# 矩阵的初等变换与线性方程组

运算(间) ⇒ 变换(内)

## 一、矩阵的初等变换

矩阵的初等变换 < 初等行变换 / 初等列变换 —有限次— 行等价 $A \overset{r}{\sim} B$ / 列等价 $A \overset{c}{\sim} B$ > 等价 $\xrightarrow{\text{性质}}$ $A \sim B$

- (i) 反身性 $A \sim A$
- (ii) 对称性 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$
- (iii) 传递性 若 $A \sim B$，$B \sim C$ 则 $A \sim C$

(i) 对换两行/列 ($r_i \leftrightarrow r_j$)

(ii) 以数 $k \neq 0$ 乘某行/列中的所有元 ($r_i \times k$)

(iii) 把某一行/列所有元的k倍加到另一行/列对应的元上去 ($r_i + kr_j$)

→ 可逆：$r_i \leftrightarrow r_j$(本身)，$r_i \times (\frac{1}{k})$，$r_i - kr_j$

矩阵的初等变换

## 二、行阶梯形矩阵

行阶梯形矩阵 <
(i) 非零行在零行的上面
(ii) 非零行的首非零元所在列在上一行首非零元所在列的右面

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有限次 ⇓ 初等行变换

唯一 ⇐ 行最简形矩阵 <
(i) 非零行的首非零元为1
(ii) 首非零元所在列的其他元均为0

(线性方程组的解)

$$\begin{array}{ccccc} 首 & 首 & & 首 & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ 方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \xRightarrow{\text{参数形式}} \begin{cases} x_1 = c+4 \\ x_2 = c+3 \\ x_3 = c \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

向量 ⇒ 形式 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots$

↓ 列变换

标准形 — 左上角为单位矩阵，其余均为0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

r是行阶梯矩阵中非零行行数

## 初等矩阵

$\boxed{\text{初等矩阵}}$ — 由单位矩阵E经过一次(初等)变换得到 — 左乘变行，右乘变列

→ 可逆

(i) 单位矩阵中第i,j两行(列)对换：$E_m(i,j)$　m阶

$E(i,j) = \cdots$　← 第i行，← 第j行 > 按列看等效

(ii) 以数 $k \neq 0$ 乘单位矩阵的第i行(列)：$E_m(i(k))$

$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(iii) 以k乘单位矩阵第j行加到第i行上：$E_m(ij(k))$
(或乘第i列加到第j列上)

$E(ij(k)) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}$

**定理一**：设A与B为m×n阶矩阵

$A \overset{r}{\sim} B$ ⟺ ∃ m阶可逆矩阵P，使 $PA = B$

$A \overset{c}{\sim} B$ ⟺ ∃ n阶可逆矩阵Q，使 $AQ = B$

$A \sim B$ ⟺ ∃ m阶可逆P及n阶可逆Q，使 $PAQ = B$

(充要条件)

A经有限次初等变换成B
相当于A乘有限个 ⇓ 初等矩阵等于B　→ $P_1P_2\cdots P_lA = B$
而这有限个初等矩阵相乘为可逆矩阵P → $PA = B$

**性质1**：设 $A_{m\times n}$，对A进行一次初等行变换，相当于在A的左边乘上相应m阶初等矩阵
(一次列 → 右乘n阶初等矩阵)

推 ⇓

**性质2**：方阵A可逆 ⟺ ∃有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$
使 $A = P_1P_2\cdots P_l$

**推论**：方阵A可逆的充分必要条件是 $A \overset{r}{\sim} E$ ($A \overset{c}{\sim} E$)

A可逆 ⟺ ∃可逆矩阵P，使 $PA = E$ ⟺ $A \overset{r}{\sim} E$

行变 $PA = B$ ⟺ $\begin{cases} PA = B \\ PE = P \end{cases}$ ⟺ $\underset{\text{矩阵乘法}}{P(A,E)} = \underset{\text{分块矩阵}}{(B,P)}$ ⟺ $(A,E) \overset{r}{\sim} (B,P)$

→ 可利用此求解向量

列变 $AP = B$ ⟺ $\begin{cases} AP = B \\ EP = P \end{cases}$ ⟺ $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}(P) = \begin{pmatrix} B \\ P \end{pmatrix}$ ⟺ $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} B \\ P \end{pmatrix}$