矩阵A的k阶子式: → 共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个

在 $A_{m\times n}$ 中, 任取k行与k列 ($k\le m$, $k\le n$), 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 不改变它们相对位置而得的k阶行列式

设在矩阵A中有一个不等于0的r阶子式D, 且所有r+1阶子式(若存在)全等于0. 那么称D为矩阵A的最高阶非零子式, 数r称为矩阵的秩, 记 $R(A)$

矩阵秩的性质:

① $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$

② $R(A^T)=R(A)$　行列式与其转置行列式相等

③ 若 $A\sim B$, 则 $R(A)=R(B)$　初等变换

④ 若P、Q可逆, 则 $R(PAQ)=R(A)$

1> 分阶求行列式值看是否为0求秩(阶数较小时)

2> 矩阵化为阶梯形矩阵求秩

矩阵的秩

矩阵的初等变换作为一种运算, 其深刻意义在于不改变

对于n阶矩阵A, 可逆矩阵的秩等于矩阵的阶数 $\to |A|\neq 0$

不可逆矩阵的秩小于其阶数

故可逆矩阵又称满秩矩阵, 不可逆矩阵称降秩矩阵

⑤ $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$　子式

$R(A,B) = R\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}^T = R\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\tilde{A}\\\tilde{B}\end{pmatrix} \le r+t = R(A)+R(B)$

⑥ $R(A+B) \le R(A)+R(B)$

$R(A+B) \le R\begin{pmatrix}A+B\\B\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} \le R(A)+R(B)$

⑦ $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$　见下

⑧ 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=0$, 则 $R(A)+R(B)\le n$

矩阵乘法的消去律

设 $AB=0$, 若A为列满秩矩阵, 则 $B=0$　秩等于列数

设 $AB=C$, 且 $R(A)=n$. A的行最简形为 $\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}$, 则有可逆P

有 $PA=\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}$, 则 $PC=PAB=\begin{pmatrix}E_n\\0\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}$

∵ $R(PC)=R(C)$, $R\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix}=R(B)$　故 $R(C)=R(B)$　$C=0$ 时即上

线性方程组的解

n元线性方程组 $Ax=b$ — 有解称为相容

(i) 无解 ⇔ $R(A)<R(A,b)$ 出现0=某数

(ii) 有唯一解 ⇔ $R(A)=R(A,b)=n$　-对-

(iii) 有无限多解 ⇔ $R(A)=R(A,b)<n$

某(些)元无值

有解 充要条件 $R(A)=R(A,b)$

↓

可推广至矩阵方程 $AX=B$

→ n元齐次线性方程组有非零解 ⇔ $R(A)<n$　($b=0$)

若 $R(A)=n$ 则唯一解全部等0

上⑦

设 $AB=C$, 则 $R(C)\le\min\{R(A), R(B)\}$

$AB=C$　即 $AX=C$ 有解 $X=B$

$R(A)=R(A,C)$, $R(C)\le R(A,C)$ 故 $R(C)\le R(A)$

又 $B^TA^T=C^T$

$R(B^T)=R(B^T,C)$, $R(C)\le R(B^T,C)$, $R(C)\le R(B^T)=R(B)$