

## **Методические рекомендации по разделу «Механика» для студентов направления 511800 «Математика. Компьютерные науки»**

Для облегчения качественного усвоения лекционного материала по **Физике**, читаемого для студентов НК-1, предлагаются программные темы, контрольные вопросы и комментарии к решению задач по разделу

### **Механика**

#### **Тема 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ**

##### **Программа темы**

Механическое движение как одна из форм движения материи. Системы отсчета. Материальная точка. Путь и перемещение. Кинематические уравнения. Скорость и ускорение. Кинематика криволинейного движения. Тангенциальное и центростремительное ускорение. Круговое движение. Связь между линейными и угловыми параметрами движения. Абсолютное, переносное и относительное движение. Сложение скоростей и ускорений.

##### **Контрольные вопросы**

1. Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
2. Что такое система отсчета?
3. Укажите способы задания положения точки в пространстве.
4. Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
5. Дайте определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?
6. Объясните роль нормального и тангенциального ускорений в изменении скорости.
7. Запишите выражение, определяющее, связь между линейным ускорением, угловой скоростью и угловым ускорением в случае движения точки по окружности.
8. При каком движении центростремительное ускорение равно нулю, а тангенциальное ускорение постоянно?
9. Материальная точка равномерно движется по окружности. Чему равно отношение линейной скорости материальной точки к ее угловой скорости?
10. В каких единицах выражаются угловая скорость и угловое ускорение?
11. Начертите графики зависимости пути  $S$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$  от времени  $t$  при равноускоренном движении без начальной скорости.
12. Зависит ли форма траектории от выбора системы отсчета? Свой ответ проиллюстрируйте примерами.

### **Методические указания к решению задач**

Единого метода решения большого многообразия физических задач указать невозможно, однако существуют общие правила, которыми необходимо руководствоваться в каждом конкретном случае.

1. Внимательно прочитать задачу и математически записать заданные и искомые величины. Необходимо проследить, чтобы все величины были выражены в системе СИ (в некоторых случаях можно использовать и другие системы).
2. Дать схематический чертёж (где это возможно), поясняющий содержание задачи.
3. Установить, какие физические закономерности лежат в основе данной задачи.
4. Установить, все ли данные, необходимые для решения задачи, приведены. Недостающие данные можно найти в таблицах, помещённых в сборнике задач или справочнике.
5. Используя математическую формулировку физических законов, отвечающих содержанию конкретной задачи, запишите уравнение или систему уравнений, связывающих заданные и искомую (или искомые) физические величины.
6. Провести решение в общем виде в буквенных обозначениях без подстановки числовых значений в промежуточные формулы.
7. Проверить размерность искомой величины. Если в результате получена верная размерность, то это ещё не гарантия верного решения, однако неверная размерность - прямое указание на допущенную ошибку.
8. Поставить заданные в условии задачи числа в окончательную формулу, провести вычисления, руководствуясь правилами приближённых вычислений, и указать единицу измерения для полученного результата.
9. Оценить (там, где это возможно) правдоподобность полученного результата. В ряде случаев такая оценка поможет обнаружить ошибочность полученного результата.

## Тема II. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

### Программа темы

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Принцип относительности механического движения. Масса. Понятие силы. Второй закон Ньютона. Третий закон Ньютона. Применение второго закона Ньютона к анализу поступательного движения.

### Контрольные вопросы

1. Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная?
2. Что такое сила?
3. Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона?
4. Сформулировав три закона Ньютона, покажите, какова взаимосвязь между этими законами.
5. В чем заключается принцип независимости действия сил?

### Применение законов Ньютона к анализу динамики поступательного движения

Прежде всего, необходимо помнить, что законы Ньютона справедливы только для инерциальных систем. В неинерциальных системах, т.е. в системах, которые движутся с ускорением, все законы классической механики, в том числе и законы Ньютона, справедливы только в предположении, что кроме сил, обусловленных взаимодействием с другими конкретными телами, действуют так называемые силы инерции. Для этих сил нельзя указать те конкретные тела, со стороны которых они действуют.

Сила инерции равна произведению массы  $m$  тела на ускорение  $a$  системы и направлена в сторону, противоположную ускорению системы:  $F_i = -ma$ . В первом приближении системе отсчета, связанная с Землей, является инерциальной, хотя, строго говоря, она неинерциальная, так как Земля вращается вокруг собственной оси и вращается вокруг Солнца. Однако ускорения этих движений малы.

При решении задач динамики необходимо пользоваться следующей схемой.

- 1) Необходимо представить физический процесс, заданный в условии задачи, и сделать схематический чертеж.
- 2) Указать векторы всех сил, действующих на каждое тело рассматриваемой системы.
- 3) Записать второе уравнение Ньютона для каждого тела в векторной форме

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}$$

- 4) Векторные уравнения спроецировать на координатные оси, выбранные в зависимости от условий задачи.
- 5) Если число независимых уравнений меньше числа неизвестных, то следует использовать соотношения между величинами, фигурирующими в задаче, например, кинематические соотношения.
- 6) Решить систему уравнений.

### Тема III. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

#### Программа темы

Законы сохранения как фундаментальные законы природы. Законы сохранения массы и импульса. Реактивное движение с переменной массой. Закон сохранения момента импульса. Понятие работы и потенциальной энергии в силовом поле. Закон сохранения механической энергии. Законы сохранения энергии для замкнутой системы. Внутренняя энергия системы. Приложение законов сохранения к анализу соударений материальных точек. Устойчивое равновесие системы и ее потенциальная энергия.

#### Контрольные вопросы

1. Что называется импульсом силы и импульсом тела?
2. Что называется изолированной системой?
3. Сформулируйте закон сохранения импульса.
4. Какой закон лежит в основе реактивного движения?
5. Выведите уравнение движения тела переменной массы (движение нерелятивистское).
6. Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление момента импульса?
7. Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?
8. Дайте определения и выведите формулы для известных вам видов механической энергии.
9. Какова связь между силой и потенциальной энергией?
10. В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?
11. В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?
12. Что называется центральным ударом абсолютно упругих шаров? Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого? Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?
13. Как охарактеризовать положения устойчивого и неустойчивого равновесия? В чем их различие?

#### Приложение законов сохранения к решению задач

Закон сохранения импульса можно применять, строго говоря, только к замкнутым системам, т.е. к таким системам тел, на которые не действуют внешние силы, либо их векторная сумма равна нулю.

Однако в тех случаях, когда результирующая всех внешних сил не равна нулю, т.е. система не является замкнутой, но проекция результирующей внешних сил на какое-либо направление во время взаимодействия равна нулю, то проекция импульса системы на это направление есть величина постоянная. Кроме того, систему можно считать замкнутой в течение такого малого промежутка времени, на протяжении которого в системе возникают силы взаимодействия во много раз большие, чем внешние силы (например, при взрыве снаряда).

Закон сохранения механической энергии справедлив в консервативных системах тел, т.е. в таких системах, в которых отсутствует переход механической энергии в другие виды энергии и отсутствует обмен механической энергией с телами, не принадлежащими данной системе.

В неконсервативных системах изменение полной механической энергии системы будет равно алгебраической сумме работ всех внешних сил и внутренних неконсервативных сил (например, сил трения, сил, возникающих при неупругих деформациях).

Составляя уравнения, выражающие законы сохранения импульса и энергии, необходимо рассматривать движения всех тел в одной и той же инерциаль-

ной системе отсчета, так как импульс и кинетическая энергия тела зависят от выбора системы отсчета.

Если в условии задачи известна относительная скорость  $v_{отн}$  сближения или удаления двух движущихся по одной и той же прямой частиц в некоторый момент времени их взаимодействия, то целесообразно рассматривать явление в такой инерциальной системе отсчета, в которой одна из частиц неподвижна в этот момент. Тогда скорость другой частицы будет равна относительной скорости  $v_{отн}$ .

Необходимо помнить, что уравнение, выражающее закон сохранения импульса, является векторным, поэтому при сложении импульсов необходимо пользоваться правилом сложения векторов, либо записывать закон сохранения импульса в скалярной форме как проекции на выбранные оси координат.

Если тело движется под действием силы тяжести, то в этом случае в качестве системы отсчета будет система тело-Земля. При этом из рассмотрения необходимо исключить энергию Земли: т.к. кинетическая энергия, полученная Землей в результате взаимодействия с телом, будет обратно пропорциональна ее массе, т.е.

$$\frac{W_{КЗ}}{W_{КТ}} = \frac{m_3 v_3^2}{2} : \frac{m_m v_m^2}{2} = \frac{m_3 v_3}{m_m v_m} \frac{v_3}{v_m} = \frac{v_3}{v_m} = \frac{m_m}{m_3}.$$

Здесь учтен закон сохранения импульса  $m_3 v_3 = m_m v_m$  при взаимодействии Земли и тела, где  $m_3, m_m$  - масса Земли и тела соответственно, и,  $v_3$  и  $v_m$  - скорость Земли и тела.

Потенциальная энергия тела в поле тяготения Земли есть не что иное как энергия взаимодействия тела и Земли и поэтому характеризует энергию всей системы, а не одного тела. Поэтому при решении задач на движение тела (или системы тел) в поле тяготения Земли не рассматривают ни потенциальную, ни кинетическую энергию Земли.

## Тема IV. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### Программа темы

Поступательное и вращательное движение. Момент силы и момент инерции. Момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела. Теорема о переносе оси (теорема Штейнера). Момент импульса, его величина и направление для материальной точки и для твердого тела относительно данной оси. Уравнение движения тела при его вращении. Гироскоп.

### Контрольные вопросы

1. Что называется абсолютно твердым телом?
2. Что называется моментом инерции материальной точки и моментом инерции тела?
3. Какова роль момента инерции во вращательном движении?
4. Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?
5. Сформулируйте теорему Штейнера. Во сколько раз момент инерции  $J$  диска относительно оси симметрии, перпендикулярной основанию, меньше его момента инерции  $J'$  относительно оси, проходящей через край диска перпендикулярно основанию?
6. Что называется моментом силы относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?
7. Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

8. Какие характеристики вращательного движения аналогичны массе и силе, характеризующим поступательное движение?
9. Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление момента импульса?
10. Человек, равномерно вращающийся на скамье Жуковского, держит на вытянутых руках две одинаковые гири. Не меняя положения рук, он выпускает из них гири. Скажется ли это как-нибудь на его вращении?
11. Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?
12. Сформулируйте закон Гука. Когда он справедлив?

### **Методика решения задач по вращательному движению твердого тела**

При решении задач по вращательному движению твердого тела нужно использовать, как основное уравнение динамики вращательного движения  $\sum M_i = J \varepsilon$ , где  $M_i$  - моменты всех сил, действующих на тело, рассчитанные относительно оси, проходящей через центр масс;  $J$  - момент инерции тела относительно той же оси;  $\varepsilon$  - угловое ускорение, так и законы сохранения. Условия применимости закона сохранения энергии остаются теми же, что и при поступательном движении. Закон сохранения моментов импульсов справедлив в тех случаях, когда сумма моментов внешних сил относительно рассматриваемой оси равна нулю.

В случае сложного плоского движения, например, движение катящегося тела, необходимо учитывать как вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс, так и поступательное движение со скоростью центра масс. При этом кроме основного уравнения динамики, вращательного движения необходимо писать и второй закон Ньютона  $\sum F_i = m a$ , где  $F_i$  - силы, действующие на тело;  $m$  - масса всего тела;  $a$  - ускорение центра масс, не зависящее от точек приложения действующих сил. Кинетическая энергия в этом случае равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений.

## **Тема V . МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ**

### **Программа темы.**

Гармонические колебания. Энергия гармонических колебаний. Математический маятник. Физический маятник. Затухающие колебания. Вынужденные колебания. Резонанс. Параметрический резонанс. Сложение коллинеарных колебаний (интерференция). Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.

### **Контрольные вопросы**

1. Какое движение называется гармоническим колебанием?
2. Назовите физические величины, характеризующие гармоническое колебание.
3. Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени.
4. Выведите и прокомментируйте формулы для кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях.
5. Чему равно отношение полной энергии гармонического колебания к максимальному значению возвращающей силы, вызывающей эти колебания?
6. Выведите формулы для периодов колебаний математического, физического и пружинного маятников.
7. Что такое приведенная длина физического маятника?
8. Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми частотами?

9. Как по виду фигур Лиссажу можно определить отношение частот складываемых колебаний?
10. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение.
11. Что такое коэффициент затухания? декремент затухания? логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?
12. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и решите его.
13. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды и фазы при резонансе.
14. Что называется резонансом? Какова его роль?

### Методические указания к решению задач по теме «Механические колебания»

Характерной особенностью механических колебаний является то, что ускорение при колебательном движении есть величина переменная. Простейшим видом колебательного движения является гармоническое колебание, при котором смещение точки или тела меняется со временем по закону синуса (косинуса)  $x = x_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$ , где

$x$  - значение координаты (линейной  $S$  или угловой  $\varphi$ ) в момент времени  $t$ ;  $x_0$  - амплитуда колебаний (линейная или угловая);  $\omega$  - круговая частота;

$\omega t + \alpha_0$  - фаза колебаний;  $\alpha_0$  - начальная фаза колебаний.

Дифференцируя формулу для смещения точки, можно получить выражения для скорости (линейной или угловой):

$$\frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t + \alpha_0) \text{ и для ускорения (линейного или углового):}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \sin(\omega t + \alpha_0) = -\omega^2 x.$$

Из последнего выражения видно, что ускорение при гармоническом колебании прямо пропорционально смещению, взятому с обратным знаком, а коэффициент пропорциональности равен квадрату круговой частоты.

Из выражения для скорости видно, что она равна максимальному значению при смещении и ускорении равными нулю.

Результирующая возвращающая сила (результирующий вращающий момент), вызывающая колебательное движение, прямо пропорциональна смещению тела, взятому с обратным знаком. Поэтому второй закон Ньютона может быть записан в следующем виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \text{ а основное уравнение вращательного движения в виде}$$

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi.$$

Решения этих уравнений будут иметь вид :  $x = x_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$  и  $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$  соответственно.

Параметры колебательной системы  $m$ ,  $k$ ,  $J$  и  $D$  однозначно определяют зна-

чение круговой частоты  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  и  $\omega^2 = \frac{D}{J}$ .

Для тела, совершающего гармоническое колебательное движение, выполняется закон сохранения механической энергии:

$$E_k + E_n = const, \text{ где } E_k = \frac{mv^2}{2}; \quad E_n = \frac{kx^2}{2}, \text{ или } E_k = \frac{J\omega^2}{2}; \quad E_n = \frac{D\varphi^2}{2}.$$

Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, постоянна и равна:

$$E = \frac{m\omega^2 x_0^2}{2}.$$

**Лектор: доцент А.П. Фищук**