

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ  
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)”

А.А. БЕРЗИН, А.П. ВОРОБЬЕВ, В.А. ДАВЫДОВ,  
Ю.В. КОРОБКИН, В.Б. СТУДЕНОВ, В.А. ФОТИЕВ

**МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЧАСТЬ 1

**МЕХАНИКА**

МОСКВА 2005

УДК 53 + 531

Берзин А.А., Воробьев А.П., Давыдов В.А., Коробкин Ю.В., Студенов В.Б., Фотиев В.А. Механика и молекулярная физика: Учебное пособие. Часть 1. Механика. /Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет). – М., 2002. – 80с./

ISBN 5-230-12089-4.

Излагаются основные законы и методы классической механики. В пособие включены традиционные разделы: кинематика, динамика, статика, колебательное движение. Большое внимание уделено изложению закономерностей движения абсолютно твердого тела, основополагающих принципов законов сохранения. Пособие представляет собой теоретическое введение к изучению различных физических эффектов, используемых в радиотехнике, электронике и автоматике. Оно дает необходимую подготовку для успешного освоения других разделов физики, а также ряда прикладных дисциплин.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей вечернего и заочного отделений технических вузов.

Табл.: Нет. Иллюстр.: 30. Библиогр.: 5.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета).

Рецензенты: С.Д. Бенеславский, С.Г. Каленков

## ВВЕДЕНИЕ

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) готовит инженеров-специалистов широкого профиля в области проектирования и эксплуатации автоматизированных систем управления, радиотехнических и электроакустических систем и устройств, оптоэлектронных систем, средств вычислительной и микропроцессорной техники и их математического обеспечения, электронных и микроэлектронных приборов.

За основу принятой в МИРЭА системы обучения положена фундаментальная подготовка студентов на младших курсах в сочетании с производственным обучением на старших курсах. При этом одной из важнейших дисциплин в теоретической и практической подготовке современного инженера является курс физики. Студенты всех специальностей изучают физику в расширенном объеме при углубленном преподавании специальных разделов.

Предлагаемое учебное пособие по первой части курса физики предназначено для студентов всех специальностей, обучающихся на заочном и вечернем отделениях МИРЭА.

Необходимость издания данного пособия продиктовано следующими обстоятельствами. Во-первых, существующие учебники рассчитаны, в основном, на студентов дневных отделений технических вузов, поэтому они не полностью учитывают специфику преподавания курса физики на вечернем и заочном отделениях вузов при подготовке специалистов по наиболее наукоемким отраслям техники, а именно, по современной радио - и оптоэлектронике, кибернетике и вычислительной технике. Во-вторых, тиражи издаваемых учебников, в настоящее время, недостаточны для снабжения всех студентов соответствующей литературой.

Материал учебного пособия, в соответствии с учебными планами разбит на две части. Содержание первой части – физические основы механики, второй – молекулярная физика и термодинамика. В конце пособия приведен библиографический список дополнительной рекомендованной литературы.

Авторы выражают глубокую благодарность преподавателям кафедры физики МИРЭА, сделавшим ценные замечания при прочтении рукописи.

# МЕХАНИКА

## 1. ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ

Окружающий нас мир представляет собой совокупность различных форм материи, которые находятся в постоянном движении и взаимодействии.

Физика – наука, которая изучает наиболее общие законы этих явлений и взаимодействий.

Простейшей формой движения является механическое движение, которое состоит в изменении с течением времени взаимного расположения тел или их частей в пространстве.

Механическое движение мы наблюдаем повседневно. Отсюда наглядность механических представлений и объяснение того факта, что механика как наука получила наибольшее развитие прежде других разделов физики. Начало развития механики связано с именами Архимеда, Галилея, Ньютона.

Механика Галилея – Ньютона называется классической механикой. Предметом ее изучения является движение макроскопических материальных тел, совершаемое со скоростями, значительно меньшими скорости света  $c$  в вакууме ( $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с).

Движение тел со скоростями, приближающимися к скорости света в вакууме, рассматривается в теории относительности (релятивистская механика, основоположником которой является Эйнштейн), а движение микрочастиц – в квантовой механике.

По характеру решаемых задач механику разделяют на кинматику и динамику. В кинематике рассматриваются характеристики движения тел без указания причин, вызывающих это движение. В динамике рассматриваются причины движения тел. Частным случаем динамики является статика, которая изучает условия равновесия тел.

### 1.1. Пространственно – временные системы отсчета.

Механическое движение – это изменение расположения материальных тел в пространстве с течением времени. Положение тела в пространстве определяется относительно некоторой сис-

темы отсчета, связанной с условно неподвижными телами. Выбор системы координат диктуется соображениями удобства при решении конкретных задач. Например, для положения точки в пространстве чаще всего используется прямоугольная, декартова система координат, в которой положение точки задается радиус-вектором  $\vec{r}(t)$ . На плоскости задание вектора  $\vec{r}(t)$  эквивалентно заданию двух скалярных функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , называемых координатами точки (рис. 1.1). Координаты  $x(t)$  и  $y(t)$  являются проекциями радиус-вектора  $\vec{r}(t)$  на оси координат. В пространстве положение точки задается тройкой координат  $x(t), y(t), z(t)$ .

При решении задач, связанных с движением по окружности, более удобными являются так называемые полярные координаты  $r, \varphi(t)$ , где  $r = |\vec{r}|$  - абсолютная величина (модуль) радиус-вектора точки,  $\varphi$  - угол поворота этого радиус-вектора относительно какой – либо оси (см. рис.1.1).

Связь между парами чисел  $(x, y)$  и  $(r, \varphi)$  очевидна:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.1)$$

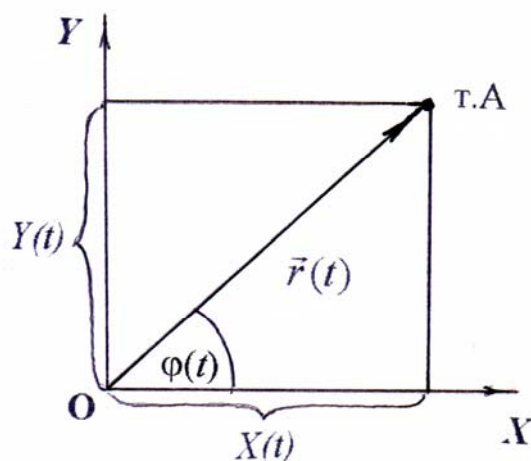


Рис.1.1

Характер движения в заданной системе отсчета не зависит от выбора системы координат. При переходе от одной системы координат к другой изменяется только математический вид зависимости от времени координат, описывающих движение.

При проведении численных расчетов следует правильно ис-

пользовать размерности физических величин. В настоящее время в физике общеупотребительной является Международная система измерений СИ. В частности, в механике в качестве основных размерностей используются размерности длины  $[x] = м(метр)$ , времени  $[t] = с(секунда)$  и массы  $[m] = кг(килограмм)$ .

## 1.2. Приближения материальной точки и абсолютно твердого тела

В качестве объектов исследования в классической механике служат материальные тела. При изучении движения тел в классической механике используются две физические модели этих тел, а именно, приближения материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальная точка – физическая модель тела, обладающего массой, размерами которого можно пренебречь в сравнении с другими характерными размерами задачи. Иначе, когда размеры и форма тела не влияют на характеристики движения. Например, при изучении движения планет вокруг Солнца их можно принимать за материальные точки. При этом решение задачи существенно упрощается.

Абсолютно твердое тело – другая физическая модель тела. Такое приближение используется при решении таких задач, когда на характеристики движения тела оказывают влияние не только масса, но и размеры и форма тела, причем деформацией тела можно пренебречь. Например, при изучении вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Введение физических моделей – материальной точки и абсолютно твердого тела существенно упрощает решение ряда задач механики.

## 2. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

### 2.1. Геометрические характеристики движения

В процессе движения конец радиус- вектора точки  $\vec{r}(t)$  описывает линию, которая называется траекторией. В зависимости от вида траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным. Частным случаем криволинейного движения явля-

ется движение точки по окружности.

Путь (или длина пути)  $\Delta S$  представляет собой полное расстояние, пройденное точкой при движении вдоль траектории. Путь - скалярная величина, т.е. число, причем положительное, которое в процессе движения может только увеличиваться. Перемещением точки за некоторый промежуток времени называется вектор  $\Delta \vec{r}$ , соединяющий начальное и конечное положения точки в пространстве. Обозначим радиус – векторы начального и конечного положений точки через  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ . Как видно из рис.2.1, перемещение точки:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.1).$$

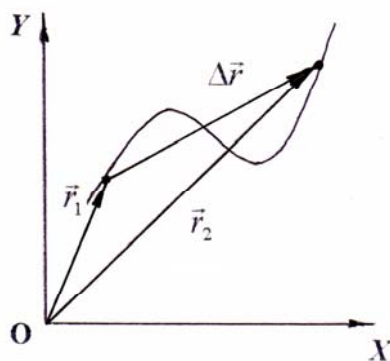


Рис. 2.1

Модуль перемещения  $|\Delta \vec{r}|$  равен длине отрезка, соединяющего начальную и конечную точки траектории, и определяется с помощью координат этих точек. В частности, в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости модуль перемещения:

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.2)$$

При сближении начала и конца траектории величина  $|\Delta \vec{r}|$  будет уменьшаться, и стремиться к длине пути  $\Delta S$ , пройденному точкой. В пределе бесконечно малого перемещения можно заключить, что:

$$|d\vec{r}| = dS \quad (2.3)$$

## 2.2. Кинематические характеристики движения

### 2.2.1. Скорость

Скорость – вектор, определяющий как быстроту движения точки, так и направление ее движения. Пусть перемещение  $\Delta \vec{r}$  меж-

ду точками траектории 1 и 2 совершено за время  $\Delta t$  (см. рис.2.1). Средней скоростью  $\langle \vec{v} \rangle$  на участке траектории 1 – 2 называется вектор, равный отношению перемещения  $\Delta \vec{r}$  к интервалу времени  $\Delta t$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.4)$$

Направление вектора средней скорости  $\langle \vec{v} \rangle$  совпадает с направлением вектора  $\Delta \vec{r}$ , т. е. вектор  $\langle \vec{v} \rangle$  направлен вдоль отрезка, стягивающего две точки траектории. Уменьшая интервал времени  $\Delta t$ , можно от средней скорости перейти к мгновенной скорости. Мгновенная скорость  $\vec{v}$  определяется как предел средней скорости при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.5)$$

т. е. мгновенная скорость равна первой производной радиус-вектора  $\vec{r}(t)$  по времени. Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в каждой ее точке (рис. 2.2). В общем случае при движении тела его скорость изменяется как по величине, так и по направлению.

Размерность скорости в системе СИ  $[v] = м/с$ .

Используя условие (2.3), покажем, что по модулю мгновенная скорость оказывается равной производной пути по времени. Действительно:

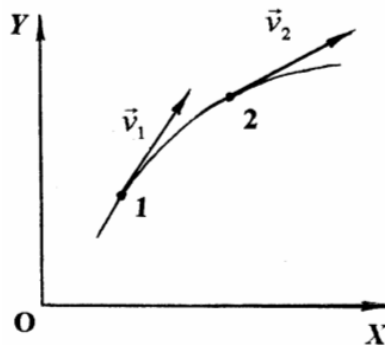


Рис.2.2

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что длина пути  $\Delta S_{12}$ , проходимая точкой за время от  $t_1$  до  $t_2$ , может быть представлена в виде интеграла от



модуля скорости по времени:

$$\Delta S_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt \quad (2.7)$$

Иногда используется понятие среднепутевой скорости в виде:

$$\langle v \rangle_{\text{пут.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (2.8)$$

где  $\Delta S$  - путь, проходимый точкой за время  $\Delta t$ . Среднепутевая скорость является скалярной величиной, причем  $\langle v \rangle_{\text{пут.}} \geq 0$ .

В прямоугольной декартовой системе координат на плоскости вектор скорости  $\vec{v}$  можно разложить на составляющие  $v_x$  и  $v_y$  причем, в соответствии с определением скорости (2.5),

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}. \quad (2.9)$$

Модуль скорости выражается через ее составляющие по осям координат  $v_x$  и  $v_y$  в виде:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2.10)$$

### 2.2.2. Ускорение

Ускорение – вектор, определяющий как быстроту, так и направление изменения скорости. Среднее ускорение точки  $\langle \vec{a} \rangle$  определяется как отношение изменения скорости  $\Delta \vec{v}$  к интервалу времени  $\Delta t$ , за которое это изменение произошло:  $\langle \vec{a} \rangle = \Delta \vec{v} / \Delta t$ . При стремлении  $\Delta t$  к нулю получим, что ускорение в данной точке траектории:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.11)$$

т. е. ускорение есть первая производная скорости  $\vec{v}$  по времени или вторая производная радиус-вектора  $\vec{r}$  по времени. Размерность ускорения в СИ  $[a] = \text{м/с}^2$ .

При прямолинейном движении векторы скорости и ускорения направлены вдоль одной прямой. В общем случае их направления не совпадают. В прямоугольной декартовой системе коор-

динат на плоскости вектор ускорения  $\vec{a}$  можно разложить на составляющие  $a_x, a_y$  (рис. 2.3), аналогично разложению скорости на составляющие. При этом, согласно (2.11):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (2.12)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

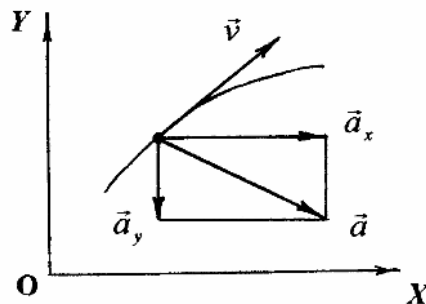


Рис.2.3

Модуль ускорения выражается через его составляющие по осям координат  $a_x, a_y$  в следующем виде:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (2.13)$$

Для прямолинейного одномерного движения из определений (2.11) и (2.5) следуют соотношения  $dv = a dt, dx = v dt$ . При постоянной величине ускорения ( $a = \text{const}$ ) можно, путем интегрирования по времени этих соотношений, получить зависимости скорости  $v$  и координаты  $x$  от времени:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $x_0, v_0$  – начальные, т. е. при  $t=0$ , начальные координата и скорость точки, соответственно. Отметим, что при равноускоренном движении  $a>0$ , а при равнозамедленном  $a<0$ .

### 2.2.3. Ускорение при криволинейном движении

Разложение вектора ускорения  $\vec{a}$  на составляющие  $a_x$  и  $a_y$  (см. рис. 2.3) не является единственно возможным. Часто при изучении

криволинейного движения используется разложение вектора  $\vec{a}$  на нормальную и тангенциальную составляющие. При криволинейном движении можно считать, что любой достаточно малый участок траектории представляет собой дугу некоторой окружности. Проведя касательные в двух близких точках этой дуги и восстановив к ним перпендикуляры, можно найти радиус этой окружности. При этом точка пересечения перпендикуляров определяет центр окружности. Длина дуги  $\Delta S$  связана с углом  $\Delta\varphi$  между ограничивающими эту дугу радиусами соотношением:  $\Delta S = R\Delta\varphi$  (напомним, что угол  $\Delta\varphi$  при этом должен измеряться в радианах). При стремлении угла  $\Delta\varphi$  к нулю центр указанной окружности называется центром кривизны траектории в данной точке, а радиус:

$$R = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}, \quad (2.15)$$

-радиусом кривизны траектории. Величина, обратная радиусу  $R$ , называется кривизной траектории:

$$\rho = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dS}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим криволинейный участок траектории, близкий к дуге окружности радиуса  $R$  (рис.2.4). Разложим вектор ускорения  $\vec{a}$  на две взаимно – перпендикулярные составляющие:

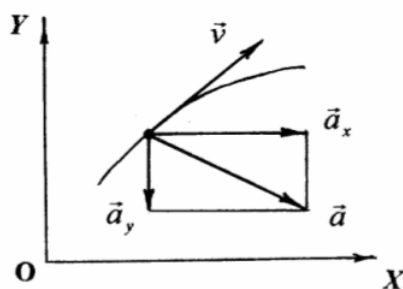


Рис.2.4

1. на тангенциальную составляющую  $\vec{a}_\tau$ , направленную в данном случае вдоль скорости  $\vec{v}$ .

2. на нормальную составляющую  $\vec{a}_n$ , направленную перпендикулярно скорости  $\vec{v}$  к центру кривизны траектории.

Из рис. 2.4 следует, что вектор полного ускорения  $\vec{a}$  представляется в виде векторной суммы ускорений  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$ :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (2.17)$$

причем по модулю полное ускорение равно:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (2.18)$$

Отметим, что направление вектора  $\vec{a}_\tau$  совпадает с направлением скорости  $\vec{v}$  при ускоренном движении, и противоположно направлению скорости  $\vec{v}$  при замедленном движении. Найдем выражения для модулей  $a_\tau$  и  $a_n$ . Представим скорость  $\vec{v}$  в виде:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}, \quad (2.19)$$

где  $v$  – модуль скорости,  $\vec{\tau}$  – единичный вектор ( $|\vec{\tau}| = 1$ ), направленный по касательной к траектории вдоль скорости. Тогда вектор ускорения, согласно определению (2.11):

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (2.20)$$

При движении точки по криволинейной траектории вектор  $\vec{\tau}$  изменяет свое направление в пространстве, следовательно, изменяется и по времени. Найдем  $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ . Рассмотрим две близкие точки траектории 1 и 2 (рис.2.5). Из рис. 2.5 следует  $\frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{\Delta S}{R} = \frac{v\Delta t}{R}$ ,

причем вектор  $\Delta\vec{\tau} = |\Delta\vec{\tau}| \cdot \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор ( $|\vec{n}| = 1$ ), направленный по нормали к траектории, т.е. к центру кривизны. Следовательно,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \vec{n}, \quad (2.21)$$

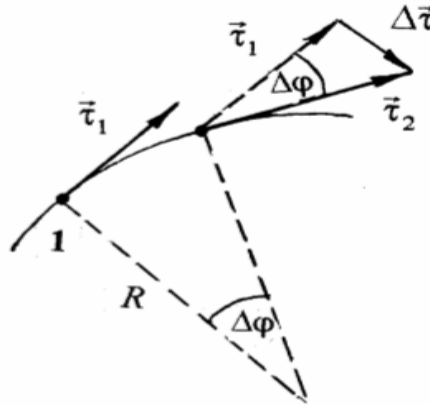


Рис.2.5

и полное ускорение  $\vec{a}$ , используя (2.20) и (2.21), представляется в виде:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}. \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что модули тангенциального  $a_\tau$  и нормального  $a_n$  ускорений равны:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (2.23)$$

при этом тангенциальное ускорение  $a_\tau$  определяет быстроту изменения скорости по модулю, а нормальное ускорение  $a_n$  - по направлению. Отметим некоторые частные случаи:

1)  $a_n = 0$ , ( $R = \infty$ ),  $a_\tau = 0$  - прямолинейное равномерное движение ( $v = \text{const}$ ).

2)  $a_n = 0$ , ( $R = \infty$ ),  $a_\tau = a = \text{const}$  - прямолинейное равнопеременное движение.

3)  $a_\tau = 0$ ,  $a_n = \frac{v^2}{R} = \text{const}$  - равномерное движение по окружности радиуса  $R$ .

#### 2.2.4. Кинематика движения точки по окружности

При изучении движения точки по окружности удобно ввести так называемые угловые характеристики движения. Положение точки определяется углом поворота  $\varphi(t)$  (рис. 2.6). Пусть за время  $\Delta t$  точка повернулась на угол  $\Delta\varphi$ , тогда можно ввести понятие сред ней угловой скорости следующим образом.

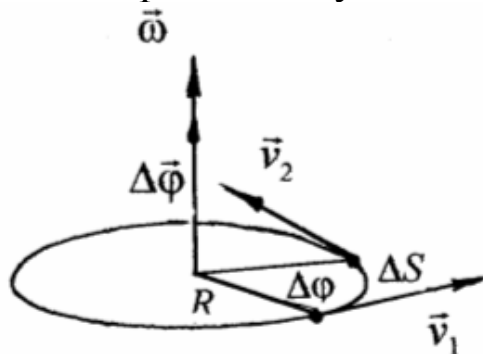


Рис.2.6

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}. \quad (2.24)$$

Величина мгновенной угловой скорости  $\omega$  характеризует быстроту изменения угла поворота  $\varphi$  и определяется аналогично (2.5):

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.25)$$

Угловое перемещение  $\Delta \vec{\varphi}$  и угловая скорость  $\vec{\omega}$  являются векторами, их направление условно связывается с осью вращения и выбирается по правилу правого винта при его вращении в направлении вектора скорости  $\vec{v}$  (такие вектора называются псевдовекторами). При этом связь между векторами  $\vec{v}, \vec{\omega}, \vec{R}$  дается в виде векторного произведения:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]. \quad (2.26)$$

При равномерном движении точки по окружности ( $\omega = \text{const}$ ) можно ввести период вращения  $T$ , равный времени одного полного оборота. Поскольку за время  $\Delta t = T$  происходит поворот точки на угол  $\Delta \varphi = 2\pi$ , то угловая скорость  $\omega = \Delta \varphi / \Delta t = 2\pi / T$  и, следовательно:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.27)$$

Число оборотов, совершаемых точкой при равномерном движении по окружности в единицу времени, называется частотой вращения и определяется как:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.28)$$

Следовательно, между угловой скоростью  $\omega$  и частотой вращения  $n$  имеется связь:

$$\omega = 2\pi n. \quad (2.29)$$

Угловое ускорение  $\varepsilon$  характеризует быстроту изменения угловой скорости  $\omega$  и вводится аналогично (2.11):

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (2.30)$$

Угловое ускорение – векторная величина. Направление вектора

углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  также связывается с осью вращения. Направление  $\vec{\varepsilon}$  совпадает с направлением  $\vec{\omega}$  при ускоренном вращении и противоположно по направлению  $\vec{\omega}$  при замедленном вращении (рис. 2.7).

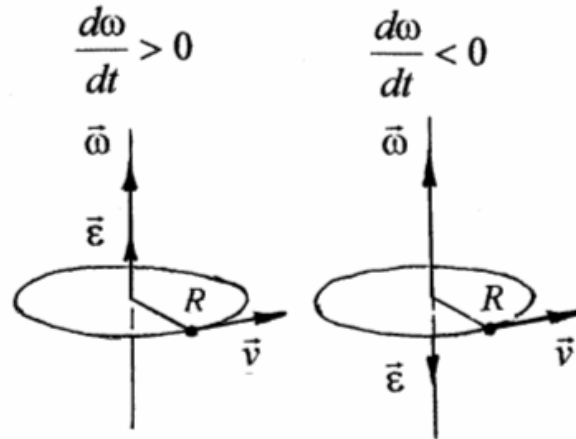


Рис.2.7

Размерность угловых характеристик движения в СИ:  $[\varphi]=\text{рад}$ ,  $[\omega]=\text{рад/с}$ ,  $[\varepsilon]=\text{рад/с}^2$ ,  $[T]=\text{с}$ ,  $[n]=\text{с}^{-1}$ .

Из определений (2.25) и (2.30) угловые характеристики движения связаны соотношениями:  $d\varphi = \omega dt$ ,  $d\omega = \varepsilon dt$ . При постоянной величине углового ускорения ( $\varepsilon = \text{const}$ ) путем интегрирования по времени этих соотношений можно получить зависимости угловой скорости  $\omega$  и угла поворота  $\varphi$  от времени:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_0 + \varepsilon t, \\ \varphi(t) &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

где  $\varphi_0$ ,  $\omega_0$  – начальные угол поворота и угловая скорость точки соответственно. Отметим, что при равноускоренном движении  $\varepsilon > 0$ , а при равнозамедленном  $\varepsilon < 0$ .

#### 2.2.5. Связь линейных и угловых характеристик при движении по окружности

При движении точки по окружности линейные и угловые кинематические характеристики движения связаны между собой. В основе этих связей лежит геометрическое соотношение между длиной дуги и углом поворота (см. рис. 2.7).

$$\Delta S = R\Delta\varphi\tag{2.32}$$

Дифференцируя (2.32) по времени, получим связь между линейной и угловой скоростями:

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}, \text{ т.е. } v = \omega R \quad (2.33)$$

Еще раз дифференцируя по времени полученное соотношение (2.33), получим связь между линейным (тангенциальным) и угловым ускорениями:

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}, \text{ т.е. } a_\tau = \varepsilon R \quad (2.34)$$

Нормальное ускорение  $a_n$  связано с угловой скоростью  $\omega$  соотношением:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (2.35)$$

### 3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Динамика – раздел механики, изучающий причины, вызывающие движение. В основе динамики лежат три закона Ньютона, связанные с понятием силы и массы.

#### 3.1. Сила и масса

Сила является мерой воздействия, оказываемого на данное тело со стороны другого тела или тел, в результате чего, либо изменяется скорость движения этого тела, либо оно деформируется. Оставляя в стороне вопрос о деформации тел, отметим, что под действием одной и той же силы изменения скорости (т.е. ускорение) у различных тел будут, вообще говоря, различными. Это связано с различной инертностью тел, под которой подразумевается их способность приобретать то или иное ускорение под действием данной силы. Сила  $\vec{F}$  – величина векторная: если на тело действуют несколько сил, то результирующее воздействие будет таково, как если бы на тело действовала одна сила, равная векторной сумме исходных сил (рис. 3.1),

$$\vec{F} = \sum_j \vec{F}_j \quad (3.1)$$

Масса – скалярная величина: общая масса нескольких тел



равна сумме масс отдельных тел:

$$m = \sum_j m_j \quad (3.2)$$

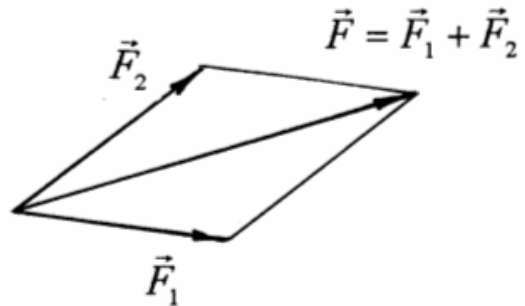


Рис.3.1

### 3.2. Законы Ньютона

#### 3.2.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отчета

При решении физических задач встает вопрос о выборе системы отсчета (см. раздел 1.1). Решение этого вопроса связано с первым законом Ньютона, иначе называемом законом инерции: тело пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения ( $\vec{v} = const$ ), если сумма сил действующих на тело, равна нулю ( $\vec{F} = 0$ ). Системы отчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются инерциальными. Системы отсчета, в которых первый закон Ньютона не выполняется, называются неинерциальными и в дальнейшем рассматриваться не будут.

Существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета, которые отличаются друг от друга только постоянными скоростями относительного движения. Рассмотрим движение материальной точки относительно двух систем отсчета  $K$  и  $K'$  (рис. 3.2). Пусть система  $K'$  движется относительно системы  $K$  с постоянной скоростью  $v_0$ . Если скорость точки относительно системы  $K'$  равна  $v'$ , то относительно системы  $K$  она будет равна сумме скоростей:

$$v = v_0 + v' \quad (3.3)$$

Если движение точки в системе  $K'$  происходит с постоянной скоростью  $v'$ , то и в системе  $K$  скорость точки тоже постоянна. Следовательно, если одна из систем отсчета является инерциальной, то инерциальной является и другая. Первый закон Ньютона

утверждает равноправие всех инерциальных систем: во всех инерциальных системах процессы, происходящие с телом, будут протекать одинаково. В механике этот принцип носит название принципа относительности Галилея. Из этого принципа следует, что с помощью физического эксперимента невозможно отличить различные инерциальные системы друг от друга.

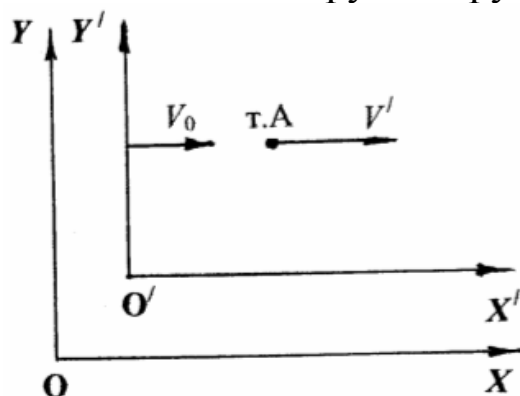


Рис.3.2

### 3.2.2. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона устанавливает количественное соотношение между силой  $\vec{F}$ , действующей на тело массы  $m$ , и ускорением  $\vec{a}$ , приобретаемым телом под действием этой силы.

В инерциальных системах отсчета второй закон Ньютона записывается в виде:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (3.4)$$

Напомним, что в (3.4) сила  $\vec{F}$  - равнодействующая всех приложенных к телу сил. Уравнение (3.4) носит векторный характер, это уравнение показывает также, что ускорение тела  $\vec{a}$  направлено в ту же сторону, что и равнодействующая приложенных к телу сил.

Единица измерения силы в СИ определяется на основе уравнения (3.4) с учетом размерностей массы и ускорения. Размерность силы  $[F] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 = \text{Н}$  (Ньютон). Уравнение (3.4) называется иначе уравнением движения или основным уравнением динамики материальной точки. В неинерциальных системах отсчета второй закон Ньютона в виде (3.4) неприменим.

### 3.2.3. Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона утверждает, что при взаимодействии

двух тел между ними возникают силы, равные по величине и противоположные по направлению. Т.е., если со стороны первого тела на второе действует сила  $\vec{F}_{12}$ , а со стороны второго на первое -  $\vec{F}_{21}$ , то имеет место:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|. \quad (3.5)$$

Следует иметь в виду, что эти силы приложены к разным телам, т.е. каждое тело находится под действием только одной силы.

Применяя третий закон Ньютона к системе из нескольких взаимодействующих тел, получим, что сумма внутренних сил, т.е. сил, действующих между телами внутри системы, будет равна нулю,

$$\sum_j \vec{F}_{jвнут.} = 0. \quad (3.6)$$

Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется замкнутой или изолированной.

### 3.3. Закон сохранения импульса

Второй закон Ньютона можно записать в виде, отличном от (3.4). Используя определение ускорения (1.11) и считая массу тела постоянной, что позволяет внести ее под знак производной, вместо (3.4) получим:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \quad (3.7)$$

Вектор  $m\vec{v}$  называется импульсом или количеством движения тела массой  $m$ .

Рассмотрим систему взаимодействующих между собой тел. Для каждого из этих тел можно записать уравнение типа (3.7), а затем все эти уравнения сложить, получив при этом:

$$\sum_j \frac{d}{dt}(m_j \vec{v}_j) = \frac{d}{dt}(\sum_j m_j \vec{v}_j) = \sum_j \vec{F}_{jвнут.} + \sum_j \vec{F}_{jвнеш.} \quad (3.8)$$

Поскольку сумма внутренних сил равна нулю (см. (3.6)), то уравнение (3.8) для системы тел имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \sum_j m_j \vec{v}_j = \vec{F} \quad (3.9)$$

где  $\vec{F} = \sum_j \vec{F}_{j\text{внеш.}}$  - сумма внешних сил, действующих на систему тел.

Если система тел является замкнутой ( $\vec{F} = 0$ ), то суммарный импульс такой системы остается постоянным.

$$\sum_j m_j \vec{v}_j = \text{const.} \quad (3.10)$$

Полученный вывод (2.10) представляет собой один из фундаментальных законов природы – закон сохранения импульса. Применяя этот закон, следует иметь в виду его векторный характер, т.е. сохранение не только величины, но и направления общего импульса системы.

### 3.4. Силы в природе

#### 3.4.1. Сила тяготения. Первая космическая скорость

Опыт показывает, что между двумя телами с массами  $m_1$  и  $m_2$  существует взаимное притяжение, называемое гравитационным (закон всемирного тяготения). Для точечных масс, т.е. когда размеры тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  значительно меньше расстояния  $r$  между телами, закон всемирного тяготения утверждает, что сила гравитационного взаимодействия пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что масса в данном случае является величиной, характеризующей взаимное притяжение тел (гравитационная масса).

С другой стороны, ускорение, приобретаемое телом под действием силы (3.4) также определяется массой, которая, в отличие от гравитационной называется инерционной. Вообще говоря, нет оснований утверждать, что гравитационная и инерционная массы – одна и та же характеристика тела. Но поскольку на основании опытных данных можно заключить, что обе массы пропорциональны друг другу, выбором соответствующего коэффициента пропорциональности в законе всемирного тяготения (3.11)

можно добиться равенства гравитационной и инерционной масс. Гравитационная постоянная  $\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$  подобрана таким образом, чтобы гравитационная масса измерялась в килограммах, сила гравитационного притяжения в Ньютонах, а расстояние – в метрах. В окончательном виде закон всемирного тяготения имеет вид:

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

$$|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$
(3.12)

где  $\vec{F}_{21}$  - сила тяготения, приложенная к телу 2 (рис.3.3) и направленная в сторону притягивающего тела 1,  $\vec{r}$  - радиус-вектор, проведенный от притягивающего тела 1 к телу 2. Очевидно, что в соответствии с 3-м законом Ньютона, со стороны тела 2 к телу 1 будет приложена сила  $\vec{F}_{12}$ , равная по величине силе (3.12), но направленная противоположно силе  $\vec{F}_{21}$ .

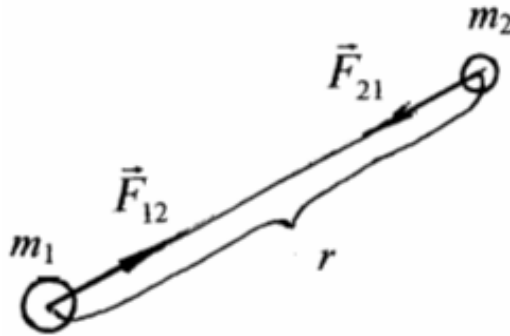


Рис.3.3

Можно показать, что закон всемирного тяготения в виде (3.12), кроме точечных масс, применим и для однородных шарообразных тел, если считать, что вся масса сосредоточена в их центрах. Предполагая, что Земля представляет собой идеальный шар, можно считать, что сила, приложенная к любому телу, находящемуся вблизи ее поверхности, направлена к центру Земли и равна по величине:

$$F = \gamma \frac{mM}{R_3^2} = mg,$$
(3.13)

где  $M$  – масса Земли ( $M \cong 6 \cdot 10^{24}$  кг),  $R_3$  – радиус Земли ( $R_3 \cong 6400$  км),  $m$  – масса тела, находящегося вблизи поверхности Земли. Величина  $g = \gamma M / R_3^2 \cong 9,8 \text{ м/с}^2$  имеет размерность ускорения и называется ускорением свободного падения, которое направлено к центру Земли и одинаково для всех тел вблизи ее поверхности. Сила  $F = mg$  (3.13) называется силой тяготения или силой тяжести. Силу тяжести не следует путать с силой веса – силой, с которой тело давит на опору или растягивает нить, на которой оно подвешено.

Закон всемирного тяготения (3.13) позволяет рассчитать первую космическую скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли, т.е. вращалось с постоянной скоростью вокруг Земли на расстоянии от ее поверхности, много меньшем ее радиуса. Сила тяготения должна сообщать телу нормальное ускорение  $a_n = v^2 / R$ . На основании второго закона Ньютона с учетом (3.13):

$$m \frac{v^2}{R_3} = mg, \quad (3.14)$$

откуда скорость движения тела на орбите вокруг Земли (первая космическая скорость) равна:

$$v = \sqrt{gR_3} \cong 7,9 \text{ км/с}. \quad (3.15)$$

### 3.4.2. Сила трения

При контактном взаимодействии двух тел, движущихся друг относительно друга, между этими телами возникает сила контактного происхождения. Природа этой силы носит электромагнитный характер и обусловлена взаимодействием электронных оболочек атомов взаимодействующих тел.

Проекция силы контактного взаимодействия на нормаль к поверхности представляет собой силу нормального давления  $N$ , а проекция на направление вдоль границы раздела двух тел – силу трения  $F_{\text{тр}}$  (рис.3.4). Отметим, что направление силы трения всегда противоположно скорости тела вдоль границы раздела.

Если одно тело скользит по поверхности другого, то обычно сила трения  $F_{\text{тр}}$  пропорциональна силе нормального давления  $N$ .

$$F_{тр.} = kN, \quad (3.14)$$

где  $k$  – так называемый коэффициент трения (безразмерный), определяемый характером поверхности и материалом тел.

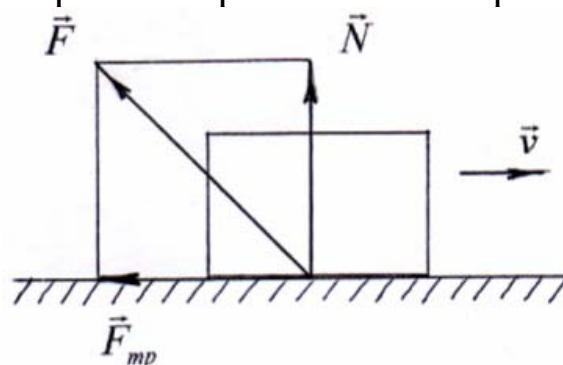


Рис.3.4

Введенная таким образом сила трения называется силой трения скольжения. Из повседневного опыта известно, что для того, чтобы сдвинуть тело, лежащее на шероховатой поверхности, необходимо приложить достаточно большую силу. Сила, удерживающая тело в покое, называется силой трения покоя. Его величина изменяется от нуля до максимального значения, равного силе трения скольжения. На рис. 3.5 представлена зависимость силы трения  $F_{тр.}$  от приложенной к телу силы  $F$ .

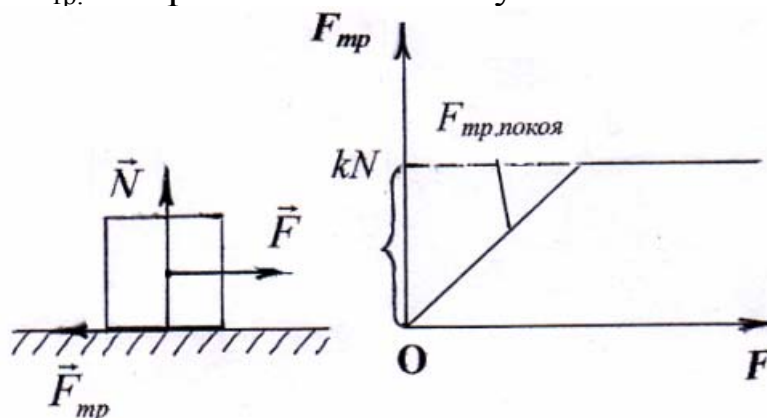


Рис.3.5

### 3.4.3. Сила упругости

Под действием внешних сил различные части тела смещаются друг относительно друга, т.е. тела деформируются. Упругой деформацией называется такая деформация, при которой после прекращения действия внешних сил тело восстанавливает свою первоначальную структуру. Рассмотрим деформацию, возни-

кающую при растяжении (или сжатии) тела. Если первоначальная длина тела  $l$  под действием силы увеличилась до  $l_1$ , то величина  $x = l_1 - l$  называется абсолютным удлинением тела, а величина  $\varepsilon = x/l$  - относительным удлинением.

Если изменение длины достаточно мало, то упругая сила, возникающая в деформированном теле и противодействующая действию внешней силы, пропорциональна величине абсолютного удлинения:

$$F = -kx, \quad (3.15)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности (размерный), называемый коэффициентом упругости или жесткостью тела.

Если внешняя сила равномерно распределена по некоторой поверхности тела  $S$ , то используют понятие нормального напряжения  $\sigma = F/S$ , под действием которого находится тело. При упругих деформациях напряжение  $\sigma$  пропорционально относительному удлинению тела  $\varepsilon$ :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.16)$$

где  $E$  – модуль упругости или модуль Юнга материала тела.

Выражения (3.15) и (3.16), описывающие связь между величиной внешней силы или напряжения и изменением длины тела, выражают закон Гука, который справедлив в пределах допущения упругой деформации. Аналогично (3.15) определяется упругая сила, возникающая в сжатой или растянутой пружине.

## 4. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ.

### ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

#### 4.1. Работа и мощность силы

Рассмотрим элементарное перемещение  $d\vec{r}$ , совершаемое телом под действием силы  $\vec{F}$ . Скалярное произведение двух этих векторов:

$$(\vec{F}d\vec{r}) = F \cdot dr \cdot \cos \alpha = dA \quad (4.1)$$

называется элементарной работой, совершаемой силой  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$ . Здесь  $\alpha$  - угол между направлением силы и направлением перемещения точки ее приложения (рис.4.1). Когда



сила при перемещении изменяется, то работа силы при перемещении точки от начального положения 1 до конечного положения 2 равна интегралу:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r}) \quad (4.2)$$

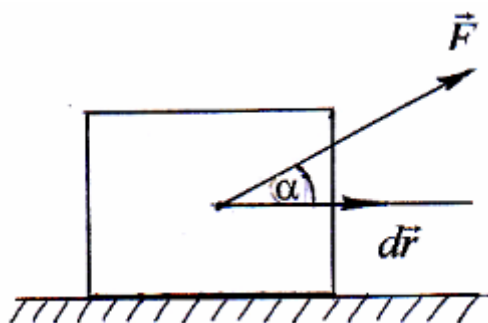


Рис.4.1

Если сила  $F$  остается постоянной по величине и направлению, то из-под знака интеграла можно вынести модуль силы и работа этой силы с учетом (4.1) будет равна:

$$A_{12} = F \int_1^2 \cos \alpha dr \quad (4.3)$$

Под интегралом (4.3) стоит проекция элементарного перемещения  $d\vec{r}$  на направление действия силы. Поэтому этот интеграл равен сумме проекций всех элементарных перемещений на указанное направление.

Примером, иллюстрирующим разобранный случай, служит работа силы тяжести вблизи поверхности Земли при движении тела по произвольной траектории. Поскольку величина силы тяготения, действующей на материальную точку массы  $m$ , постоянна и равна  $F = mg$ , а ее направление при малых перемещениях также можно считать постоянным, то длина проекции траектории на направление силы тяжести равна изменению высоты тела  $\nabla h$  над поверхностью Земли. Следовательно, работа силы тяжести равна  $A = mg\Delta h$ .

Пусть теперь материальная точка совершает одномерное движение вдоль оси  $x$  под действием силы, направление которой постоянно и образует с осью  $x$  угол  $\alpha$ . При этом модуль силы может изменяться как функция координаты  $x$ . Тогда  $\cos \alpha$  можно

вынести из-под знака интеграла (4.2) и выражение для работы примет следующий вид:

$$A = \cos \alpha \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (4.4)$$

Применим этот результат для определения работы, совершаемой при деформации пружины, подчиняющейся закону Гука (3.17). При медленном растяжении пружины необходимо, чтобы в каждый момент времени действующая на пружину внешняя сила  $F$  равнялась бы по абсолютной величине и была бы противоположна по направлению упругой силе (3.17), т.е.  $F=kx$ . Подставляя это выражение для силы в (4.4) и учитывая, что  $\cos \alpha = 1$  (направление силы и перемещение совпадают,  $\alpha = 0$ ), получим, что для того, чтобы удлинить первоначально нерастянутую пружину на  $x$  нужно совершить работу:

$$A = k \int_0^x x dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.5)$$

Очевидно, что если пружина уже была растянута на  $x_1$ , то для растяжения до  $x_2$  необходимо совершить дополнительную работу:

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (4.6)$$

В обоих рассмотренных случаях работа внешней силы оказывается не зависящей от формы траектории, а определяется только начальной и конечной точками траектории.

Если на тело действует несколько сил  $\vec{F}_j$ , то элементарная работа этих сил может быть представлена в виде:

$$dA = \left( \sum_j \vec{F}_j \right) d\vec{r} = \sum_j (\vec{F}_j d\vec{r}) = \sum_j dA_j$$

Иными словами, работа суммы нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из этих сил:

$$A = \sum_j A_j \quad (4.7)$$

Силы, действующие на материальную точку, могут зависеть

от времени, т.е.  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ . Для расчета работы такой силы перемещение  $d\vec{r}$  можно представить в виде  $d\vec{r} = \vec{v}dt$  (см. (2.5)). Тогда работа, совершаемая силой за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , согласно (4.2):

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt. \quad (4.8)$$

Чтобы охарактеризовать способность какой-либо машины совершать работу, важно знать, за какое время эта работа совершается. Так вводится понятие мощности силы: мощностью  $N$  называется работа, совершаемая силой за единицу времени.

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (4.9)$$

Согласно (4.8), если на тело, движущееся в данный момент времени со скоростью  $\vec{v}$ , действует сила  $\vec{F}$ , то мощность этой силы равна:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (4.10)$$

В системе СИ размерность работы  $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$  (Джоуль), а размерность мощности  $[N] = \text{Дж/с} = \text{Вт}$  (Ватт), равный работе в 1 Дж, совершаемой за 1 с.

## 4.2. Кинетическая энергия

Если до начала действия силы тело покоилось, то в результате совершения силой работы тело приобретает некоторую скорость  $\vec{v}$ . Найдем связь между работой силы и скоростью, приобретаемой телом.

Для простоты рассмотрим случай постоянной силы  $F$ , действующей вдоль направления движения тела. Элементарная работа на основании (4.1) и с учетом второго закона Ньютона, записанного в виде (3.7), равна:

$$dA = FdS = \frac{d(mv)}{dt} \cdot vdt = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (4.11)$$

Если до совершения силой работы тело покоилось, то после совершения работы тело приобрело скорость  $v$ , причем:

$$A = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.12)$$

Величина  $T = \frac{mv^2}{2}$  называется кинетической энергией тела.

Таким образом, в результате совершения над покоящимся телом работы  $A$  у него появляется кинетическая энергия  $T = A$ .

Выражение (4.12) можно обобщить и на случай движения тела по произвольной траектории под действием произвольной силы. Воспользовавшись уравнениями (4.2) и (4.8) в общем случае можем получить:

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1, \quad (4.13)$$

т.е. работа силы или равнодействующей всех сил, действующей на материальную точку, идет на изменение ее кинетической энергии. При этом, если  $A > 0$ , кинетическая энергия возрастает ( $T_2 > T_1$ ), а если  $A < 0$ , то убывает. В последнем случае можно сказать, что материальная точка совершает работу над тормозящими ее силами. Следовательно, кинетическая энергия характеризует способность тела совершить работу.

Размерность кинетической энергии в СИ совпадает с размерностью работы, т.е.  $[T] = \text{Дж}$ .

### 4.3. Поле сил. Потенциальная энергия

Пространство, в каждой точке которого действует сила, называется полем сил. Так, вблизи поверхности Земли на тело действует сила тяжести, следовательно, тело находится в поле силы тяготения. Если силы, действующие на тело, не изменяются во времени, то такое поле сил называется стационарным.

Среди различных полей сил существуют такие, в которых работа силы над телом при перемещении тела из начальной точки в конечную точку не зависит от вида траектории тела. Или, другими словами, работа силы по замкнутой траектории равна нулю. Такие поля сил называются консервативными, или потенциальными.

Поля сил, в которых не выполняются вышеуказанные условия, называются неконсервативными. Типичной неконсервативной силой является сила трения. Действительно, поскольку сила трения направлена противоположно скорости тела, ее работа по замкнутой траектории не может быть равной нулю.

Если поле сил является консервативным, то каждой точке поля

можно поставить в соответствие значение некоторой функции  $U(x, y, z)$  такой, что разность значений этой функции в точках 1 и 2 будет равно работе этих сил при переходе тела из точки 1 в точку 2.

$$A_{12} = U_1 - U_2. \quad (4.14)$$

Функция  $U$  называется потенциальной энергией тела во внешнем поле.

Из (4.14) видно, что добавление к функции  $U$  произвольной постоянной величины не изменяет значения работы при переходе тела из точки 1 в точку 2. Поэтому потенциальная энергия  $U$  определяется с точностью до произвольной постоянной, которую выбирают из соображений удобства. Обычно потенциальную энергию считают равной нулю в какой-либо точке пространства, а энергию в других точках отсчитывают от этого условного уровня.

Конкретный вид функции  $U$  зависит от характера поля. В качестве примера определим потенциальную энергию тела в поле тяготения вблизи поверхности Земли. В разделе 4.1 было показано, что работа силы тяготения равна  $A = mg\Delta h = mg(h_1 - h_2)$  и не зависит от вида траектории. Из (4.14) следует, что в этом случае:

$$U = mgh, \quad (4.15)$$

где высота  $h$  отсчитывается от произвольного уровня, например, от поверхности Земли.

Аналогично найдем потенциальную энергию сжатой (растянутой) пружины, подчиняющейся закону Гука. Поскольку, согласно (4.6) работа упругой силы не зависит от формы траектории, то сравнение (4.6) с (4.14) показывает, что потенциальная энергия сжатой (растянутой) пружины равна:

$$U = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.16)$$

При этом произвольная постоянная выбирается из условия, что потенциальная энергия недеформированной пружины ( $x = 0$ ) равна нулю.

Найдем потенциальную энергию тела массы  $m$  в центральном поле сил тяготения, создаваемом массой  $M$ . Работа сил тяготения равна:

$$A_{12} = -\int_1^2 F(r) dr, \quad (4.17)$$

где  $F(r) = \gamma \frac{Mm}{r^2}$  - модуль силы гравитационного притяжения.

Проинтегрировав (4.17), получаем:

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\gamma Mm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\gamma Mm \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \\ &= \gamma \frac{Mm}{r_2} - \gamma \frac{Mm}{r_1} = U_1 - U_2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Следовательно, потенциальная энергия:

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r} + \text{const}. \quad (4.19)$$

Постоянная интегрирования выбирается из условия  $U \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , следовательно:

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (4.20)$$

Физический смысл потенциальной энергии (4.20) состоит в том, что она равна работе, совершаемой полем тяготения, при удалении массы  $m$  с расстояния  $r$  от силового центра на бесконечность. Зная вид функции  $U(x, y, z)$ , можно найти силу, действующую на тело в каждой точке пространства.

Рассмотрим, например, перемещение тела вдоль оси  $x$  на  $dx$ . При этом поле сил совершает работу  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{x} = F_x dx$ . Согласно (4.14) эта работа может быть представлена как убыль потенциальной энергии  $dA = -dU$ . Из сравнения полученных выражений для элементарной работы  $dA$  следует:  $F_x dx = -dU$ . Следовательно:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (4.21)$$

В общем случае можно получить:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, F_y = -\frac{dU}{dy}, F_z = -\frac{dU}{dz}. \quad (4.22)$$

Соотношения (4.22) можно записать в другом, более общем виде, используя понятие оператора  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ , обозначаемого иначе как *grad*.

$$F = -\nabla \cdot U = -\text{grad}U. \quad (4.23)$$

Для центральной силы  $F(r)$ , которая является функцией толь-

ко расстояния  $r$  от некоторого силового центра, можно записать:

$$F(r) = -\frac{dU}{dr}. \quad (4.24)$$

#### 4.4. Закон сохранения и превращения энергии

Пусть на тело действует консервативная сила, определяемая потенциальной энергией  $U$ , и неконсервативная сила. Тогда при переходе тела из точки 1 в точку 2 поля над ним будет совершена работа  $A = A_k + A_{н/к}$ , где  $A_k$  - работа консервативной силы,  $A_{н/к}$  - работа неконсервативной силы. Согласно (4.13)  $A = T_2 - T_1$ , а из (4.14) следует,  $A_k = U_1 - U_2$ . Вычитая друг из друга выражения для  $A$  и  $A_k$ , получим:

$$T_2 + U_2 - (T_1 + U_1) = A_{н/к}. \quad (4.25)$$

Определим полную механическую энергию тела  $E$  как сумму кинетической  $T$  и потенциальной  $U$  энергий:

$$E = T + U, \quad (4.26)$$

тогда вместо (4.25) можно написать:

$$E_2 - E_1 = A_{н/к}, \quad (4.27)$$

т.е. изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил, в этом и заключается закон превращения механической энергии.

Если работа неконсервативных сил равна нулю ( $A_{н/к} = 0$ ), то полная механическая энергия сохраняется:

$$E = T + U = const. \quad (4.28)$$

В том случае, если механическая система состоит из нескольких невзаимодействующих тел, то законы сохранения и превращения энергии (4.27) и (4.28) сохраняют свой вид, если под  $E$  подразумевается энергия, складывающаяся из суммарных кинетических и потенциальных энергий всех тел, составляющих систему.

Согласно (4.28) полная механическая энергия невзаимодействующих тел, на которые действуют только консервативные силы, остается постоянной. Соотношение (4.28) является законом сохранения механической энергии. Если на тела механической системы помимо консервативных сил действуют также неконсер-

вативные силы, например, силы трения, то полная механическая энергия системы не сохраняется: изменение полной механической энергии равно работе неконсервативных сил.

#### 4.5. Пример 1. Центральное соударение двух тел

Применим законы сохранения энергии и импульса к задаче соударения двух тел, ограничиваясь, случаем центрального удара двух шаров. Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, которая проходит через их центры, т. е. шары либо движутся навстречу друг другу, либо один догоняет другой.

Рассмотрим два предельных случая: абсолютно упругое и абсолютно неупругое соударения.

При абсолютно упругом ударе соударяющиеся тела вначале испытывают упругие деформации сжатия. При этом часть кинетической энергии переходит в энергию упругой деформации. После соударения тела расходятся с некоторыми скоростями, причем вся энергия упругой деформации переходит в кинетическую энергию их движения.

Напишем уравнения законов сохранения импульса и механической энергии при абсолютно упругом соударении двух шаров с массами  $m_1$  и  $m_2$ , имеющих начальные скорости  $v_1$  и  $v_2$ , направленные вдоль оси  $x$  (рис.4.2).

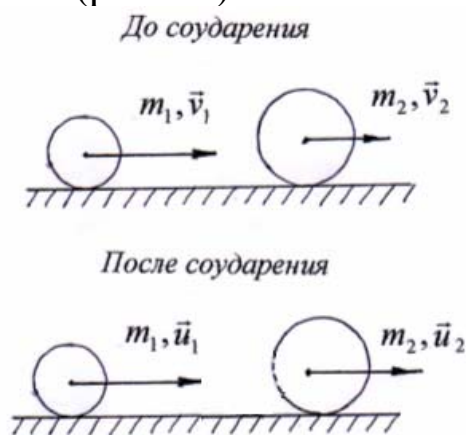


Рис.4.2

$$\begin{aligned}
 m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\
 \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad , \quad (4.29)
 \end{aligned}$$



где  $u_1$  и  $u_2$  – неизвестные скорости шаров после соударения.

Рассмотрим некоторые частные случаи абсолютно упругого соударения.

Если шары имеют одинаковую массу:

$m_1 = m_2 = m$ , то из (4.29) следует, что  $u_1 = v_2$  и  $u_2 = v_1$ , т.е. в результате соударения шары обменялись скоростями.

Случай, когда шар массой  $m_1$ , имеющий скорость  $v_1$ , налетает на неподвижную стенку, можно промоделировать, полагая массу  $m_2 \gg m_1$ . Устремляя в (4.29)  $m_2$  к бесконечности, получим  $u_1 = -v_1$ ,  $u_2 = 0$ , т.е. шар отскочит от стенки с той же скоростью, с какой он налетел на нее.

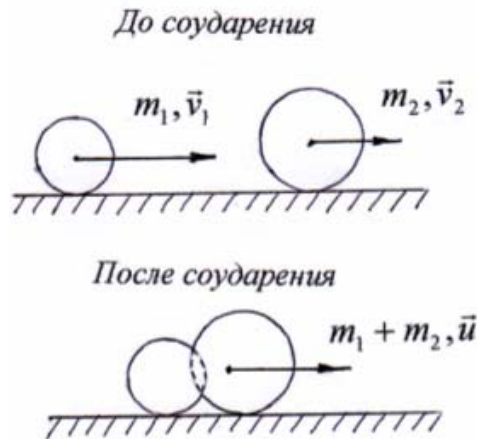


Рис. 4.3

При абсолютно неупругом столкновении оба тела испытывают неупругие деформации, которые сохраняются после удара. После соударения тела движутся с одинаковой скоростью  $u$ , как единое целое (рис.4.3). В случае абсолютно неупругого удара закон сохранения механической энергии не выполняется. Выполняется только закон сохранения импульса.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u, \quad (4.30)$$

где  $u$  – скорость шаров после соударения, которая равна:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.31)$$

При абсолютно неупругом ударе часть кинетической энергии сталкивающихся шаров переходит в тепло. При записи законов сохранения импульса в скалярном виде (4.29), (4.30), следует

обращать внимание на знаки импульсов тел.

#### 4.6. Пример 2. Расчет второй космической скорости

На основе закона всемирного тяготения в разделе 3.4.1 была рассчитана величина первой космической скорости  $v_1$ , т.е. скорости, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли, т.е. двигалось по круговой орбите вокруг Земли с постоянной скоростью на расстоянии от ее поверхности, много меньшем ее радиуса.

Скорость  $v_2$ , которую надо сообщить телу, чтобы оно вышло из сферы земного притяжения, называется второй космической скоростью. Для нахождения этой скорости воспользуемся законом сохранения энергии (сопротивлением воздуха при прохождении тела через атмосферу Земли будем пренебрегать). Полная механическая энергия тела массы  $m$ , состоящая из его кинетической энергии  $T = mv^2 / 2$  и потенциальной энергии в поле сил тяготения Земли  $U = -\gamma Mm / R_3$  (см. (4.20)), постоянная:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{R_3} = \text{const}.$$

На бесконечно большом расстоянии от Земли как кинетическая (мы ищем минимальное значение скорости запуска), так и потенциальная энергии обращаются в нуль, т.е. полная механическая энергия равна нулю. Следовательно, в момент запуска:

$$E = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{R_3} = 0, \quad (4.32)$$

отсюда вторая космическая скорость:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_3}} = \sqrt{2gR_3} = v_1 \sqrt{2} \cong 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \quad (4.33)$$

Отметим, что значение скорости  $v_2$  не зависит от направления, в котором тело запускается с Земли. От направления скорости будет зависеть лишь вид траектории тела. При запуске тела со второй космической скоростью, тело будет двигаться по параболе. При скорости запуска от  $v_1$  до  $v_2$  тело будет двигаться по эллиптической траектории вокруг Земли.

## 5. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 5.1. Поступательное и вращательное движения твердого тела

В предыдущих главах рассматривалось движение тел, при котором их размеры и форма не влияли на характеристики движения, и тела можно было рассматривать как материальные точки (см. раздел 1.2).

Однако часто размеры и форма тела оказывают существенное влияние на характер его движения. Пренебрегая деформацией твердого тела в процессе движения, будем использовать физическую модель абсолютно твердого тела (см. раздел 1.2).

Любое сложное движение твердого тела состоит из простых движений: поступательного и вращательного.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая линия, соединяющая любые точки тела, сохраняет свое направление в пространстве. При поступательном движении тело движется, не поворачиваясь, и перемещение всех точек, за какой либо промежуток времени одинаково. Это значит, что при поступательном движении, зная движение какой-либо одной точки тела, можно определить движение всех остальных точек. Поступательное движение твердого тела описывается движением его центра масс, т.е. сводится к описанию движения материальной точки с помощью второго закона Ньютона (см. раздел 3).

Вращательным движением называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются концентрическими окружностями с центрами на одной прямой, называемой осью вращения. Ось может, как двигаться, так и покоиться. В дальнейшем ограничимся только плоским движением твердого тела, когда во время движения любая точка тела остается в одной и той же плоскости.

Положение твердого тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси полностью определяется углом поворота  $\varphi(t)$ . Угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  твердого тела

определяются точно так же, как и при движении материальной точки по окружности (см. раздел 2.2.4). Когда тело одновременно участвует в поступательном и вращательном движениях, говорят о сложном движении твердого тела.

## 5.2. Понятие центра масс твердого тела.

### Уравнение движения центра масс

При рассмотрении движения твердого тела его всегда можно мысленно разбить на столь малые элементы, чтобы их размеры были малы по сравнению с расстояниями, существенными в данной задаче. Тогда движение этих элементов можно представить как движение материальных точек. Так как твердое тело считается недеформируемым, то все расстояния между отдельными точками тела остаются неизменными. Между элементами, на которые разбито тело, могут действовать силы. Величина этих сил неизвестна, но, являясь внутренними, эти силы не влияют на движение тела как целого, так как их сумма равна нулю. Написав уравнения движения для отдельных элементов тела, можно определить движение всего твердого тела.

Установим закон движения одной фиксированной точки твердого тела, называемой центром масс, или центром инерции. В разделе 3.3 было получено уравнение движения (3.9) для системы взаимодействующих между собой материальных точек:

$$\frac{d}{dt} \sum_j m_j \vec{v}_j = \vec{F}, \quad (5.1)$$

где  $\vec{F}$  - равнодействующая внешних сил, действующих на элементы тела.

Положение центра масс твердого тела в какой-либо неподвижной системе координат определяется радиус-вектором  $\vec{R}_C$ .

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{m}, \quad (5.2)$$

где  $\vec{r}_j$  - радиус-вектор, определяющий положение каждого  $j$ -го элемента тела с массой  $m_j$ ,  $m = \sum_j m_j$  - масса всего тела. Диффе-

ренцируя (5.2) по времени, получим:

$$m\vec{v}_C = \sum m_j \vec{v}_j, \quad (5.3)$$

где  $\vec{v}_C$  - скорость центра масс. Таким образом, твердое тело обладает импульсом, каким обладала бы материальная точка массой  $m$ , равной массе тела, и движущейся со скоростью центра масс тела  $\vec{v}_C$ . Если подставить (5.3) в уравнение (5.1), то получим уравнение движения центра масс твердого тела:

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) аналогично уравнению движения материальной точки. Центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка той же массы под действием всех внешних сил, приложенных к твердому телу.

### 5.3. Момент силы

Из повседневной жизни известно, что для того, чтобы заставить тело вращаться, важна не только величина силы, прикладываемой к телу, но и точка приложения этой силы. Это связано с тем, что причиной вращательного движения является не сама сила, а момент этой силы.

Рассмотрим силу  $\vec{F}$ , приложенную к телу в плоскости, перпендикулярной закрепленной оси вращения. На рис.5.1 точка О является следом оси, которая перпендикулярна плоскости рисунка. Моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки О называется вектор  $\vec{M}$ , модуль, которого равен произведению модуля силы  $\vec{F}$  на ее плечо  $d$ :

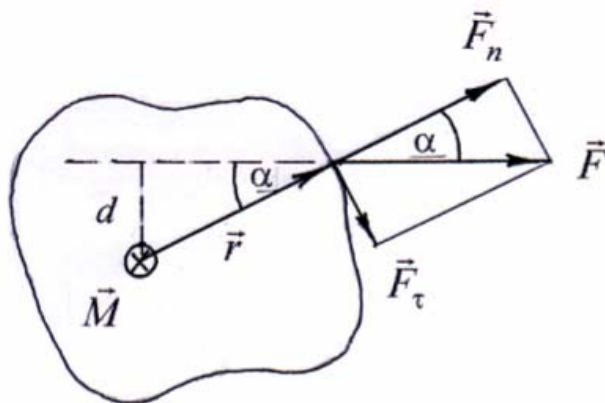


Рис5.1

$$M = F \cdot d = Fr \sin \alpha, \quad (5.5)$$

где  $d = r \sin \alpha$  - плечо силы, равное кратчайшему расстоянию от оси до линии действия силы,  $r$  - расстояние от оси до точки приложения силы,  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ . Вектор  $\vec{M}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат сила  $\vec{F}$  и точка О, т.е. направлен вдоль оси вращения, причем направление вектора  $\vec{M}$  условно определяется по правилу правого винта при вращении тела под действием силы  $\vec{F}$ . На рис. 5.1 вектор  $\vec{M}$  перпендикулярен плоскости рисунка и направлен вниз вдоль оси вращения (что условно отмечено в виде кружка с крестиком внутри).

Момент силы можно представить в виде векторного произведения:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (5.6)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор, проведенный от оси вращения в точку приложения силы (см. рис. 5.1). Поскольку момент силы характеризует способность силы вращать тело, его называют также вращательным моментом.

Силу  $\vec{F}$ , лежащую в плоскости рис. 5.1, можно разложить на две составляющие: касательную к траектории движения точки приложения силы  $\vec{F}_\tau$  и нормальную к этой траектории  $\vec{F}_n$ . Так как при вращении тела вокруг закрепленной оси, траектории всех точек тела являются окружностями, то  $\vec{F}_n$  будет направлена по радиусу, проходя через ось вращения. Следовательно, момент этой силы  $\vec{M}_n = 0$  (плечо этой силы равно нулю). Тогда вращательный момент силы  $\vec{F}$ , вызывающий вращение тела, будет создаваться только тангенциальной составляющей силы  $\vec{F}_\tau$  и может быть представлен в виде:  $M = F_\tau \cdot r$ .

Если на тело действует сила  $\vec{F}$ , не лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то ее можно разложить на две составляющие:  $\vec{F}_\perp$ , лежащую в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и  $\vec{F}_\parallel$ , параллельную оси вращения. Составляющая силы  $\vec{F}_\parallel$  не оказывает влияния на вращательное движение тела (она может лишь искривлять ось вращения). Для составляющей силы

$\vec{F}_\perp$  справедливо выражение для момента силы (5. 5). Если на твердое тело действует несколько сил, то суммарный момент равен алгебраической сумме моментов этих сил:  $M = \sum_j M_j$  (знак момента выбирается в соответствии с правилом правого винта).

#### 5.4. Момент инерции. Теорема Штейнера

Рассмотрим движение некоторого элемента тела, который можно принять за материальную точку, под действием тангенциальной силы  $F_\tau$ . Под действием этой силы точка совершает вращательное движение. Домножив левую и правую части уравнения второго закона Ньютона (3.4) на  $r$ , и используя связь тангенциального и углового ускорений  $a_\tau$  и  $\varepsilon$  (2.34), получим:

$$mr^2\varepsilon = F_\tau \cdot r = M, \quad (5.7)$$

где в правой части уравнения, согласно (5.6), имеем момент силы, действующий на точку. Множитель при угловом ускорении  $\varepsilon$ , стоящий в левой части уравнения вращательного движения материальной точки (5.7), называется моментом инерции материальной точки.

$$I = mr^2. \quad (5.8)$$

Для того чтобы найти момент инерции твердого тела, нужно просуммировать моменты инерции всех составляющих его элементов:

$$I = \sum_j m_j r_j^2, \quad (5.9)$$

где  $r_j$  - расстояние от элемента массой  $m_j$  до оси вращения. Взяв элементы, на которые разбивается твердое тело, бесконечно малыми, можно перейти от суммирования к интегрированию:

$$I = \int r^2 dm, \quad (5.10)$$

что позволяет вычислить моменты инерции различных тел. Для тела произвольной формы это является трудной задачей. Однако для однородного симметричного относительно оси тела задача значительно упрощается. Важно обратить внимание на то, что величина момента инерции зависит от ориентации оси вращения относительно данного тела.

Приведем расчетные формулы для моментов инерции некоторых тел.

1. Момент инерции однородного обода (кольца, обруча) массой  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси, проходящей через центр обода, перпендикулярно плоскости обода:

$$I = mR^2. \quad (5.11)$$

2. Момент инерции однородного цилиндра массой  $m$  и радиуса  $R$  относительно оси, совпадающей с осью цилиндра:

$$I = \frac{mR^2}{2}. \quad (5.12)$$

Поскольку момент инерции цилиндра не зависит от его высоты  $h$ , то формула (5.12) применима и для тонкого диска, если ось проходит через центр его основания и перпендикулярна к нему.

3. Момент инерции тонкого цилиндра или диска (толщина  $h \ll R$  – радиуса диска) массой  $m$  относительно оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости диска:

$$I = \frac{mR^2}{4}. \quad (5.13)$$

4. Для длинного стержня длиной  $l$  и массой  $m$  момент инерции относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню, равен:

$$I = \frac{ml^2}{12}, \quad (5.14)$$

независимо от формы сечения стержня, если только характерный размер сечения стержня  $b \ll l$  – длины стержня.

5. Момент инерции шара радиуса  $R$  и массой  $m$  относительно любой оси, проходящей через его центр, равен:

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (5.15)$$

Нетрудно заметить, что моменты инерции тел, приведенные в формулах (5.11 – 5.15), отвечают осям, проведенным через центры масс этих тел. Значение момента инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс, можно рассчитать с помо-



щью теоремы Штейнера.

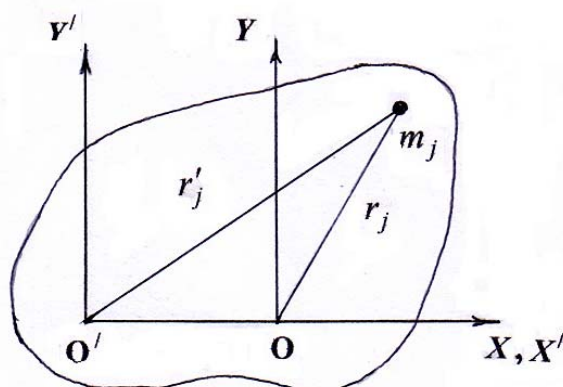


Рис.5.2

Для доказательства теоремы Штейнера рассмотрим произвольное твердое тело (рис. 5.2). Пусть ось  $O$  проходит через центр масс этого тела перпендикулярно плоскости рисунка, а ось  $O'$ , параллельная оси  $O$ , находится на расстоянии  $a$  от нее. Выберем начала координат систем отсчета  $(x, y)$  и  $(x', y')$  в точках  $O$  и  $O'$ , причем оси  $x$  и  $x'$  совместим. Тогда между осями  $y$  и  $y'$  будет расстояние  $a$ . Пусть элемент массы  $m_j$  находится на расстояниях  $r_j$  и  $r'_j$  от осей  $O$  и  $O'$  и имеет координаты  $x_j, y_j$  относительно точки  $O$  и координаты  $x'_j, y'_j$  относительно точки  $O'$ . Тогда:  $r_j^2 = x_j^2 + y_j^2, r_j'^2 = x_j'^2 + y_j'^2 = (x_j + a)^2 + y_j^2$ , так как  $x'_j = x_j + a, y'_j = y_j$ .

Момент инерции тела относительно оси  $O$ , проходящей через центр масс тела:

$$I_0 = \sum_j m_j r_j^2 = \sum_j m_j (x_j^2 + y_j^2). \quad (5.16)$$

Момент инерции относительно оси  $O'$ :

$$I = \sum_j m_j r_j'^2 = \sum_j m_j [(x_j + a)^2 + y_j^2]. \quad (5.17)$$

Раскрывая в (5.17) скобки и группируя члены, получим:

$$I = \sum_j m_j (x_j^2 + y_j^2) + 2a \sum_j m_j x_j + a^2 \sum_j m_j. \quad (5.18)$$

Первый член в выражении (5.18) совпадает с выражением (5.16),

т.е. представляет собой момент инерции  $I_O$  относительно оси  $O$ , проходящей через центр масс. В третьем члене  $\sum_j m_j = m$  - масса

тела. Для того чтобы определить величину второго члена, вспомним формулу (5.2) для координат центра масс. В нашем случае центр масс находится на оси  $O$ , следовательно, координата центра масс по оси  $x$  равна нулю, т.е.  $x_C = 0$ . Согласно (5.2),

$x_C = \left( \sum_j m_j x_j \right) / m$ , следовательно, второй член в (5.18) равен нулю. В результате выражение (5.18) принимает вид:

$$I = I_0 + ma^2. \quad (5.19)$$

Полученная формула (5.19) представляет собой теорему Штейнера: момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

## 5.5. Основное уравнение динамики вращательного движения

Разобьем твердое тело на малые элементы и запишем для каждого из этих элементов уравнение движения, взяв за основу уравнение вращательного движения (5.7) материальной точки:

$$I_j \varepsilon = M_j, \quad (5.20)$$

где  $I_j = m_j r_j^2$  - момент инерции  $j$ -го элемента твердого тела с массой  $m_j$ , находящегося на расстоянии  $r_j$  от оси вращения,  $M_j$  - суммарный момент внешних и внутренних сил, действующих на этот элемент.

Просуммировав уравнения типа (5.20), записанные для всех элементов твердого тела, и учитывая, что угловое ускорение  $\varepsilon$  одинаково для всех элементов, получим:

$$I \varepsilon = M, \quad (5.21)$$

где  $I = \sum_j I_j = \sum_j m_j r_j^2$  - момент инерции твердого тела (5. 9),

$M = \sum_j M_j$  - суммарный момент только внешних сил, действующий

щих на тело, так как сумма моментов внутренних сил равна нулю.

Уравнение (5.21) называется основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела. Так как векторы момента силы  $\vec{M}$  и углового ускорения  $\vec{\epsilon}$  при вращении твердого тела вокруг закрепленной оси направлены вдоль этой оси, а момент инерции  $I$  является скалярной величиной, то уравнение (5.21) можно записать в векторной форме:

$$I\vec{\epsilon} = \vec{M}. \quad (5.22)$$

Очевидно, что направления момента силы и углового ускорения совпадают. Следует обратить внимание на сходство основного уравнения динамики вращательного движения с уравнением второго закона Ньютона (3.4). При вращательном движении твердого тела массу  $m$  заменяет момент инерции тела  $I$ , на месте линейного ускорения  $\vec{a}$  находится угловое ускорение  $\vec{\epsilon}$ , а роль силы  $\vec{F}$  играет момент силы  $\vec{M}$ . Если масса  $m$  является мерой инертности тела при поступательном движении, то момент инерции  $I$  является мерой инертности тела при вращательном движении.

## 6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

### 6.1. Момент импульса. Уравнение моментов

Введем понятие момента импульса на примере материальной точки, движущейся прямолинейно. Пусть материальная точка массы  $m$  имеет импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ , лежащий в плоскости, перпендикулярной некоторой оси, и находится на расстоянии  $\vec{r}$  от нее (рис. 6.1). Моментом импульса материальной точки относительно этой оси называется векторная величина:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]. \quad (6.1)$$

Модуль момента импульса равен:  $L = pl = rp \sin \alpha$ , где  $p$  – модуль импульса,  $l = r \sin \alpha$  – плечо импульса, равное кратчайшему расстоянию от оси до линии импульса,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ . Направление момента импульса  $\vec{L}$  определяется по правилу правого винта при его вращении в направлении вектора  $\vec{p}$ . На рис.6.1 вектор момента импульса  $\vec{L}$  направлен перпендику-

лярно плоскости рисунка вниз вдоль оси (отмечено кружочком с крестиком внутри).

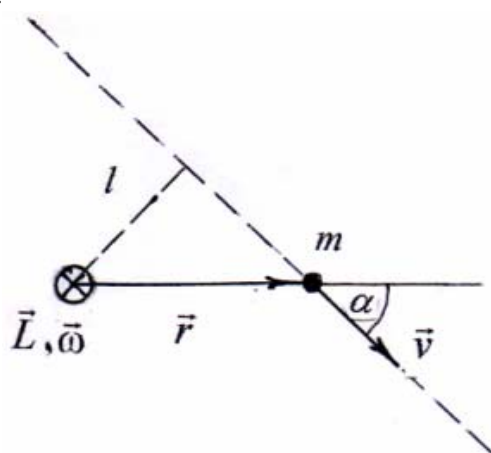


Рис.6.1

Определяя момент импульса, следует подчеркнуть, что его не следует связывать только с вращательным движением: независимо от формы траектории частица может обладать моментом импульса. В дальнейшем мы ограничимся только случаями, когда движение точек происходит в плоскости, перпендикулярной оси, причем будем считать ось жестко закрепленной. В этом случае вектор момента импульса всегда будет направлен вдоль этой оси.

Найдем связь между моментом внешних сил, действующих на частицу, и ее моментом импульса. Для этого воспользуемся вторым законом Ньютона, записанном в виде (3.7):  $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ . Выберем

какую-либо ось, перпендикулярную плоскости движения частицы. Расстояние от частицы до оси, в данный момент времени, определяется радиус-вектором  $\vec{r}$  (рис. 6.2). Умножив обе части уравнения (3.7) векторно на  $\vec{r}$ , после преобразований получим:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}. \quad (6.2)$$

То есть производная по времени от момента импульса  $\vec{L}$  материальной точки относительно какой-либо неподвижной оси равна моменту  $\vec{M}$  сил, действующих на материальную точку, относительно этой оси. Уравнение (6.2), полученное для материальной точки, называется уравнением моментов.

Уравнение (6.2) справедливо для произвольного движения

частицы относительно любой произвольной выбранной оси. Для случая движения по окружности, когда ось вращения проходит через ее центр, радиус-вектор  $\vec{r}$  вращающейся частицы остается постоянным по величине, а его направление всегда перпендикулярно к направлению вектора импульса. В этом случае момент импульса частицы, с учетом выражений (2.32) и (5.8), по модулю равен:

$$L = mvr = mr^2\omega = I\omega, \quad (6.3)$$

а в векторной форме:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (6.4)$$

т. е. направление вектора  $\vec{L}$  совпадает с направлением угловой скорости  $\vec{\omega}$  (см. рис. 6.2).

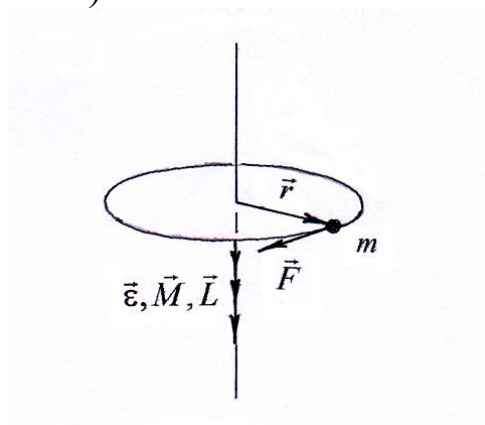


Рис.6.2

Определим момент импульса твердого тела при его вращении относительно закрепленной оси как векторную сумму моментов импульсов  $\vec{L}_j = I_j\vec{\omega}$  всех элементарных частиц, составляющих это тело. Учитывая, что вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  для каждой частицы один и тот же, получим  $\vec{L} = \sum_j \vec{L}_j = \sum_j (I_j\vec{\omega}) = \left( \sum_j I_j \right) \cdot \vec{\omega} = I\vec{\omega}$ , где  $I$  – момент инерции твердого тела. Следовательно, момент импульса твердого тела записывается точно в таком же виде, как и для материальной точки (6.4)

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}. \quad (6.5)$$

Продифференцируем момент импульса твердого тела по

времени, считая  $I = \text{const}$ ,  $\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ . Вспоминая основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела (5.22), записанное в виде  $I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$ , получим, что основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно закрепленной оси также может быть записано в форме уравнения моментов, как и для материальной точки (6.2):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (6.6)$$

где  $\vec{L}$  - момент импульса твердого тела,  $\vec{M}$  - момент внешних сил.

## 6.2. Закон сохранения момента импульса

Если внешние силы, действующие на тело или систему тел, отсутствуют (т. е. система тел является замкнутой, см. раздел 3.3) или суммарный момент внешних сил относительно некоторой оси равен нулю (при этом система тел не обязательно является замкнутой), то из уравнения моментов (6.6) следует, что:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \vec{L} = \text{const}, \quad (6.7)$$

что выражает закон сохранения момента импульса: момент импульса системы тел относительно некоторой оси остается постоянным, если суммарный момент внешних сил относительно этой оси равен нулю. Пользуясь выражением (6.5), запишем закон сохранения момента импульса в виде:

$$I\vec{\omega} = \text{const}. \quad (6.8)$$

Если ось вращения остается неподвижной, то векторы  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  могут изменяться только по величине, но не по направлению, поэтому уравнения (6.7) и (6.8) можно записывать в скалярной форме:

$$L = I\omega = \text{const}. \quad (6.9)$$

В качестве иллюстрации того, что требование замкнутости системы тел не является обязательным для выполнения закона сохранения импульса, рассмотрим поле центральных сил (см. раздел 4.3). Так как линии действия центральных сил всегда проходят через некоторую определенную точку  $O$ , называемую си-

ловым центром, то моменты этих сил относительно точки О равны нулю. Отсюда следует, что момент импульса системы тел, находящихся в поле центральных сил, относительно точки О должен сохраняться, т.е.  $\vec{L} = I\vec{\omega} = const$ .

### 6.3. Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим вращение материальной точки вокруг неподвижной оси. Так как линейная и угловая скорости вращения связаны соотношением (2.33), то для кинетической энергии точки получим:  $T_j = m_j v_j^2 / 2 = m_j r_j^2 \omega^2 / 2 = I_j \omega^2 / 2$ , где  $I_j$  - момент инерции материальной точки, находящейся на расстоянии  $r_j$  от оси вращения.

Полная кинетическая энергия системы точек будет равна сумме кинетических энергий всех точек системы, следовательно:

$$T = \sum_j T_j = \sum_j I_j \frac{\omega^2}{2} = \left( \sum_j I_j \right) \frac{\omega^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (6.10)$$

Приведенные рассуждения для системы точек можно распространить и на случай вращения твердого тела относительно неподвижной оси. Таким образом, формула (6.10) выражает величину кинетической энергии вращения твердого тела.  $I$  - момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

### 6.4. Работа внешних сил при вращении твердого тела

Пусть внешняя сила, приложенная к некоторой точке твердого тела на расстоянии  $r$  от оси вращения, направлена по касательной к окружности, по которой движется точка приложения силы. Пусть за время  $dt$  точка приложения силы перемещается по дуге окружности на расстояние  $dS$  в направлении действия силы  $F$ . Элементарная работа, совершаемая силой  $F$  за время  $dt$ , будет равна  $dA = F \cdot dS$ . Поскольку длина дуги  $dS$  связана с углом поворота  $d\varphi$  тела соотношением  $dS = r d\varphi$ , то  $dA = Fr d\varphi = M d\varphi$ , где  $M = Fr$  - момент силы  $F$ . Если направления действия силы и перемещения противоположны, то элементарная работа  $dA = -M d\varphi$ , т.е. отрицательна. Оба выражения для работы можно

объединить в одно, введя угол  $\alpha$  между направлениями векторов  $\vec{M}$  и  $d\vec{\varphi}$ , тогда:

$$dA = Md\varphi \cos \alpha. \quad (6.11)$$

При вращении тела вокруг закрепленной оси угол  $\alpha$  может принимать только два значения. Напомним, что направление вектора углового перемещения  $d\vec{\varphi}$  совпадает с направлением угловой скорости  $\vec{\omega}$  (см. раздел 2.2.4), а векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{M}$  направлены вдоль оси вращения. Если векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{M}$  направлены в одну сторону ( $\alpha = 0$ ), то совершается положительная работа, если направления их противоположны ( $\alpha = \pi$ ), то работа отрицательна.

В том случае, если сила, совершающая работу, направлена под произвольным углом к оси вращения, формула для работы силы при вращательном движении не будет отличаться от (6.11). Это объясняется тем, что моменты всех составляющих произвольной силы, кроме тангенциальной, будут равны нулю при вращении тела вокруг закрепленной оси (см. раздел 5.2, рис. 5.1).

Так как работа  $dA$  совершается за время  $dt$ , то развиваемая мощность  $N$  будет равна:

$$N = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M\omega. \quad (6.12)$$

Работа, совершаемая за конечный интервал времени от  $t_1$  до  $t_2$ , определяется с помощью интегрирования элементарной работы:

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi = \int_{t_1}^{t_2} M\omega dt, \quad (6.13)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы поворота твердого тела в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , соответственно.

Если момент силы, действующий на тело, постоянен ( $M = \text{const}$ ), то величину  $M$  можно вынести за знак интеграла:

$$A = M \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M\Delta\varphi. \quad (6.14)$$

Воспользовавшись основным уравнением динамики вращательного движения (5.21), найдем связь между работой и кинетической энергией при вращательном движении:



$$\begin{aligned}
 dA &= Md\varphi = I \frac{d\omega}{dt} d\varphi = Id\omega \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \\
 &= I\omega d\omega = Id\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

т.е. совершаемая за время  $dt$  работа идет на изменение кинетической энергии вращения. Интегрируя (6.15) по времени от  $t_1$  до  $t_2$ , получим:

$$A_{12} = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = T_2 - T_1, \tag{6.16}$$

что аналогично формуле (4.13) для поступательного движения.

### 6.5. Кинетическая энергия сложного движения

Во многих случаях тело одновременно с вращением может двигаться и поступательно. Такое движение называется сложным. Одной из разновидностей сложного движения является плоское движение, особенности которого рассматривались в начале раздела 5.

Рассчитаем кинетическую энергию тела, совершающего плоское движение. Такое движение можно в каждый момент времени представить как вращение вокруг оси, проходящей через точку, которая в этот момент времени покоится. Например, при качении колеса покоится точка обода, соприкасающаяся с дорогой. Такая ось называется мгновенной осью вращения. Нам важно то, что в каждый момент времени движение тела можно представить только как вращение вокруг этой оси. Тогда, согласно (6.10), полная кинетическая энергия тела в любой момент времени будет равна  $T = I' \cdot \omega^2 / 2$ , где  $\omega$  - угловая скорость вращения тела, не зависящая от выбора оси вращения,  $I'$  - момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения. Если центр масс находится на расстоянии  $R$  от мгновенной оси вращения, то по теореме Штейнера (см. раздел 5.3) момент инерции  $I'$  можно выразить через момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс  $I_0$ , с помощью соотношения  $I' = I_0 + mR^2$ , где  $m$  - масса тела. Подставив это выражение в формулу для кинетической энергии, и учтя, что

$v = \omega R$  (2.33), где  $v$  – скорость центра масс тела, получим:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}, \quad (6.17)$$

т.е. полная кинетическая энергия плоского движения твердого тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс тела и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр масс.

### 6.6. Пример. Расчет скорости тела, скатывающегося с наклонной плоскости

Пусть тело вращения массы  $m$  и радиуса  $R$  с моментом инерции  $I$  относительно центра масс тела скатывается без скольжения с наклонной плоскости высоты  $h$  (рис.6.3). Начальная скорость тела равна нулю. Требуется определить скорость тела в конце наклонной плоскости. Решим эту задачу, используя закон сохранения механической энергии, поскольку сила трения, обеспечивающая скатывание без проскальзывания, работы не совершает. В начальный момент кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия равна  $mgh$ . В конце скатывания потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия, равная сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений равна  $\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$ , где  $v$  – скорость поступательного движения центра масс тела. Поскольку полная механическая энергия сохраняется, можно записать:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (6.18)$$

В силу отсутствия проскальзывания скорость  $v$  и угловая скорость  $\omega$  связаны соотношением  $v = \omega R$ . Выражая отсюда  $\omega$  и подставляя в (6.18), получим скорость  $v$  в конце скатывания:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}}. \quad (6.19)$$

Отметим, что скорость скатывающегося тела всегда меньше

скорости соскальзывающего без трения тела в силу его большей инерционности.

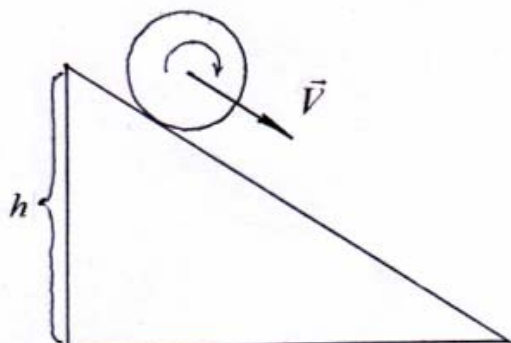


Рис.6.3

## 7. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Среди явлений природы часто наблюдаются периодические, т.е. регулярно повторяющиеся процессы: смена дня и ночи, вращение Луны вокруг Земли, колебания маятника часов и т.д.

Колебательные процессы, имея различную физическую природу, обладают общими чертами и подчиняются одинаковым закономерностям. В дальнейшем ограничимся рассмотрением механических колебательных систем.

В любой колебательной системе можно указать некоторую физическую величину, отклонение которой от равновесного значения зависит от времени по периодическому закону. Определение периодической функции таково: если  $f(t)$  - периодическая функция времени с периодом  $T$ , то для любого  $t$  выполняется соотношение:

$$f(t + T) = f(t). \quad (7.1)$$

Таким образом, период колебаний  $T$  равен времени, через которое движение полностью повторяется.

Например, в случае колебаний грузика, подвешенного на пружине, колеблющейся величиной является смещение грузика из положения равновесия.

Колебания, которые совершает система около положения равновесия после того, как она была выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе, называются собственными, или свободными, колебаниями.

Во всякой реальной колебательной системе существует не-

кое сопротивление колебательному движению. В такой системе колебания прекращаются с течением времени (затухают). Такие колебания называются затухающими. Если на колебательную систему действует некоторая внешняя “сила”, изменяющаяся по времени по периодическому закону, то колебания называются вынужденными.

### 7.1. Гармонические колебания

Закономерности и характеристики колебательного движения рассмотрим на примере гармонических колебаний.

Гармонические колебания представляют собой периодический процесс, при котором смещение колеблющегося тела происходит по закону косинуса или синуса. Примером такого процесса может служить изменение длины проекции радиус-вектора  $\vec{A}$ , совершающего вращение относительно начала координат с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  (рис.7.1). В произвольный момент времени  $t$ , угол  $\varphi$ , на который повернулся радиус-вектор  $\vec{A}$ , равен  $\varphi = \omega_0 t$  и величины проекций вектора  $\vec{A}$  на оси  $x$  и  $y$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ y(t) &= A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Стоящая в скобках величина  $\omega_0 t + \varphi_0$  называется фазой колебаний - это аргумент функции в данный момент времени. Значение фазы в момент  $t = 0$  называется начальной фазой колебаний  $\varphi_0$ . Различие между колебаниями, происходящими по закону синуса или косинуса, заключается только в величине начальной фазы.

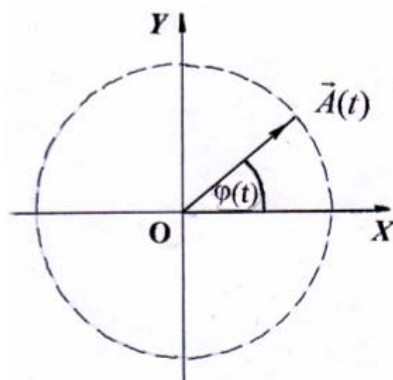


Рис.7.1

Из рассмотрения зависимостей  $x(t)$  и  $y(t)$  (7.2) видно, что максимальное значение смещения равно длине радиус – вектора  $A = |\vec{A}|$ . Это максимальное значение  $A$  называется амплитудой колебаний (рис.7.2). Из определения периодической функции (7.1) можно найти, что период гармонических колебаний равен  $T = 2\pi/\omega_0$ . В колебательном движении угловая скорость  $\omega$  носит название круговой частоты колебаний, а ее размерность  $[\omega] = \text{рад/с}$ . Кроме круговой частоты  $\omega$  часто пользуются понятием циклической частоты колебаний  $\nu$ ,  $\nu = 1/T = 2\pi/\omega$ , которая равна числу колебаний, совершаемых за единицу времени. Частота  $\nu$  измеряется в Герцах:  $[\nu] = 1/\text{с} = \text{Гц}$ . Важнейшим свойством гармонических колебаний является независимость периода колебаний от их амплитуды.

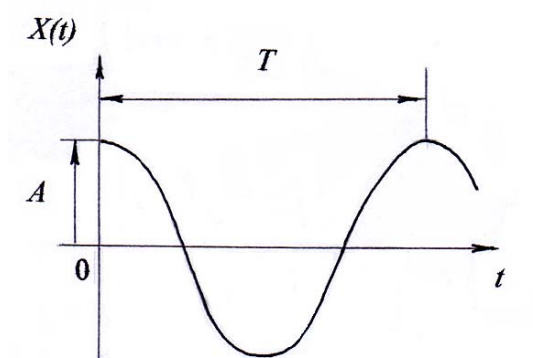


Рис.7.2

Если смещение точки из положения равновесия  $x(t)$  описывается уравнением (7.2), то скорость и ускорение точки также будут изменяться по гармоническому закону. Действительно, пользуясь определениями скорости и ускорения, получим:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Амплитуды колебаний скорости и ускорения составляют соответственно:  $v_{\max} = \omega_0 A$ ,  $a_{\max} = \omega_0^2 A$ .

Отметим, что частота изменения скорости и ускорения при гармонических колебаниях одинакова. Однако, колебания скоро-

сти и ускорения оказываются сдвинутыми по фазе относительно колебаний смещения:

$$v(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \quad (7.4)$$

$$a(t) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi).$$

Сравнивая между собой  $x(t)$  из (7.2) и  $a(t)$  из (7.3), можно получить соотношение между  $d^2x/dt^2$  и  $x(t)$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.5)$$

Полученное уравнение называется уравнением гармонических колебаний и представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что решением уравнения (7.5) как раз и является функция:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , где  $A, \varphi_0$  - произвольные постоянные, определяемые начальными условиями, а  $\omega_0$  называется частотой собственных колебаний системы.

Любой гармонический процесс, независимо от его физической природы, описывается уравнением типа (7.5). И наоборот, любое решение, удовлетворяющее этому уравнению, описывает гармонический процесс.

Умножая левую и правую части уравнения (7.5) на массу колеблющейся точки  $m$  и вспоминая, что  $ma = F$ , получим  $F = -m\omega_0^2 x$ . Тем самым устанавливается связь между силой, действующей на точку, и ее смещением при гармонических колебаниях: при отклонениях тела от положения равновесия на него действует сила, пропорциональная величине смещения, но направленная в противоположную сторону. Эту силу называют возвращающей силой.

Примером гармонических колебаний могут служить колебания грузика на пружине. Пусть на пружине жесткостью  $k$  подвешен грузик массой  $m$ . В положении равновесия пружина растянута на длину  $x_0$  за счет действия силы тяжести:  $mg = kx_0$  (рис.7.3). При смещении грузика от положения равновесия на  $x$

со стороны пружины на тело будет действовать сила  $F = -k(x_0 + x)$ . Знак минус означает, что сила направлена в сторону, противоположную смещению. По второму закону Ньютона:  $ma = mg - k(x_0 + x)$ . Пользуясь равенством сил в положении равновесия, получим уравнение колебаний в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (7.6)$$

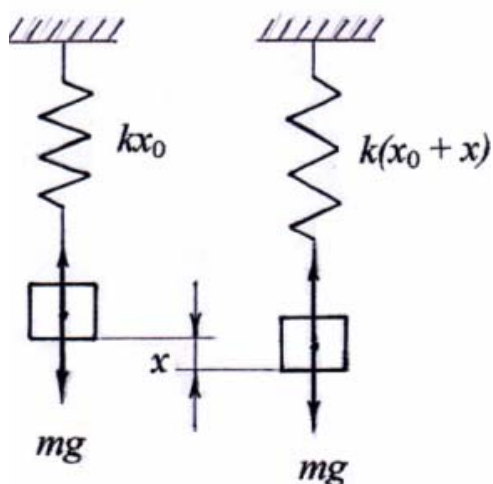


Рис. 7. 3

Сравнивая уравнения (7.5) и (7.6), получим выражение для частоты и периода собственных колебаний.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7.7)$$

Выражения (7.7) верны только при малых отклонениях  $x$  от положения равновесия, так как использовавшийся при решении этой задачи закон Гука для упругих сил справедлив только при малых значениях  $x$ .

## 7.2. Физический и математический маятники

Физическим маятником называется твердое тело, закрепленное на горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс. Тело, выведенное из положения равновесия и представленное себе самому, будет совершать колебания относительно данной оси. Пусть ось проходит через точку  $O$  (рис. 7.4), перпендикулярно плоскости колебаний, а центр масс тела находится в точ-

ке С на расстоянии  $a$  от оси вращения. Если тело отклонить на угол  $\varphi$  от положения равновесия, то на него будет действовать вращательный момент силы тяжести  $M = mga \sin \varphi$ , возвращающий тело в состояние равновесия. При этом тело начнет двигаться с угловым ускорением  $\varepsilon$ , определяемым основным уравнением динамики вращательного движения (5.21)  $I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \sin \varphi$ , где

$I$  – момент инерции тела относительно оси вращения. При малых углах  $\varphi$ , когда  $\sin \varphi \approx \varphi$ , уравнение колебаний физического маятника примет вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I} \varphi = 0. \quad (7.8)$$

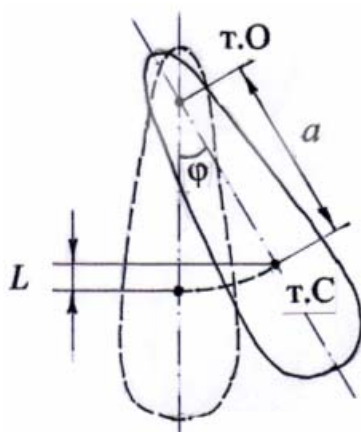


Рис.7.4

Сравнивая уравнения (7.8) и (7.5) между собой, получим выражения для частоты и периода собственных колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}, \quad T_\varphi = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (7.9)$$

Математическим маятником называется тело небольших размеров (приближение материальной точки), подвешенное на длинной невесомой и нерастяжимой нити, т.е. размерами тела по сравнению с длиной нити можно пренебречь. Если длина нити  $l$ , а масса тела  $m$ , то момент инерции тела относительно точки подвеса  $I = ml^2$ . Подставляя это значение в формулы (7.9) и учиты-



вая, что  $a = l$ , получим для малых колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T_{M.} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7.10)$$

Сравнение формул (7.9) и (7.10) приводит к выводу, что период колебаний физического маятника равен периоду колебаний математического маятника с длиной:

$$l_{np.} = \frac{I}{ma}. \quad (7.11)$$

Величина  $l_{np.}$  называется приведенной длиной физического маятника. Пользуясь теоремой Штейнера (5.19) можно доказать, что всегда  $l_{np.} > a$ . Действительно,  $l_{np.} = I/ma = (I_0 + ma^2)/ma = a + I_0/ma$ , где  $I_0$  - момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс. Поскольку момент инерции  $I_0$  - величина положительная, то приведенное неравенство выполняется.

### 7.3. Энергия колебательного движения

В колебательных системах, находящихся в поле консервативных сил, полная механическая энергия колебаний сохраняется. Однако кинетическая и потенциальная энергии в процессе колебаний непрерывно изменяются, переходя друг в друга. Рассмотрим обмен между двумя формами энергии на примере колебаний физического маятника (рис.7. 4).

Согласно уравнению колебаний (7.8):

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (7.12)$$

где  $\varphi_0$  - угловая амплитуда колебаний,  $\omega_0 = \sqrt{mga/I}$  - собственная круговая частота колебаний,  $\alpha_0$  - начальная фаза колебаний.

Кинетическая энергия физического маятника при колебаниях определяется выражением:

$$T(t) = \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{1}{2} I \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{I\omega_0^2 \varphi_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0). \quad (7.13)$$

Потенциальная энергия  $U = mgh$ , где  $h = a(1 - \cos \varphi)$  - изме-

нение высоты центра масс относительно положения равновесия (см. рис. 7.4). При малых углах отклонения  $\varphi$   $\cos \varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ , следовательно, потенциальная энергия физического маятника при колебаниях:

$$U(t) \cong \frac{mga\varphi^2}{2} = \frac{mga}{2} \varphi_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0). \quad (7.14)$$

Используя выражение (7.9) для  $\omega_0$  потенциальную энергию (7.14) можно представить в виде:

$$U(t) = \frac{I\omega_0^2 \varphi_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0). \quad (7.15)$$

Поскольку  $\cos^2(\omega_0 t + \alpha_0) = [1 - \cos 2(\omega_0 t + \alpha_0)]/2$ , можно заключить, что  $T$  и  $U$  изменяются по времени с частотой, в два раза большей частоты собственных колебаний, т.е. за один период колебаний каждая из энергий успевает дважды перейти в другой вид энергии. Действительно, потенциальная энергия, имея максимальное значение при амплитудном отклонении тела от положения равновесия, дважды за период полностью переходит в кинетическую энергию при прохождении телом положения равновесия. Сложив оба выражения для энергий (7.13) и (7.15), получим, что полная механическая энергия:

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{I\omega_0^2 \varphi_0^2}{2} [\sin^2(\omega_0 t + \alpha_0) + \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0)] = \\ &= \frac{I\omega_0^2 \varphi_0^2}{2} = \text{const} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Т.е. при гармонических колебаниях полная энергия остается постоянной и пропорциональна квадрату амплитуды смещения тела из положения равновесия.

Отметим, что максимальное значение кинетической и потенциальной энергий при колебаниях одинаковы, т.е.  $T_{MAX.} = U_{MAX.}$ , а средние значения энергий за период колебаний  $\langle T \rangle = \langle U \rangle = E/2$ , т.е. равны половине полной энергии колебаний.

### 7.4. Затухающие колебания

Если колебания происходят в какой-либо внешней среде, оказывающей сопротивление движению, то колебания происходят с затуханием.

В простейшем случае сила сопротивления  $F_{\text{СОПР.}}$  пропорциональна величине скорости:  $F_{\text{СОПР.}} = -bv = -b \frac{dx}{dt}$ , где коэффициент  $b$  называется коэффициентом сопротивления. Уравнение второго закона Ньютона при наличии возвращающей силы (см. раздел 7.1) и силы сопротивления имеет вид:  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - m\omega_0^2 x$ . Применив обозначение  $2\beta = \frac{b}{m}$ , последнее уравнение перепишем в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.17)$$

Это дифференциальное уравнение описывает затухающие колебания. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что решением уравнения (7.17) является функция:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (7.18)$$

где амплитуда:

$$A(t) = A_0 \exp(-\beta t) \quad (7.19)$$

экспоненциально уменьшается с течением времени.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (7.20)$$

частота затухающих колебаний. Начальная амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\alpha_0$  определяются начальными условиями (рис. 7.5). В соответствии с видом функции  $A(t)$  колебательное движение можно рассматривать как гармоническое колебание частоты  $\omega$  с амплитудой  $A(t)$ , изменяющейся по экспоненте. Скорость затухания колебаний определяется величиной  $\beta = b/2m$ , которая называется коэффициентом затухания. Коэффициент затухания обратен по величине промежутку времени  $\tau$ , за который амплитуда колебаний уменьшается в “е” раз. Действительно, при  $\beta\tau=1$  ам-

плитуда  $A(\tau) = A_0/e = A_0/2,72$ . Для характеристики затухающих колебаний часто пользуются понятием логарифмического декремента затухания  $\lambda$ , который определяется как натуральный логарифм отношения значений амплитуд, отличающихся по времени измерения на период колебаний  $T$ .

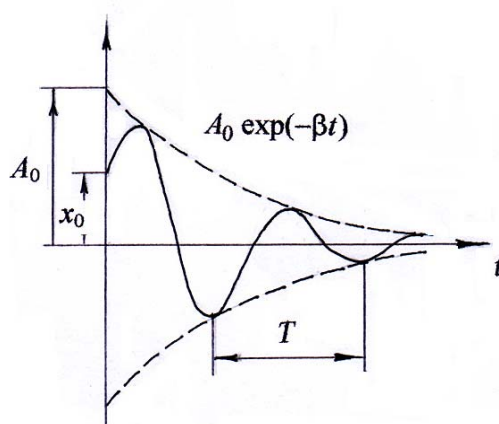


Рис.7.5

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln(\exp \beta T) = \beta T. \quad (7.21)$$

С использованием логарифмического декремента затухания  $\lambda$  амплитуда колебаний может быть представлена в виде:

$$A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{\lambda}{T}t\right). \quad (7.22)$$

За время  $\tau$ , за которое амплитуда уменьшается в “е” раз, система успевает совершить  $N_e = \tau/T$  колебаний. Поскольку  $\lambda\tau/T = 1$  логарифмический декремент  $\lambda$  равен  $\lambda = \frac{1}{N_e}$ , т.е. обратен числу колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в “е” раз.

Для характеристики затухающей колебательной системы часто употребляется также величина:

$$\theta = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \quad (7.23)$$

называемая добротностью колебательной системы. Как видно из ее определения, добротность пропорциональна числу колебаний

$N_e$ , совершаемых системой за время  $\tau$ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в “ $e$ ” раз.

Можно показать, что при малом затухании добротность  $\theta$  представляется через энергетические характеристики колебательной системы в виде:

$$\theta = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}, \quad (7.24)$$

где  $E$  – энергия, запасенная в системе в какой-либо момент времени  $t$ ,  $|\Delta E|$  – убыль энергии за один период колебаний  $T$ .

Наличие сопротивления движению в колебательной системе замедляет движение, увеличивая период колебаний, соответственно уменьшая частоту  $\omega$  (7.20). При малом затухании ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) изменение частоты мало: частота колебаний слабо отличается от частоты собственных колебаний без затухания  $\omega_0$ . Напротив, при большом затухании замедление движения может оказаться столь значительным, что затухание движения может произойти без колебаний, т.е. апериодически. Условие невозможности колебаний:  $\beta^2 \geq \omega_0^2$  (см. (7. 20)).

## 7. 5. Вынужденные колебания

Во всякой реальной колебательной системе колебания с течением времени затухают. Чтобы возбудить в системе незатухающие колебания, необходимо компенсировать потери энергии. Такая компенсация может производиться внешними ( по отношению к колебательной системе) источниками энергии. Простейшими случаями такой компенсации энергии является воздействие на систему внешней силы, изменяющейся по времени по гармоническому закону.

$$F_{ВНЕС.} = F_0 \cos \omega t. \quad (7.25)$$

Под воздействием этой силы в системе возникнут колебания, происходящие в такт с изменением этой силы, так называемые вынужденные колебания.

Уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (7.26)$$

где  $\beta$  - коэффициент затухания,  $\omega_0$  – собственная частота колебаний системы,  $f_0 = F_0/m$  ( $F_0$  - амплитуда вынуждающей силы),  $\omega$  - частота колебаний вынуждающей силы.

Согласно теории дифференциальных уравнений, функция  $x(t)$ , которая установится с течением времени, будет изменяться по гармоническому закону с частотой вынуждающей силы  $\omega$ , при этом амплитуда установившихся вынужденных колебаний будет иметь вид:

$$x(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (7.27)$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной частотой. При малом затухании ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) резонансная частота  $\omega_{\text{рез}}$  близка к частоте собственных колебаний  $\omega_0$ . При этом условии максимальное значение амплитуды при резонансе ( $\omega \cong \omega_0$ ) определяется из (7.27) и составляет:

$$x_{\text{max.}} \cong \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \quad (7.28)$$

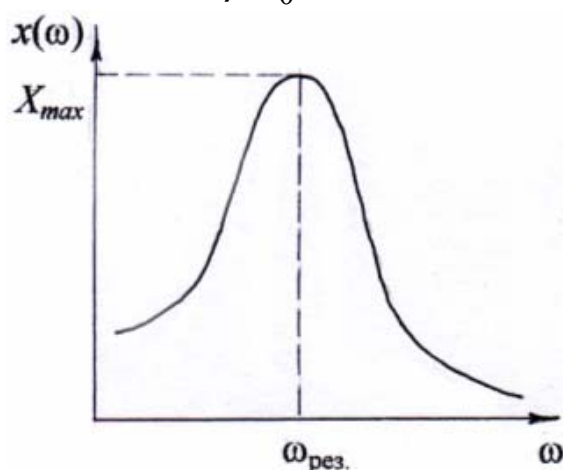


Рис. 7.6

Из (7.27) следует, что при отсутствии в системе потерь энергии амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность. Характерная зависимость амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы (так называемая, амплитудно-частотная характеристика –

АЧХ) представлена на рис. 7.6. Рассматривая выражение (7.28) и вспоминая понятие добротности колебательной системы, получим  $x_{\max.} \cong f_0 \theta / \omega_0^2$ , т.е. амплитуда при резонансе пропорциональна добротности колебательной системы. При условии не малого затухания, резонансная частота  $\omega_{PEЗ.} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ .

## 7. 6. Сложение гармонических колебаний

### 7.6.1. Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Колеблющееся тело может участвовать одновременно в нескольких колебательных процессах. Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2(t) &= A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Суммарное смещение  $x(t)$  колеблющегося тела будет суммой смещений  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  и представляется в виде:

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , где квадрат амплитуды результирующего колебания:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (7.30)$$

а начальная фаза результирующего колебания определяется из выражения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (7.31)$$

Соотношения (7.30) и (7.31) следуют из формул тригонометрии.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Если разность фаз обоих колебаний:  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ , то амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд исходных колебаний:

$$A = A_1 + A_2 \quad (7.32)$$

Если разность фаз обоих колебаний  $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi$ , то исходные колебания находятся в противофазе, при этом амплитуда результирующего колебания:

$$A = |A_1 - A_2|. \quad (7.33)$$

Особый интерес представляет случай, когда складываемые колебания мало отличаются по частоте. В результате сложения таких колебаний получается колебание с периодически меняющейся амплитудой. Такое колебание называется биениями. Пусть частота одного из колебаний  $\omega$ , а другого -  $\omega + \Delta\omega$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega$ . Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными  $A$ , начальные фазы без ограничения общности, примем равными нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \omega t, \\ x_2(t) &= A \cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Складывая оба колебания и применяя тригонометрические формулы, получим:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos \omega t. \quad (7.35)$$

(При сложении во втором сомножителе пренебрегли членом  $\Delta\omega/2$  по сравнению с  $\omega$ ). График функции  $x(t)$  качественно представлен на рис.7.7.

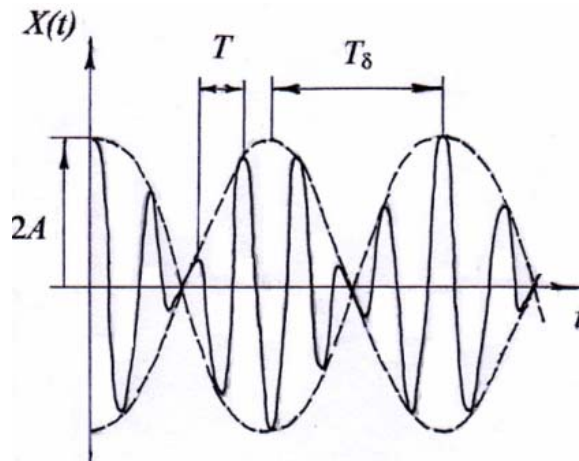


Рис.7.7

Полученный результат позволяет интерпретировать результирующее колебание как гармоническое колебание частоты  $\omega$ , амплитуда которого изменяется по периодическому закону с частотой биений, равной разности частот складываемых колебаний  $\Delta\omega$ . Период биений составляет величину  $T_B = 2\pi/\Delta\omega$ .



### 7.6.2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

#### Фигуры Лиссажу

Если материальная точка может совершать колебания как вдоль оси  $x$ , так и вдоль перпендикулярной ей оси  $y$ , то при возбуждении обоих колебаний точка будет двигаться по некоторой криволинейной траектории, форма которой, в общем случае, зависит от разности фаз колебаний. Рассмотрим сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты. Пусть начало отсчета времени выбрано так, что начальная фаза первого колебания равна нулю:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos \omega t, \\ y(t) &= B \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (7.36)$$

при этом  $\alpha$  - сдвиг фаз обоих колебаний.

Чтобы получить форму траектории точки в координатах  $(x, y)$  следует из уравнений (7.36) исключить время  $t$ . В результате будет получено уравнение траектории, имеющее вид:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha. \quad (7.37)$$

Рассмотрим частные случаи. При сдвиге фаз колебаний  $\alpha = 0$  уравнение (7.37) принимает вид:

$$\frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0.$$

Следовательно, траектория точки – прямая линия:  $y = \frac{B}{A}x$ , а результирующее колебание – вдоль этой прямой с амплитудой, равной  $\sqrt{A^2 + B^2}$  (рис. 7.8(а)).

При сдвиге фаз  $\alpha = \pm\pi$  уравнение траектории (7.37) принимает вид:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 0,$$

откуда следует, что результирующее колебание – гармоническое колебание вдоль прямой:  $y = -\frac{B}{A}x$  (рис. 7.8(б)).

В случаях, представленных на рис. 7.8, колебания называют-

ся линейно-поляризованными. При сдвиге фаз  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  уравнение траектории (7.37) принимает вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

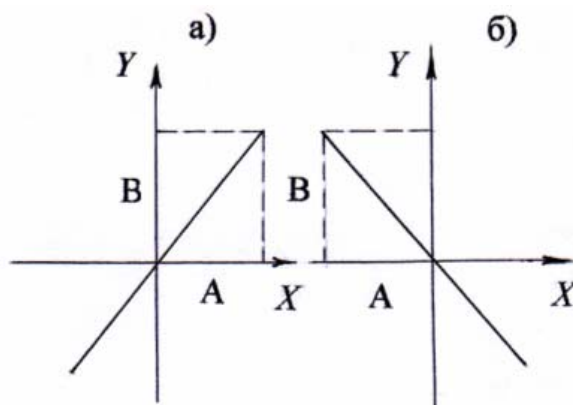


Рис.7.8а

Рис.7.8б

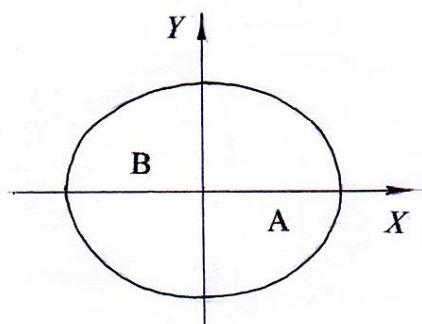


Рис.7.9

т.е. траектория имеет форму эллипса, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний (рис. 7.9). При равенстве амплитуд  $A$  и  $B$  эллипс переходит в окружность. В случае, представленном на рис.7.9, колебания называются эллиптически-поляризованными или (при равенстве амплитуд  $A$  и  $B$ ) колебаниями с круговой поляризацией. Если частоты складываемых, взаимно перпендикулярных колебаний различны, то траектория результирующего колебания имеет вид довольно сложных кривых, называемых фигурами Лиссажу. Форма этих кривых зависит от соотношения частот, амплитуд и разности фаз складываемых колебаний. По форме фигур Лиссажу можно определить соотношение частот и фаз колебаний.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова Т.И. Курс физики. –М.: Высшая школа, 1998.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. –М.: Наука, т.1, 1987.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс общей физики. – М.: Высшая школа, 2000.
4. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. -М.: Высшая школа, 1988.
5. Трофимова Т.И., Павлова З.Г. Сборник задач по физике. – М.: Высшая школа, 1999.

**СОДЕРЖАНИЕ**

<b>Введение.....</b>	<b>3</b>
1. Введение в механику.....	4
2. Кинематика материальной точки.....	6
3. Динамика материальной точки.....	16
4. Работа и энергия. Закон сохранения механической энергии.....	24
5 Динамика вращательного движения твердого тела.....	35
6. Законы сохранения при вращательном движении. Работа и энергия.....	43
7 Колебательное движение.....	51
<b>Библиографический список.....</b>	<b>66</b>

А.А. Берзин  
А.П. Воробьев  
В.А. Давыдов  
Ю.В. Коробкин  
В.Б. Студенов  
В.А. Фотиев

# **МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЧАСТЬ 1

## **МЕХАНИКА**

Литературный редактор

Подписано в печать 16.01.2004. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,63 Усл. кр.-отт. 6,52. Уч.-изд. л. 1,5.

Тираж 200 экз. С 44

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
“Московский государственный институт радиотехники,  
электроники и автоматики (технический университет)”  
119454, Москва, пр. Вернадского, 78