§4 对称矩阵的对角化

将P单位化/正交化构成正交矩阵

- 对称矩阵的特征值为实数

对称矩阵一定能对角化。

- 设λ_1、λ_2为对称矩阵A的两个特征值，对应特征向量p_1、p_2

  若$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则p_1、p_2正交

- 设A为n阶对称矩阵，则必有正交矩阵P，使 $P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$ 对角矩阵

§5 二次型及其标准型

- $\boxed{\text{二次型}}$：含n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

对于寻求可逆的线性变换，使二次型只含平方项

$$\begin{cases} x_1 = C_{11}y_1 + C_{12}y_2 + \cdots + C_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = C_{n1}y_1 + C_{n2}y_2 + \cdots + C_{nn}y_n \end{cases} \rightarrow f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$$ [标准形]

$\boxed{\text{二次型的标准型}}$ (法式) 复二次型 / 实二次型

(若$k_1 \sim k_n$取值为1、-1或0，则称f为二次型的规范型)

$$f = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=x} \Longleftrightarrow \boxed{f = x^TAx}$$

(对称矩阵)

二次型与对称矩阵之间存在一一对应关系

- 对称矩阵A叫做$\boxed{\text{二次型f的矩阵}}$
- f叫做$\boxed{\text{对称矩阵A的二次型}}$
- 矩阵A的秩称为$\boxed{\text{二次型的秩}}$

经可逆变换 $x = Cy$

$$f = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}}_{=B}\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{=y}$$

$B = C^TAC$，称A与B $\boxed{\text{合同}}$

把矩阵A合同对角化

- 故由上节知，任何二次型$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \ (a_{ij} = a_{ji})$总有$\boxed{\text{正交变换}\ x = Py}$（求），

  使f化为标准形$f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$，其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是矩阵$A = (a_{ij})$的特征值