# 矩阵及其运算 ⇒ 线性方程组和矩阵/矩阵运算/逆矩阵/克拉默/矩阵分块

行 列

**m×n矩阵** $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ →括弧

$a_{mn}$ →元(素)

↳ 简记为 $A_{m\times n}$ $(m,n)$元

矩阵

- **实/复矩阵** 元素为实/复数
- **n阶矩阵/方阵** 行列相等. $A_n$
- **行矩阵(行向量)** $A=(a_1,a_2,\cdots a_n)$
- **列矩阵(列向量)** $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$
- **同型矩阵** 两矩阵行、列对应相同
- **零矩阵** 元素都为0 记为O (不同型零矩阵不同)
- **对角矩阵** 记 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$
- **单位矩阵** $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

两个上三角矩阵的乘积仍为上三角矩阵

## 克拉默 — 求线性方程组的解.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

系数矩阵A的行列式

设 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$

逆矩阵唯一性

那么方程有唯一解: $x_1=\frac{|A_1|}{|A|}$, $x_2=\frac{|A_2|}{|A|}$, $\cdots$, $x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$

其中 $|A_j|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

$=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots b_nA_{nj}$ (行列式运算)

有 $Ax=b$ (矩阵) $\Rightarrow x=A^{-1}b=\frac{A^*}{|A|}b$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_j=\frac{1}{|A|}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots b_nA_{nj})=\frac{|A_j|}{|A|}$$

## 矩阵运算

① 加法 同型矩阵才能进行加法运算 矩阵相应位置的元素相加. $-A$为A的负矩阵

(i) $A+B=B+A$ (ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$. (iii) $A-B=A+(-B)$ <减法>

② 乘法 由方程组线性变换引出

左列数等于右行数才能相乘

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

$A=(a_{ij})$ $A_{m\times s}$ $B=(b_{ij})$ $B_{s\times n}$ $\Rightarrow C=AB$

(i) $(AB)C=A(BC)$

(ii) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$

(iii) $A(B+C)=AB+AC$

→类似数1

(iii) $EA=AE=A$ (仍行列关系才能相乘)

(iv) $A^kA^l=A^{k+l}$, $(A^k)^l=A^{kl}$

↳幂运算 只有方阵的幂才有意义

一般 $(AB)^k\neq A^kB^k$, 只有A,B可交换时才等 $(A+B)^2$与$A^2+2AB+B^2$ $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ 同

(i) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
(ii) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
(iii) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
(数乘)

若A、B为n阶方阵, 则 $|AB|=|BA|$ $(=|A|\cdot|B|)$

对于两个n阶方阵A、B, 若AB=BA, 则称其可交换

- AB是A左乘B, BA是A右乘B

若A·B为方阵 且AB=E, 则BA=E

由于A、B的行与列数, AB有意义时BA可能没有意义

- 设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$, AB与BA都有意义, 但前者是m阶方阵, 后者为n阶方阵, 仍 $AB\neq BA$
- 设A、B为同阶方阵, 型同但AB与BA值仍可能不同

eg: $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$ $BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ex:

1> $(a_{11},a_{12},\cdots a_{1n})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots a_{1n}b_{n1}$

1×s 行阵 × s×1列阵 → 1阶方阵(数)

2> $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}(b_{11},b_{12},\cdots b_{1n})=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \cdots & a_{n1}b_{1n} \end{bmatrix}$

s×1 × 1×s → n阶方阵