④ 设V为向量空间，如果r个向量 $a_1, a_2, \cdots, a_r \in V$，且满足

(i) $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关

(ii) V中任一向量都可由$a_1, a_2, \cdots, a_r$线性表示

则向量组$a_1, a_2, \cdots, a_r$就称为$\boxed{\text{向量空间}V}$的一个$\boxed{\text{基}}$

r称向量空间V的$\boxed{\text{维数}}$ ⟺ 秩 ↔ 向量组 ↔ 最大无关组

并称V为$\boxed{r\text{维空间向量}}$

R^n: n维向量空间

如果向量空间V没有基，那么V的维数为0

0维向量空间只含一个零向量0）

$V=\{x=(0, x_2, \cdots x_n)^T \mid x_2, \cdots, x_n \in R\}$

的一个基可取为 $e_2=(0,1,0,\cdots,0)^T, \cdots, e_n=(0,\cdots,0,1)^T$

故V为 $n-1$维向量空间

$L=\{x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in R\}$

则向量空间L与向量组$a_1, a_2, \cdots, a_m$等价

故 $a_1, a_2, \cdots a_m$ $\begin{cases}\text{最大无关组} \rightarrow \text{为}L\text{的一个基} \\ \text{秩} \rightarrow \text{为}L\text{的维数}\end{cases}$

⑤ 若在V中取定一个基$a_1, a_2, \cdots, a_r$，那么V中任一向量

x可唯一表示为 $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_r a_r$

$\boxed{\text{数组}\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r}$称为向量$x$在基$\boxed{a_1, a_2, \cdots a_r}$中的$\boxed{\text{坐标}}$

当 $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$ 时

$e_1, e_2, \cdots e_n$称为R^n中的自然基

基)坐标变换：

$A=EA \quad \Rightarrow \quad E=A\cdot A^{-1}$

$\Rightarrow \quad B=EB=A\boxed{A^{-1}B}$ 基变换. $P=A^{-1}B$

过渡矩阵

$Ax_{旧}=Bx_{新}$

$x_{新}=B^{-1}Ax_{旧}=P^{-1}x_{旧}$ → $x_{新}=P^{-1}x_{旧}$

若$a_1, a_2, \cdots, a_r$为L的一个基

则 $V=\{x=\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_r a_r \mid \lambda_1, \cdots \lambda_r \in R\}$ 坐标变换

即V是基所生成的向量空间

$Ax=0$ 的解构成解空间