第4章 电路定理

本章重点

首 页

● 重点:

熟练掌握各定理的内容、适用范围及如何应用。

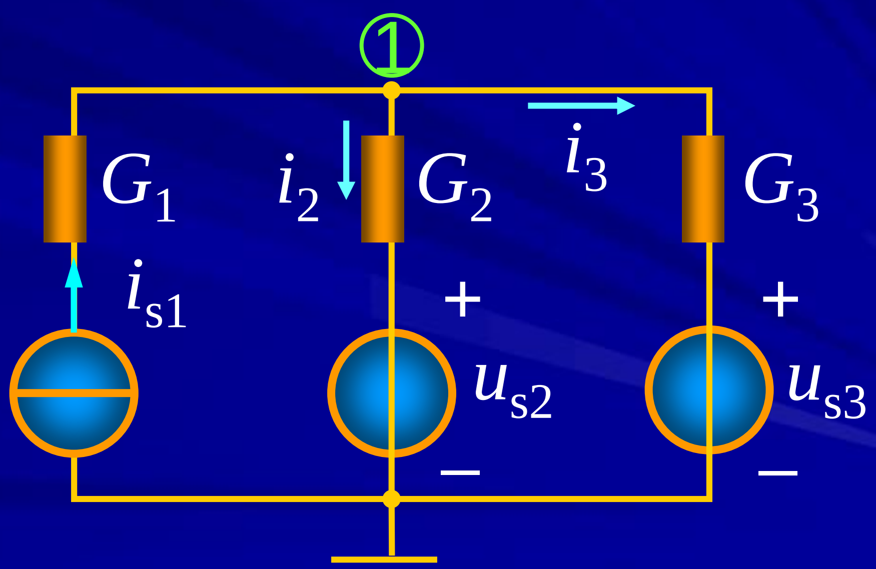
4.1 叠加定理

1. 叠加定理

在线性电路中，任一支路的电流(或电压)可以看成是电路中每一个独立电源单独作用于电路时，在该支路产生的电流(或电压)的代数和。

2 .定理的证明

应用结点法：

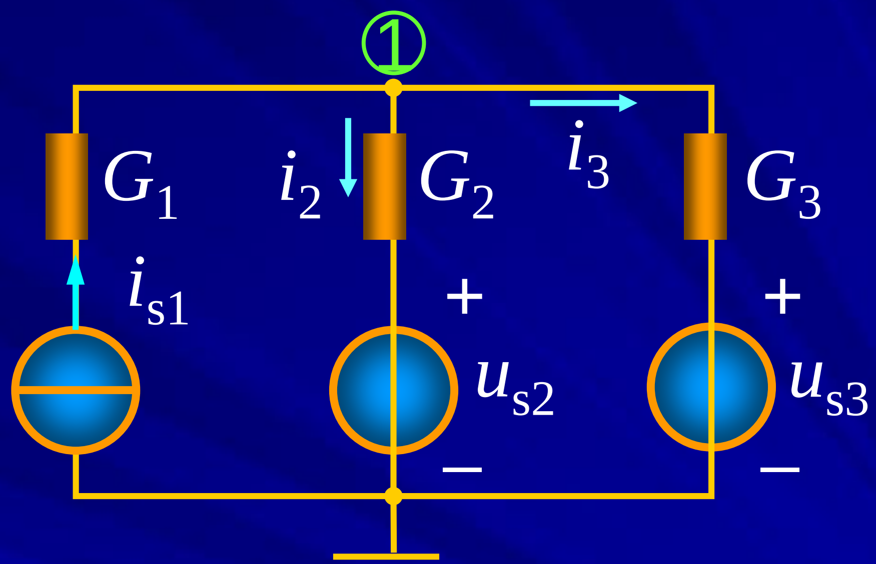


$$(G_2+G_3)u_{n1}=G_2u_{s2}+G_3u_{s3}+i_{S1}$$

单选题 1分

设置

节点1自电导是多少?



A $G_1+G_2+G_3$

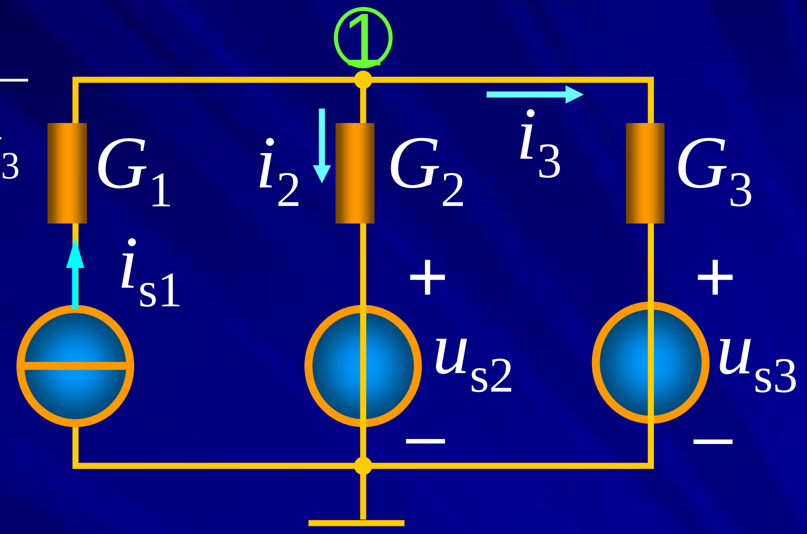
B G_2+G_3

C $1/G_1+1/G_2+1/G_3$

D $1/G_2+1/G_3$

提交

$$u_{n1}=\frac{G_2u_{S2}}{G_2+G_3}+\frac{G_3u_{S3}}{G_2+G_3}+\frac{i_{S1}}{G_2+G_3}$$



或表示为：

$$u_{n1}=a_1i_{S1}+a_2u_{S2}+a_3u_{S3}$$
$$=u_{n1}^{(1)}+u_{n1}^{(2)}+u_{n1}^{(3)}$$

支路电流为：

$$i_2=(u_{n1}-u_{S2})G_2=(\frac{-G_3G_2}{G_2+G_{3\ 2}})u_{S2}+\frac{G_3G_2u_{S3}}{G_2+G_3}+\frac{G_2i_{S1}}{G_2+G_3}$$
$$=b_1i_{S1}+b_2u_{S2}+b_3u_{S3}=i_2^{(1)}+i_2^{(2)}+i_2^{(3)}$$

$$i_3=(u_{n1}-u_{S3})G_3=(\frac{G_3G_2}{G_2+G_3})u_{S2}+(\frac{-G_2G_3}{G_2+G_{3\ 3}})u_{S3}+\frac{G_3i_{S1}}{G_2+G_3}$$
$$=i_3^{(1)}+i_3^{(2)}+i_3^{(3)}$$

结论　结点电压和支路电流均为各电源的一次函数，均可看成各独立电源单独作用时，产生的响应之叠加。

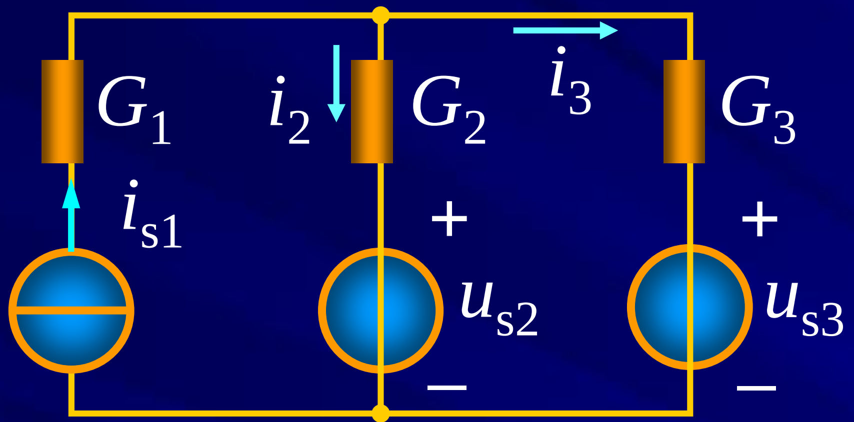
3. 几点说明

①叠加定理只适用于线性电路。

②一个电源作用，其余电源为零

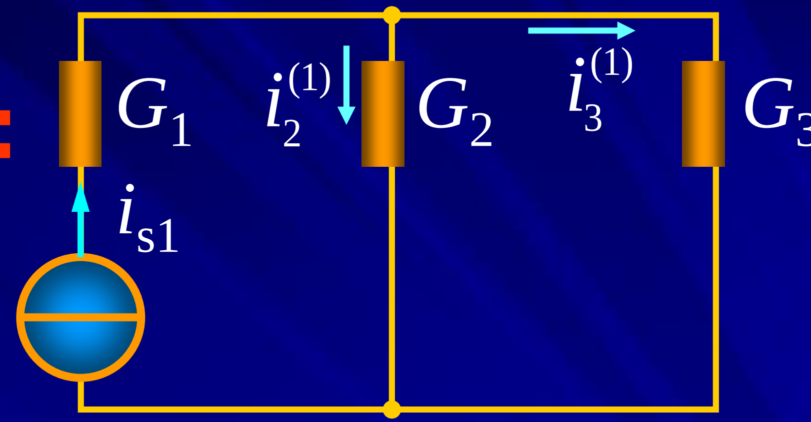
电压源为零 — 短路。

电流源为零 — 开路。



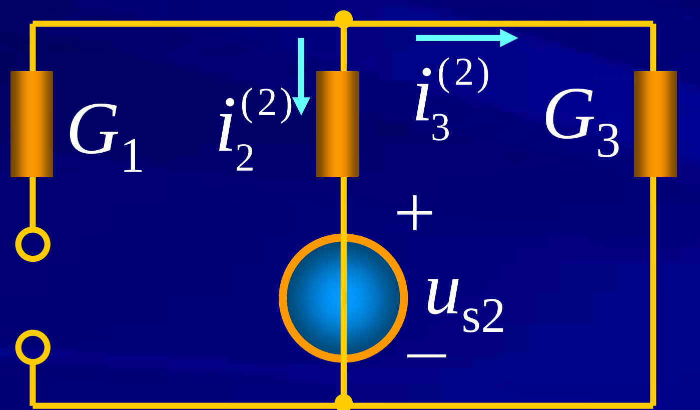
三个电源共同作用

=



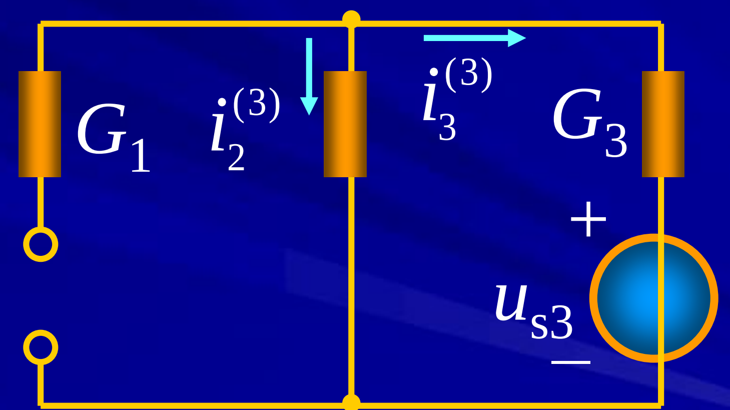
i_{s1}单独作用

+



u_{s2}单独作用

+



u_{s3}单独作用

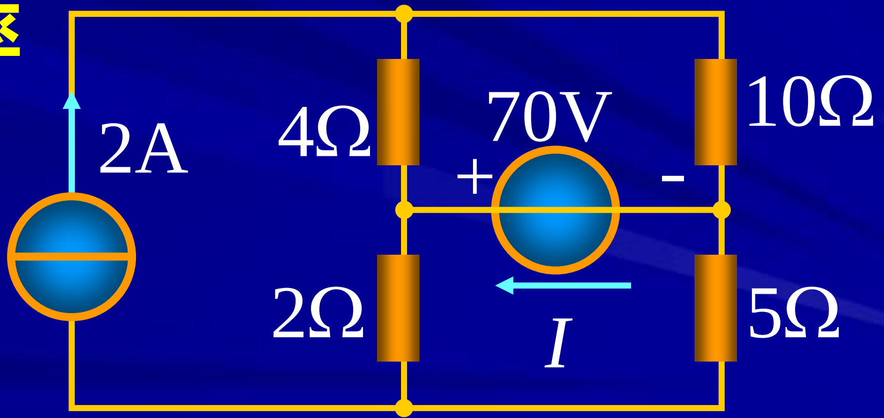
③功率不能叠加(功率为电压和电流的乘积，为电源的二次函数)。

④ u，i叠加时要注意各分量的参考方向。

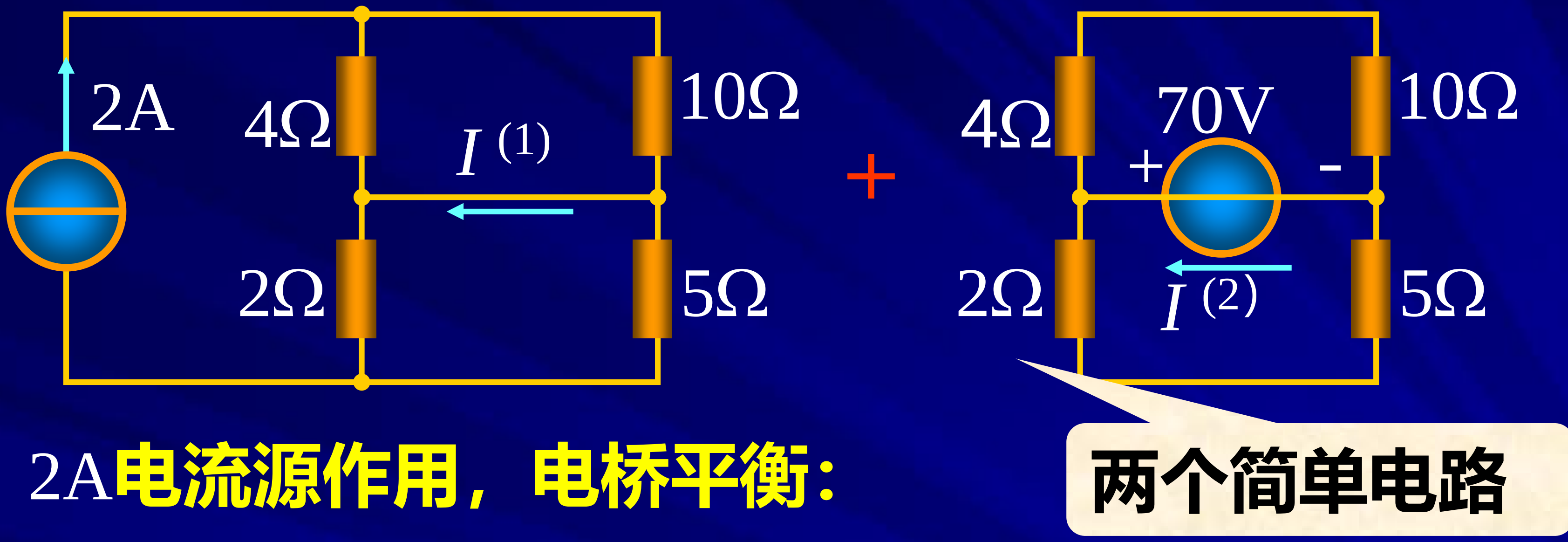
⑤含受控源(线性)电路亦可用叠加，但受控源应始终保留。

4. 叠加定理的应用

例1 求电压源的电流及功率



解 画出分电路图



2A**电流源作用，电桥平衡：**

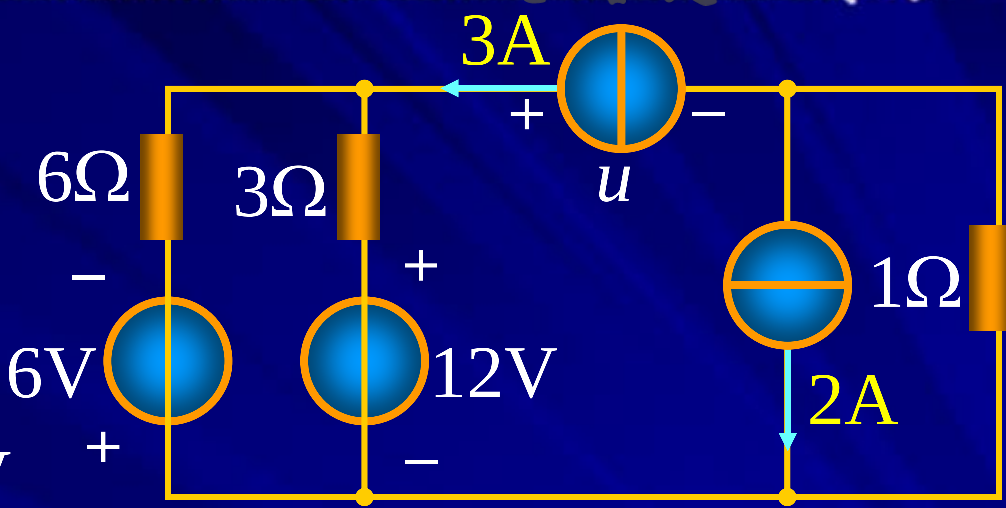
$$I^{(1)}=0$$

70V**电压源作用：** $I^{(2)}=70/14+70/7=15\text{A}$

$$I=I^{(1)}+I^{(2)}=15\text{A} \qquad P=70\times15=1050\text{W}$$

应用叠加定理使计算简化

例2 计算电压u



解 画出分电路图

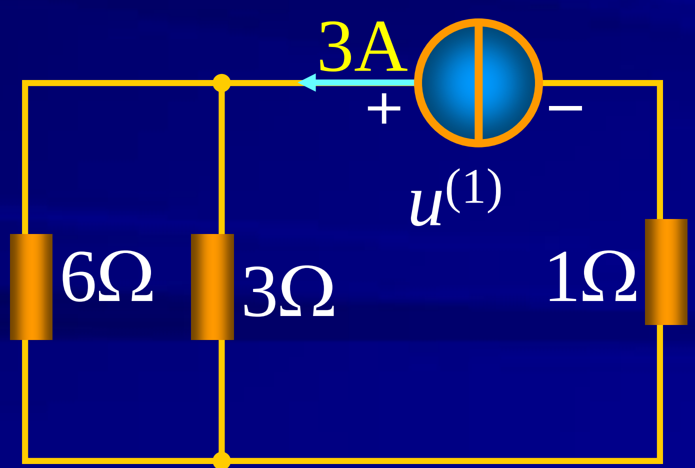
3A电流源作用：

$$u^{(1)}=(6//3+1)\times 3=9\text{V}$$

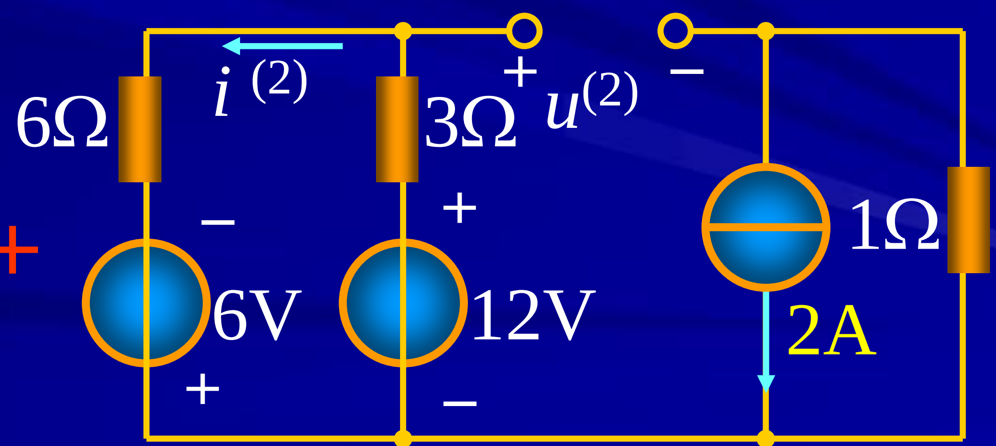
其余电源作用：

$$i^{(2)}=(6+12)/(6+3)=2\text{A}$$

$$u^{(2)}=6i^{(2)}-6+2\times 1=8\text{V}\qquad u=u^{(1)}+u^{(2)}=9+8=17\text{V}$$



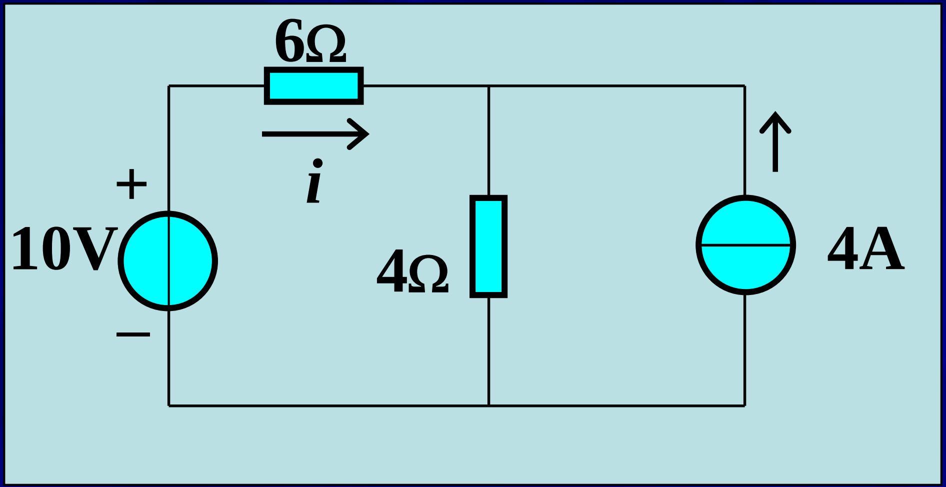
+



单选题 1分

设置

i=__A



A 3.4

B -1.4

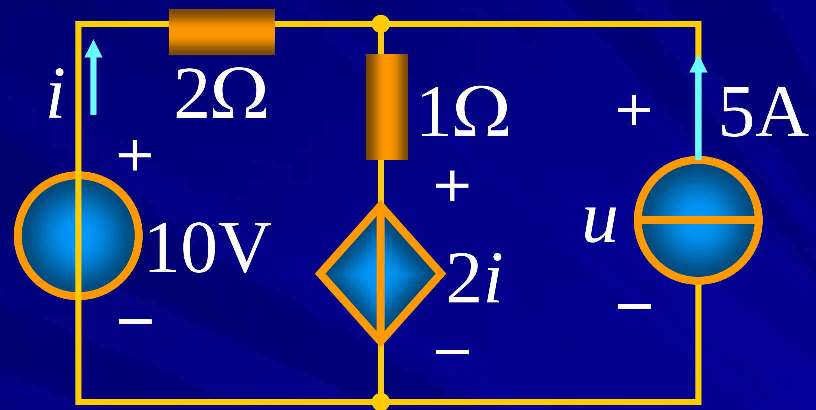
C 2.6

D -0.6

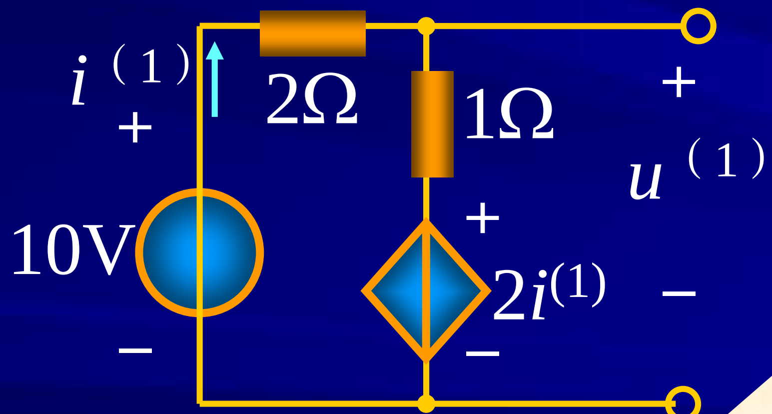
提交

注意　叠加方式是任意的，可以一次一个独立源单独作用，也可以一次几个独立源同时作用，取决于使分析计算简便。

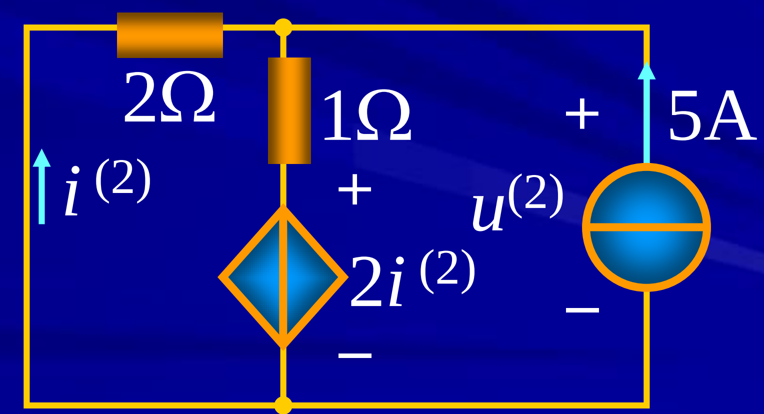
例3　计算电压u、电流i。



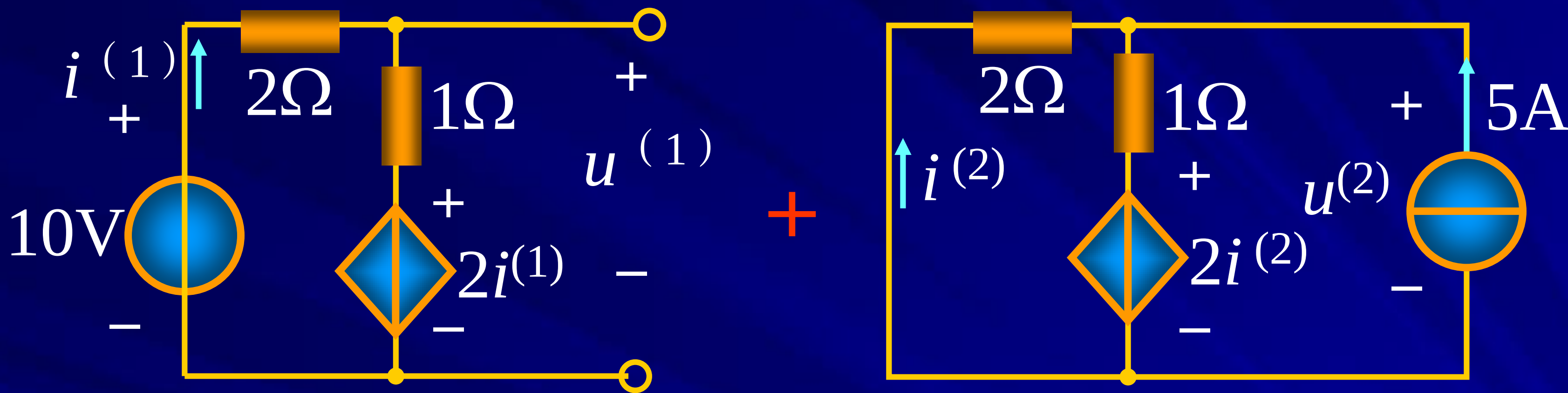
解　画出分电路图



+



受控源始终保留



10V**电源作用：** $i^{(1)}=(10-2i^{(1)})/(2+1)$　　$i^{(1)}=2\text{A}$

$$u^{(1)}=1\times i^{(1)}+2i^{(1)}=3i^{(1)}=6\text{V}$$

5A**电源作用：** $2i^{(2)}+1\times(5+i^{(2)})+2i^{(2)}=0$

$i^{(2)}=-1\text{A}$　　$u^{(2)}=-2i^{(2)}=-2\times(-1)=2\text{V}$

$u=6+2=8\text{V}$　　$i=2+(-1)=1\text{A}$

例4 **封装好的电路如图，已知下列实验数据：**

当 $u_s=1\text{V}$， $i_s=1\text{A}$ 时，响应 $i=2\text{A}$

当 $u_s=-1\text{V}$，$i_s=2\text{A}$ 时，响应 $i=1\text{A}$

求 $u_s=-3\text{V}$，$i_s=5\text{A}$ 时，响应 $i=?$

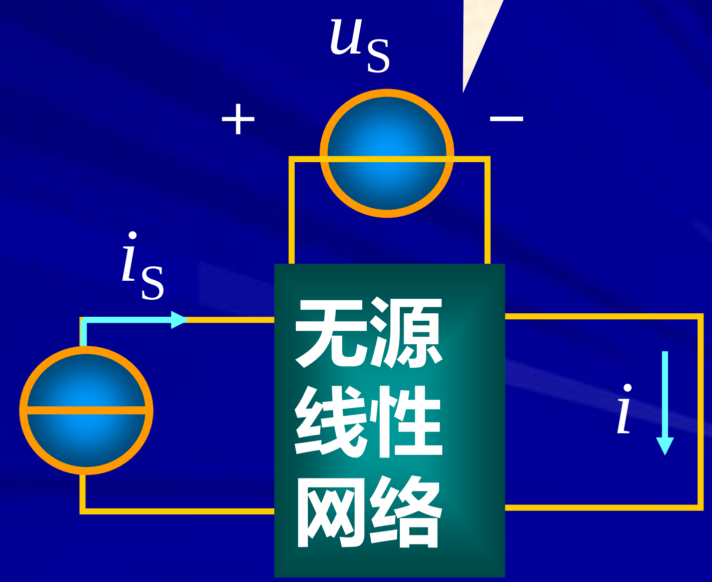
研究激励和响应关系的实验方法

解 **根据叠加定理** $i=k_1 i_s+k_2 u_s$

代入实验数据：

$$\begin{cases} k_1+k_2=2 \\ 2k_1-k_2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=1 \end{cases}$$

$$i=u_s+i_s=-3+5=2\text{A}$$



5.齐性原理

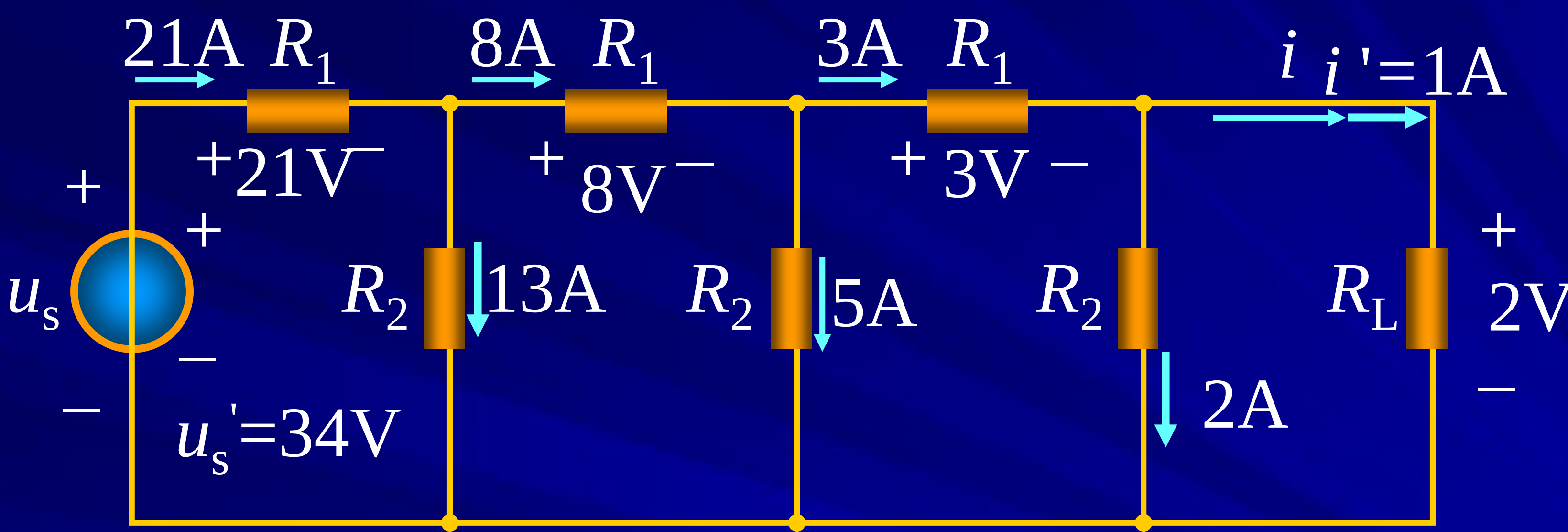
线性电路中，所有激励(独立源)都增大(或减小)同样的倍数，则电路中响应(电压或电流)也增大(或减小)同样的倍数。

注意

①当激励只有一个时，则响应与激励成正比。

②具有可加性。

例 $R_L=2\Omega$ $R_1=1\ \Omega$ $R_2=1\ \Omega$ $u_s=51\text{V}$，**求电流 i**



解 **采用倒推法：设** $i'=1\text{A}$

则 $\dfrac{i}{i'}=\dfrac{u_s}{u_s'}$ 即 $i=\dfrac{u_s}{u_s'}i'=\dfrac{51}{34}\times1=1.5\text{A}$

单选题 1分

设置

当u_S=1V时，电阻R消耗功率1W，
当u_S=2V时，电阻R消耗功率为多少?

A 1W

B 2W

C 4W

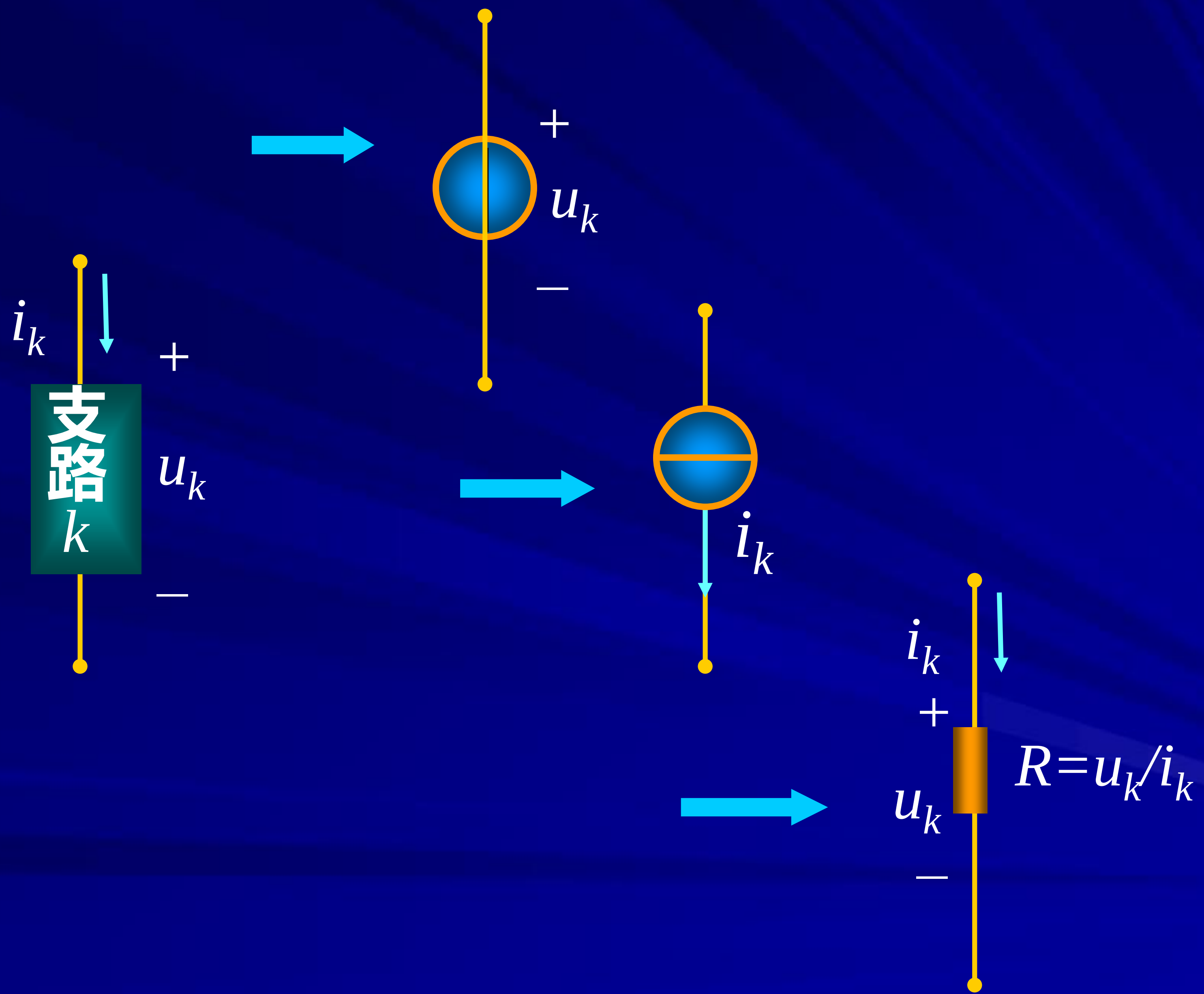
D 8W

提交

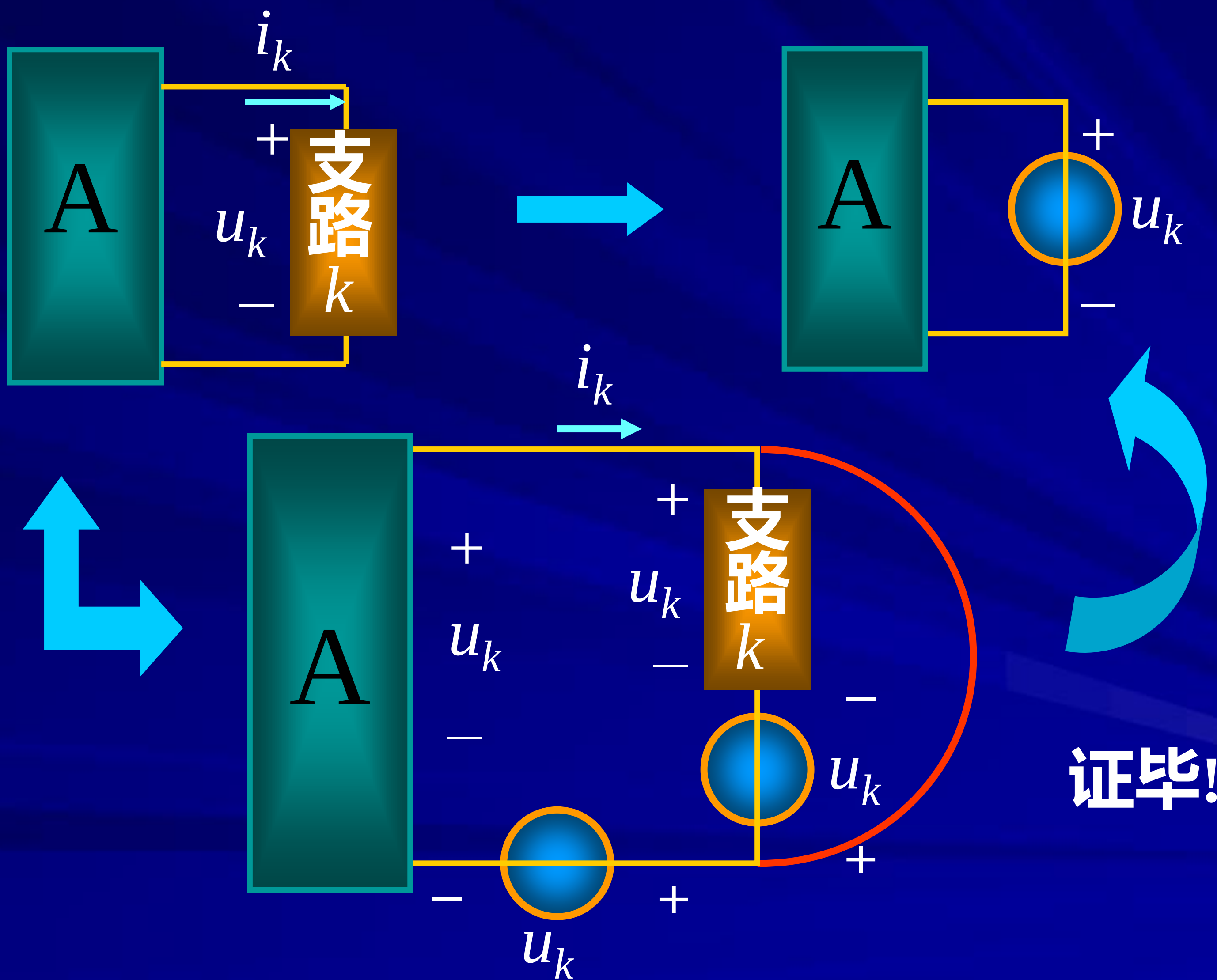
4.2 替代定理

1.替代定理

对于给定的任意一个电路，若某一支路电压为u_k、电流为i_k，那么这条支路就可以用一个电压等于u_k的独立电压源，或者用一个电流等于i_k的独立电流源，或用$R=u_k/i_k$的电阻来替代，替代后电路中全部电压和电流均保持原有值(解答唯一)。

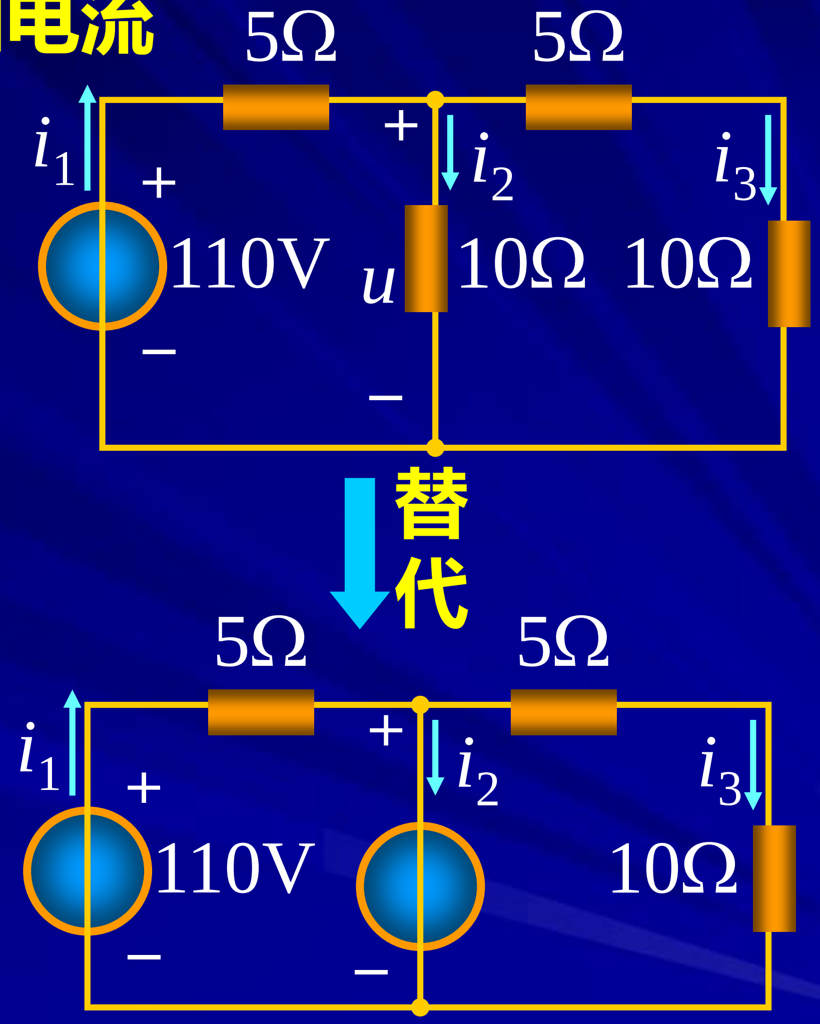

+
u_k
−
i_k
+
支路
k
u_k
−
i_k
i_k
+
$R=u_k/i_k$
u_k
−

2. 定理的证明



证毕!

例 **求图示电路的支路电压和电流**



解

$$i_1 = 110/[5+(5+10)//10] = 10\text{A}$$

$$i_2 = 3i_1/5 = 6\text{A}$$

$$i_3 = 2i_1/5 = 4\text{A}$$

$$u = 10i_2 = 60\text{V}$$

替代以后有：

$$i_1 = (110-60)/5 = 10\text{A}$$

$$i_3 = 60/15 = 4\text{A}$$

注意　**替代后各支路电压和电流完全不变。**

原因

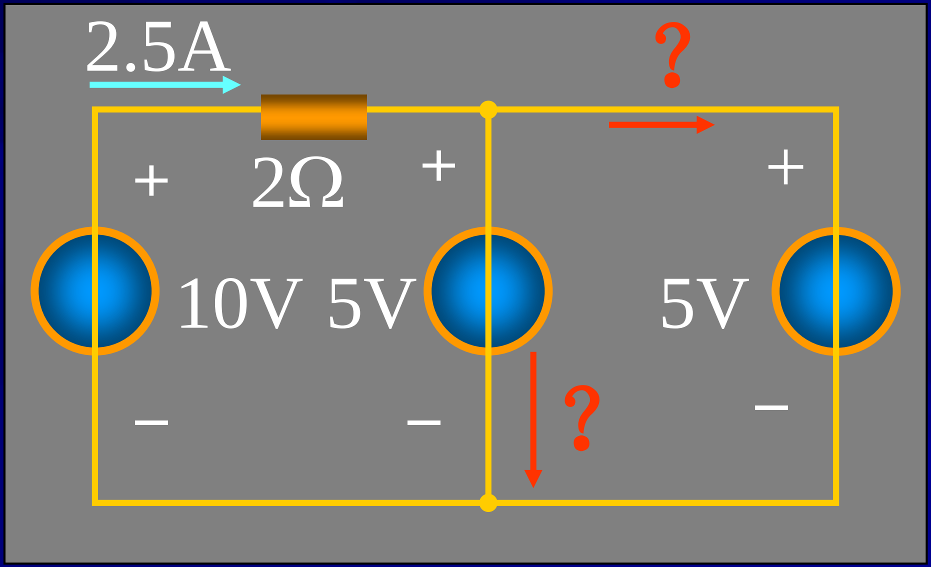
替代前后KCL,KVL关系相同，其余支路的u、i关系不变。用u_k替代后，其余支路电压不变(KVL)，其余支路电流也不变，故第k条支路i_k也不变(KCL)。用i_k替代后，其余支路电流不变(KCL)，其余支路电压不变，故第k条支路u_k也不变(KVL)。

注意

①替代定理既适用于线性电路，也适用于非线性电路。

注意 ②替代后电路必须有唯一解。

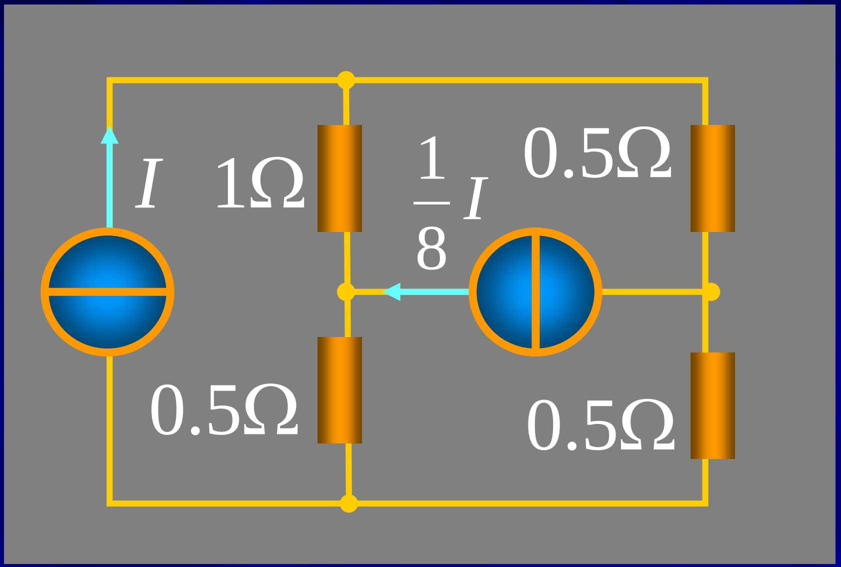
无电压源回路；
无电流源结点(含广义结点)。



③替代后其余支路及参数不能改变。

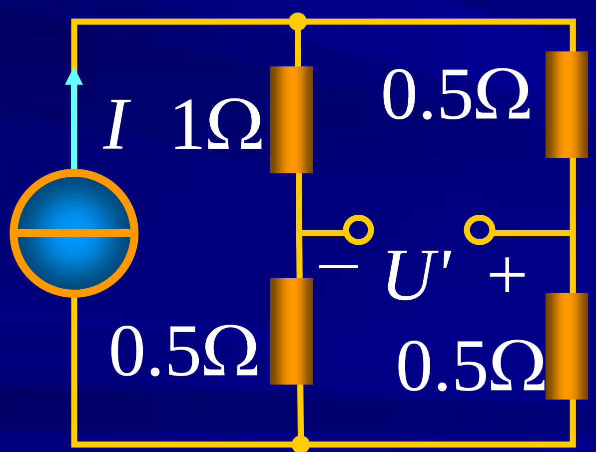
3. 替代定理的应用

例1 **若使** $I_x=\frac{1}{8}I$, **试求** R_x

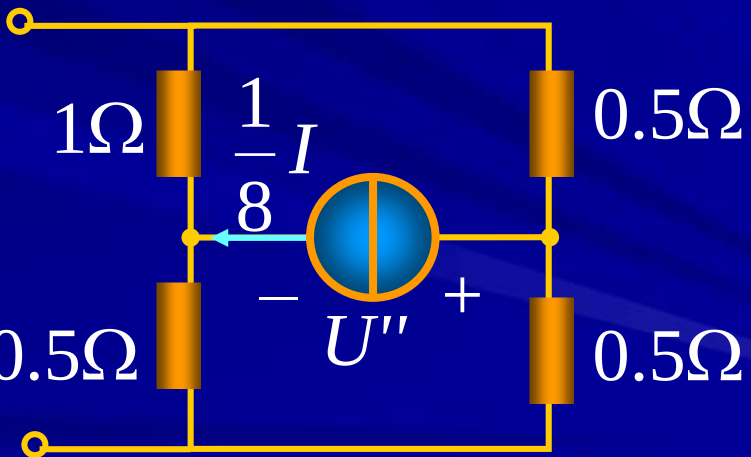


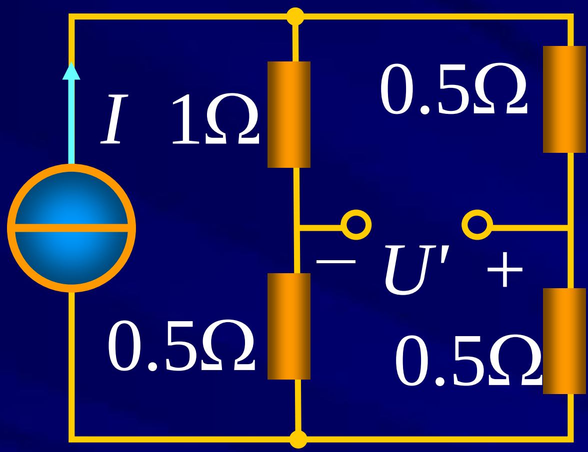
解 **用替代:**

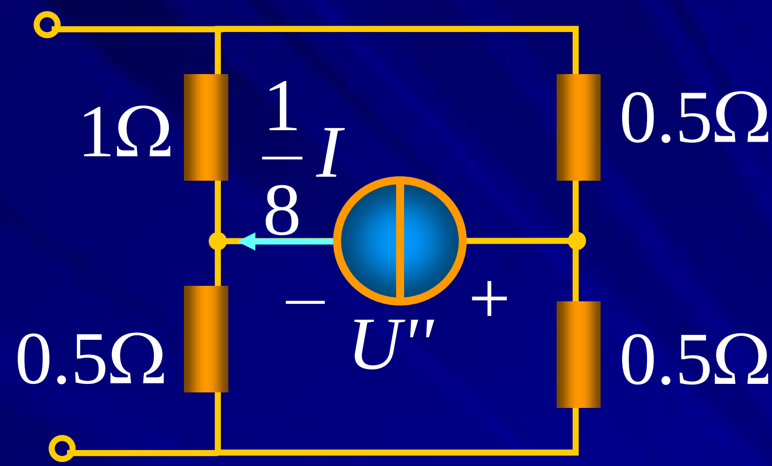
=



+







$$U' = \frac{1}{2.5} I \times 1 - \frac{1.5}{2.5} I \times 0.5 = 0.1 I$$

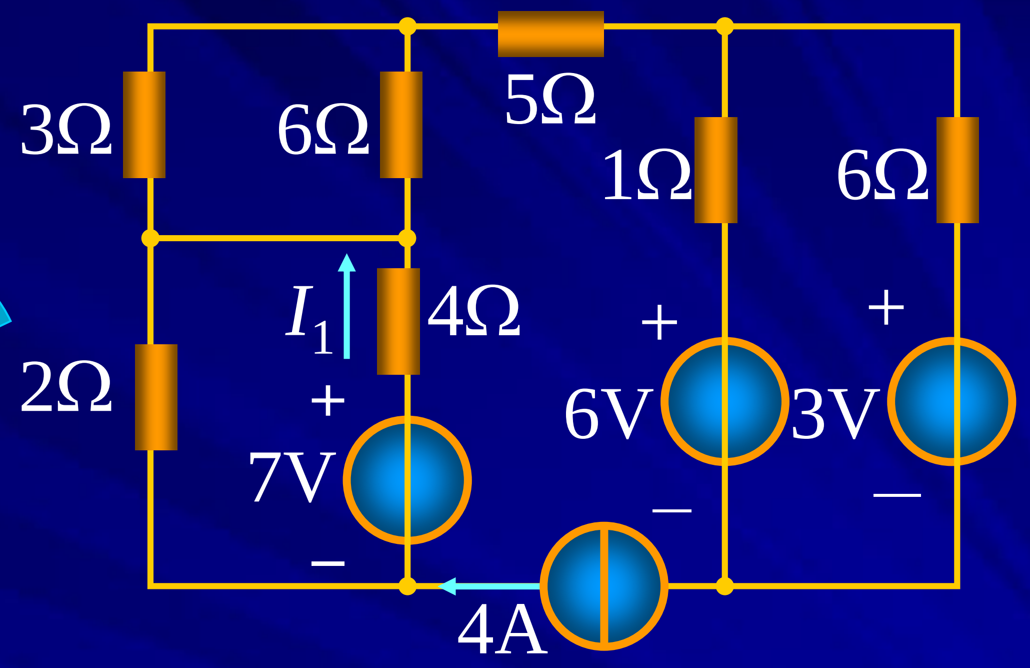
$$U'' = -\frac{1.5}{2.5} \times \frac{1}{8} I \times 1 = -0.075 I$$

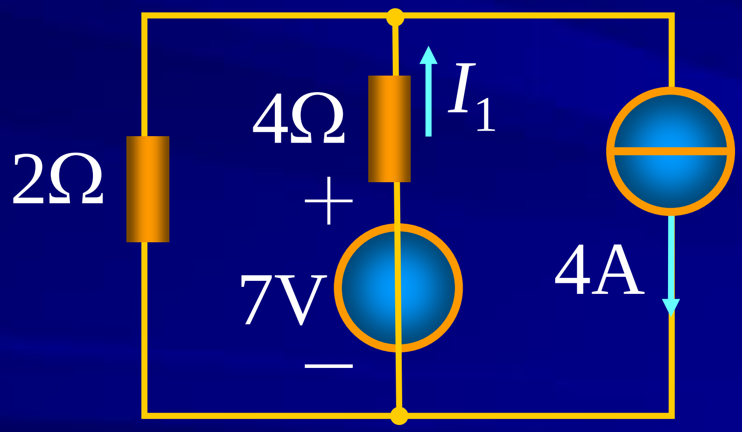
$$U = U' + U'' = (0.1 - 0.075) I = 0.025 I$$

$$R_x = U/0.125 I = 0.025 I/0.125 I = 0.2\Omega$$

例2 求电流I_1

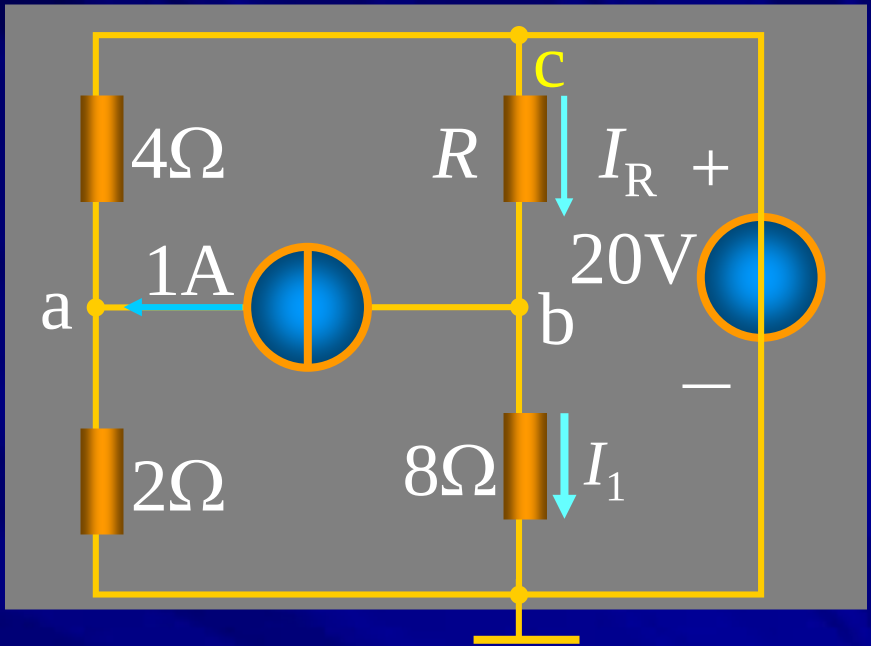
解 用替代：





$$I_1=\frac{7}{6}+\frac{2\times4}{2+4}=\frac{15}{6}=2.5\text{A}$$

例3 **已知:**$u_{ab}=0$, **求电阻**R



解 **用替代:**

$$u_{ab}=-3I+3=0$$

$$\Rightarrow I=1\text{A}$$

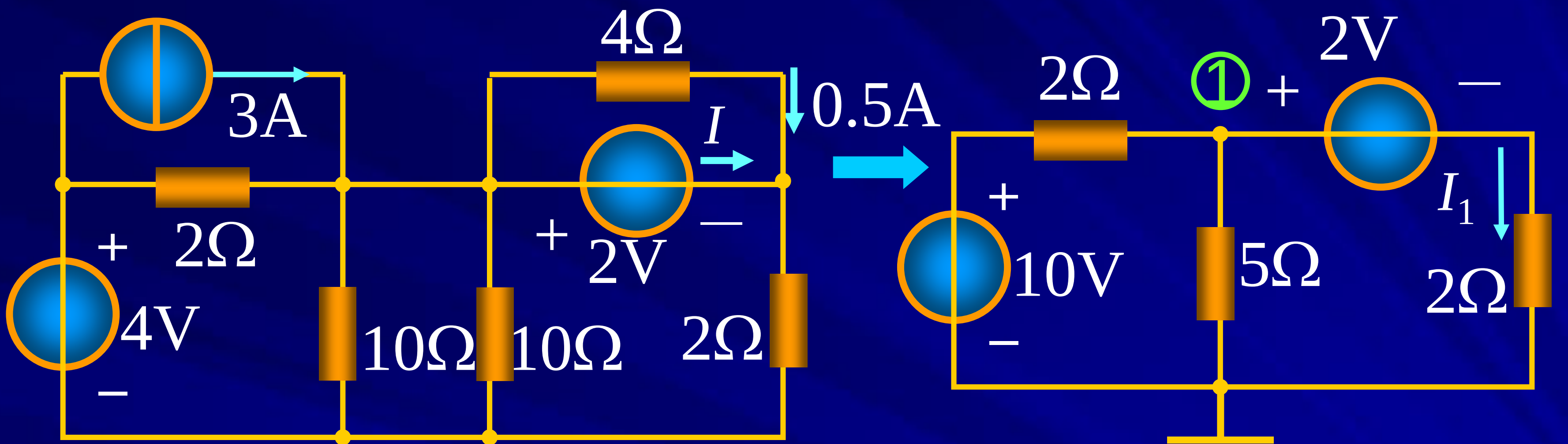
用结点法:

a点 $$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)u_a-\frac{1\times 20}{4}=1$$

$$\rightarrow u_a=u_b=8\text{V} \qquad I_1=1\text{A} \qquad I_R=I_1+1=2\text{A}$$

$$u_R=u_C-u_b=20-8=12\text{V} \qquad R=\frac{12}{2}=6\Omega$$

例4 用多大电阻替代2V电压源而不影响电路的工作



解 应求电流I，先化简电路。 应用结点法得：

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)u_1=\frac{10}{2}+\frac{2}{2}=6 \rightarrow u_1=6/1.2=5\text{V}$$

$$I_1=(5-2)/2=1.5\text{A}$$

$$I=1.5-0.5=1\text{A}$$

$$R=2/1=2\Omega$$

例5 **已知:** $u_{ab}=0$, **求电阻**R

解 $u_{ab}=0$

$$\Rightarrow i_{ab}=i_{cd}=0$$

用开路替代，得:

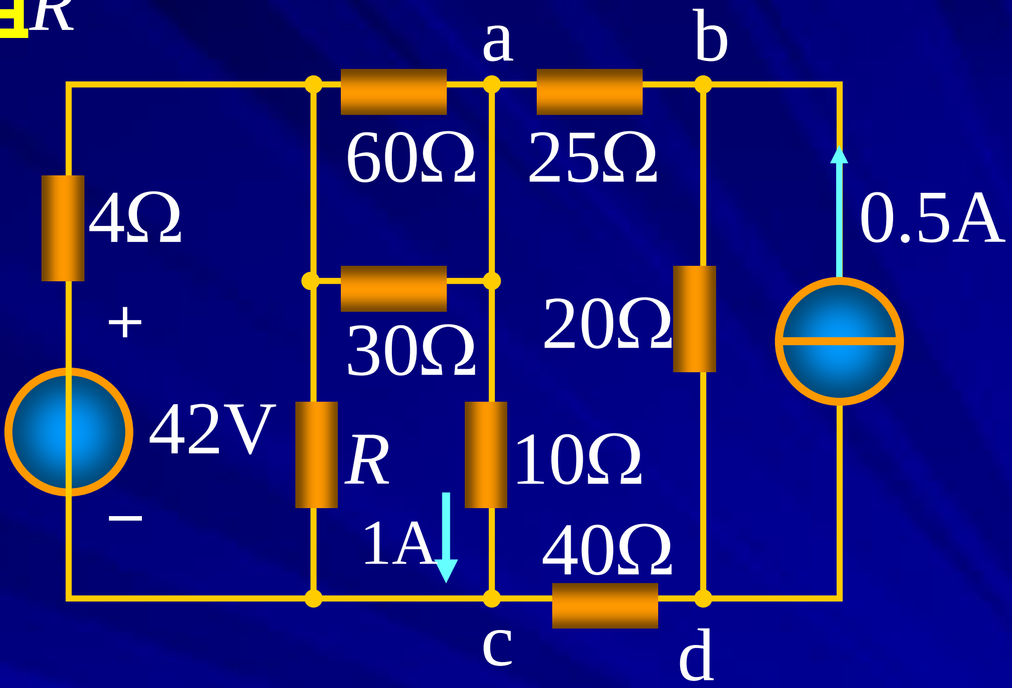
$$u_{bd}=20\times0.5=10\text{V}$$

短路替代 $u_{ac}=10\text{V}$

$$u_R=20\times1+10=30\text{V}$$

$$i_R=(42-30)/4-1=2\text{A}$$

$$R=\frac{u_R}{i_R}=\frac{30}{2}=15\Omega$$



4.3 戴维宁定理和诺顿定理

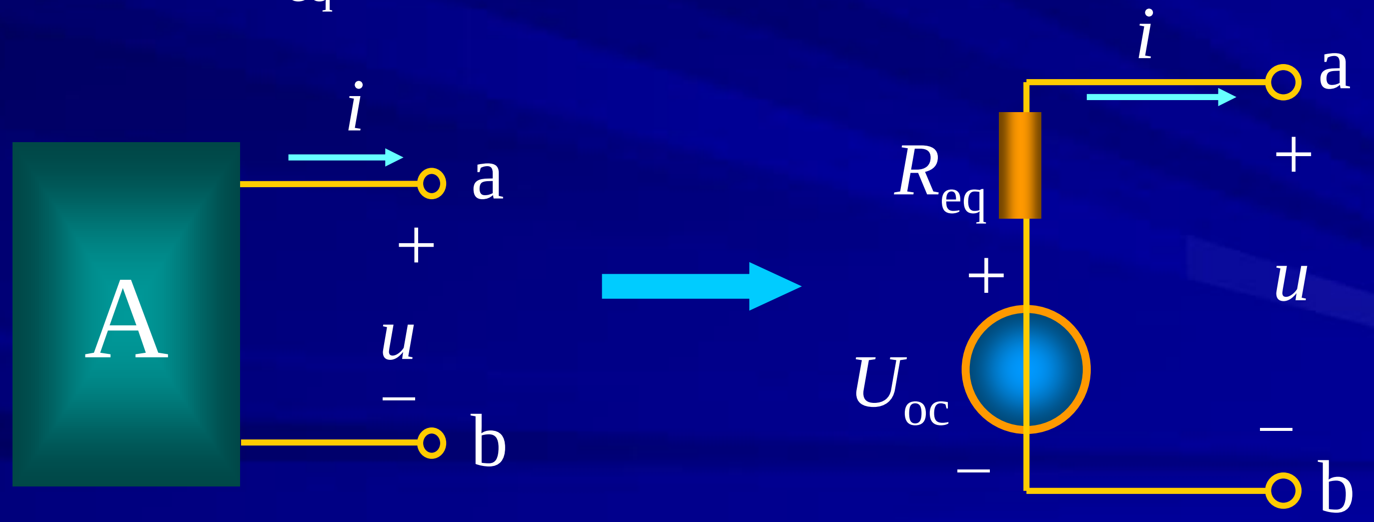
工程实际中，常常碰到只需研究某一支路的电压、电流或功率的问题。对所研究的支路来说，电路的其余部分就成为一个有源二端网络，可等效变换为较简单的含源支路(电压源与电阻串联或电流源与电阻并联支路)，使分析和计算简化。戴维宁定理和诺顿定理正是给出了等效含源支路及其计算方法。

Léon Charles Thévenin
1857 - 1926
法国电信工程师，1883年提出.
戴维宁定理、戴维南定理

1853年H. 亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz ）也提出过， 故也称亥姆霍兹-戴维宁(南)定理

1. 戴维宁定理

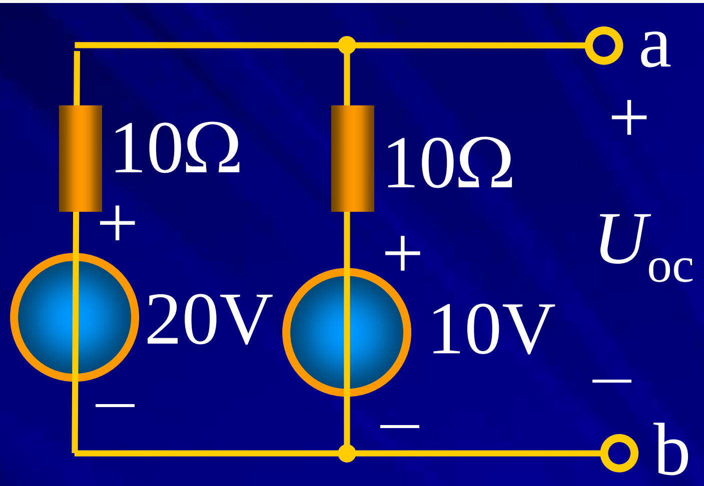
任何一个线性含源一端口网络，对外电路来说，总可以用一个电压源和电阻的串联组合来等效置换；此电压源的电压等于外电路断开时端口处的开路电压u_{oc}，而电阻等于一端口的输入电阻（或等效电阻R_{eq}）。



单选题 1分

设置

$R_{eq}=?, U_{oc}=?$

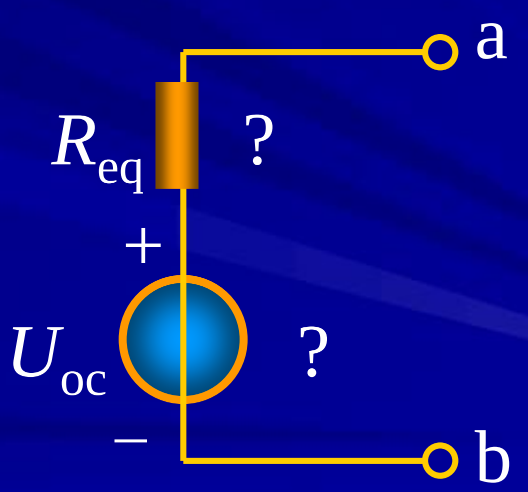


A 10 Ω, 30V

B 5 Ω, 15V

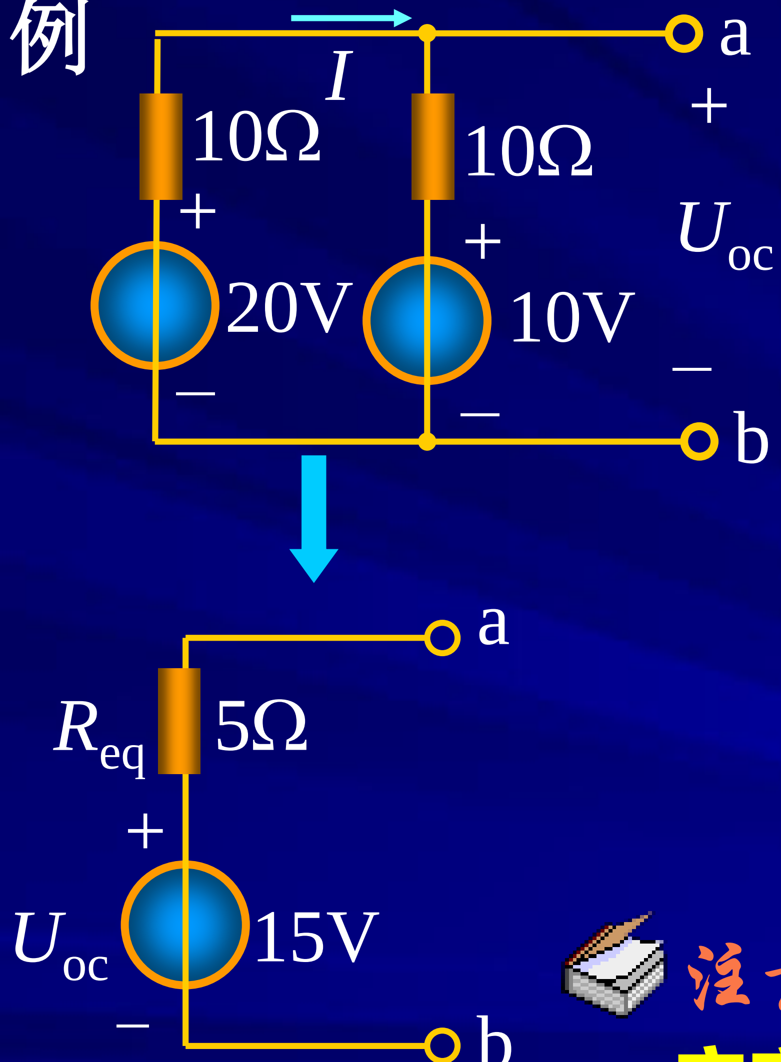
C 10 Ω, 10V

D 5 Ω, 10V



提交

例



应用电戴维宁定理

(1) **求开路电压U_{oc}**

$$I=\frac{20-10}{20}=0.5\text{A}$$

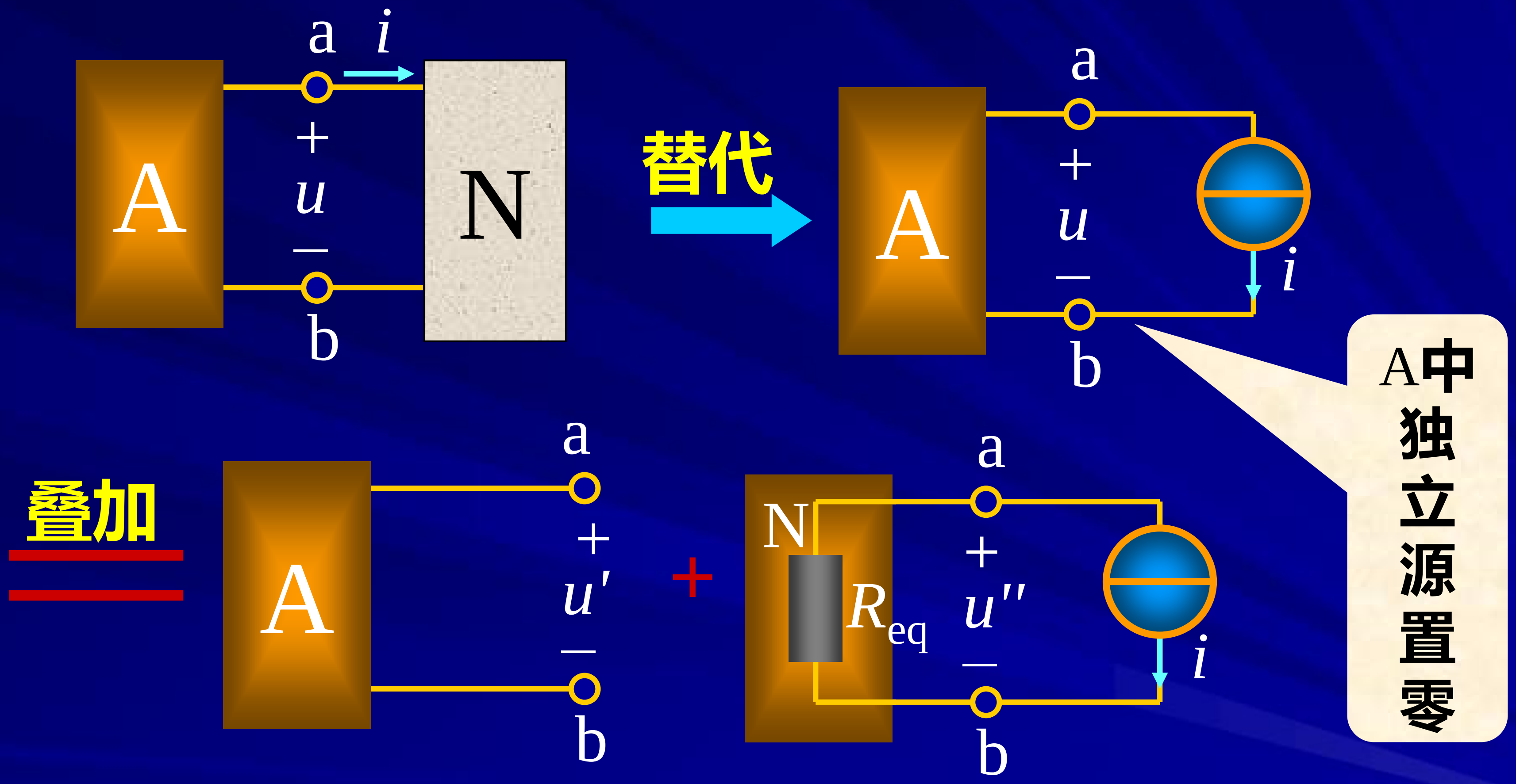
$$U_{oc}=0.5\times10+10=15\text{V}$$

(2) **求输入电阻R_{eq}**

$$R_{eq}=10//10=5\Omega$$

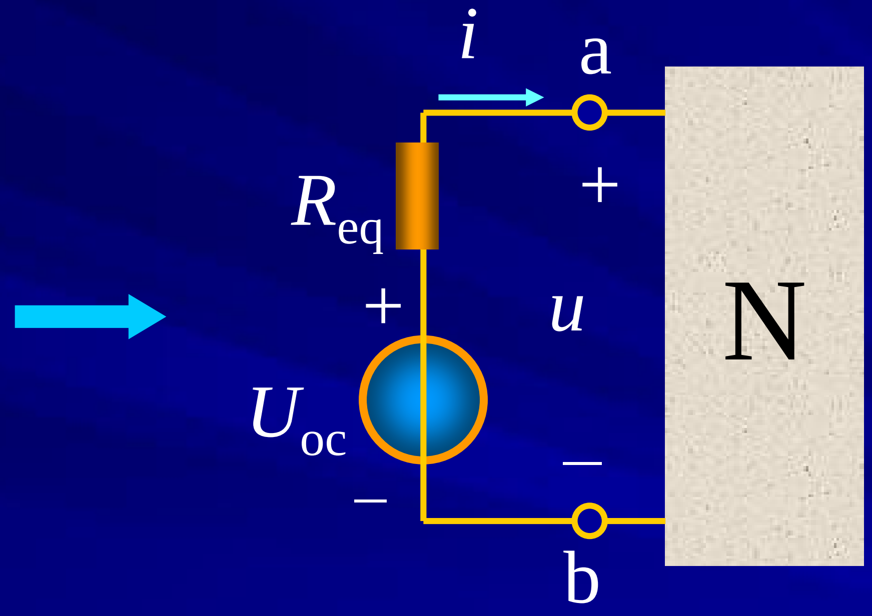
注意：**两种解法结果一致，戴维宁定理更具普遍性。**

2.定理的证明



$$u' = u_{oc} \qquad u'' = -R_{eq} i$$

$$u = u' + u'' = u_{oc} - R_{eq} i$$



3.定理的应用

（1）开路电压U_{oc}的计算

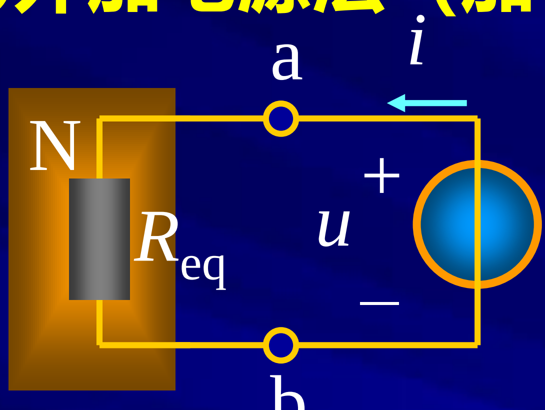
戴维宁等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压U_{oc}，电压源方向与所求开路电压方向有关。计算U_{oc}的方法视电路形式选择前面学过的任意方法，使易于计算。

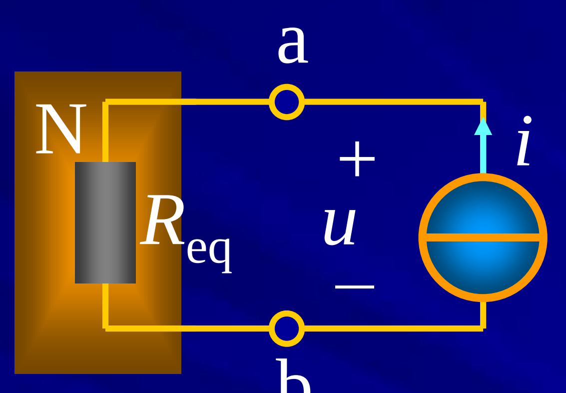
（2）等效电阻的计算

等效电阻为将一端口网络内部独立电源全部置零(电压源短路，电流源开路)后，所得无源一端口网络的输入电阻。常用下列方法计算：

①当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联和△－Y互换的方法计算等效电阻；

②外加电源法（加电压求电流或加电流求电压）；

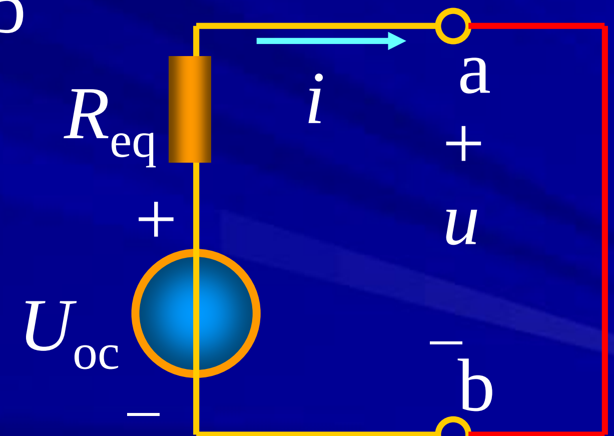




$$R_{eq} = \frac{u}{i}$$

③开路电压，短路电流法。

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}}$$



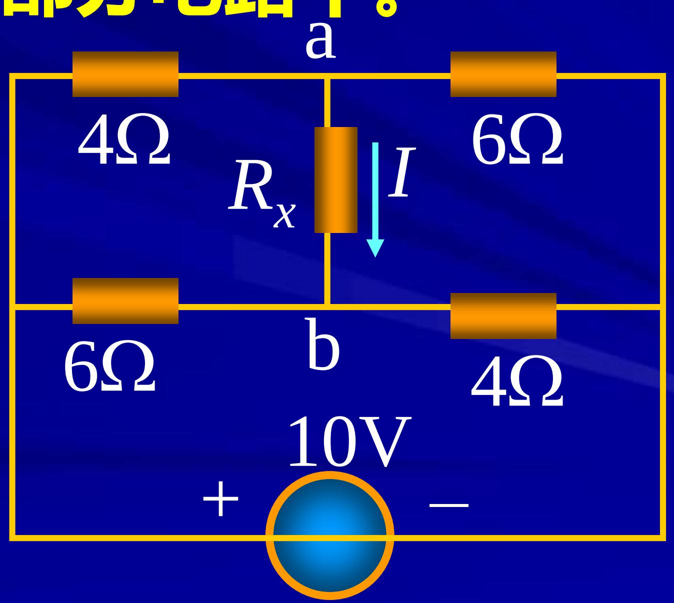
②③ 方法更有一般性。

注意

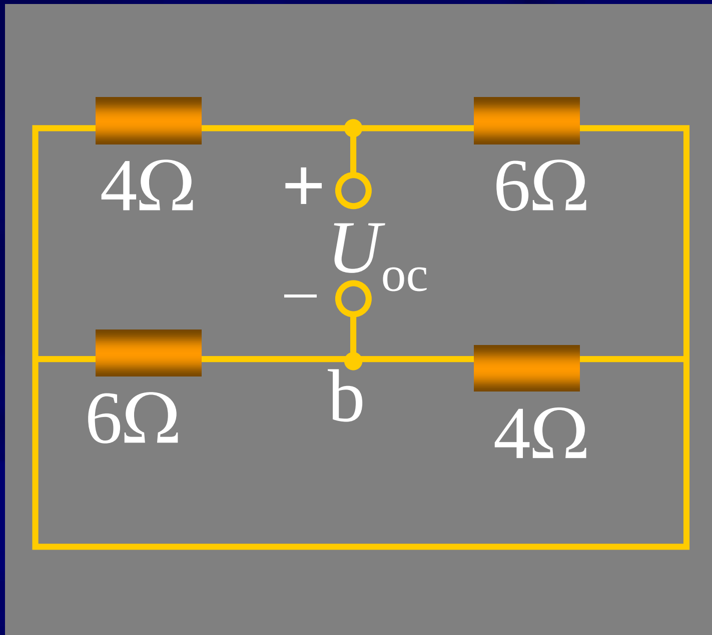
① 外电路可以是任意的线性或非线性电路，外电路发生改变时，含源一端口网络的等效电路不变(伏–安特性等效)。

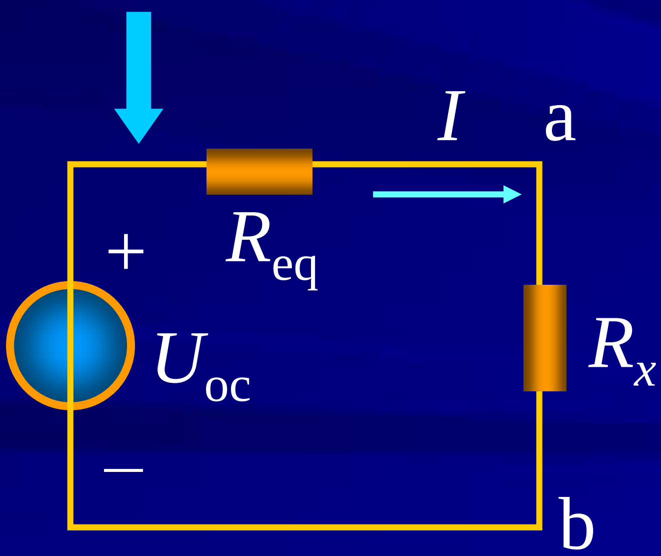
② 当一端口内部含有受控源时，控制电路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。

例1 计算R_x分别为1.2Ω、5.2Ω时的电流I



解　断开R_x支路，将剩余一端口网络化为戴维宁等效电路：





①求开路电压

$$U_{oc} = U_1 - U_2$$

$$= -10\times4/(4+6)+10\times6/(4+6)$$

$$= 6-4=2V$$

②求等效电阻R_{eq}

$$R_{eq}=4//6+6//4=4.8\Omega$$

③ $R_x=1.2\Omega$**时，**

$$I= U_{oc}/(R_{eq}+R_x)=0.333A$$

$R_x=5.2\Omega$**时，**

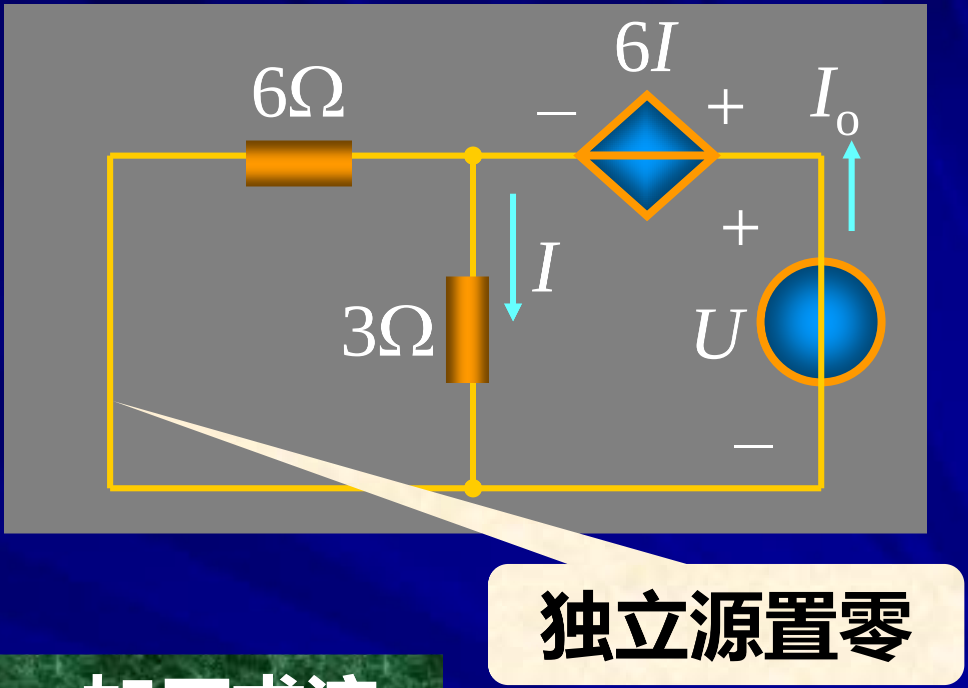
$$I= U_{oc}/(R_{eq}+R_x)=0.2A$$

例2　**求电压U_o**

解　**①求开路电压U_{oc}**

$$\begin{cases} U_{oc}=6I+3I \\ I=9/9=1A \end{cases}$$

$\rightarrow U_{oc}=9V$



②求等效电阻R_{eq}　**方法1：加压求流**

$$\begin{cases} U=6I+3I=9I \\ I=I_o\times 6/(6+3)=(2/3)I_o \end{cases}$$

$\rightarrow U=9\times(2/3)I_0=6I_o$

$R_{eq}=U/I_o=6\ \Omega$

方法2：开路电压、短路电流

$(U_{oc}=9\text{V})$

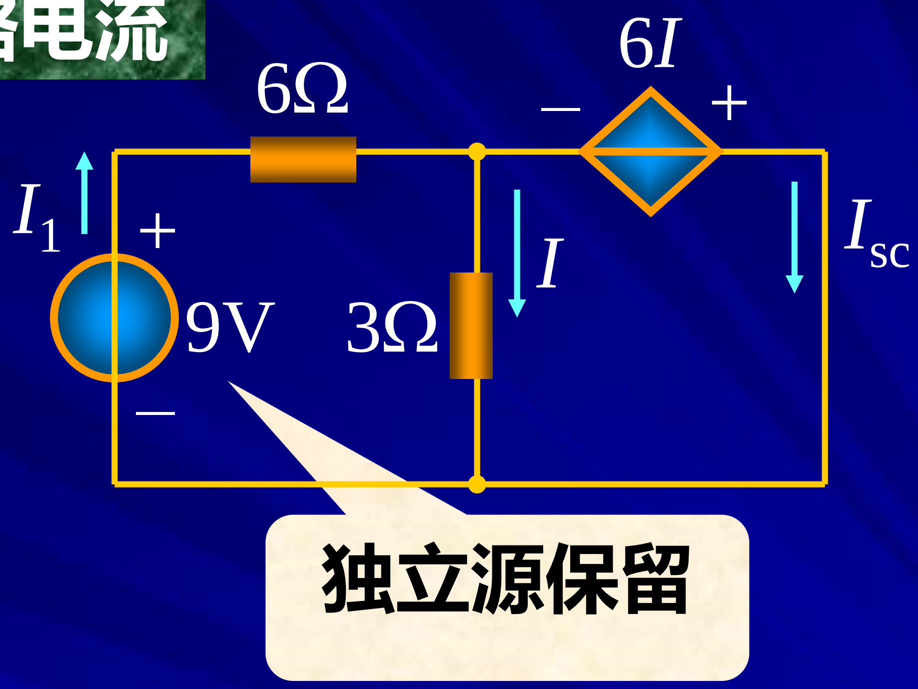
$6I_1+3I=9$

$6I+3I=0$

$\Rightarrow I=0$

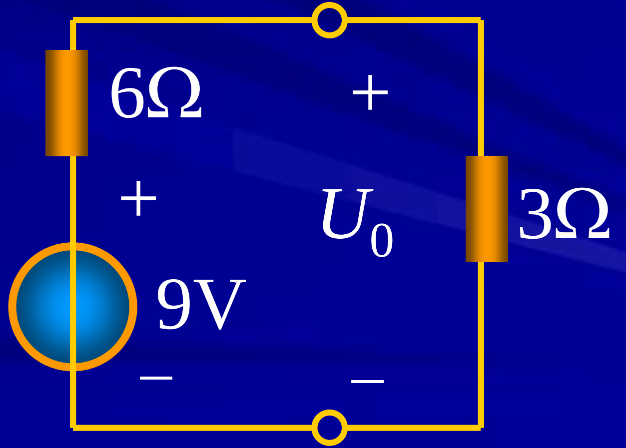
$I_{sc}=I_1=9/6=1.5\text{A}$

$R_{eq}=U_{oc}/I_{sc}=9/1.5=6\ \Omega$



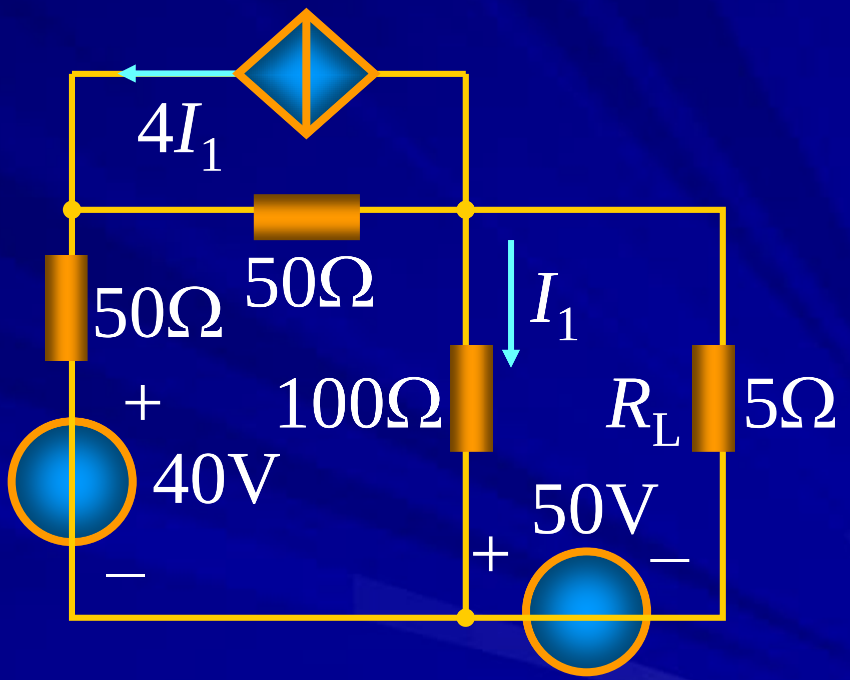
③等效电路

$$U_0=\frac{9}{6+3}\times 3=3\text{V}$$

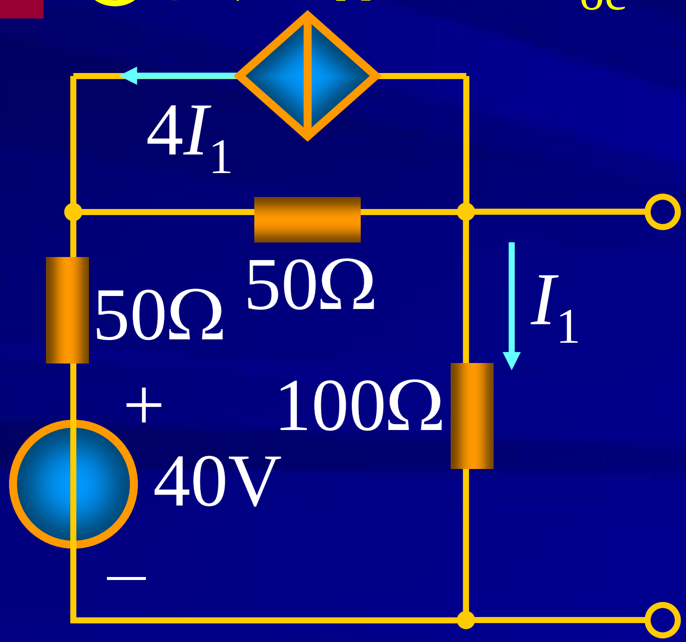


注意 计算含受控源电路的等效电阻是用外加电源法还是开路、短路法，要具体问题具体分析，以计算简便为好。

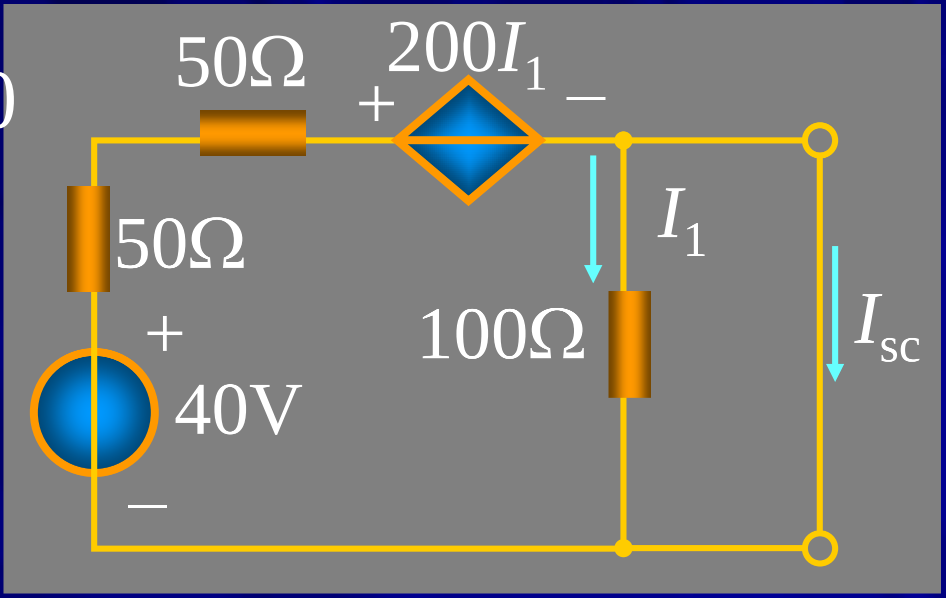
例3 求负载R_L消耗的功率



解 ①求开路电压U_{oc}



$$100I_1 + 200I_1 + 100I_1 = 40$$

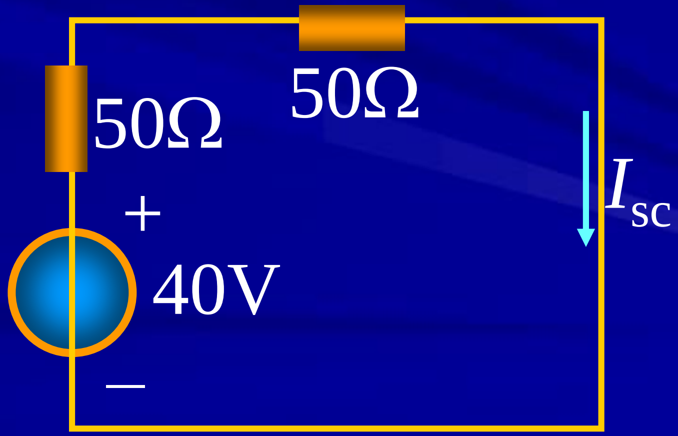


$$\rightarrow \quad I_1 = 0.1\text{A}$$

$$U_{oc} = 100I_1 = 10\text{V}$$

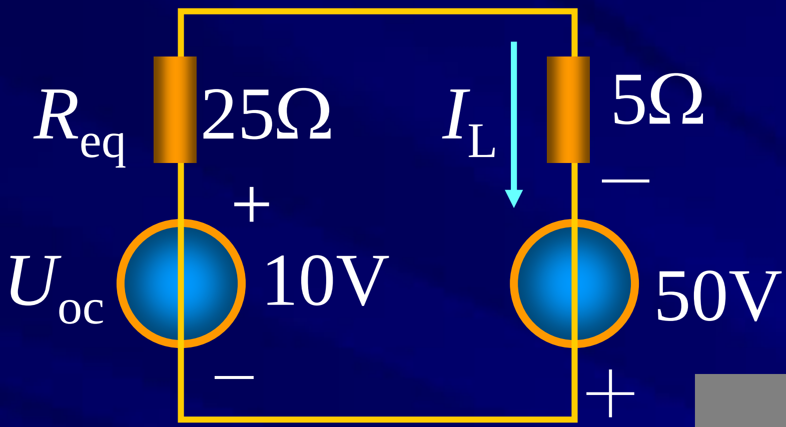
②求等效电阻R_{eq}

用开路电压、短路电流法



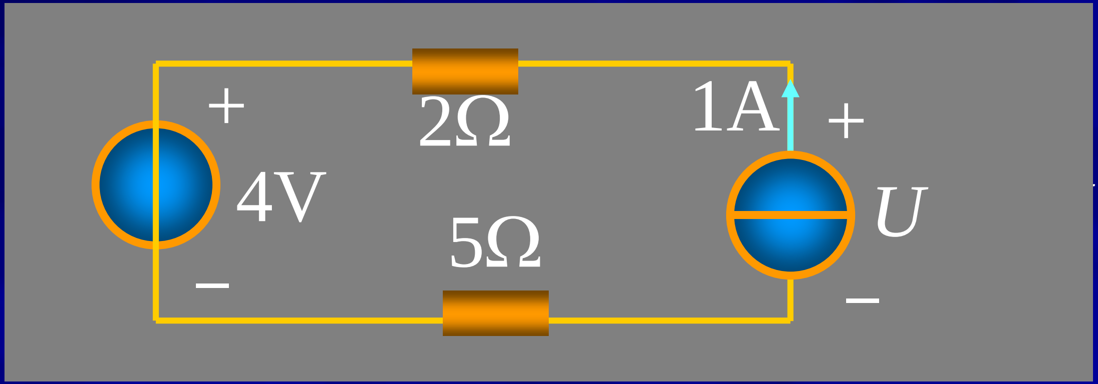
$$I_{sc} = 40/100 = 0.4\text{A}$$

$$R_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = 10/0.4 = 25\Omega$$



$$I_L=\frac{U_{oc}+50}{25+5}=\frac{60}{30}=2A$$

$$P_L=5I_L^2=5\times4=20W$$



例4 **已知开关S**

→ 1 A = 2A

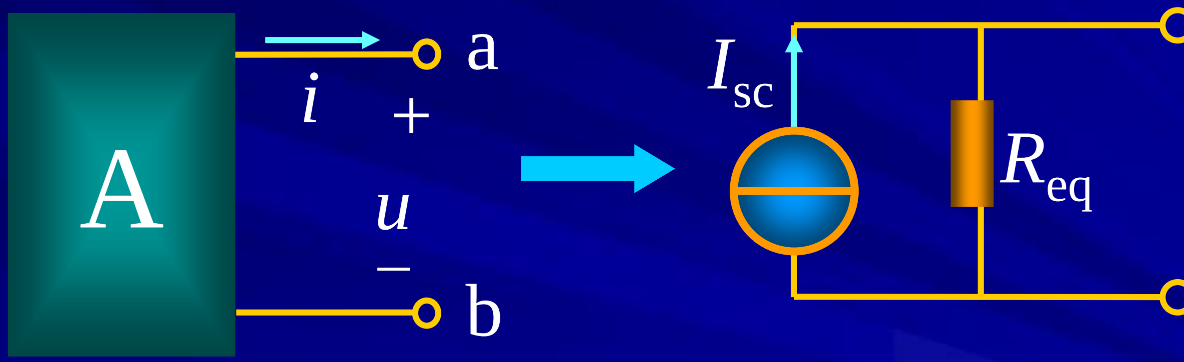
→ 2 V = 4V **求开关S打向3，电压U等于多少。**

解 $i_{Sc}=2A \quad U_{oc}=4V \longrightarrow R_{eq}=2\Omega$

$$U=(2+5)\times1+4=11V$$

4. 诺顿定理

任何一个含源线性一端口电路，对外电路来说，可以用一个电流源和电阻的并联组合来等效置换；电流源的电流等于该一端口的短路电流，电阻等于该一端口的输入电阻。



注意

一般情况，诺顿等效电路可由戴维宁等效电路经电源等效变换得到。诺顿等效电路可采用与戴维宁定理类似的方法证明。

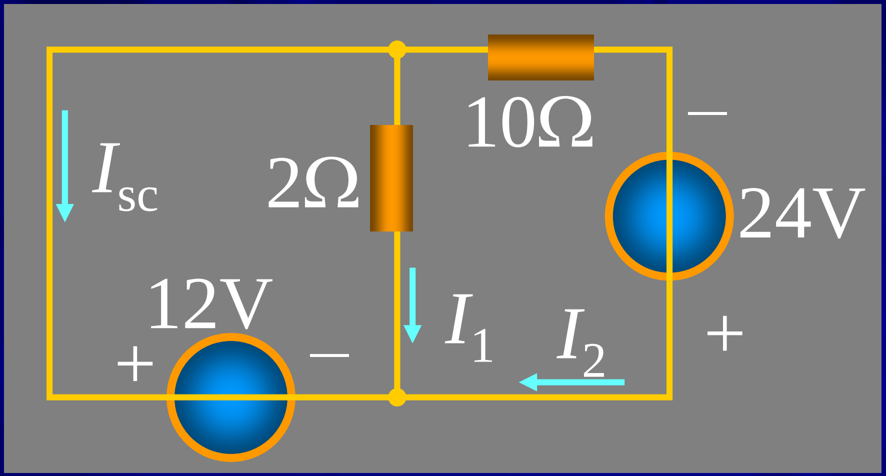
诺顿定理于1926年由两人分别提出，他们分别是西门子公司研究员汉斯·梅耶尔（1895年-1980年）及贝尔实验室工程师爱德华·劳笠·诺顿（1898-1983）。

实际上梅耶尔是两人中唯一有在这课题上发表过论文的人，但诺顿只在贝尔实验室内部用的一份技术报告上提及过他的发现。

与戴维宁定理相比，诺顿定理为什么晚四十多年才被提出?

例1　**求电流I**

解　**①求短路电流I_{sc}**

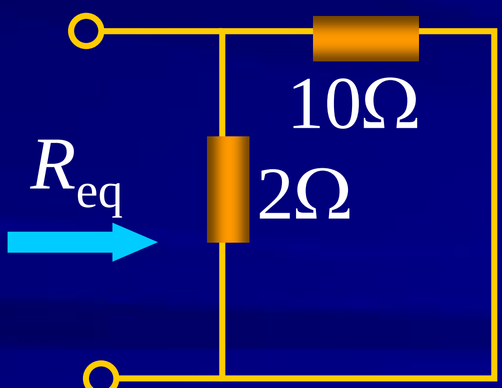


$I_1 = 12/2 = 6\text{A}$

$I_2 = (24+12)/10 = 3.6\text{A}$

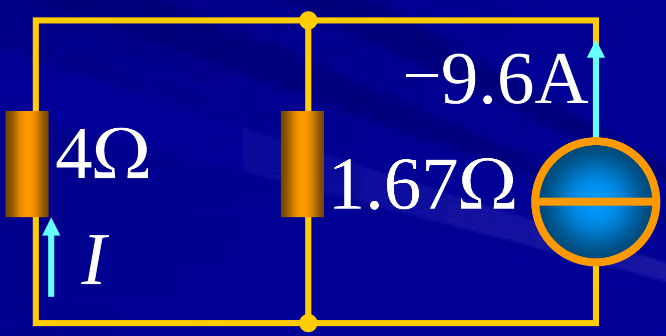
$I_{sc} = -I_1 - I_2 = -3.6 - 6 = -9.6\text{A}$　　$R_{eq} = 10//2 = 1.67\ \Omega$

②求等效电阻R_{eq}



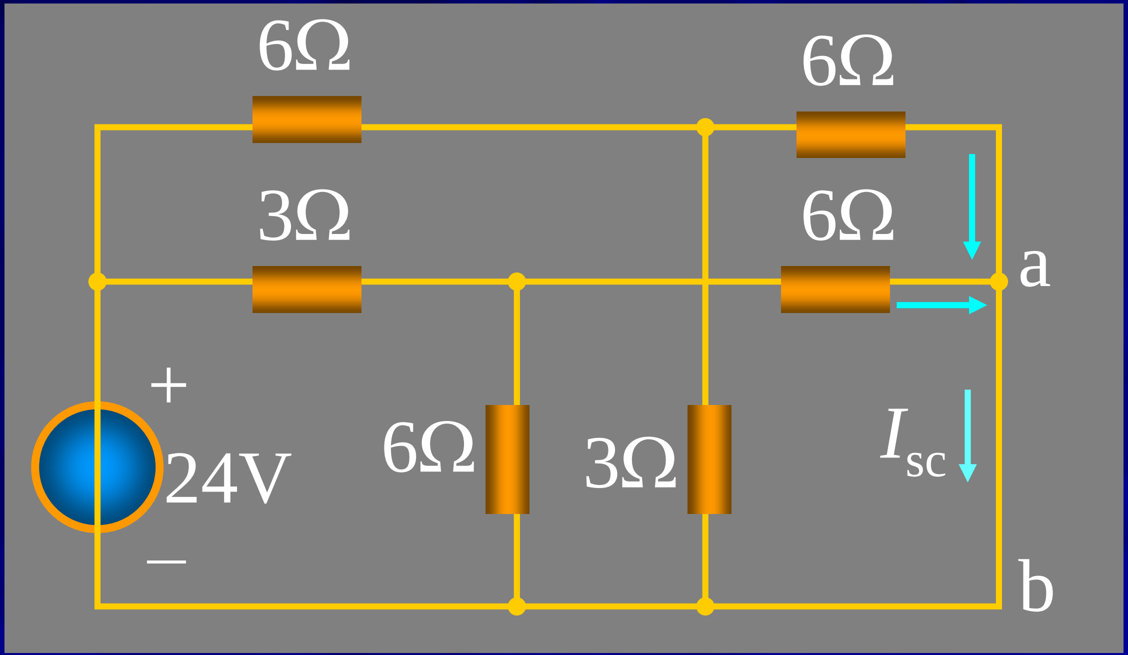
③诺顿等效电路:

应用分流公式



$I = 2.83\text{A}$

例2　**求电压U**

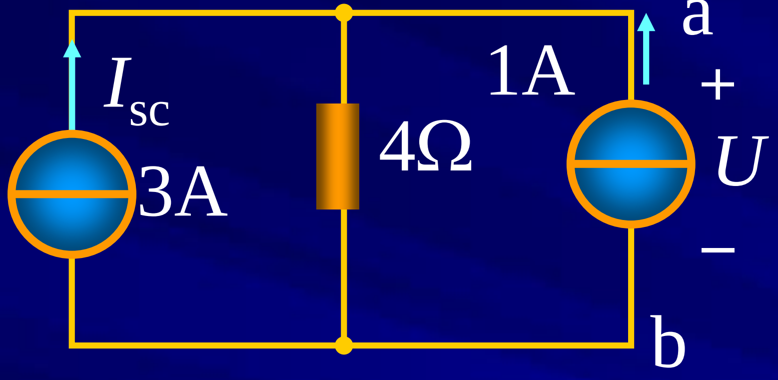


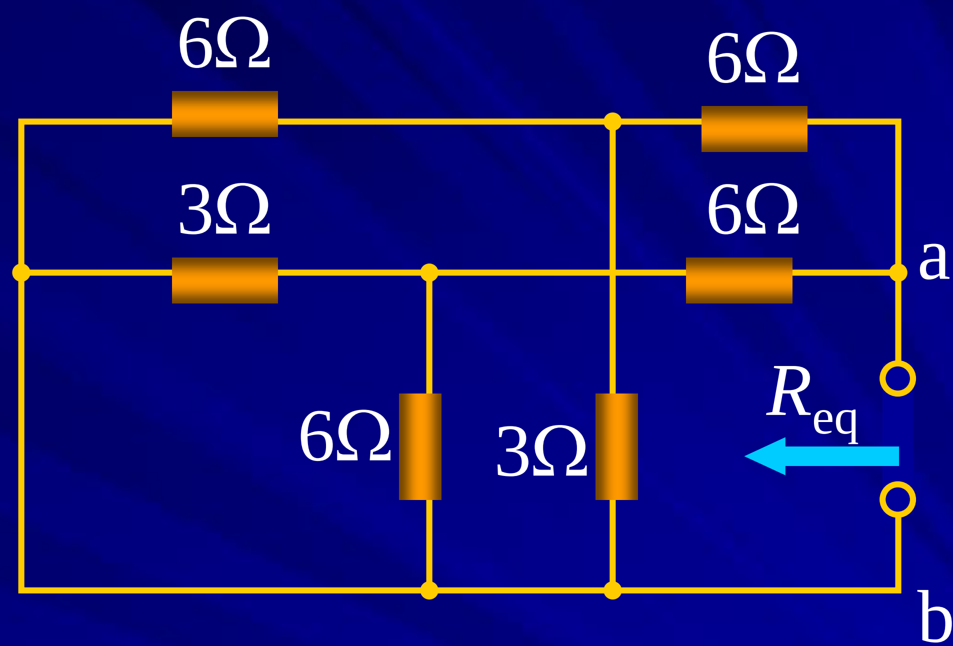
解 **本题用诺顿定理求比较方便。因a、b处的短路电流比开路电压容易求。**

①求短路电流I_{sc}

$$I_{sc}=\frac{24}{6//6+3}\times\frac{1}{2}+\frac{24}{3//6+6}\times\frac{3}{3+6}=3\text{A}$$

②求等效电阻R_{eq}





$$R_{eq}=[6//3+6]//[3//6+6]=4\Omega$$

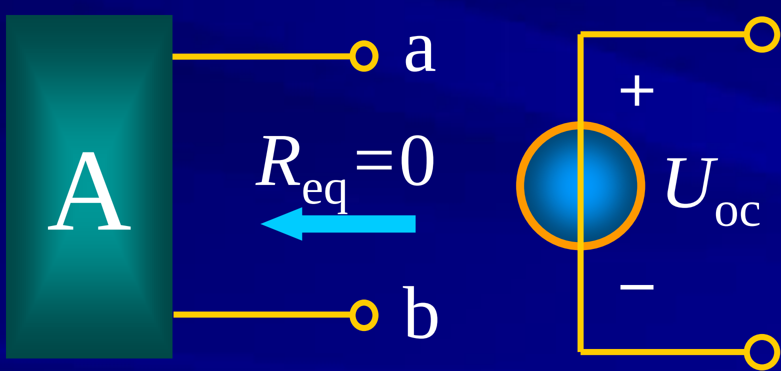
③诺顿等效电路:

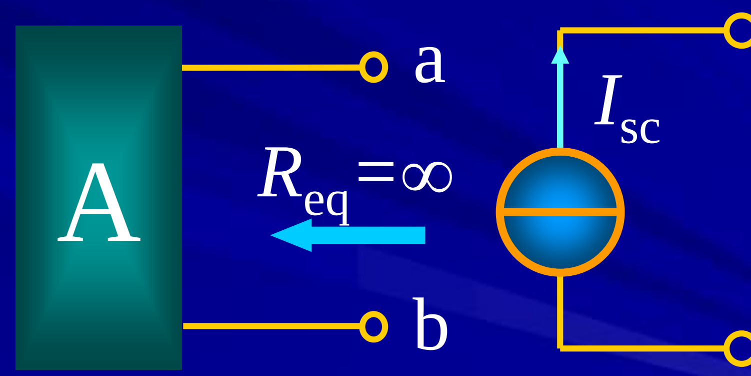
$$U=(3+1)\times 4=16\text{V}$$

注意

①若一端口网络的等效电阻 $R_{eq}=0$，该一端口网络只有戴维宁等效电路，无诺顿等效电路。

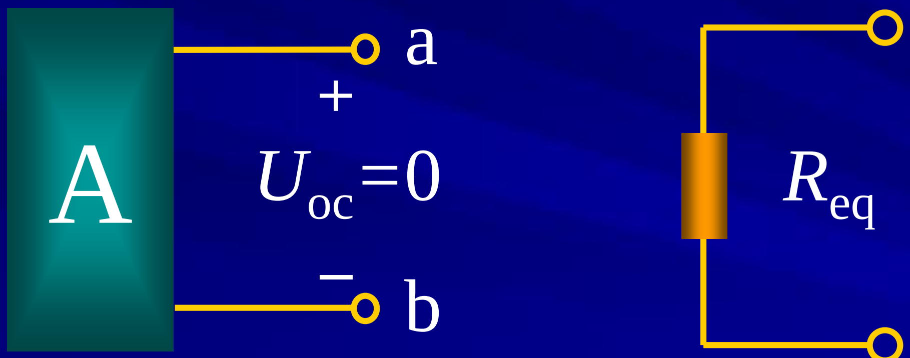
②若一端口网络的等效电阻 $R_{eq}=\infty$，该一端口网络只有诺顿等效电路，无戴维宁等效电路。





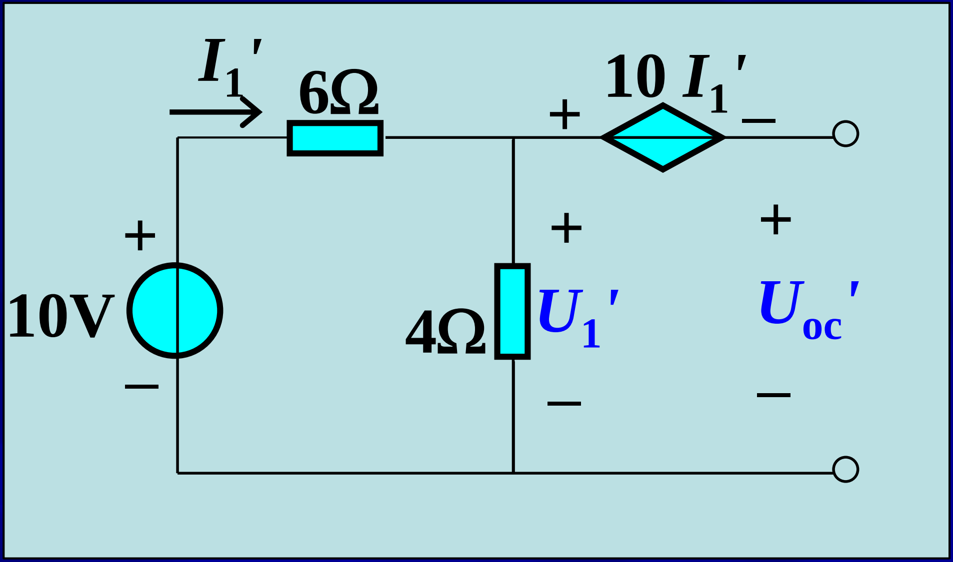
注意

③ 若一端口网络的 $U_{oc}=0$，或$I_{sc}=0$，则该一端口网络只有等效输入电阻。



单选题 1分

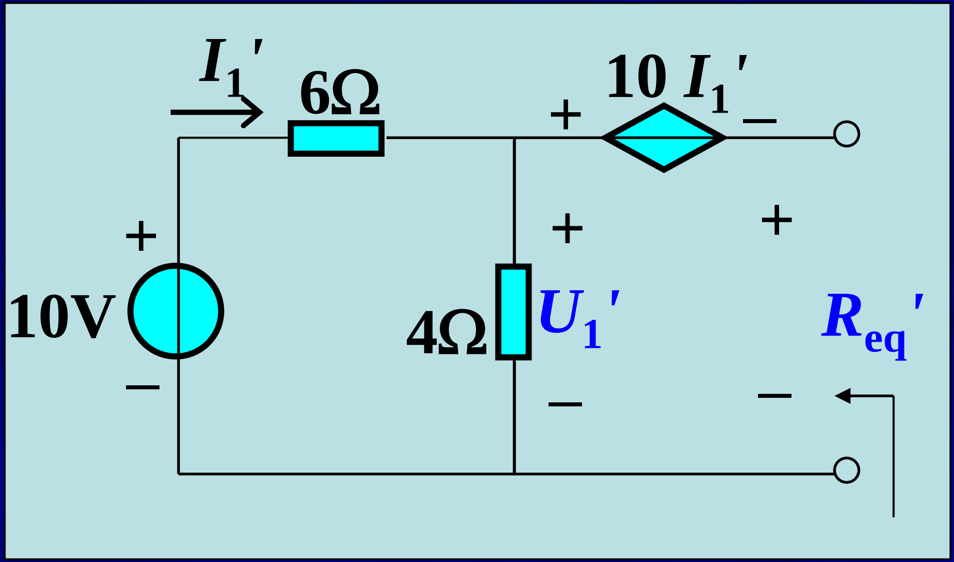
$U_{oc}{}'$=___V



单选题 1分

设置

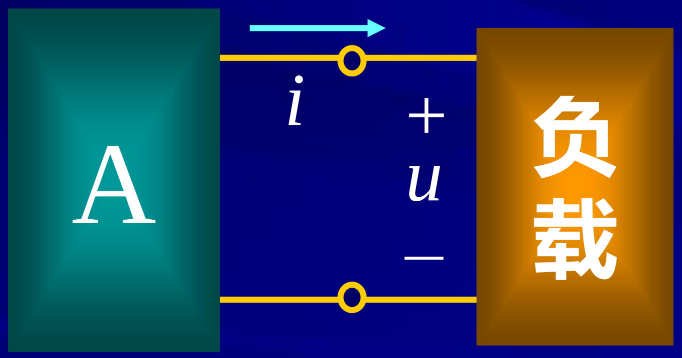
$R_{eq}'=$____Ω



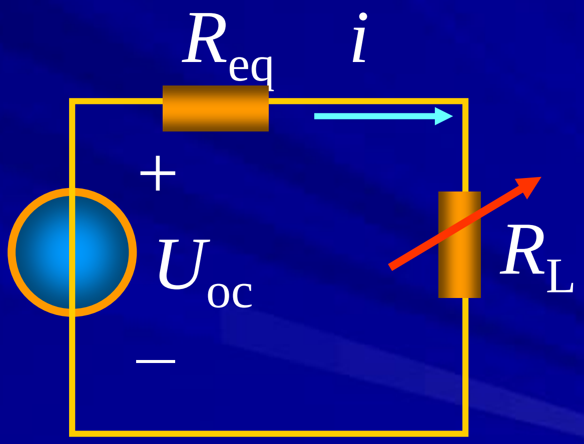
提交

4.4 最大功率传输定理

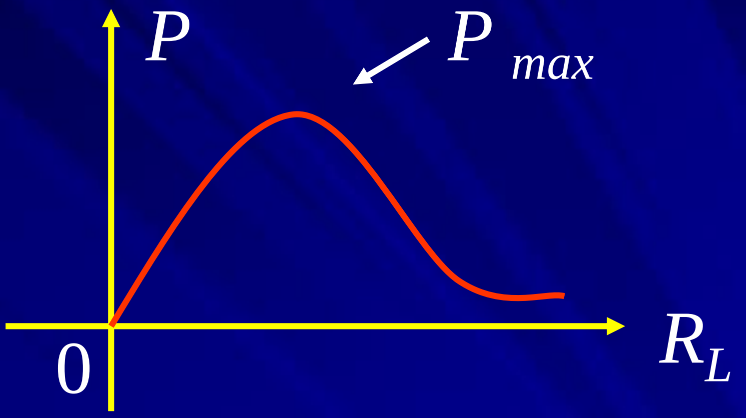
一个含源线性一端口电路，当所接负载不同时，一端口电路传输给负载的功率就不同，讨论负载为何值时能从电路获取最大功率，及最大功率的值是多少的问题是有工程意义的。



应用戴维宁定理



$$P = R_L\left(\frac{u_{oc}}{R_{eq}+R_L}\right)^2$$



对P求导：

$$P' = u_{oc}^2\frac{(R_{eq}+R_L)^2-2R_L(R_{eq}+R_L)}{(R_{eq}+R_L)^4}=0$$

$$\rightarrow \boxed{R_L = R_{eq}} \rightarrow \boxed{P_{\max}=\frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}}$$

最大功率匹配条件

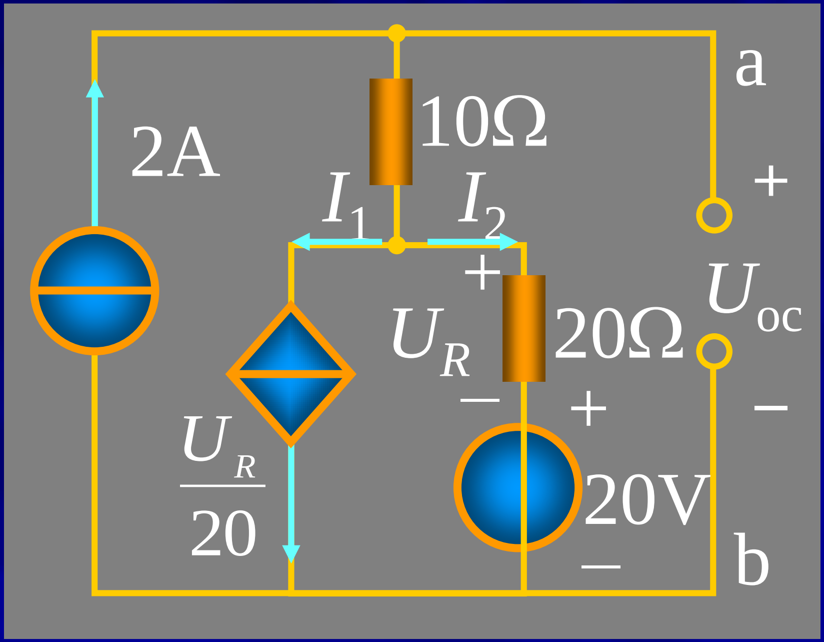
例 R_L为何值时能获得最大功率，并求最大功率

解 ①求开路电压U_{oc}

$$I_1 = I_2 = U_R/20$$

$$I_1 + I_2 = 2\text{A}$$

$$\rightarrow \quad I_1 = I_2 = 1\text{A}$$



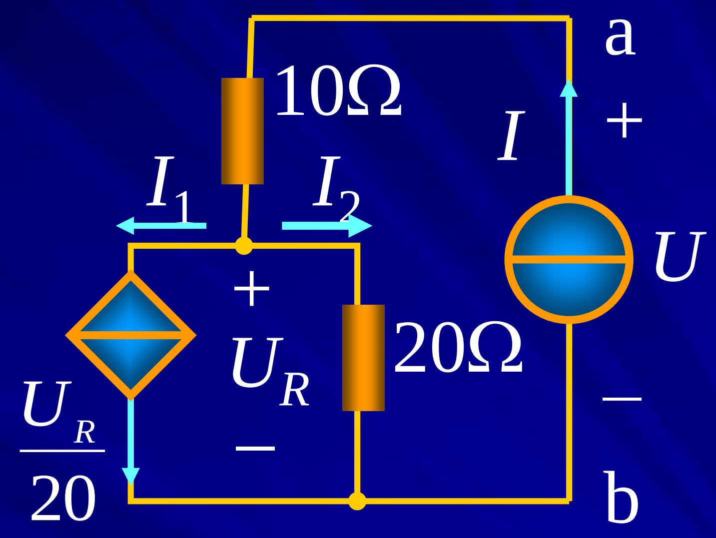
$$U_{oc} = 2\times10 + 20I_2 + 20 = 60\text{V}$$

②求等效电阻R_{eq}

$$I_1 = I_2 = I/2$$

$$U = 10I + 20 \times I/2 = 20I$$

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = 20\Omega$$



③由最大功率传输定理得:

$R_L = R_{eq} = 20\Omega$ 时其上可获得最大功率

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{60^2}{4 \times 20} = 45\text{W}$$

注意

①最大功率传输定理用于一端口电路给定,负载电阻可调的情况;

②一端口等效电阻消耗的功率一般并不等于端口内部消耗的功率,因此当负载获取最大功率时,电路的传输效率并不一定是50%;

③计算最大功率问题结合应用戴维宁定理或诺顿定理最方便.

4.5* 特勒根定理

1. 特勒根定理1

任何时刻，一个具有n个结点和b条支路的集总电路，在支路电流和电压取关联参考方向下，满足：

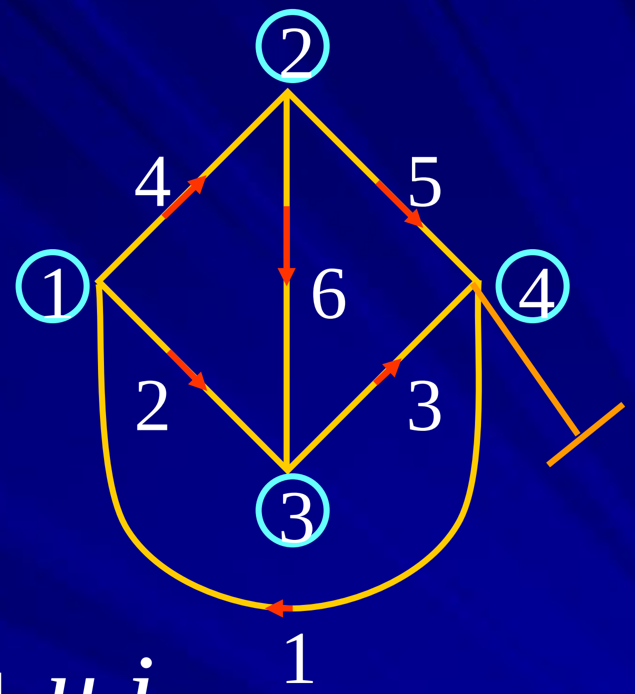
$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$$

功率守恒

表明 任何一个电路的全部支路吸收的功率之和恒等于零。

定理证明： **应用KCL：**

$$
\begin{cases}
① & -i_1+i_2+i_4=0 \\
② & -i_4+i_5+i_6=0 \\
③ & -i_2+i_3-i_6=0
\end{cases}
$$

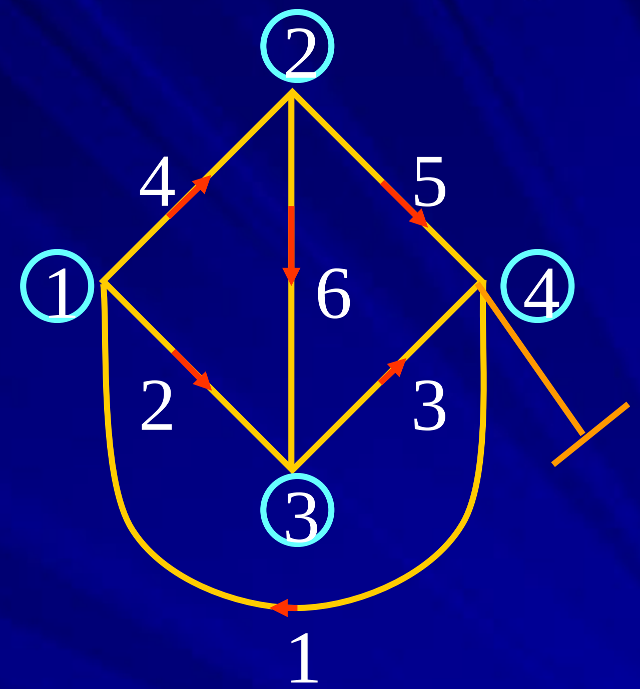


$$\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = u_1 i_1 + u_2 i_2 + \cdots + u_6 i_6$$

$$= -u_{n1}i_1 + (u_{n1}-u_{n3})i_2 + u_{n3}i_3 + (u_{n1}-u_{n2})i_4 + u_{n2}i_5 + (u_{n2}-u_{n3})i_6$$

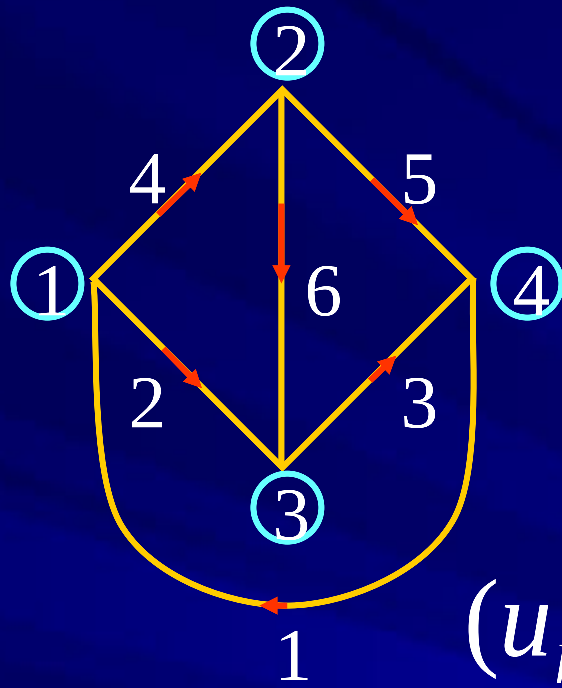
支路电压用结点电压表示

$$= u_{n1}(-i_1 + i_2 + i_4) + u_{n2}(-i_4 + i_5 + i_6) + u_{n3}(-i_2 + i_3 - i_6) = 0$$

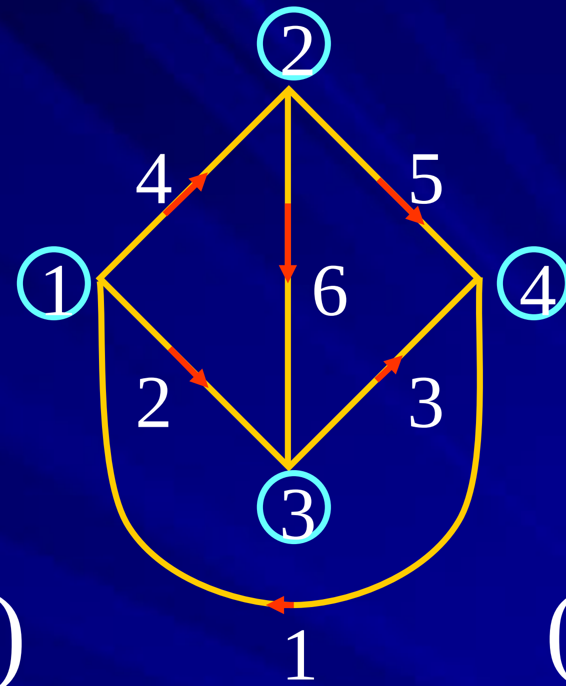


2. 特勒根定理2

任何时刻，对于两个具有n个结点和b条支路的集总电路，当它们具有相同的图，但由内容不同的支路构成，在支路电流和电压取关联参考方向下，满足:



(u_k, i_k)



$(\hat{u}_k, \hat{i}_k)$

$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0$$

拟功率定理

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$$

定理证明：

对电路2应用KCL：

$$\begin{cases} ① & -\hat{i}_1+\hat{i}_2+\hat{i}_4=0 \\ ② & -\hat{i}_4+\hat{i}_5+\hat{i}_6=0 \\ ③ & -\hat{i}_2+\hat{i}_3-\hat{i}_6=0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{b}u_k\hat{i}_k=u_1\hat{i}_1+u_2\hat{i}_2+\cdots+u_6\hat{i}_6$$

$$=-u_{n1}\hat{i}_1+(u_{n1}-u_{n3})\hat{i}_2+u_{n3}\hat{i}_3+$$

$$(u_{n1}-u_{n2})\hat{i}_4+u_{n2}\hat{i}_5+(u_{n2}-u_{n3})\hat{i}_6$$

$$=u_{n1}(-\hat{i}_1+\hat{i}_2+\hat{i}_4)+u_{n2}(-\hat{i}_4+\hat{i}_5+\hat{i}_6)$$

$$+u_{n3}(-\hat{i}_2+\hat{i}_3-\hat{i}_6)=0$$

例1 ① $R_1=R_2=2\Omega$, $U_s=8V$时，$I_1=2A$，$U_2=2V$

② $R_1=1.4\ \Omega$, $R_2=0.8\Omega$, $U_s=9V$时，$I_1=3A$, **求此时的**U_2

解 **把两种情况看成是结构相同，参数不同的两个电路，利用特勒根定理2**

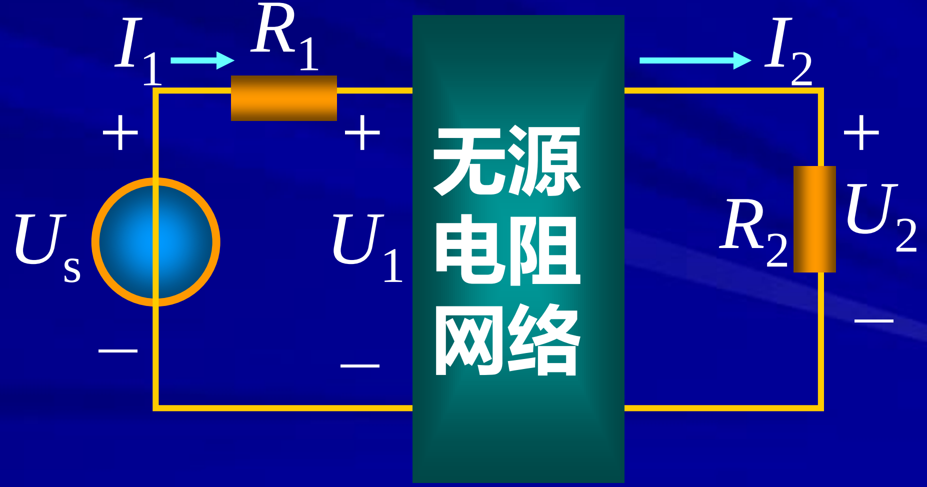
由(1)得： $U_1=4V$, $I_1=2A$, $U_2=2V$, $I_2=U_2/R_2=1A$

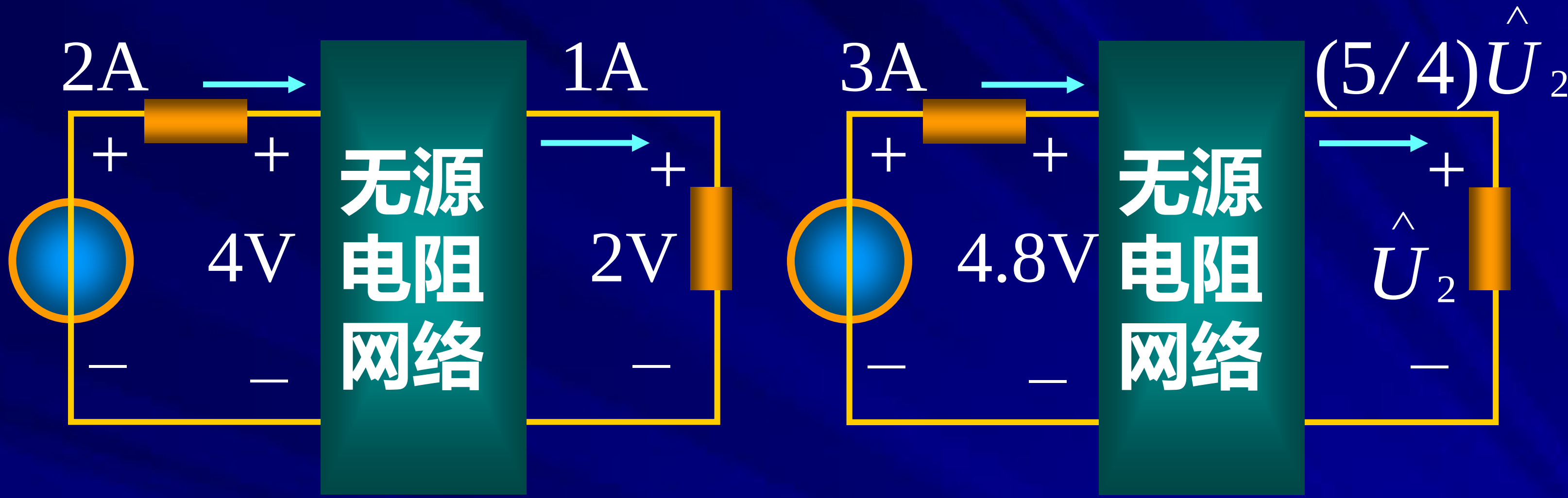
由(2)得：

$$\hat{U}_1=9-3\times1.4=4.8V$$

$$\hat{I}_1=3A$$

$$\hat{I}_2=\hat{U}_2/R_2=(5/4)\hat{U}_2$$





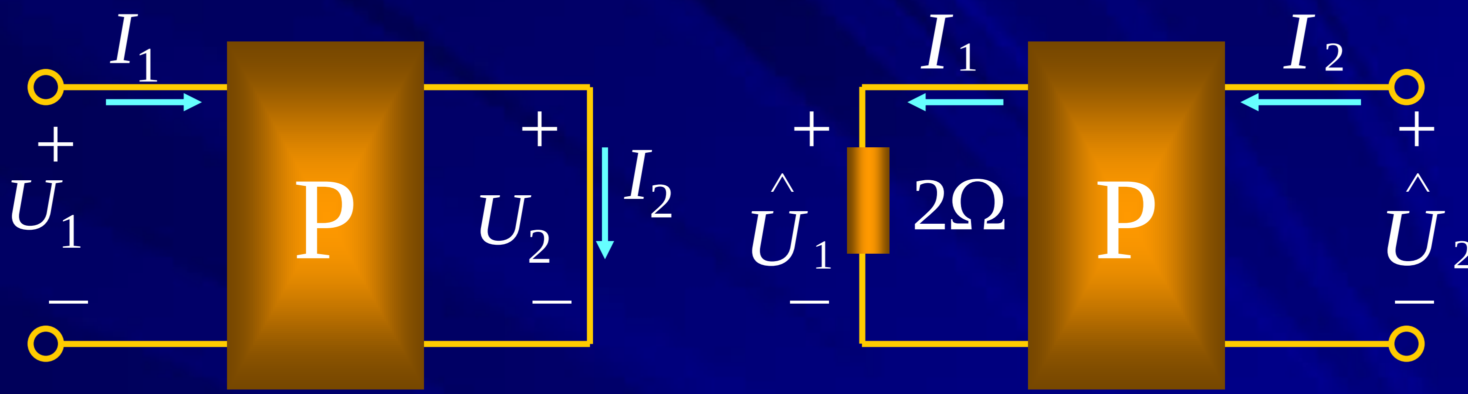
$$U_1(-\hat{I}_1)+U_2\hat{I}_2+\sum_{k=3}^{b}R_kI_k\hat{I}_k=\hat{U}_1(-I_1)+\hat{U}_2I_2+\sum_{k=3}^{b}R_k\hat{I}_kI_k$$

(负号是因为U_1, I_1的方向不同)

$$-4\times3+2\times1.25\hat{U}_2=-4.8\times2+\hat{U}_2\times1$$

$$\hat{U}_2=2.4/1.5=1.6\text{V}$$

例2



已知： $U_1=10\text{V},\ I_1=5\text{A},\ U_2=0,\ I_2=1\text{A}\quad \hat{U}_2=10\text{V}$ **求**$\hat{U}_1$.

解

$$\begin{cases} U_1\hat{I}_1+U_2(-\hat{I}_2)=\hat{U}_1(-I_1)+\hat{U}_2 I_2 \\ \hat{U}_1=2\hat{I}_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} U_1\times\dfrac{\hat{U}_1}{2}=\hat{U}_1(-I_1)+\hat{U}_2 I_2 \\ 10\times\dfrac{\hat{U}_1}{2}=\hat{U}_1\times(-5)+10\times 1 \end{cases} \rightarrow \hat{U}_1=1\text{V}$$

注意　应用特勒根定理：

①电路中的支路电压必须满足KVL;

②电路中的支路电流必须满足KCL;

③电路中的支路电压和支路电流必须满足关联参考方向；　（否则公式中加负号）

④定理的正确性与元件的特征全然无关。

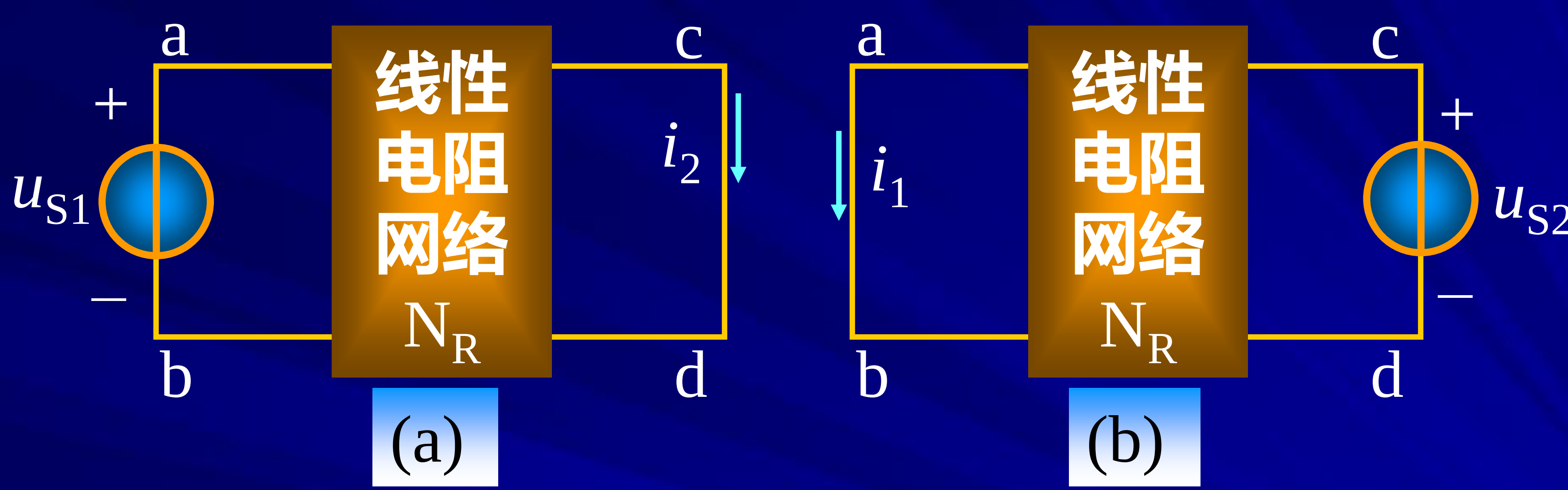
4.6* 互易定理

互易性是一类特殊的线性网络的重要性质。一个具有互易性的网络在输入端（激励）与输出端（响应）互换位置后，同一激励所产生的响应并不改变。具有互易性的网络叫互易网络，互易定理是对电路的这种性质所进行的概括，它广泛的应用于网络的灵敏度分析和测量技术等方面。

1. 互易定理

对一个仅含电阻的二端口电路N_R，其中一个端口加激励源，一个端口作响应端口，在只有一个激励源的情况下，当激励与响应互换位置时，同一激励所产生的响应相同。

● 情况1　激励 ↔ 电压源　响应 ↔ 电流



则端口电压电流满足关系：

$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{u_{S2}} \quad \text{或} \quad u_{S1} i_1 = u_{S2} i_2$$

注意　当 $u_{S1} = u_{S2}$ 时，$i_2 = i_1$

证明: **由特勒根定理:** $\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = 0$ 和 $\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$

即:

$$\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^{b} u_k \hat{i}_k$$

$$= u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^{b} R_k i_k \hat{i}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^{b} \hat{u}_k i_k$$

$$= \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^{b} R_k i_k \hat{i}_k = 0$$

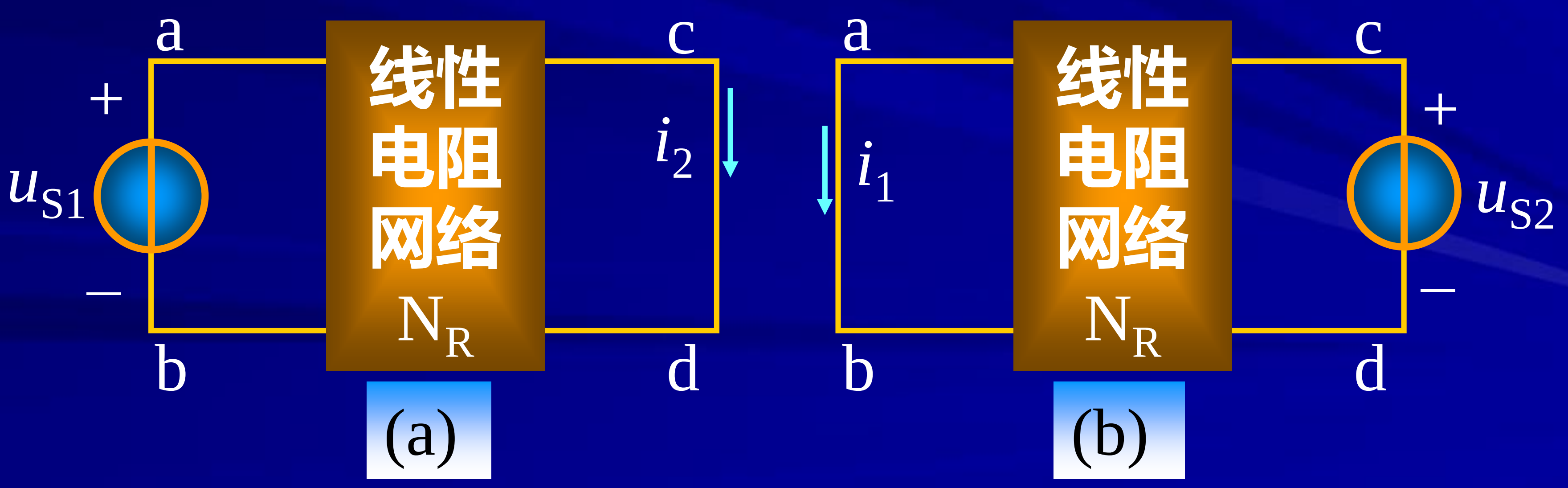
两式相减，得: $u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$

将图(a)与图(b)中端口条件代入，即:

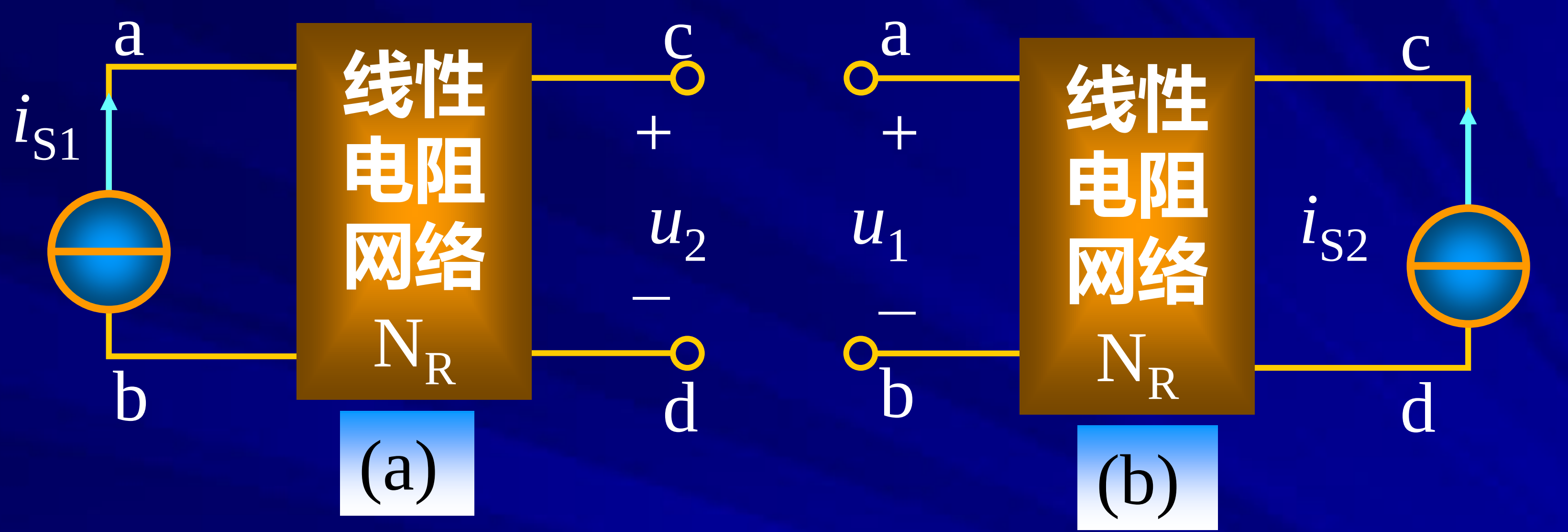
$$u_1 = u_{S1},\ u_2 = 0,\quad \hat{u}_1 = 0,\ \hat{u}_2 = u_{S2}$$

$$u_{S1}\hat{i}_1 + 0\times\hat{i}_2 = 0\times i_1 + u_{S2}i_2$$

即: $$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{\hat{i}_1}{u_{S2}} \quad 或 \quad u_{S1}i_2 = u_{S2}\hat{i}_1$$ **证毕!**



● 情况2　激励 ↔ 电流源　响应 ↔ 电压



则端口电压电流满足关系：

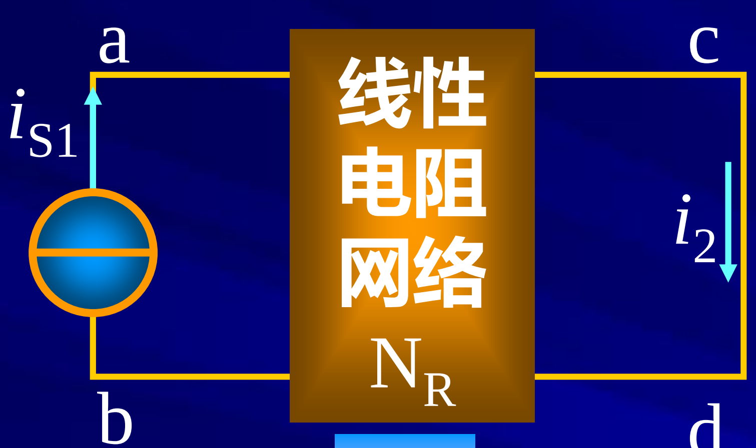
$$\frac{u_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{i_{S2}} \quad \text{或} \quad u_1 i_{S1} = u_2 i_{S2}$$

注意　当 $i_{S1} = i_{S2}$ 时，$u_2 = u_1$

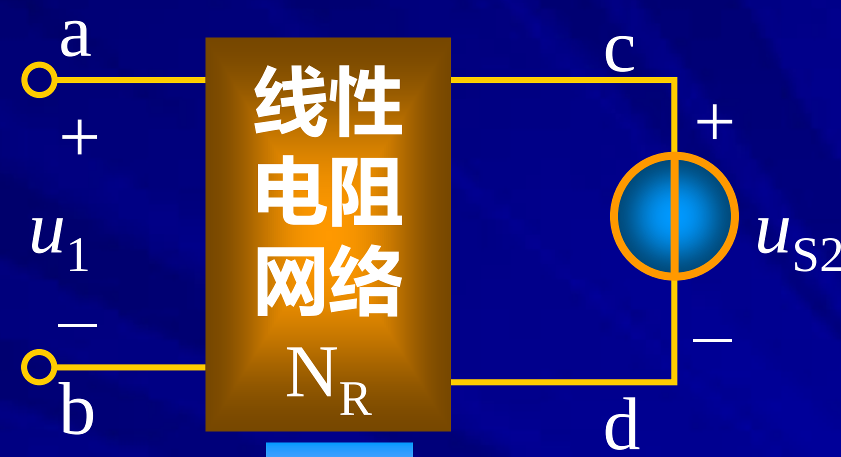
● 情况3

激励 —图a— 电流源；激励 —图b— 电压源

响应 —图a— 电流；响应 —图b— 电压



(a)



(b)

则端口电压电流在数值上满足关系：

$$\frac{i_2}{i_{S1}}=\frac{u_1}{u_{S2}} \quad \text{或} \quad u_1 i_{S1}=u_{S2} i_2$$

注意　　当 $i_{S1}=u_{S2}$ 时，$i_2=u_1$

应用互易定理分析电路时应注意：

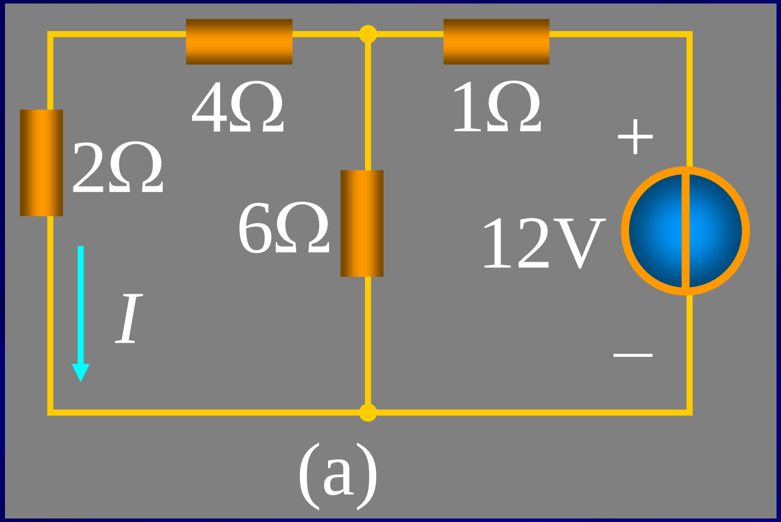
① 互易前后应保持网络的拓扑结构不变，仅理想电源搬移；

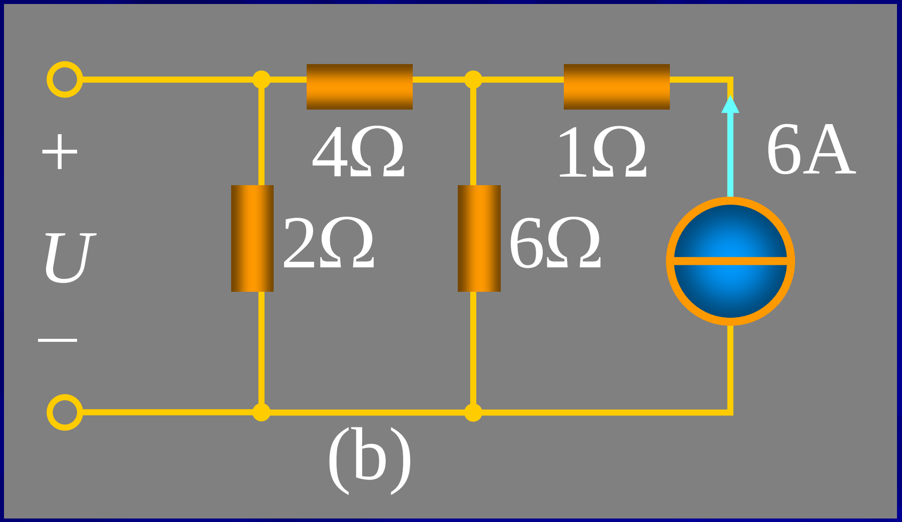
②互易前后端口处的激励和响应的极性保持一致（要么都关联，要么都非关联)；

③ 互易定理只适用于线性电阻网络在单一电源激励下，端口两个支路电压电流关系。

④含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

例1　**求(a)图电流I，(b)图电压U**





解　**利用互易定理**

$$I=\frac{12}{1+6//6}\times\frac{1}{2}=1.5\text{A}$$

$$U=3\times 2=6\text{V}$$

例2　**求电流I**

解　**利用互易定理**

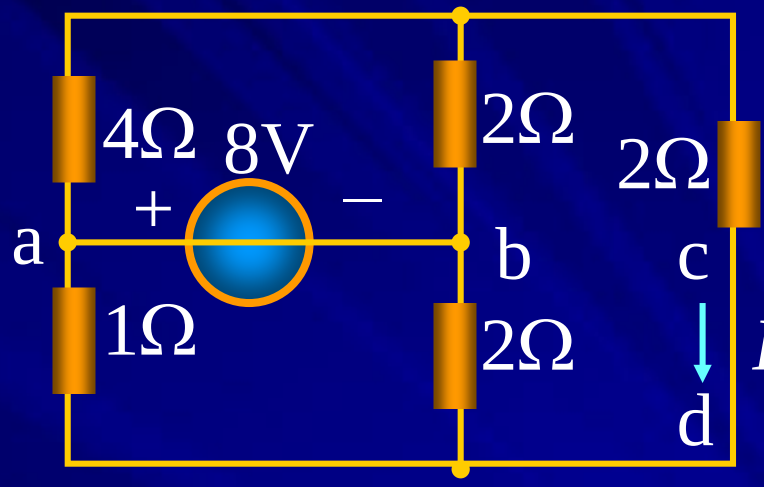
$$I' = \frac{8}{2+4//2+1//2}$$

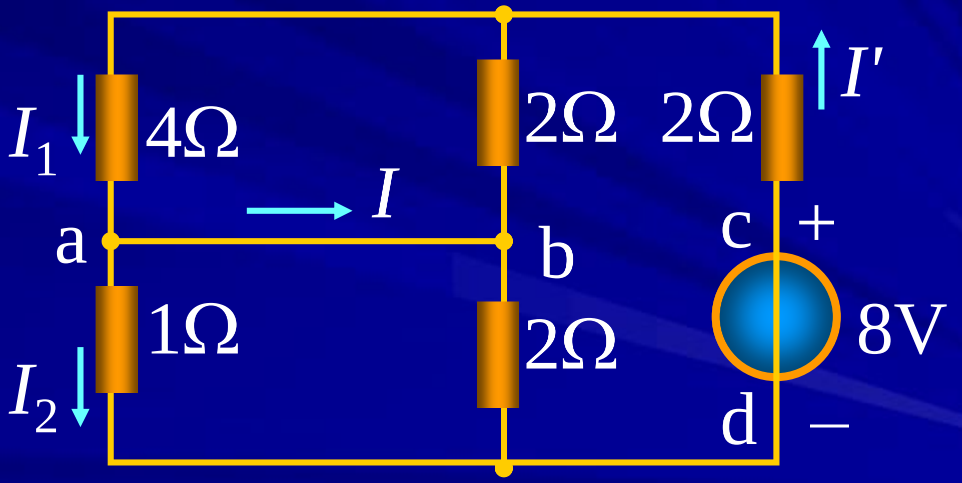
$$= \frac{8}{4} = 2\text{A}$$

$$I_1 = I' \times 2/(4+2) = 2/3\text{A}$$

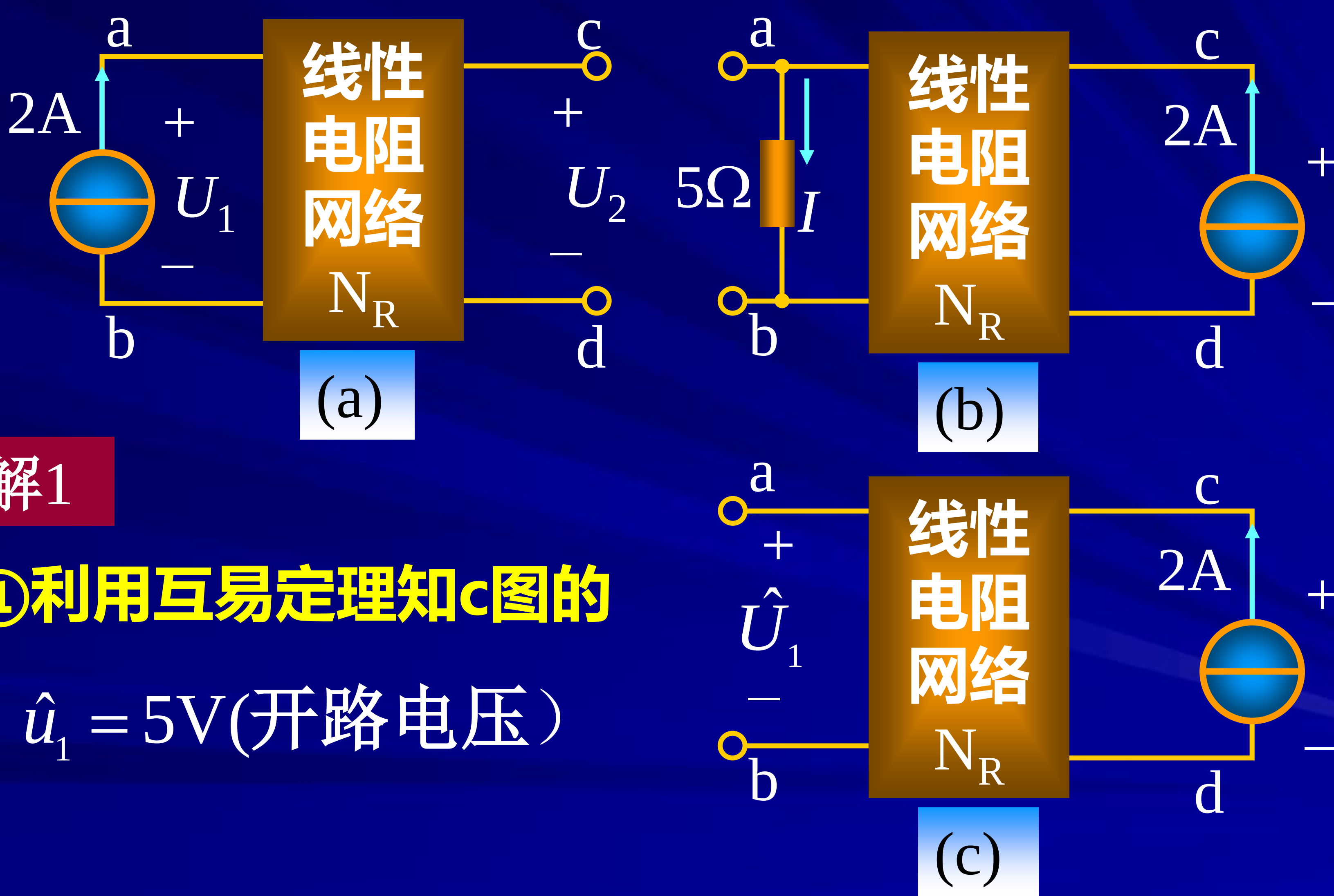
$$I_2 = I' \times 2/(1+2) = 4/3\text{A}$$

$$I = I_1 - I_2 = -2/3\text{A}$$





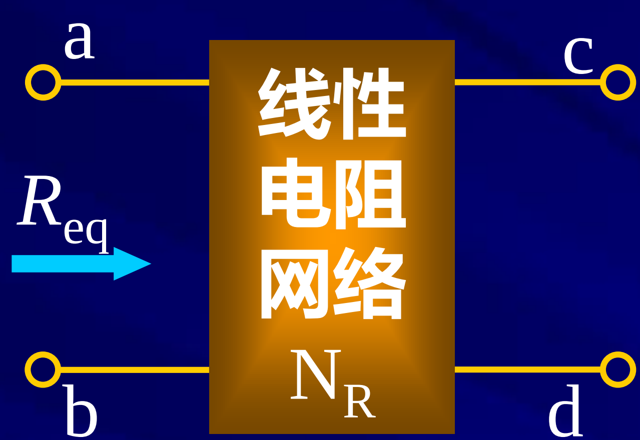
例3　**测得a图中$U_1=10\text{V}$，$U_2=5\text{V}$，求b图中的电流I**



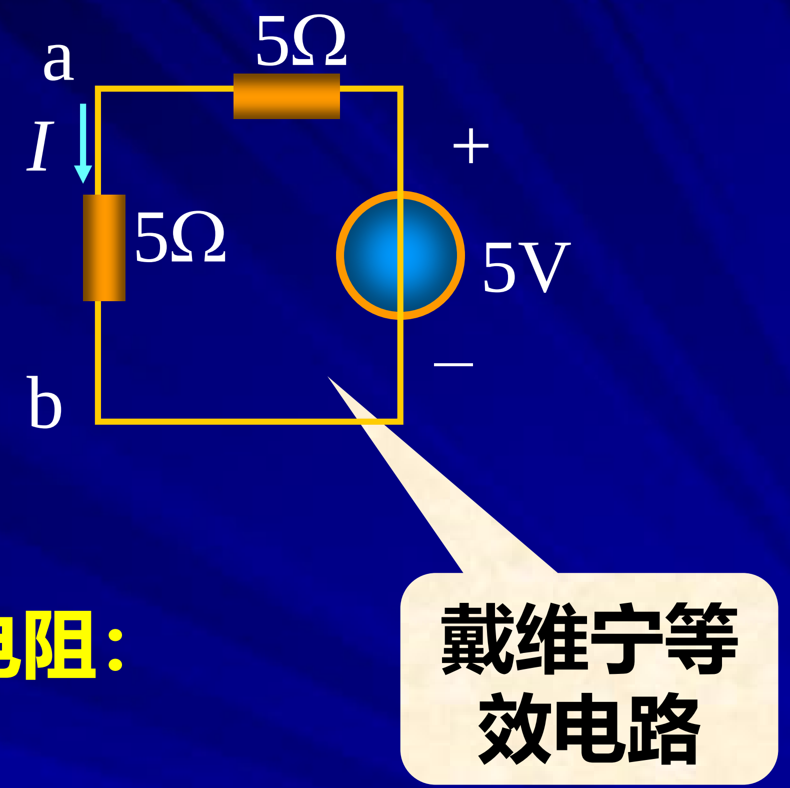
解1

①利用互易定理知c图的

$\hat{u}_1=5\text{V}$(开路电压）



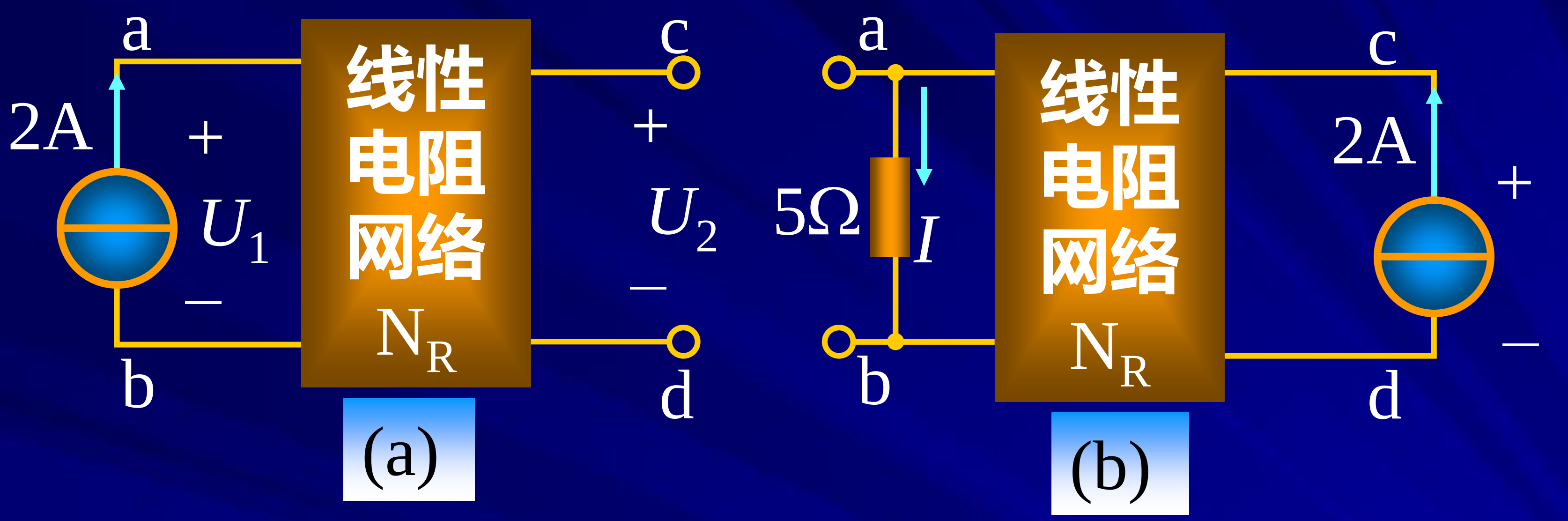
(c)



②结合a图，知c图的等效电阻：

$$R_{eq}=\frac{u_1}{2}=\frac{10}{2}=5\Omega$$

$$\rightarrow \quad I=\frac{5}{5+5}=0.5\text{A}$$



解2 **应用特勒根定理：**

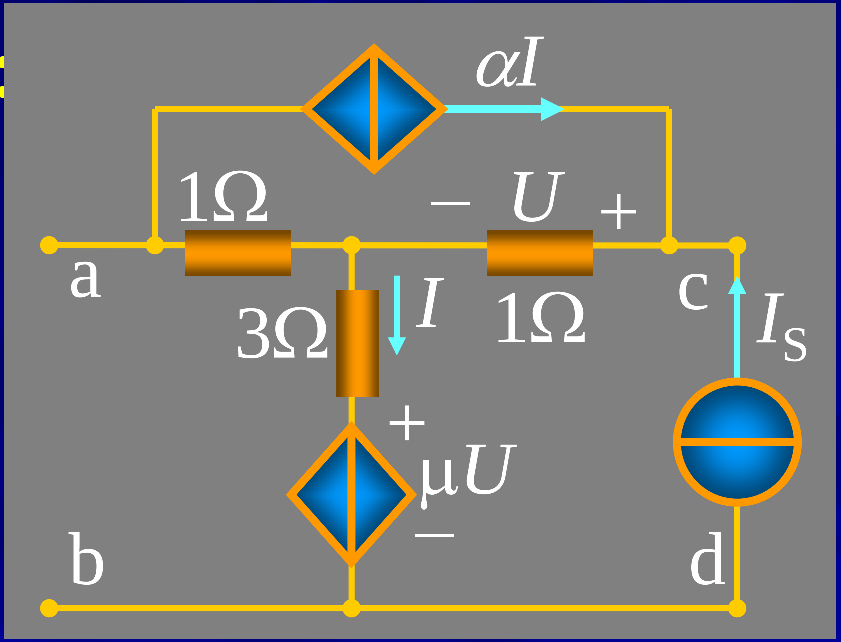
$$u_1\hat{i}_1 + u_2\hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

$$10\hat{i}_1 + 5\times(-2) = 5\hat{i}_1\times(-2) + \hat{u}_2\times 0$$

$$\Rightarrow \hat{i}_1 = I = 0.5\text{A}$$

例4　问图示电路α与μ取何关系时电路具有互易性

解　在a-b端加电流源，解得：



$$U_{cd} = U + 3I + \mu U$$
$$= (\mu + 1)\alpha I + 3I$$
$$= [(\mu + 1)\alpha + 3]I_s$$

在c-d端加电流源，解得：

$$U_{ab} = -\alpha I + 3I + \mu U = (3 - \alpha) I + \mu(I_s + \alpha I)$$
$$= (\mu + 3 - \alpha + \mu\alpha)I_s$$

如要电路具有互易性，则：$U_{ab}=U_{cd}$

$$\rightarrow \left[(\mu+1)\alpha+3\right]=(\mu+3-\alpha+\mu\alpha)$$

$$\rightarrow \alpha=\frac{\mu}{2}$$

结论 一般有受控源的电路不具有互易性。

4.7* 对偶原理

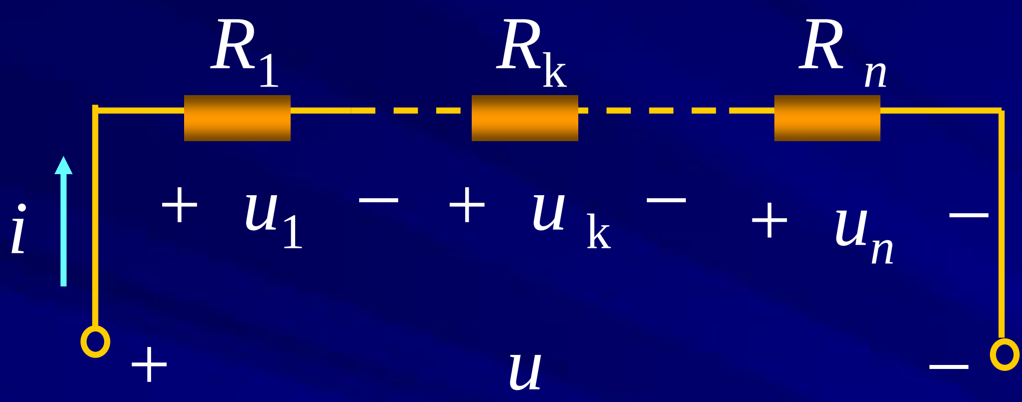
1. 对偶原理

在对偶电路中，某些元素之间的关系(或方程)可以通过对偶元素的互换而相互转换。对偶原理是电路分析中出现的大量相似性的归纳和总结 。

2. 对偶原理的应用

根据对偶原理，如果在某电路中导出某一关系式和结论，就等于解决了和它对偶的另一个电路中的关系式和结论。

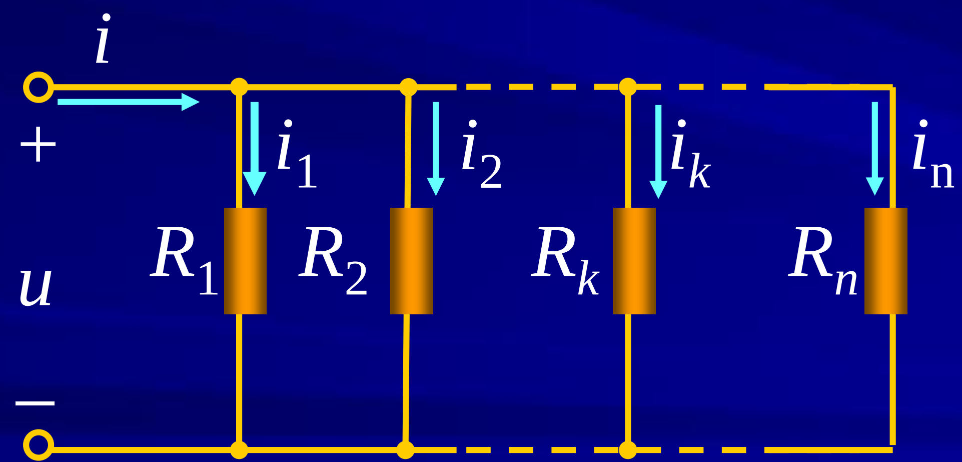
例1 串联电路和并联电路的对偶



总电阻 $R=\sum_{k=1}^{n} R_k$

电流 $i=\dfrac{u}{R}$

分压公式 $u_k=\dfrac{R_k}{R}u$



总电导 $G=\sum_{k=1}^{n} G_k$

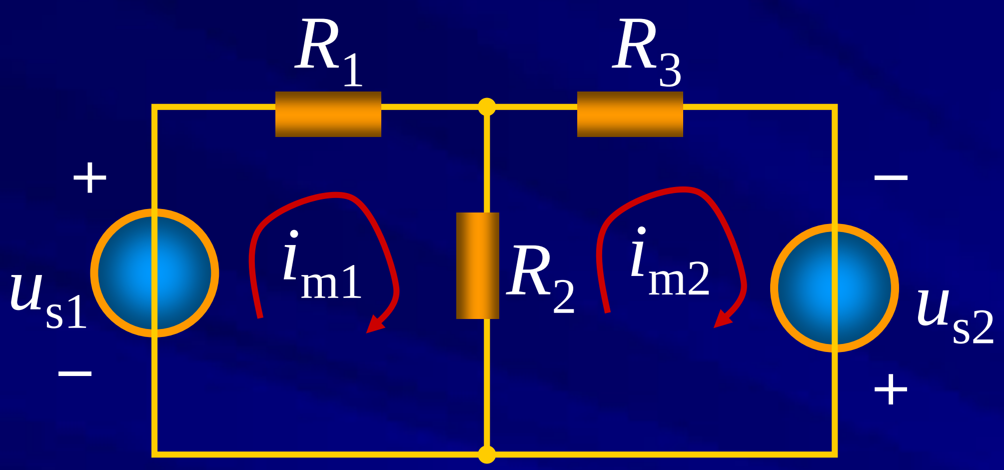
电压 $u=\dfrac{i}{G}$

分流公式 $i_k=\dfrac{G_k}{G}i$

结论

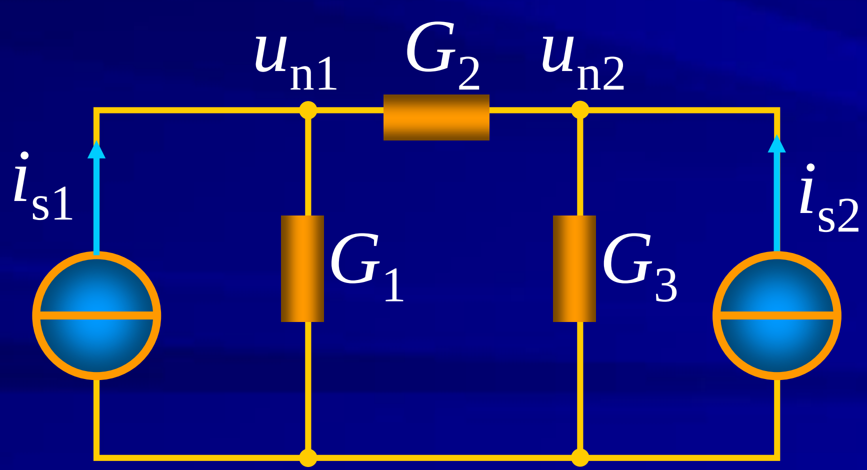
将串联电路中的电压u与并联电路中的电流i互换，电阻R与电导G互换，串联电路中的公式就成为并联电路中的公式。反之亦然。这些互换元素称为对偶元素。电压与电流；电阻R与电导G都是对偶元素。而串联与并联电路则称为对偶电路。

例2 网孔电流与结点电压的对偶



网孔电流方程

$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)i_{m1}-R_2 i_{m2}&=u_{S1}\\ -R_2 i_{m1}+(R_2+R_3)i_{m2}&=u_{S2}\end{aligned}\right\}$$



结点电压方程

$$\left.\begin{aligned}(G_1+G_2)u_{n1}-G_2 u_{n2}&=i_{S1}\\ -G_2 u_{n1}+(G_2+G_3)u_{n2}&=i_{S2}\end{aligned}\right\}$$

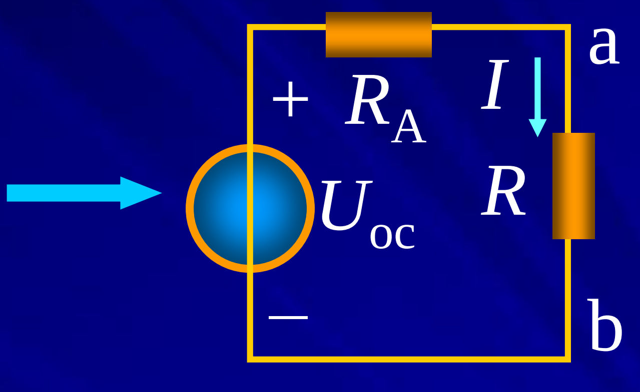
结论

把 R 和 G，u_s 和 i_s，网孔电流和结点电压等对应元素互换，则上面两个方程彼此转换。所以“网孔电流”和“结点电压“是对偶元素，这两个平面电路称为对偶电路。

定理的综合应用

例1　图示线性电路，当A支路中的电阻$R=0$时，测得B支路电压$U=U_1$,当$R=\infty$时，$U=U_2$,已知ab端口的等效电阻为R_A，求R为任意值时的电压U

解 ①应用戴维宁定理： ②应用替代定理：



③应用叠加定理：

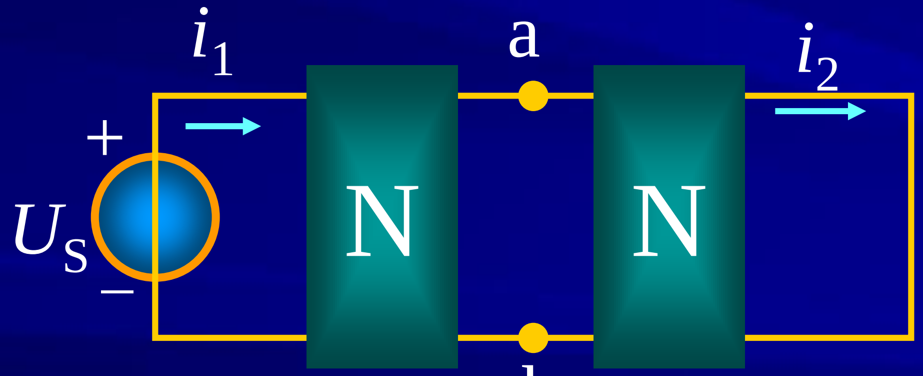
$$U = k_1 I + k_2$$

$$\begin{cases} R = \infty \rightarrow I = 0 \rightarrow U = k_2 = U_2 \\ R = 0 \rightarrow I = U_{oc}/R_A \\ \rightarrow U = U_1 = k_1 \dfrac{U_{oc}}{R_A} + k_2 \end{cases}$$

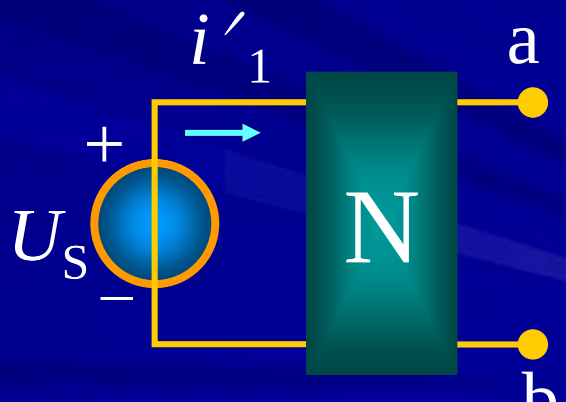
解得：
$$k_1=\frac{U_1-U_2}{U_{oc}}R_A \qquad k_2=U_2$$

$$U=U_2+\frac{U_1-U_2}{U_{oc}}R_A\times\frac{U_{oc}}{R_A+R}=U_2+\frac{U_1-U_2}{R_A+R}R_A$$

例2　**图a为线性电路，N为相同的电阻网络,对称连接,测得电流** $i_1=I_1$, $i_2=I_2$, **求b图中的** i'_1

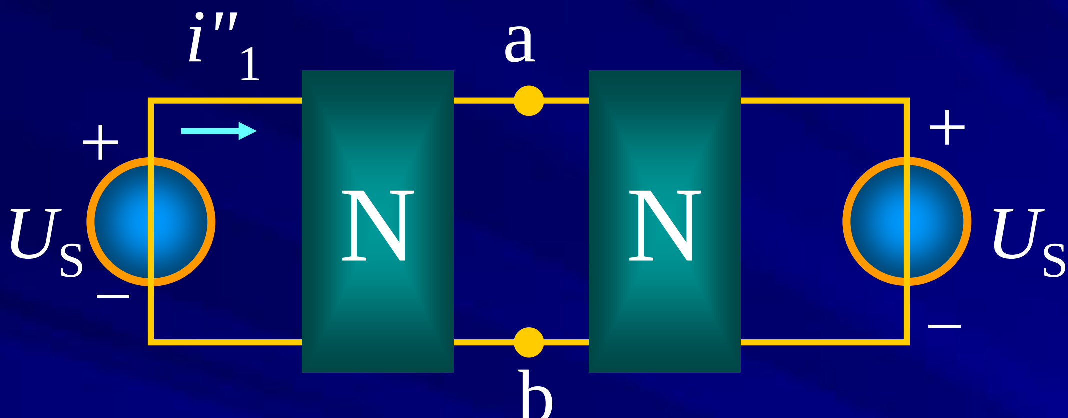


(a)



(b)

解 对图(c)应用叠加和互易定理



(c)

$$i''_1 = I_1 - I_2$$

对图(c)应用戴维宁定理

$$i''_1 = i'_1 = I_1 - I_2$$