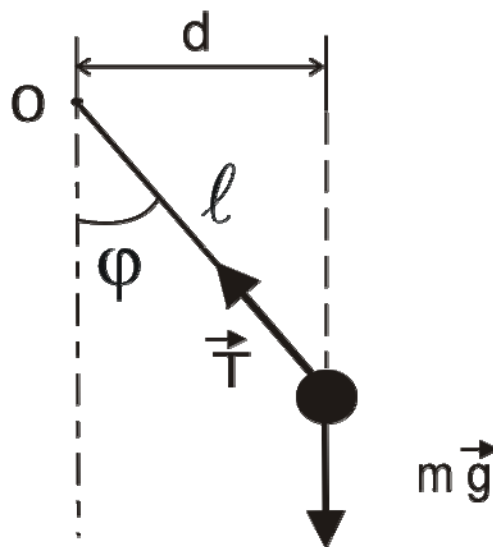


Рис 4.2

Если маятник отклонить от положения равновесия, то он будет совершать колебания. Такие колебания можно представить как вращение материальной точки вокруг неподвижной оси. В этом случае можно воспользоваться основным законом динамики вращательного движения

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \quad (4.1)$$

Момент силы натяжения нити равен нулю, так как линия действия силы натяжения проходит через ось вращения. Поэтому

вращательный момент создает только сила тяжести

$$M = -mgd \quad (4.2)$$

Знак «минус» поставлен потому, что при отклонении маятника против часовой стрелки ($\varphi > 0$), момент силы вызывает вращение по часовой стрелке ($M < 0$).

Из рис. 4.2 определим плечо силы тяжести

$$d = l \sin \varphi \quad (4.3)$$

Угловое ускорение ε есть вторая производная от угла поворота по времени

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} \quad (4.4)$$

Момент инерции маятника относительно точки O рассчитываем как для материальной точки

$$I = ml^2 \quad (4.5)$$

Подставив последние равенства в (4.1), получим

$$- mgl \sin \varphi = ml^2 \ddot{\varphi}$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (4.6)$$

В математическом отношении решение этого уравнения весьма затруднительно, так как второй член уравнения содержит синус от искомой функции. Простое решение можно найти лишь для случая малых колебаний, когда $\varphi \ll 1$ рад. (1 рад = $57,3^\circ$)

Условие малых колебаний можно записать так: $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ тогда (4.6) переписывается в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (4.7)$$

Получим линейное дифференциальное уравнение типа (1.5), где

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (4.8)$$

а период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.9)$$

Как видно из (4.9), период колебаний математического маятника зависит от длины l маятника и ускорения свободного падения g и не зависит от массы маятника и амплитуды колебаний.

Физический маятник – это твердое тело, совершающее колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через некоторую точку O , не совпадающую с центром масс C тела (рис. 4.3). Такое тело, как известно, будет находиться в положении устойчивого равновесия, когда центр масс (точка C) будет находиться на одной вертикальной линии с точкой подвеса (точка O) ниже нее ($\varphi=0$).

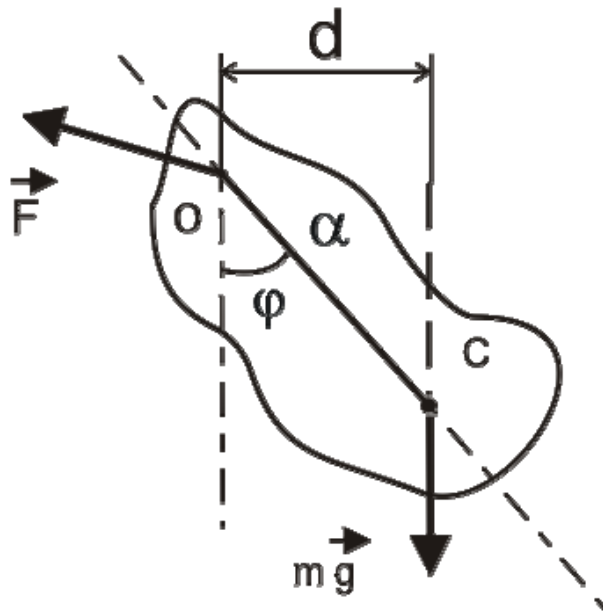


Рис 4.3

Внешними силами, действующими на маятник, являются сила тяжести $m\vec{g}$ и сила \vec{F} упругого происхождения, действующая на маятник со стороны оси. Величина и направление силы \vec{F} нам неизвестны. Однако момент этой силы равен нулю, т. к. плечо этой силы относительно оси вращения равно нулю (точка приложения этой силы и есть точка O). Из вышесказанного следует, что вращательный момент создает сила тяжести.

$$M = -mga \sin \varphi,$$

где a - расстояние между точкой подвеса и центром масс. Учитывая выкладки, сделанные для математического маятника, запишем основной закон динамики вращательного движения для малых колебаний физического маятника

$$-mga\varphi = I\ddot{\varphi}$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I} \varphi = 0, \quad (4.10)$$

где I - момент инерции физического маятника относительно оси вращения (точка O). Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний типа (1.5), решение которого имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

где φ_0 - амплитуда угловой координаты, α - начальная фаза колебаний.

Колебания происходят с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}$$

и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \quad (4.11)$$

Сравнительный анализ формул (4.9) и (4.11) приводит к заключению - периоды колебаний физического и математического маятников совпадают, если длина последнего равна

$$l = l_{np} = \frac{I}{ma} \quad (4.12)$$

Величина l_{np} называется приведенной длиной физического маятника. **Приведенная длина физического маятника равна**

длине такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

Пример 2.

Рассмотрим еще один пример определения собственной частоты свободных незатухающих колебаний конструкции, изображенной на рис. 4.4.

Система состоит из стержня, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O . На левом конце стержня укреплен груз массы m . В центре стержень подпирается пружиной жесткостью k . Масса стержня пренебрежимо мала. Длина стержня $2l$.

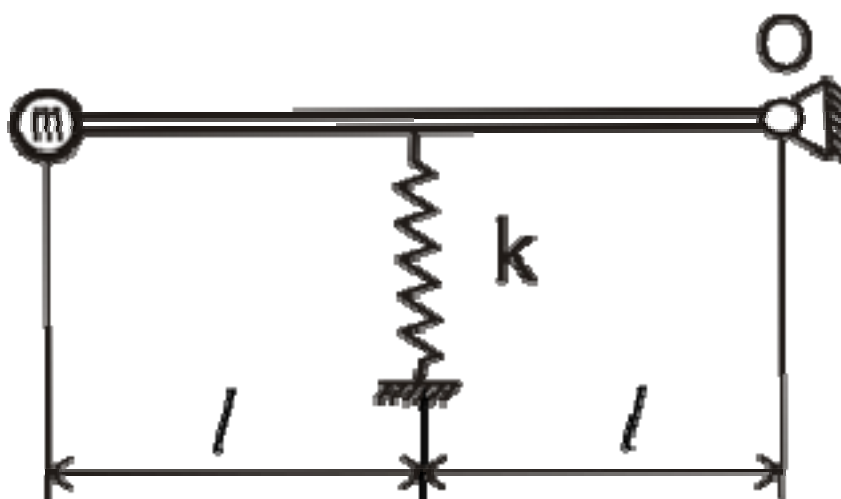


Рис 4.4

Рассмотрим сначала положение равновесия стержня с грузом (рис. 4.5).

В этом положении стержень отклонен от горизонтального положения, которое примем за начало отсчета ($\varphi = 0$). Центр стержня сместится при этом по вертикали на величину x_0 , а угол отклонения стержня составит φ_0 (для большей наглядности угол отклонения φ_0 стержня на рис. 4.5 значительно увеличен). Вертикальное сжатие пружины в этом случае составит

$$x_0 = l \sin \varphi_0$$

или с учетом того, что теория гармонических колебаний построена для малых углов, когда $\sin \varphi \approx \varphi$, получим

$$x_0 = l \varphi_0$$

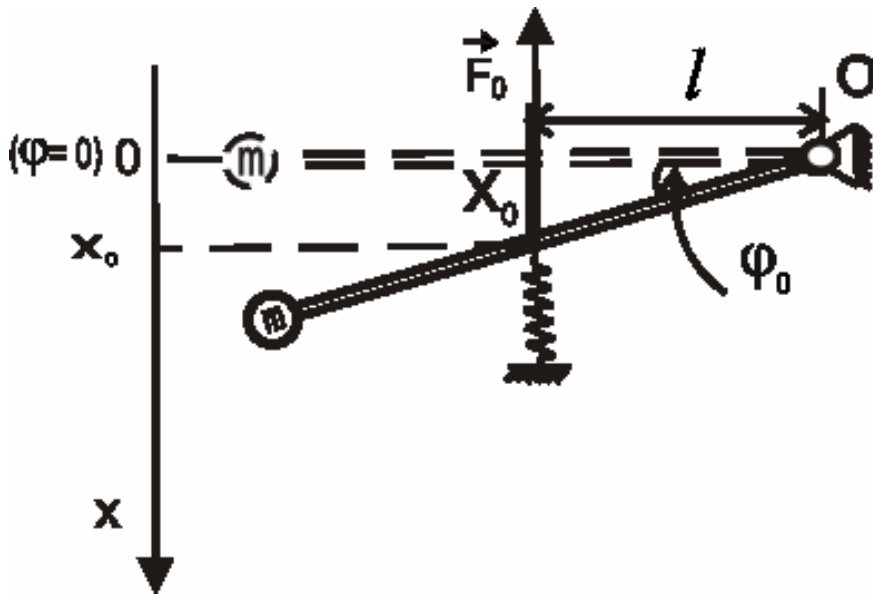


Рис 4.5

На стержень действуют две силы: сила тяжести груза mg и сила реакции пружины \vec{F}_0 . Упругая сила \vec{F}_0 в соответствии с законом Гука равна

$$F_0 = -kx_0 = -kl\varphi_0$$

В положении равновесия векторная сумма моментов сил, действующих на стержень равна нулю

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \quad (4.13)$$

Распишем подробнее сумму моментов сил относительно оси вращения (точка O). Сила тяжести создает момент $mg2l$, а момент силы F_0 равен $-kl\varphi_0 l$. Следовательно, суммарный момент сил, приложенных к оси вращения, равен

$$M = 2mgl - kl^2 \varphi_0 \quad (4.14)$$

Подставим это в (4.13). Получим

$$2mgl - kl^2 \varphi_0 = 0$$

отсюда определим угол φ_0

$$\varphi_0 = \frac{2mg}{kl} \quad (4.15)$$

Если отклонить стержень от положения равновесия на дополнительный угол φ , то возникнут колебания. Для получения уравнения колебаний воспользуемся основным законом динамики вращательного движения (4.1). При этом в качестве угловой координаты будем брать суммарный угол отклонения стержня от горизонтали ($\varphi_0 + \varphi$). Сумма моментов сил определяется аналогично равенству (4.14)

$$I(\ddot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}) = 2mgl - kl^2(\varphi_0 + \varphi) \quad , \quad (4.16)$$

где $I = m(2l)^2$ - момент инерции груза m . Так как $\varphi_0 = const$, то $\ddot{\varphi}_0 = 0$. С учетом этих фактов и равенства (4.15), уравнение (4.16) перепишется

$$4ml^2 \ddot{\varphi} = 2mgl - kl^2 \left(\frac{2mg}{kl} + \varphi \right)$$

Упростив его, получим

$$4m\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{4m} \varphi = 0 \quad (4.17)$$

Сопоставив уравнения (4.17) и (1.5), получим, что колебания стержня происходят с частотой

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

и имеют период

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Энергия колебательной системы

Собственные колебания происходят в замкнутой системе. Если пренебрегать силами трения, как мы это делали выше, то в случае собственных механических колебаний должен выполняться закон сохранения механической энергии.

Поскольку во всех приведенных выше примерах характер незатухающих гармонических колебаний аналогичен, они описываются одними и теми же уравнениями, то для установления энергетических закономерностей достаточно рассмотреть произвольный гармонический осциллятор. В качестве такового рассмотрим случай пружинного маятника (рис. 3.1), уравнение колебаний которого имеет вид

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Полная энергия механического движения является суммой кинетической и потенциальной энергий. **Кинетическая энергия осциллятора** - это энергия движущейся массы, которую с учетом начальной фазы φ , равенств (1.1) и (1.3) можно записать

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Принимая во внимание равенство (3.5), согласно которому $m\omega^2 = k$, получим

$$E_k = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (4.18)$$

Потенциальная энергия определяется работой внутренних консервативных сил при изменении взаимного расположения тел системы. При расчете энергии упругой (или квазиупругой) силы, которая является консервативной, условимся отсчитывать ее от положения равновесия. То есть, полагаем $E_n=0$ при $x=0$. Тогда **потенциальная энергия** в точке x будет равна работе силы, совершаемой при перемещении груза из положения равновесия в данную точку, взятую с обратным знаком.

$$E_n = -\int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (4.19)$$

Сложив (4.18) и (4.19), получим выражение для полной энергии

$$E = E_k + E_n = \frac{kA^2}{2} [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{kA^2}{2} \quad (4.20)$$

Сопоставляя между собой как аналитические зависимости смещения x , кинетической E_k и потенциальной E_n энергий от времени, так и их графическое отображение (рис. 4.6), видим, что в процессе колебаний кинетическая и потенциальная энергии непрерывно меняются.

Кинетическая энергия превращается в потенциальную и наоборот, однако **полная энергия** гармонических колебаний, как мы и предположили в начале параграфа, остается в процессе колебаний **постоянной величиной**, пропорциональной квадрату амплитуды смещения.

$$E = E_k + E_n = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \text{const}$$

В силу того, что

$$\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \varphi)]$$

$$\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \varphi)],$$

можно сделать вывод, что энергии E_k и E_n изменяются со временем с частотой 2ω , то есть с частотой, в два раза превышающей собственную частоту гармонических колебаний осциллятора (см. рис. 4.6).

Максимальные значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы и равны величине полной энергии колебаний.

$$E_{k,\max} = E_{n,\max} = E$$

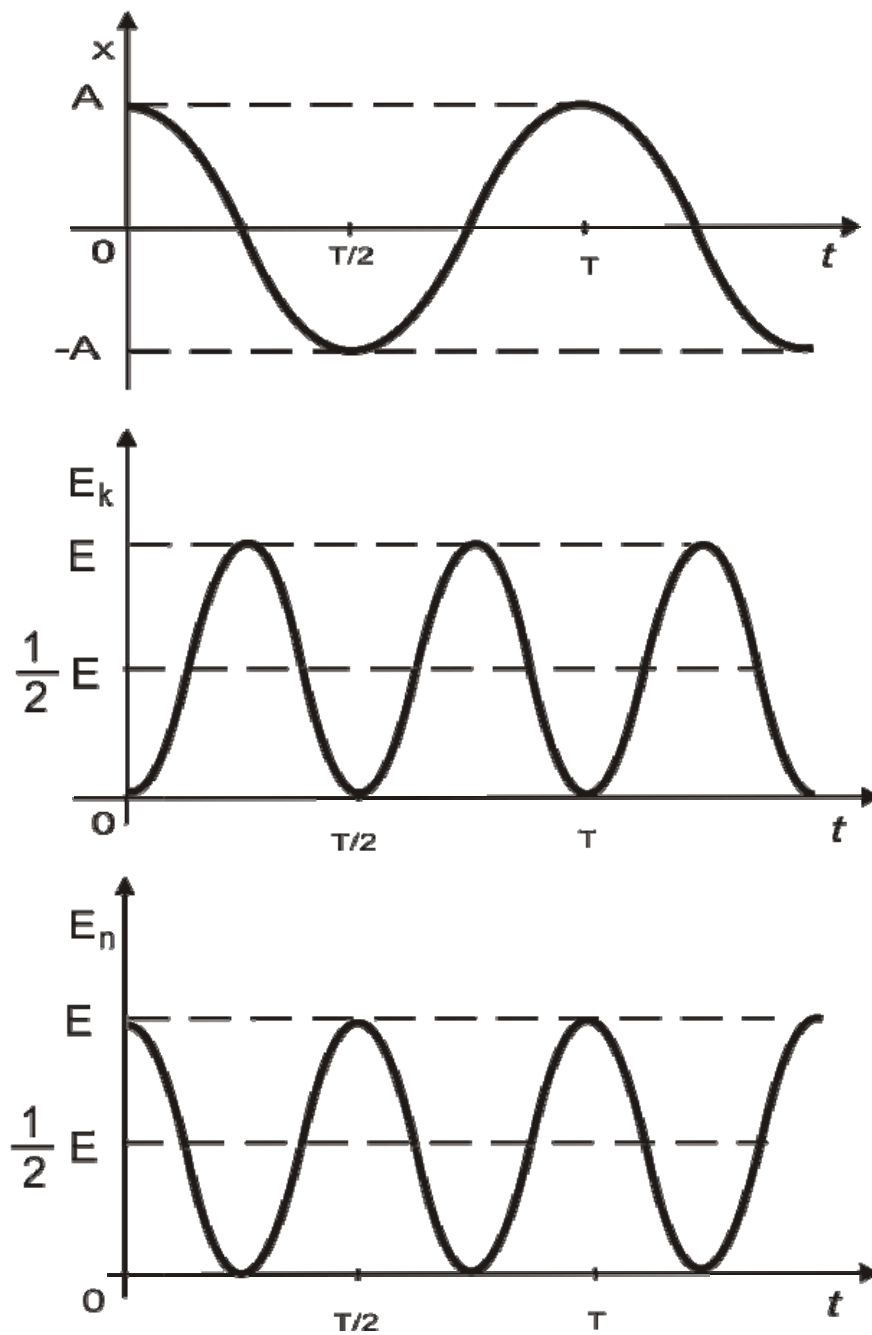


Рис 4.6

5. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Колебательные движения могут происходить не только в механических системах, рассмотренных выше, но и в устройствах, в которых периодические изменения физических величин

связаны с движением электрических зарядов. Системы такого рода возникшие в них электромагнитные колебания могут излучать в пространство в течение длительного времени в виде радиоволн, светового излучения, рентгеновских лучей и т.п. Поэтому они находят широкое применение в современной технике.

Простейшей моделью такой системы является **электрический колебательный контур**, состоящий из последовательно соединенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис. 5.1).

Активное сопротивление контура считаем пренебрежимо малым $R = 0$, т.к. рассматриваем случай свободных незатухающих колебаний.

Для того чтобы в контуре возбудить колебания, надо либо сообщить обкладкам конденсатора начальный заряд, либо возбудить в катушке ток (включить внешнее магнитное поле, пересекающее витки катушки).

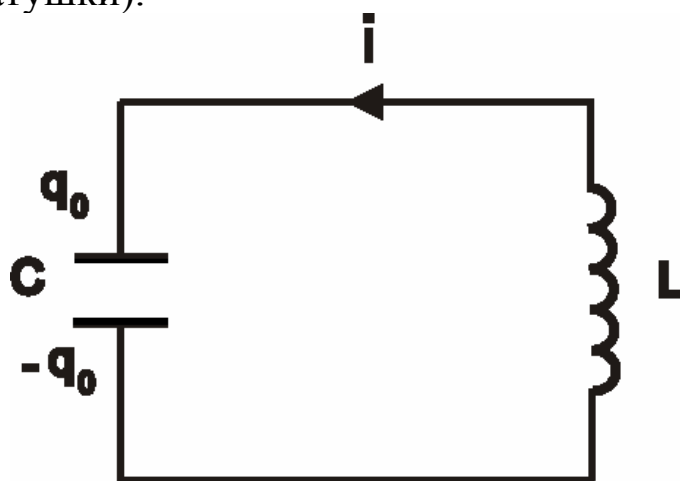


Рис. 5.1

Предположим, что система выведена из состояния равновесия путем заряда конденсатора, для чего предварительно отключенный от катушки конденсатор присоединяют к источнику напряжения. В результате на его обкладках возникнут разноименные заряды $\pm q_0$. Если теперь отключить источник и замкнуть конденсатор на индуктивность, то емкость начнет разряжаться и в контуре потечет ток $i(t)$

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \quad (5.1)$$

Положительным считают ток, заряжающий конденсатор (см. рис. 5.1).

Переменный ток $i(t)$, протекая в катушке, вызывает появление в ней ЭДС самоиндукции.

$$\mathcal{E}_{инд} = -L \frac{di}{dt} \quad (5.2)$$

Запишем закон Ома для замкнутой цепи, содержащей резистор сопротивлением R , конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L

$$iR + U_c = \mathcal{E}_{инд} \quad (5.3)$$

где iR - напряжение на активном сопротивлении, $U_c = \frac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе.

Учитывая, что в нашем случае $R = 0$, подставим все значения в (5.3). Получим:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} \quad (5.4)$$

Заметим, что

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dq}{dt} \right) = \frac{d^2 q}{dt^2} = \ddot{q}$$

С учетом этого (5.4) преобразуем следующим образом:

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

или

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (5.5)$$

Мы получили уравнение, которое по структуре знакомо нам из теории гармонических колебаний механических систем (см. уравнения (1.5) и (3.3)).

В данном случае собственная частота контура и период колебаний определяются формулами:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.6)$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (5.7)$$

Последнее выражение называется **формулой Томсона**.

Решением уравнения (5.5) является функция:

$$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.8)$$

где q_m - амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора.

Напряжение на конденсаторе можно получить, если выражение для q (5.8) разделить на постоянную величину, равную емкости конденсатора:

$$U(t) = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.9)$$

где $\frac{q_m}{C} = U_m$ - амплитудное значение напряжения.

Таким образом, разность потенциалов на обкладках конденсатора изменяется со временем по гармоническому закону с той же частотой ω .

Продифференцировав (5.8) по времени, получим выражение для силы тока:

$$i(t) = \dot{q} = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = i_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (5.10)$$

где $i_m = q_m \omega$ - амплитудное значение силы тока.

Видим, что ток в контуре также изменяется по гармоническому закону, но опережает по фазе напряжение на величину $\frac{\pi}{2}$.

Из формул (5.8), (5.9) и (5.10) следует, что в момент, когда ток в

контуре достигает максимального значения, заряд и напряжение на конденсаторе обращаются в нуль, и наоборот.

Амплитудное значение заряда q_m и начальная фаза φ определяются из начальных условий. При $t = 0$ заряд на обкладках равен q_0 , т.е. $q(0) = q_0$, а ток в контуре равен нулю $i(0) = \dot{q}(0) = 0$. Подставив это в зависимости (5.8) и (5.10), получим

$$\begin{aligned} q(0) &= q_m \cos \varphi = q_0 \\ i(0) &= -q_m \omega \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

Откуда получим, $\varphi = 0$ и $q_m = q_0$.

Из (5.9) и (5.10) с учетом (5.6) следует, что амплитудные значения тока и напряжения связаны соотношением:

$$U_m = i_m \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.11)$$

Возвращаясь к уравнению (5.5) и сопоставляя его с уравнением (3.3), находим, что индуктивность L играет в рассматриваемой электрической системе ту же роль, которую выполняет масса m колеблющейся точки в механической системе. Аналогично, величина $\frac{1}{C}$ влияет на процесс колебаний таким же образом как жесткость пружины k .

Определим баланс энергии колебательного контура. Для того, чтобы зарядить конденсатор, нужно совершить работу по разделению зарядов на его обкладках. Работа, затраченная на зарядку конденсатора, служит мерой потенциальной энергии взаимодействия разделенных зарядов, или мерой энергии электрического поля конденсатора:

$$W_{эл} = \frac{q^2}{2C}$$

(5.12)

При разрядке конденсатора возникает изменяющийся со временем электрический ток, который возбуждает в катушке пе-

ременное магнитное поле:

$$W_{\text{м}} = \frac{Li^2}{2} \quad (5.13)$$

Таким образом, энергия, запасенная в контуре в виде энергии электрического поля конденсатора, переходит в энергию магнитного поля катушки, последняя в свою очередь расходуется на перезарядку конденсатора, далее процесс повторяется. Т.е. в контуре возникают незатухающие колебания, которые сопровождаются периодическими изменениями заряда q на обкладках конденсатора (5.8), напряжения на нем (5.9), силы тока в контуре (5.10) и преобразованиями энергий электрического и магнитного полей

$$W_{\text{эл}} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t$$

$$W_{\text{м}} = \frac{Lq_0^2\omega^2}{2} \sin^2 \omega t$$

Последние выражения получены подстановкой функций (5.8) и (5.10) в равенства (5.12) и (5.13).

Определим полную энергию контура, учитывая, что в соответствии с (5.6) $\omega^2 = \frac{1}{LC}$:

$$W = W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} = \frac{q_0^2}{2C} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{q_0^2}{2C} = \text{const} \quad (5.14)$$

Итак, в идеальном колебательном контуре нет потерь энергии на нагревание ($R = 0$), поэтому в процессе колебаний энергия лишь перераспределяется между конденсатором и катушкой, сохраняя свое постоянное значение, как и в случае механических систем. Выше мы уже сопоставляли разные характеристики гармонических колебаний электрических и механических систем. В добавление к этому отметим, что энергия электрического поля

конденсатора аналогична потенциальной энергии маятника, а энергия магнитного поля катушки – кинетической энергии механического осциллятора. Сила тока в контуре играет такую же роль как скорость движения маятника.

Выкладки, сделанные выше, основывались на законе Ома, который, как мы знаем, установлен для постоянного тока, в то время как ток в контуре меняется со временем. Противоречие устранимо, если ток, текущий в контуре, удовлетворяет условию квазистационарности. А именно, если за время τ , необходимое для передачи электромагнитного возмущения (скачка ЭДС, напряжения, тока) в самую дальнюю точку цепи, сила тока изменяется незначительно, то ток называется **квазистационарным**. Критерий квазистационарности можно записать так

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T, \quad ,$$

где l - длина цепи, c - скорость распространения электромагнитного возмущения, равная скорости света, T - период изменений переменных электрических величин.

Токи промышленной частоты ($\nu = 50 \text{ Гц}$) удовлетворяют условию квазистационарности для электрических цепей длиной до 100 км.

Пример 3. Колебания электронов в плазме, называемые ленгмюровскими колебаниями, обусловленные силами электрического поля. Последние возникают в электронейтральной плазме в силу какого-либо случайного отклонения пространственного распределения электронов от равновесного распределения. Рассмотрим слой полностью ионизированной плазмы, состоящей из электронов и положительных ионов, толщиной d (рис. 5.2).

Допустим, что отрицательные заряды смещаются на малое расстояние x . Вследствие этого в левой части слоя появится избыточный положительный заряд, а в правой части – отрицательный заряд. В результате перераспределения зарядов в слое возникнет электрическое поле, напряженность которого \vec{E} направлена вдоль оси x , а ее проекция на эту ось в соответствии с тео-

ремой Остроградского- Гаусса равна

$$E_x = \frac{1}{\varepsilon_0} nex ,$$

где ε_0 - электрическая постоянная, e - абсолютная величина заряда электрона, n - концентрация электронов в плазме.

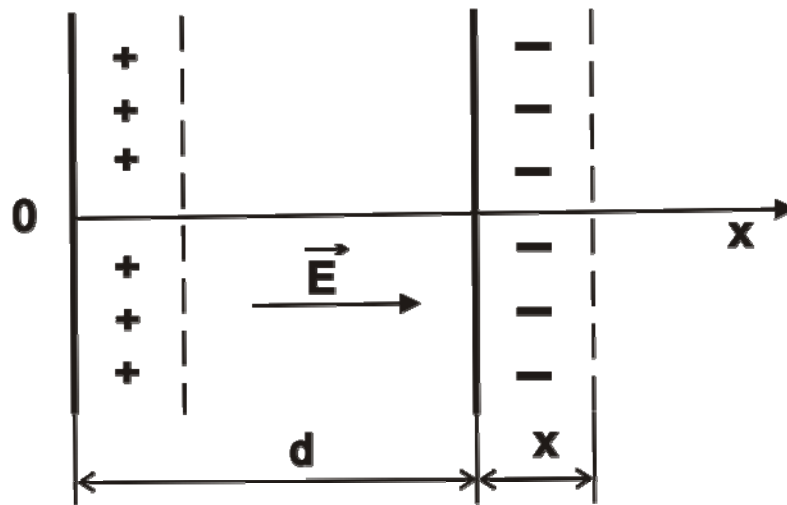


Рис. 5.2

Как известно из электростатики, на заряды в электрическом поле действует сила:

$$F_x = -eE_x = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0} x \quad (5.15)$$

Знак минус показывает, что сила, действующая электроны, противоположна вектору \vec{E} . Возникшая сила по форме записи и по своей природе является квазиупругой (см.3.11). Она стремится вернуть электроны в положение равновесия, в результате чего в плазме возникнут колебания. Учтем, что по второму закону Ньютона

$$F_x = m\ddot{x} ,$$

где m - масса электрона. Сопоставляя последнее равенство с (5.15), получим следующее дифференциальное уравнение движения электрона вдоль оси x

$$m\ddot{x} + \frac{ne^2}{\varepsilon_0}x = 0$$

или

$$\ddot{x} + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}x = 0 \quad (5.16)$$

Сравнение уравнения (5.16) с уравнением (1.5) показывает, что электроны будут совершать свободные гармонические колебания вдоль оси x с частотой:

$$\omega = e \sqrt{\frac{n}{\varepsilon_0 m}}$$

Эта частота называется плазменной или ленгмюровской.

6. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

При изучении колебаний важную роль играет возможность рассматривать их как результат сложения нескольких более простых колебаний. В качестве примера рассмотрим тележку, которая движется периодически то вправо, то влево, т.е. совершает колебания в горизонтальном направлении. На ней укреплены: шарик, который колеблется в той же плоскости что и тележка, и груз на пружине, который качается в вертикальном направлении (рис. 6.1).

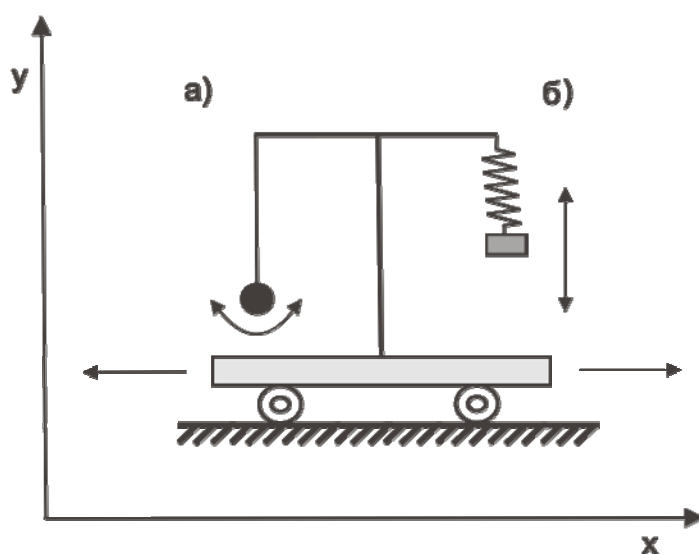


Рис. 6.1

Чтобы найти результирующее колебание шарика и грузика, надо сложить колебания каждого тела с колебаниями тележки.

Еще пример: узел электрической цепи – два проводника, по которым текут переменные токи i_1 и i_2 , соединяются с третьим проводником (рис. 6.2).

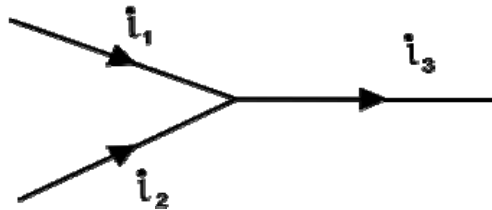


Рис. 6.2

В любой момент времени ток i_3 в третьем проводнике будет являться суммой двух периодически изменяющихся величин i_1 и i_2 .

6.1 Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты

В рассматриваемом примере (рис. 6.1. а) колебания шарика и тележки происходят вдоль одной и той же прямой. В этом случае сложение их смещений сводится к сложению проекций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на ось x .

Сложим два колебания:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Колебания имеют одинаковое направление вдоль оси x , одинаковую частоту ω , но разные амплитуды A_1 и A_2 и разные начальные фазы φ_1 и φ_2 . Воспользуемся методом векторных диаграмм (см. раздел 2).

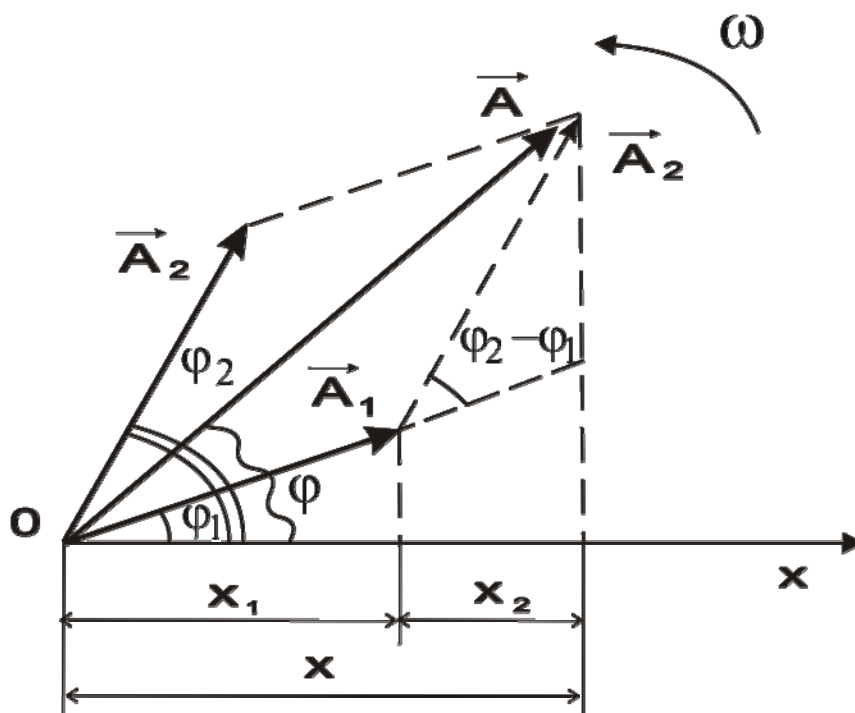


Рис 6.3

Изобразим на векторной диаграмме (рис. 6.3) векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 , соответствующие амплитудам этих колебаний в начальный момент времени, когда их фазы равны φ_1 и φ_2 соответственно. Построим по правилу сложения векторов результирующий вектор \vec{A} . Легко видеть, что проекция вектора \vec{A} на ось x равна сумме проекций слагаемых

$$x = x_1 + x_2 \quad (6.2)$$

Так как векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω , то и вектор \vec{A} вращается с той же скоростью ω . Следовательно, результирующее движение x будет гармоническим колебанием с частотой ω , амплитудой A и начальной фазой φ

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.3)$$

Амплитуда результирующего колебания может быть найдена с помощью теоремы косинусов

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (6.4)$$

где $(\varphi_2 - \varphi_1)$ - угол между векторами \vec{A}_1 и \vec{A}_2

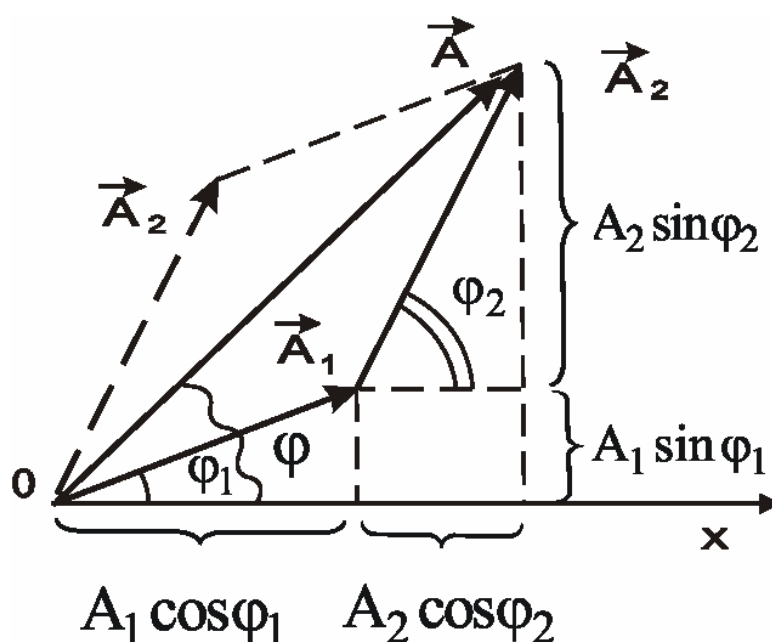


Рис 6.4

Начальная фаза суммарного колебания может быть найдена с помощью вспомогательного рисунка (рис. 6.4). Отложим от конца вектора \vec{A}_1 вектор \vec{A}_2 . По правилу треугольника замыкающий вектор \vec{A} является суммой этих векторов. Используя рис. 6.4, на котором отражены связи между векторами с помощью тригонометрических функций, можно получить выражение для **начальной фазы результирующего колебания**

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (6.5)$$

Итак, мы установили, что амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ складываемых колебаний. Проанализируем эту зависимость:

1. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi n$ (где n - целое число, включая нуль), следовательно, колебания происходят в одинаковой фазе. В этом случае $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, тогда $A = A_1 + A_2$, то есть, амплитуды коле-

баний складываются.

2. $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), колебания происходят в противоположных фазах. В этом случае $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, тогда $A = |A_1 - A_2|$. Это значит, что амплитуда суммарного колебания меньше каждой из амплитуд складываемых колебаний, а при $A_1 = A_2$ она вообще обращается в нуль.

6.2 Сложение колебаний одного направления и разной частоты. Биения

В радиотехнике, акустике используются приборы, основанные на сложении двух колебаний одного направления с близкими частотами. Результирующее движение будет представлять собой гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой.

Возьмем два колебания

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos \omega t \\ x_2 &= A \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{aligned} \quad (6.6)$$

Для простоты вычислений будем считать, что амплитуда A у них одинакова, начальные фазы равны нулю, частоты колебаний ω и $\omega + \Delta\omega$ мало отличаются друг от друга ($\Delta\omega \ll \omega$). Как и в предыдущем случае, колебания направлены вдоль одной прямой, поэтому результирующее колебание определяется как сумма

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \omega t \quad (6.7)$$

Здесь мы применили формулу для суммы косинусов и во втором сомножителе, точное выражение которого имело бы вид $\cos\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t$ пренебрегли членом $\frac{\Delta\omega}{2}$ в силу малости по сравнению с ω . Величину множителя, взятого по модулю,

$$A(t) = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \quad (6.8)$$

можно принять за амплитуду колебаний, которая медленно меняется с течением времени, так как $\Delta\omega \ll \omega$. С учетом (6.8), равенство (6.7) переписывается

$$x = A(t) \cos \omega t \quad (6.9)$$

Последняя формула имеет вид формулы гармонических колебаний. Однако, такое результирующее колебание только приблизительно является гармоническим, так как в случае гармонических колебаний амплитуда постоянна в течение любого промежутка времени. График функции (6.9) представлен на рис.6.5.

Сплошная линия соответствует графику зависимости смещения от времени, огибающая графика $x(t)$ показывает зависимость (6.8) амплитуды от времени.

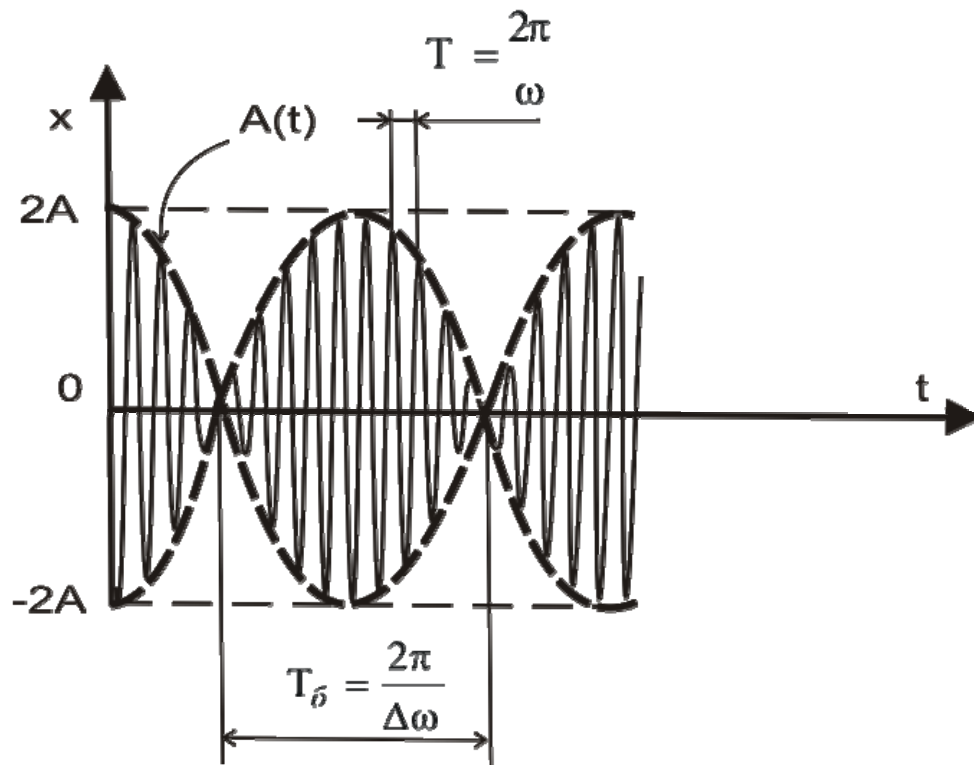


Рис. 6.5

Как видно из рисунка, амплитуда результирующего колебания периодически достигает то максимума, равного сумме амплитуд складываемых колебаний, то минимума, равного разности этих амплитуд.

Периодические изменения амплитуды результирующего колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**.

Частота биений равна разности частот складываемых колебаний $\Delta\omega$. Период биений

$$T_{\text{б}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

6.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

Рассмотрим теперь тип колебательного движения, которое проиллюстрировано на рис. 6.1, б. Пусть два гармонических колебания одинаковой частоты ω происходят во взаимно перпендикулярных направлениях: одно вдоль оси x , другое вдоль оси y . Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t, \\ y &= B \cos (\omega t + \alpha), \end{aligned} \tag{6.10}$$

где $\alpha = (\varphi_2 - \varphi_1)$ - разность фаз обоих колебаний.

Записанные уравнения представляют собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, которую описывает тело, участвующее одновременно в обоих колебаниях.

Чтобы получить обычное уравнение траектории, то есть зависимость $y = f(x)$, нужно исключить из соотношений (6.10) параметр t . Из первого уравнения получим:

$$\cos \omega t = \frac{x}{A} \tag{6.11}$$

из второго уравнения следует

$$\cos (\omega t + \alpha) = \frac{y}{B} \tag{6.12}$$

Воспользуемся тригонометрическими соотношениями

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \omega t &= \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\end{aligned}\quad (6.13)$$

Тогда

$$\frac{y}{B} = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha \quad (6.14)$$

Произведя подстановки равенств (6.11) и (6.13) в уравнение (6.14), получим:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad (6.15)$$

После математических преобразований можно получить

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha \quad (6.16)$$

Последнее уравнение есть уравнение эллипса. Центр этого эллипса совпадает с началом координат, а оси несколько повернуты относительно осей x и y (рис. 6.6 а). Величины полуосей эллипса и их ориентация относительно координатных осей зависят от амплитуд складываемых колебаний A и B и разности фаз α .

Рассмотрим некоторые характерные случаи:

1. Разность фаз складываемых колебаний равна нулю. Положив в уравнении (6.16) $\alpha = 0$, получим

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0$$

или

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0$$

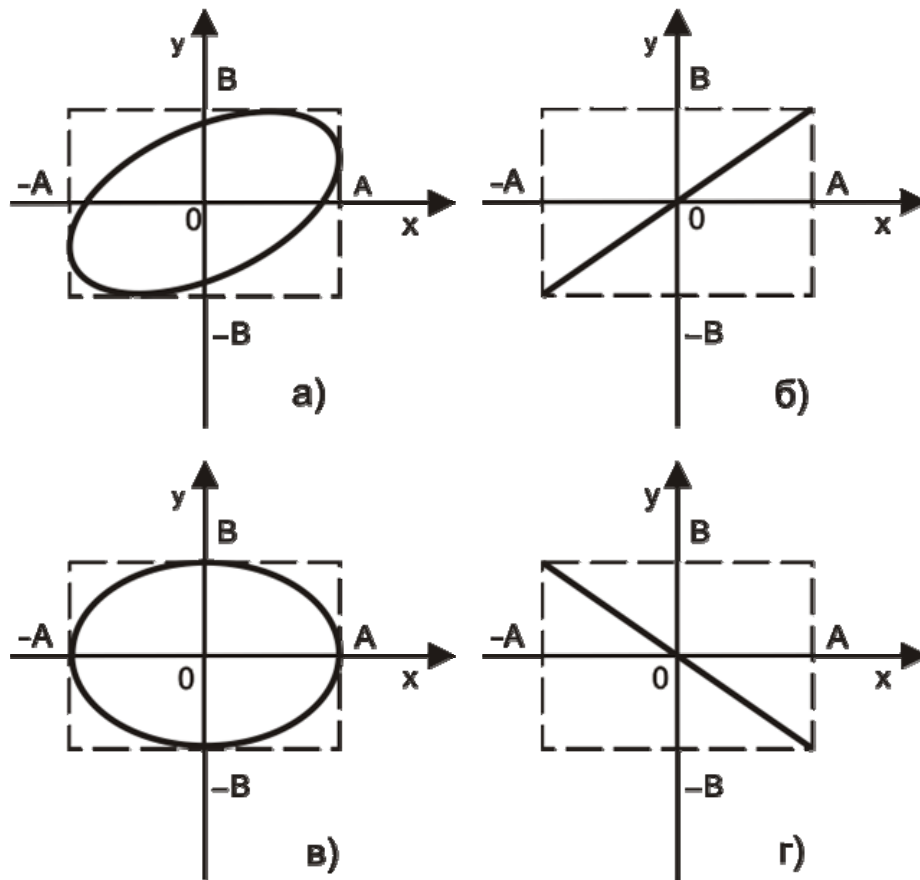


Рис. 6.6

Отсюда

$$y = \frac{B}{A}x \quad (6.17)$$

Это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат и образующей с осью x угол

$$\varphi = \arctg \frac{B}{A}$$

Результирующее движение (рис. 6.6, б) представляет собой гармоническое колебание вдоль этой прямой с той же частотой ω , что и складываемые колебания, и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$.

2. Разность фаз складываемых колебаний равна $\frac{\pi}{2}$ (или $-\frac{\pi}{2}$). Подставив в уравнение (6.16) $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, получим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (6.18)$$

Это уравнение эллипса, оси симметрии которого совпадают с осями координат, а полуоси равны амплитудам A и B (рис. 6.6, в). Случаи $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ и $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ отличаются направлениями движения по эллипсу. В первом случае движение происходит по часовой стрелке, во втором - против часовой стрелки. При равенстве амплитуд A и B эллипс превращается в окружность.

3. Разность фаз складываемых колебаний равна π . Подставив в уравнение (6.16) $\alpha = \pi$, получим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0$$

или

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)^2 = 0$$

Откуда

$$y = -\frac{B}{A}x \quad (6.19)$$

Это уравнение прямой, расположенной так, как показано на рис 6.6, г.

Если частоты складываемых колебаний различны, замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложная. Траектории, описываемые точкой, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, называются **фигурами Лиссажу**. Форма их зависит от отношения частот, разности начальных фаз и от амплитуд обоих колебаний. Зависимость траектории результирующего колебания от разности фаз видна из рис. 6.6. Проведенный выше анализ показал, что фигура Лиссажу в простейшем случае равенства частот $\omega_1 = \omega_2$ обоих колебаний представляет собой эллипс (рис. 6.6, а), который при разности фаз 0 или π вырождается в отрезки прямых (рис.

6.6, б, г), а при равенстве амплитуд ($A = B$) превращается в окружность.

Проследить зависимость фигур Лиссажу от соотношения между частотами колебаний можно по рис. 6.7. Для этих рисунков разность фаз постоянна и равна $\frac{\pi}{4}$.

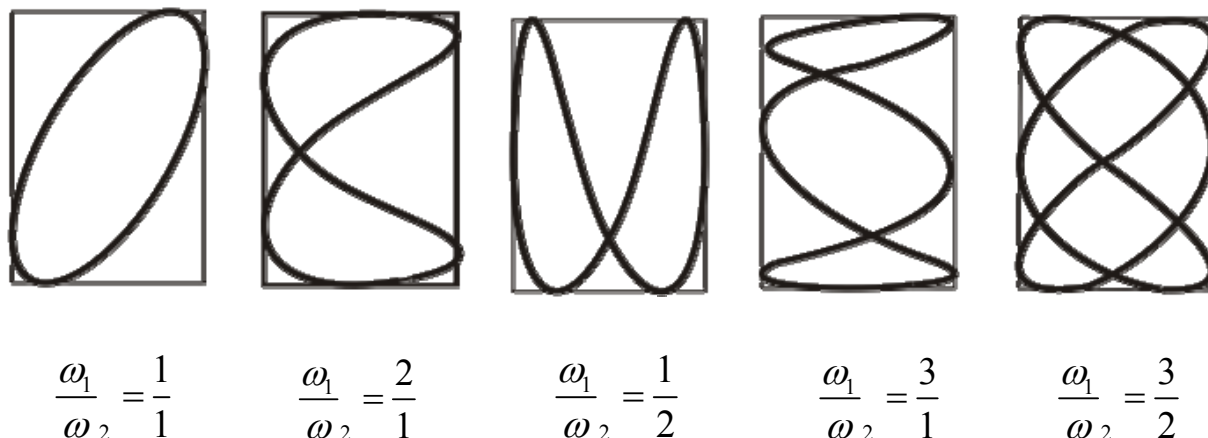


Рис.6.7

Размер прямоугольников, в которые вписаны фигуры, определяется амплитудами колебаний, его стороны равны $2A$ и $2B$. По числу касаний, которое имеет кривая со сторонами прямоугольника, можно судить об отношении частот. Если вертикальной стороны прямоугольника кривая касается три раза, а горизонтальной – два, то за время, пока произошло три колебания $x(t)$ (в горизонтальном направлении), величина $y(t)$ совершила два колебания (в вертикальном направлении), то есть, частоты колебаний ω_1 и ω_2 относятся как 3:2. Ту же информацию можно получить из отношений числа пересечений фигуры Лиссажу произвольной вертикальной линией к числу пересечений горизонтальной линией (линии проводятся внутри фигуры Лиссажу).

Анализ фигур Лиссажу – широко используемый метод исследования складываемых колебаний. По их виду можно определить: неизвестную частоту по известной, соотношение частот, фазовый сдвиг (разность фаз) колебаний.

Любой как угодно сложный периодический процесс $x(t)$ с периодом T может быть представлен в виде суммы гармониче-

ских колебаний с частотами, кратными величине $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а имен-

но

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Такое представление периодических процессов называется разложением в **ряд Фурье**. Член, содержащий ω , называется 1-й гармоникой (в акустике - основным тоном), член, содержащий 2ω - 2-й гармоникой (1-м обертоном) и т. д. Обычно амплитуды довольно быстро убывают с возрастанием номера гармоники (хотя не всегда монотонно). Поэтому на практике ограничиваются лишь небольшим числом первых членов ряда Фурье.

7. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

При действии на колебательную систему только упругой (или квазиупругой) силы, она будет совершать незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой. Но, как известно из опыта, колебания любой реальной системы в конце концов прекращаются, как говорят, затухают. Это происходит потому, что в природе всегда имеются силы трения (или сопротивления), благодаря которым энергия системы переходит в другие формы, например, в тепловую энергию, и рассеивается в окружающее пространство.

Колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии со временем уменьшается, называются **затухающими**. При небольшом затухании, когда силы сопротивления меньше квазиупругих сил, затухающие колебания можно рассматривать как почти гармонические с убывающей амплитудой.

Рассмотрим влияние силы трения на механическую колебательную систему. При малых скоростях движения тела сила трения обычно пропорциональна скорости и направлена противоположно ей

$$\vec{F}_{mp} = -r\vec{V}$$

или

$$F_{mp} = -r\dot{x} \quad , \quad (7.1)$$

где r - коэффициент трения, зависящий от свойств среды.

Дополним учетом силы трения рассмотренный выше пример колебаний пружинного маятника (раздел 3). Полная сила, действующая в этом случае на маятник, определяется как сумма упругой возвращающей силы и силы трения. С учетом этого уравнение (3.2) преобразуется так

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad (7.2)$$

или

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

Последнее соотношение перепишем в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad , \quad (7.3)$$

где

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad (7.4)$$

Величина, характеризующая действие силы трения, называется **коэффициентом затухания** и имеет размерность частоты колебаний $[\beta] = [\omega] = \frac{рад}{с}$;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - собственная частота, которую имел бы груз в от-

сутствии силы трения (т. е. при $\beta = 0$). Выражение (7.3) называется **дифференциальным уравнением затухающих колебаний**.

Решение уравнения (7.3), то есть нахождение функции $x(t)$, удовлетворяющей уравнению в любой момент времени и являющейся законом движения груза, довольно громоздко. Запишем сразу готовое решение в случае малых затуханий

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad (7.5)$$

где величину

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad (7.6)$$

можно рассматривать как **амплитуду затухающих колебаний**, которая уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону. A_0 – начальная амплитуда.

Величину

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (7.7)$$

можно принять за **частоту затухающих колебаний**.

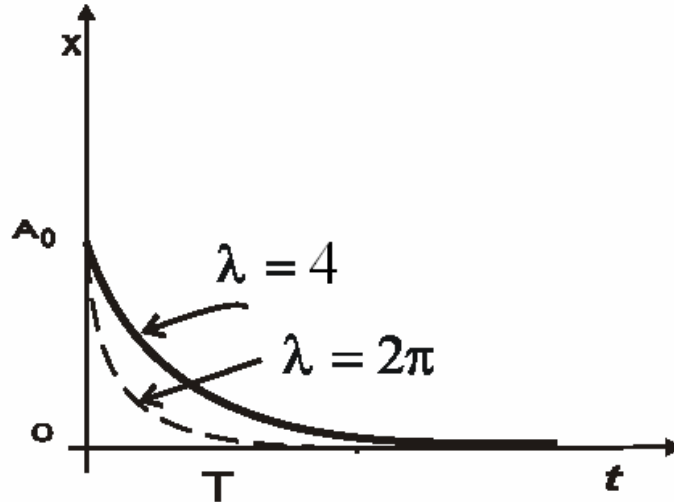
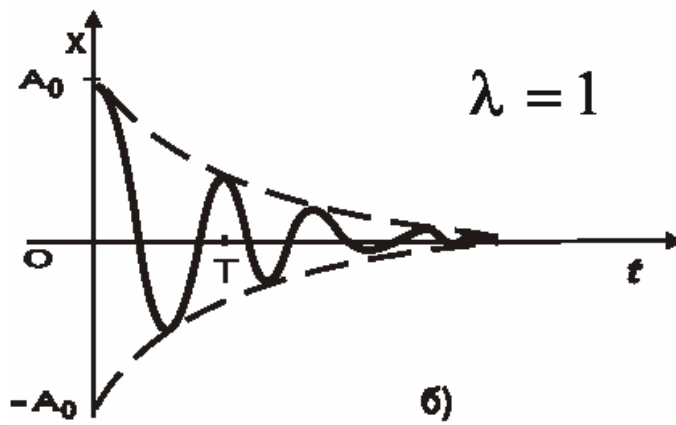
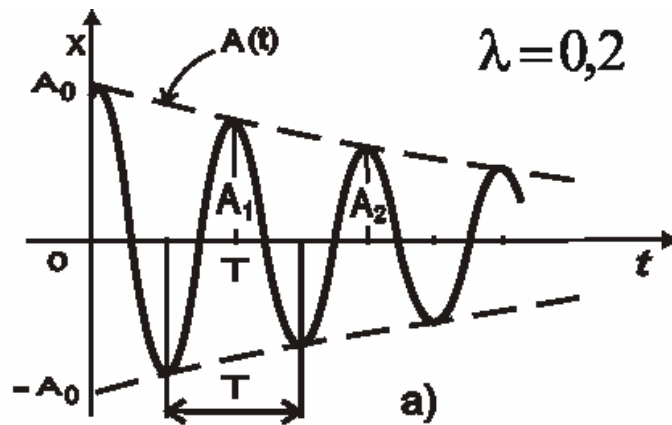
График функции (7.5) показан на рис. 7.1.а. Пунктирные линии отражают зависимость $A(t)$ (7.6).

Движение, описываемое формулой (7.5), строго говоря, не является периодическим. В нее входят два множителя по разному зависящие от времени: один – $\cos(\omega t + \varphi)$ – является периодической функцией времени, другой – $e^{-\beta t}$ – убывает с течением времени. Однако при небольшом затухании можно условно ввести понятие периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами отклонения груза от положения равновесия (рис. 7.1, а).

Период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (7.8)$$

Последняя формула дана для малых значений β ($\beta < \omega_0$). С ростом коэффициента затухания период растет. На рисунках 7.1 показано, как изменяется зависимость $x(t)$ с увеличением затухания (последовательный переход от случая а) к случаю в)). При очень больших значениях коэффициента затухания ($\beta > \omega_0$) в



в)

Рис. 7.1

формуле (7.8) под корнем стоит отрицательная величина. В этом случае частота колебаний (7.7) становится мнимой, и, несмотря на наличие сил, возвращающих систему в положение равновесия, колебания не возникают. Система возвращается в положение

равновесия, асимптотически к нему приближаясь. Такое движение называется **апериодическим** (рис.7.1, в). Быстрее всего система возвращается к положению равновесия при $\beta = \omega_0$. Период (7.8) при этом стремится к бесконечности. Это соответствует так называемому предельному переходу к апериодическому движению (рис.7.1, кривая $\lambda = 2\pi$). Это явление используется в технике, когда необходимо предотвратить появление колебаний системы. Для этого в различных устройствах используют специальные приспособления – демпферы, которые являются гасителями колебаний. При наличии их, колебательная система, выведенная из равновесия, через небольшой промежуток времени «замирает» вблизи положения равновесия. Демпфирование колебаний предусмотрено в конструкциях весов, в электроизмерительных устройствах, при проектировании автомобилей (пружины амортизаторов) и т.д.

Количественной мерой затухания колебаний является величина, равная логарифму отношения амплитуд двух последовательных колебаний, отстоящих друг от друга на период

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad (7.9)$$

Эта величина называется **логарифмическим декрементом затуханий**. С введением λ закон убывания амплитуды со временем (7.6) можно переписать в виде

$$A = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T}t} \quad (7.10)$$

Промежуток времени

$$\tau = \frac{1}{\beta}, \quad (7.11)$$

в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в «e» раз, называется **временем релаксации**. За время τ система совершает

$N_e = \frac{\tau}{T}$ колебаний. Сопоставляя формулы (7.9) и (7.11) можно

получить $\frac{\lambda\tau}{T} = 1$. Это равенство позволяет установить связь логарифмического декремента затухания λ с числом колебаний N_e , совершаемых за время уменьшения амплитуды в « e » раз

$$\lambda = \frac{1}{N_e} \quad (7.12)$$

На рис. 7.1 показан характер движения груза при различных значениях логарифмического декремента затухания, начальное смещение груза во всех случаях одинаково. Предельному случаю перехода от колебательного движения к апериодическому соответствует $\lambda = 2\pi$.

Как мы отмечали выше, затухание колебаний связано с потерями энергии в системе. Величина, характеризующая этот факт, называется добротностью. **Добротность** пропорциональна относительному изменению энергии затухающих колебаний за время одного периода колебаний

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} \quad (7.13)$$

Чем больше добротность, тем меньше убывает энергия за один период колебаний. При малых значениях логарифмического декремента затухания можно получить следующие соотношения

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \quad (7.14)$$

Из последнего выражения видно, что добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за время релаксации, когда амплитуда уменьшается в « e » раз

$$Q \sim N_e$$

При малом затухании, когда $\beta^2 \ll \omega_0^2$, период $T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, тогда

$$Q = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} \quad (7.15)$$

8. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ

Выше (раздел 5) рассматривался колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных индуктивности и емкости. В таком контуре имеют место незатухающие гармонические колебания. Реальные электрические системы всегда обладают некоторым сопротивлением, поэтому в действительности простейшая схема колебательного контура, помимо индуктивности и емкости, должна включать в себя также последовательно соединенное сопротивление R (рис. 8.1).

Уравнение для этого контура имеет вид (см. (5.3))

$$iR + U_C = \varepsilon_{\text{инд}} \quad (8.1)$$

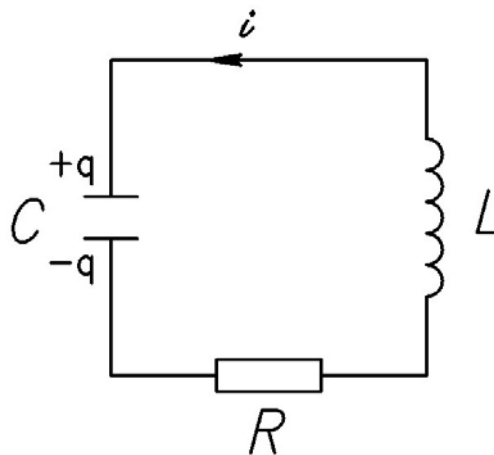


Рис. 8.1

В равенстве учтен член iR , который представляет собой падение напряжения на сопротивлении. Преобразуем его, принимая во внимание соотношения (5.1), (5.2) и $U_C = \frac{q}{C}$. Получим

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (8.2)$$

Введем, как и ранее, обозначения для собственной частоты контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

и коэффициента затухания

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (8.3)$$

С учетом этого, **дифференциальное уравнение затухающих колебаний в электрическом колебательном контуре** имеет вид

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (8.4)$$

Оно идентично уравнению (7.3) для механических систем.

При небольшом затухании $\beta^2 < \omega_0^2$ или $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ решение последнего уравнения запишется

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.5)$$

где **циклическая частота затухающих электрических колебаний** равна

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (8.6)$$

То есть, как и для механических систем, частота затухающих колебаний ω меньше собственной частоты ω_0 . Наличие сопротивления R в контуре приводит к тому, что при возникновении колебаний их электрическая энергия, в соответствии с законом Джоуля - Ленца, тратится на выделение тепла. Вследствие этого, электрические колебания с течением времени затухают. График $q(t)$ аналогичен зависимости $x(t)$, изображенной на рис.

7.1,а. При $R = 0$ формула (8.6) переходит в $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, что соответствует незатухающим колебаниям.

Закон изменения напряжения на конденсаторе получим разделив выражение (8.5) на величину емкости C

$$U = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.7)$$

где $U_0 = \frac{q_0}{C}$ - амплитудное значение напряжения на конденсаторе.

Зависимость силы тока от времени можем получить, проделав те же операции, что и в разделе 5

$$i = \dot{q} = q_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)] \quad (8.8)$$

Умножим и разделим оба слагаемых на величину $\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = 1$. Введем угол ψ , определяемый равенствами

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0} \quad (8.9)$$

$$\sin \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Тогда выражение (8.8) можно привести к виду

$$i = q_0 \omega_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \psi) \quad (8.10)$$

Угол ψ может принимать значения $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$, т.к. исходя из (8.9) $\cos \psi < 0$, $\sin \psi > 0$. Следовательно, при затухающих колебаниях в контуре сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на $\frac{\pi}{2}$. При малом затухании этот сдвиг фаз близок к $\frac{\pi}{2}$.

Упомянутые при рассмотрении затухающих колебаний величины, характеризующие процесс затухания: τ , λ , Q используются и в случае электрических колебаний. Приняв во внимание зависимость ω_0 и β от электрических параметров контура

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и (8.3), получим для логарифмического декремента затухания выражение

$$\lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega} \quad (8.11)$$

При малом затухании колебаний ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, тогда для логарифмического декремента затуханий получим

$$\lambda = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (8.12)$$

и добротность контура в соответствии с формулой (7.14) можно будет определить так

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8.13)$$

Так же как и для механических систем, при большом затухании ($\beta^2 \geq \omega_0^2$) вместо колебаний в контуре происходит апериодический процесс. Здесь он сопровождается разрядом конденсатора. Критическое сопротивление R_k , соответствующее переходу от колебаний в контуре к апериодическому режиму, определяется из условия

$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

Откуда

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8.14)$$

Пример 4.

Рассмотренный выше контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора, индуктивности и сопротивления является наиболее характерным, но не единственно возможным.

Рассмотрим контур, в котором эти три элемента соединены параллельно (рис. 8.2)

Определим частоту затухающих колебаний в этом контуре. Выберем направления токов так, как это показано на рис. 8.2.

В соответствии с первым правилом Кирхгофа

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (8.15)$$

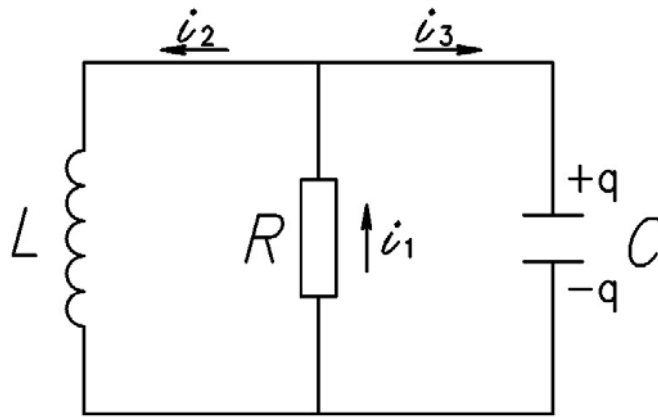


Рис. 8.2

В соответствии со вторым правилом Кирхгофа для участка с индуктивностью и сопротивлением имеем

$$Ri_1 = -L \frac{di_2}{dt} \quad (8.16)$$

Для участка с сопротивлением и конденсатором:

$$Ri_1 = -\frac{q}{C} \quad (8.17)$$

Дифференцируя (8.17) по времени, учитывая (8.15) и соотношение $i_3 = \frac{dq}{dt}$, получим

$$R \left(\frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} \right) = -\frac{1}{C} i_3 \quad (8.18)$$

С учетом (8.15) уравнение (8.16) записывается в виде

$$R(i_2 + i_3) = -L \frac{di_2}{dt} \quad (8.19)$$

Решая уравнение (8.19) относительно i_3 , получим

$$i_3 = -i_2 - \frac{L}{R} \frac{di_2}{dt} \quad (8.20)$$

Из (8.20) следует:

$$\frac{di_3}{dt} = -\frac{di_2}{dt} - \frac{L}{R} \frac{d^2 i_2}{dt^2} \quad (8.21)$$

В результате подстановки выражения (8.20) в (8.18) и с учётом (8.21) получим уравнение относительно тока i_2 :

$$R \left(\frac{di_2}{dt} - \frac{di_2}{dt} - \frac{L}{R} \frac{d^2 i_2}{dt^2} \right) = \frac{1}{C} \left(i_2 + \frac{L}{R} \frac{di_2}{dt} \right)$$

После простых алгебраических преобразований это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{LC} i_2 = 0 \quad (8.22)$$

Сопоставление уравнения (8.22) с уравнениями для затухающих колебаний (7.3) и (8.4) показывает, что в данном случае

$\beta = \frac{1}{2} \frac{1}{RC}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Поэтому, в соответствии с (7.7) циклическая частота затухающих колебаний определится по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2 C^2}} \quad (8.23)$$

Из (8.23) следует, что, в отличие от случая последовательно включенного сопротивления (рис. 8.1), в случае с его параллельным соединением (рис. 8.2) незатухающие колебания будут иметь место не при $R=0$ (см. выводы после формулы (8.6)), а при

$R = \infty$ (при этом $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$).

9. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. РЕЗОНАНС

Для поддержания незатухающих колебаний в механической системе, которая, как было указано выше (раздел 7), всегда подвержена действию сил сопротивления, необходимо воздействовать на нее переменной внешней силой. Эта внешняя сила должна подталкивать тело (в частном случае материальную точку) то в одну, то в другую сторону. Работа этой силы должна непрерывно восполнять убыль энергии, затрачиваемой на преодоление сил трения. Такая переменная сила называется **вынуждающей**. Колебания, которые происходят в системе под действием периодически изменяющейся внешней силы, называются **вынужденными колебаниями**.

Исследуем влияние вынуждающей силы на затухающие колебания пружинного маятника (раздел 7). Пусть внешняя сила изменяется по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos \omega_{\epsilon} t, \quad (9.1)$$

где F_0 амплитудное значение вынуждающей силы, ω_{ϵ} - частота внешней силы.

Тогда суммарная сила, действующая на груз (7.2), дополнится вынуждающей силой

$$F = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega_{\epsilon} t \quad (9.2)$$

В соответствии с этим уравнение движения маятника примет вид

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega_{\epsilon} t \quad (9.3)$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_{\epsilon} t, \quad (9.4)$$

где, как и ранее, $\beta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ -

собственная частота колеблющейся системы.

Уравнение (9.4) называется **дифференциальным уравнением вынужденных колебаний**.

С точки зрения математики уравнение (9.4) является неоднородным. Общее решение такого уравнения является суммой общего решения $x_{св}$ однородного уравнения (7.3) и частного решения $x_в$ неоднородного уравнения (9.4)

$$x = x_{св} + x_в \quad (9.5)$$

где $x_{св}$ - решение, которое соответствует свободным затухающим колебаниям и может быть представлено в виде (7.5)

$$x_{св} = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (9.6)$$

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота свободных затухающих колебаний, $x_в$ - частное решение, соответствующее вынужденным колебаниям.

Свободные колебания, определяемые решением $x_{св}$, довольно быстро затухают. Что касается вынужденных колебаний $x_в$, то они будут иметь место в течение всего времени действия возбуждающей силы, и их частота будет совпадать с частотой возбуждающей силы, поэтому далее индекс у циклической частоты будем опускать, памятуя, что частота ω означает частоту вынужденных колебаний. Не будем останавливаться на свободных колебаниях, т.к. они играют существенную роль лишь в начальной стадии процесса. Основное внимание уделим вынужденным установившимся колебаниям.

Для нахождения решения уравнения (9.4) перепишем его с использованием комплексных чисел (раздел 2) в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (9.7)$$

Избегая сложных математических выкладок, которые можно почерпнуть в литературе, запишем частное решение (его вещественную часть) уравнения (9.4)

$$x = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (9.8)$$

Выражение, стоящее перед функцией косинуса, представляет собой **амплитуду вынужденных колебаний**

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (9.9)$$

Как видно, амплитуда вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде возбуждающей силы F_0 и зависит от ее частоты.

В случае вынужденных колебаний мы имеем дело с наличием двух гармонических колебаний одинаковой частоты, участвующих в одном явлении, поэтому физический смысл имеют не фазы каждого колебания в отдельности, а разность этих фаз (см. раздел 6). Из уравнения (9.1) видно, что начальная фаза вынуждающей силы равна нулю. А значение φ , определяемое по формуле,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (9.10)$$

представляет собой отставание по фазе вынужденного колебания от обусловившей его вынуждающей силы.

Исходя из сказанного выше, можно заключить, что функция (9.8) описывает установившиеся вынужденные колебания, которые графически представлены на рис.9.1. Амплитуда вынужденных колебаний достигает постоянной величины, определяемой формулой (9.9), не сразу после начала действия вынуждающей

СИЛЫ.

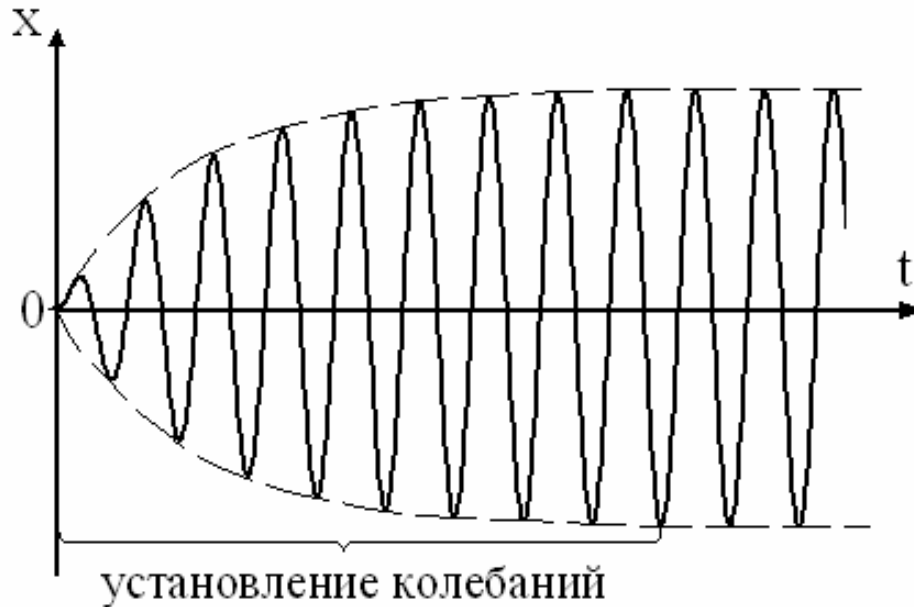


Рис 9.1

Требуется некоторое время, чтобы энергия, поступающая в систему извне за счет работы внешней силы, сравнялась с энергией, теряемой системой при работе силы трения (процесс установления колебаний).

Проанализируем зависимость амплитуды вынужденных колебаний (9.9) от частоты возбуждающей силы. Если частота этой силы стремится к нулю ($\omega \rightarrow 0$), то есть имеют место очень медленные колебания, то амплитуда вынужденных колебаний (при $\beta = \text{const}$) стремится к величине $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$. С увеличением частоты ω

амплитуда начинает расти, так как уменьшается знаменатель в формуле (9.9). Рост амплитуды происходит до тех пор, пока ω не приблизится к ω_0 . При дальнейшем увеличении ω (когда ω становится больше ω_0) знаменатель в формуле (9.9) начинает увеличиваться, в результате величина амплитуды уменьшается и при $\omega \rightarrow \infty$ амплитуда стремится к нулю.

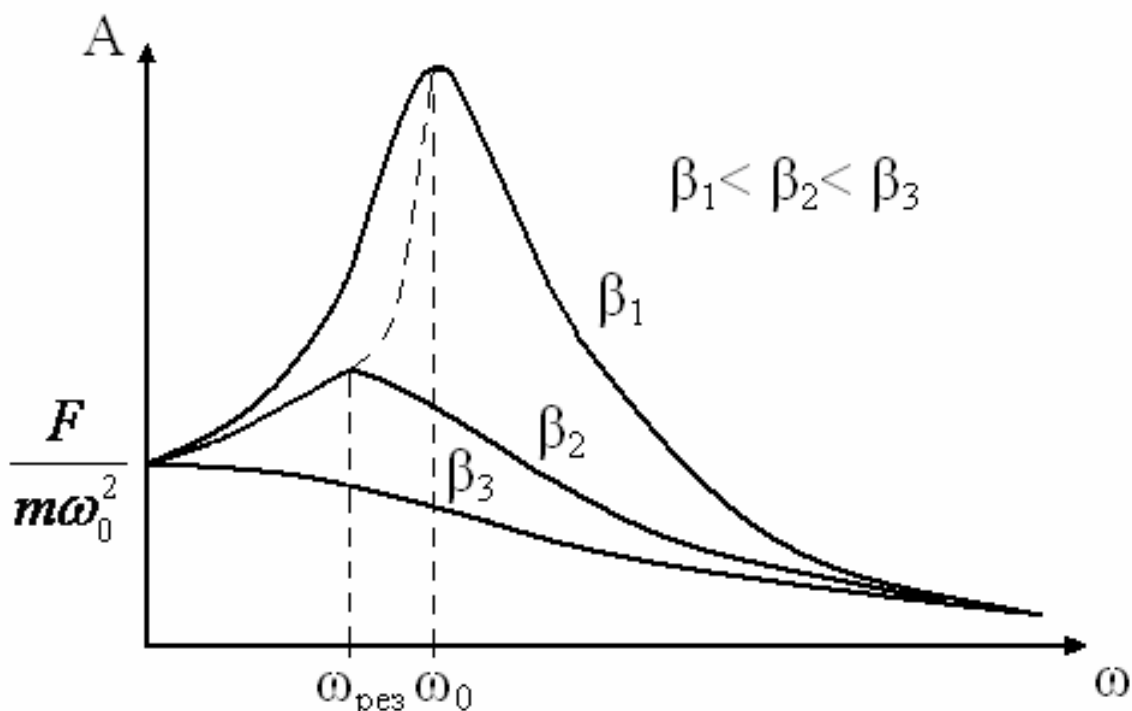


Рис 9.2

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний, когда частота вынужденных колебаний приближается к собственной частоте колебательной системы, называется **резонансом**. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы называется **резонансной кривой** (рис. 9.2).

Резонансная частота $\omega_{рез}$, строго говоря, не совпадает с частотой ω_0 собственных колебаний. Чтобы определить значение $\omega_{рез}$, надо приравнять к нулю производную по ω от выражения (9.9). Тогда резонансная частота будет определяться так

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (9.11)$$

Подставив это значение $\omega_{рез}$ в (9.9), получим выражение для амплитуды при резонансе

$$A_{рез} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (9.12)$$

Резонансные кривые, приведенные на рис. 9.2, представлены при разных значениях коэффициента затухания β . Видно, что при малом трении, когда $\beta \ll \omega_0$ резонансная частота $\omega_{рез} \approx \omega_0$. Подставив это в (9.9), найдем в этом случае амплитуду при резонансе при малом затухании

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}$$

Учитывая, что добротность в этом случае, в соответствии с (7.15), определяется так

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta},$$

получим

$$A_{рез} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot Q$$

Таким образом, острота резонансной кривой связана с добротностью колебательной системы. При увеличении Q растет амплитуда при резонансе. Следовательно, добротность характеризует резонансные свойства колебательной системы.

Как видно из (9.12), при отсутствии сопротивления среды ($\beta = 0$) амплитуда бы обращалась в бесконечность, что в реальных системах не имеет места.

При увеличении коэффициента затухания резонансная кривая становится ниже, и располагается левее, резонансной частота в этом случае явно меньше ω_0 (рис. 9.2, кривая для β_2). При очень большом затухании выражение под корнем в (9.12) становится мнимым и резонанс не наблюдается (рис. 9.2, кривая для β_3).

Явление резонанса играет большую роль в технике и повседневной жизни. При конструировании машин и механизмов необходимо предусмотреть, чтобы собственная частота устройства

не совпадала с частотой возможных внешних воздействий. В противном случае возникнут вибрации, которые могут привести к разрушению конструкции («резонансная катастрофа»). В то же время принцип действия многих радиотехнических устройств, приборов прикладной акустики, музыкальных инструментов основан именно на явлении резонанса.

10. ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

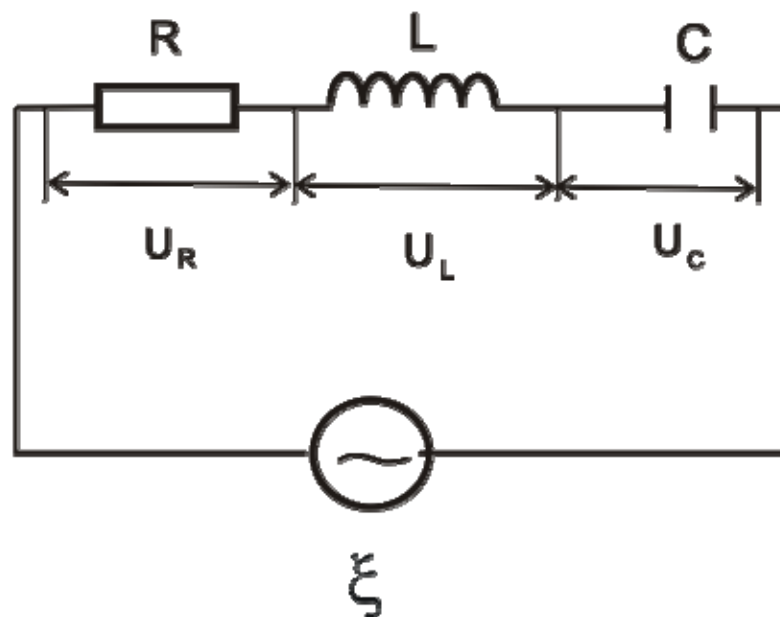


Рис 10.1

Для того, чтобы обеспечить незатухающие колебания в LRC - контуре (рис. 8.1), нужно оказывать на систему периодическое внешнее воздействие. Для этого следует последовательно к элементам контура включить переменную ЭДС. Рассмотрим наиболее типичный случай, когда значение ЭДС изменяется со временем по гармоническому закону

$$\xi = \xi_0 \cos \omega t, \quad (10.1)$$

где ξ_0 - амплитудное значение ЭДС, ω - циклическая частота колебаний.

На рис. 10.1 изображена схема контура с включенной в него ЭДС. При этом в уравнение (8.1) в его правую часть помимо ЭДС самоиндукции следует добавить внешнюю ЭДС ξ .

$$iR + U_C = \xi_{\text{инд}} + \xi \quad (10.2)$$

Вследствие этого уравнение будет содержать в правой части вынуждающий член:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = \xi_0 \cos \omega t \quad (10.3)$$

Тогда уравнение (8.2) примет вид

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{c} = \xi_0 \cos \omega t, \quad (10.4)$$

После преобразования уравнение (10.4) трансформируется к виду

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\xi_0}{L} \cos \omega t \quad (10.5)$$

где, как и в случае свободных затухающих колебаний (8.3),

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (10.6)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Уравнение (10.5) называется **дифференциальным уравнением вынужденных электромагнитных колебаний** и имеет точно такую же структуру, что и уравнение вынужденных механических колебаний (9.4). Так же, как и в том случае, нас будут интересовать только установившиеся вынужденные колебания, только теперь в электрическом контуре.

В силу упомянутой выше идентичности структур уравнений (9.4) и (10.5) соответствующее частное решение последнего уравнения описывает установившиеся электромагнитные колебания и имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \varphi) \quad (10.7)$$

где q_m и φ определяются по формулам, аналогичным (9.9) и (9.10),

$$q_m = \frac{\frac{\xi_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (10.8)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (10.9)$$

С учетом (10.6) амплитудное значение заряда будет иметь вид:

$$q_m = \frac{\xi_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad (10.10)$$

а отставание по фазе вынужденных колебаний заряда в контуре от колебаний вынуждающей ЭДС можно рассчитать по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} \quad (10.11)$$

Продифференцировав выражение (10.7) по времени, найдем силу тока в контуре в режиме установившихся колебаний

$$i = -q_m \omega \sin(\omega t - \psi) = i_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (10.12)$$

где $i_m = q_m \omega$ - амплитудное значение тока. Перепишем это выражение в виде

$$i = i_m \cos(\omega t - \psi), \quad (10.13)$$

где $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$,

что соответствует сдвигу по фазе между током и приложенной ЭДС.

Тогда, с учетом (10.11)

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Отсюда получим, что ток опережает напряжение, когда $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ ($\psi < 0$), и отстает от нее - когда $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ($\psi > 0$).

Принимая во внимание формулу (10.10), можем получить выражение для амплитудного значения тока

$$i_m = q_m \cdot \omega = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (10.14)$$

Вернемся теперь к уравнению (10.3). В этом уравнении iR равно напряжению на сопротивлении U_R , $L \frac{di}{dt}$ - напряжение на индуктивности U_L , $\frac{q}{C}$ - напряжение на конденсаторе. С учетом этого уравнения (10.3) можно переписать в виде

$$U_R + U_L + U_C = \xi_0 \cos \omega t \quad (10.15)$$

Таким образом, сумма напряжений на элементах контура равна приложенной ЭДС.

С учетом (10.13) напряжение на сопротивлении равно

$$U_R = i_m R \cos(\omega t - \psi) \quad (10.16)$$

Разделив (10.7) на величину емкости, получим напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \varphi) = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \psi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (10.17)$$

Здесь

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{i_m}{\omega C} \quad (10.18)$$

амплитудное значение напряжения на конденсаторе.

Выражение для U_L получим, умножив производную функции i (10.12) на L

$$U_L = L \frac{di}{dt} = -\omega L i_m \sin(\omega t - \psi) = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (10.19)$$

$$\text{где } U_{Lm} = \omega L i_m \quad (10.20)$$

Сравнение формул (10.13), (10.16), (10.17) и (10.19) позволяет сделать вывод, что напряжение на емкости отстает по фазе от силы тока на $\frac{\pi}{2}$, а напряжение на индуктивности опережает силу тока на $\frac{\pi}{2}$. Напряжение на активном сопротивлении изменяется со временем синфазно с изменением силы тока в цепи.

Указанные фазовые соотношения наглядно иллюстрируются с помощью векторной диаграммы. В качестве прямой, от которой отсчитывается начальная фаза, выбирается ось токов (рис 10.2).

Согласно (10.15) три функции U_R , U_L и U_C в сумме равны ЭДС ξ . Поэтому ξ изображается на диаграмме как сумма трех векторов U_R, U_C, U_L .

Следует отметить, что точное значение резонансной частоты для заряда совпадает с соответствующим значением для амплитуды колебаний материальной точки и определяется по формуле (9.11). Это значение также соответствует резонансной частоте для на-

пряжения на конденсаторе U_C . Соответственно и форма резонансных кривых для амплитудного значения заряда q_m и амплитудного значения напряжения на конденсаторе U_{cm} (10.18) аналогично резонансной кривой, изображенной на рис. 9.2.

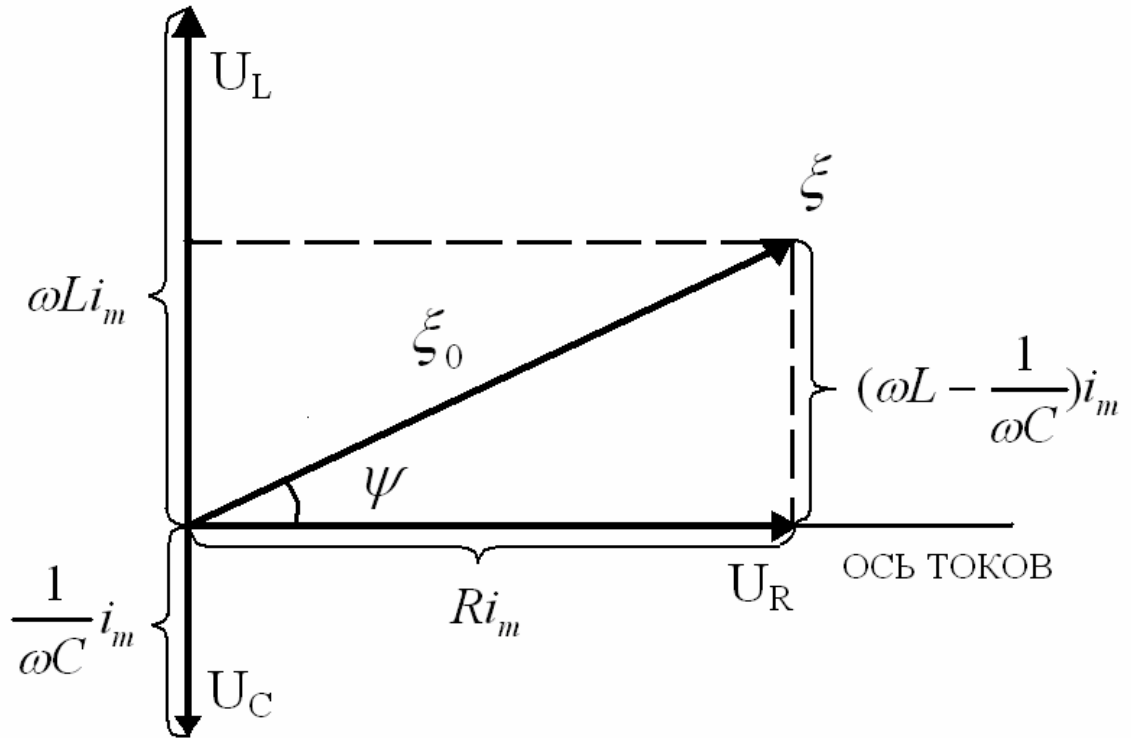


Рис 10.2

Резонансная кривая для тока $i_m = \omega q_m$ имеет иной характер, поскольку эта зависимость отличается от q_m наличием множителя ω . Эта кривая имеет вид, изображенный на рис. 10.3.

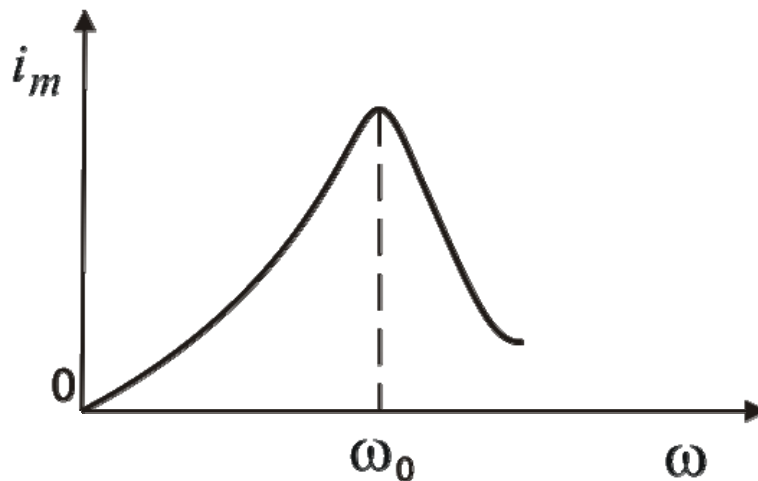


Рис 10.3

При этом точным значением резонансной частоты является значение $\omega_{\delta\dot{a}\zeta} = \omega_0$.

Библиографический список.

1. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2001.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. - Книга 1,2. М.: Астрель АСТ, 2005.
3. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. - Часть 1, 2. Киев.: Днепр, 1994.
4. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. - М.: Наука, 1985.
5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. - М.-С.П.: Физматлит, 2001.
6. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. - М.: Физматлит, 2003.
7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. - М.: Машиностроение, 1967.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Колебательное движение, его характеристики и уравнение	4
2. Метод векторных диаграмм и комплексные обозначения....	8
3. Механические гармонические колебания. Пружинный маятник.....	11
4. Гармонический осциллятор. Физический и математический маятники. Энергия колебательной системы	16
5. Свободные незатухающие колебания в электрических системах	26
6. Сложение гармонических колебаний	34
6.1 Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты	35
6.2 Сложение колебаний одного направления и разной частоты. Биения.....	38
6.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу	40
7. Свободные затухающие колебания механического осцилля-	

тора	45
8. Затухающие колебания в электрическом контуре	51
9. Вынужденные колебания механических систем. Резонанс	57
10. Вынужденные электромагнитные колебания	63
Библиографический список	70

Наталия Михайловна Колачева
Михаил Яковлевич Израилович
Лидия Владимировна Соломатина

КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Учебное пособие

Литературный редактор

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)”
119454, Москва, пр. Вернадского, 78