华北电力大学
NORTH CHINA ELECTRIC POWER UNIVERSITY

4 频率域滤波

主要内容

- 频率域变换概述
  - ✓ 为什么要在频率域研究图像
- 傅里叶变换
  - ✓ 数学基础
  - ✓ 傅里叶级数
  - ✓ 傅里叶变换
- Matlab中的傅里叶变换函数
  - ✓ fft2
  - ✓ fftshift
  - ✓ ifft2

主要内容

- 从空间滤波器获得频率域滤波器
  - ✓ 对空间滤波器进行傅里叶变换
  - ✓ 将空间域滤波器直接转为频域滤波器
- 频率域低通滤波器
  - ✓ 理想低通滤波器
  - ✓ 巴特沃思低通滤波器
  - ✓ 高斯低通滤波器
- 频率域高通滤波器
  - ✓ 理想高通滤波器
  - ✓ 巴特沃思高通滤波器
  - ✓ 高斯高通滤波器

4.1 频率域变换概述

- **为什么要在频率域研究图像**

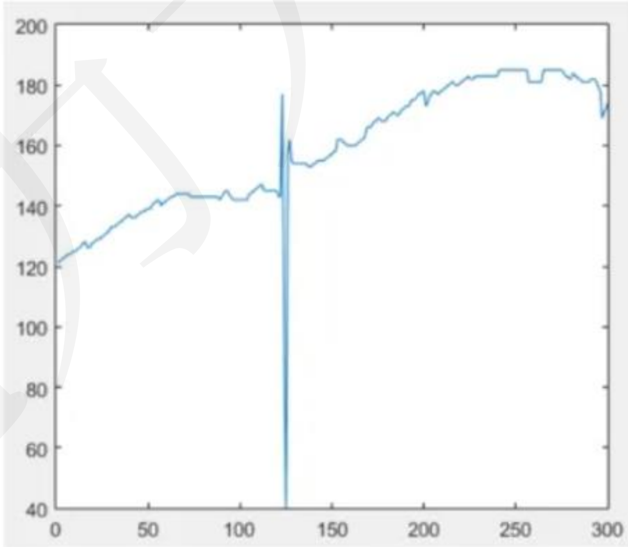
  ✓ 可以利用频率成分和图像外表之间的对应关系，一些在空间域表述困难的增强任务，在频率域中变得非常简单。

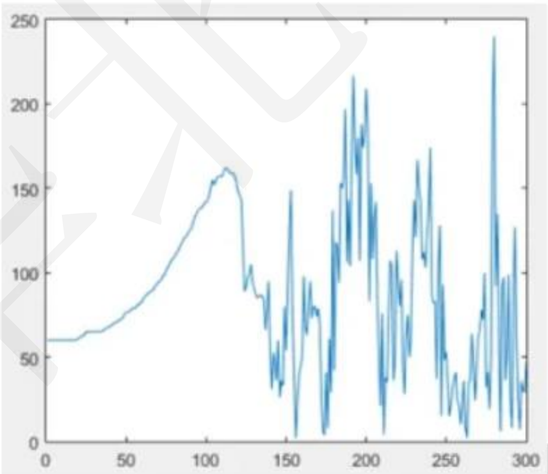
  ✓ 滤波在频率域更为直观，它可以解释空间域滤波的某些性质。

  ✓ 时域分析只能反映信号的幅值随时间的变化情况，除单频率分量的简谐波外，很难明确揭示信号的频率组成和各频率分量大小。

4.1 频率域变换概述

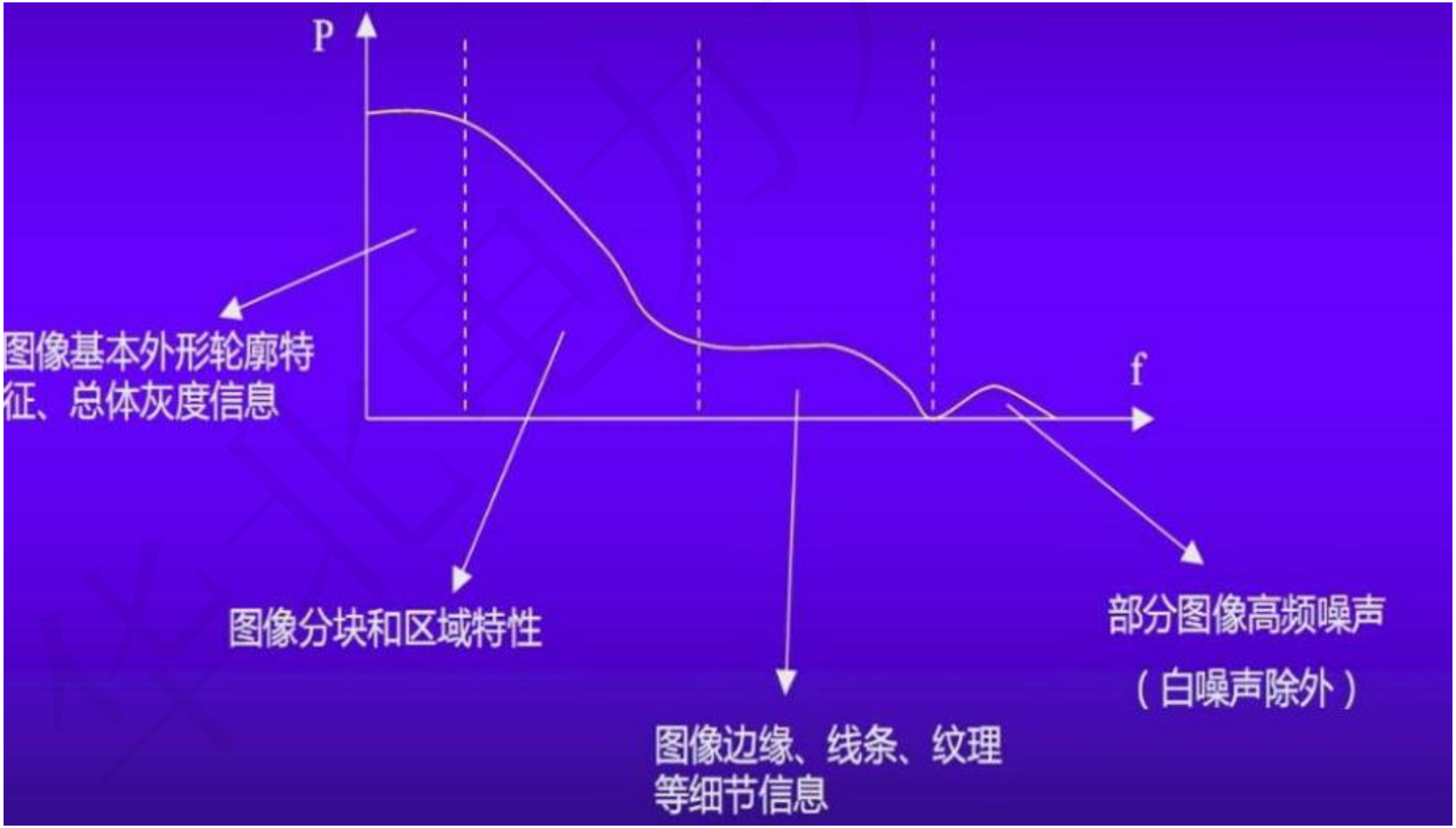
- 为什么要在频率域研究图像





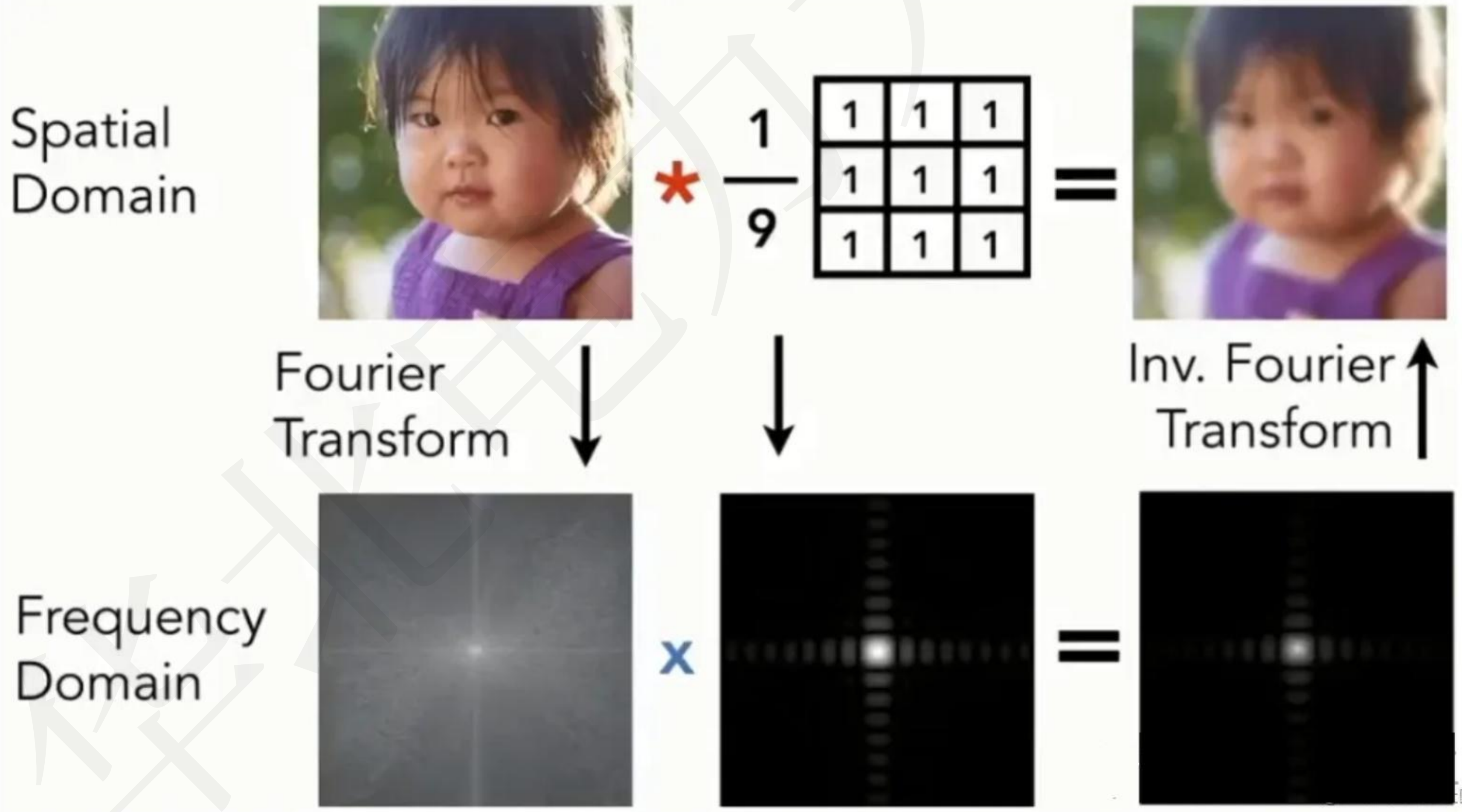
4.1 频率域变换概述

- 为什么要在频率域研究图像



4.1 频率域变换概述

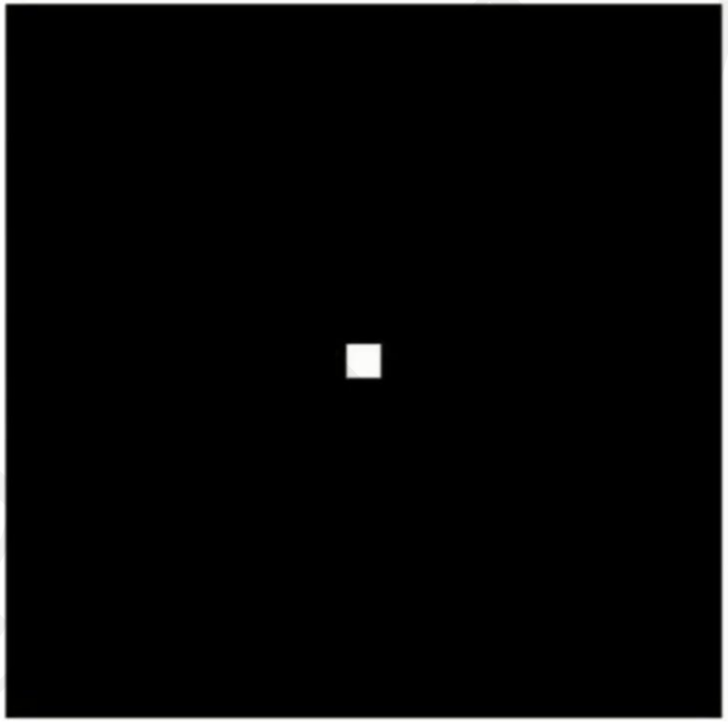
- 为什么要在频率域研究图像

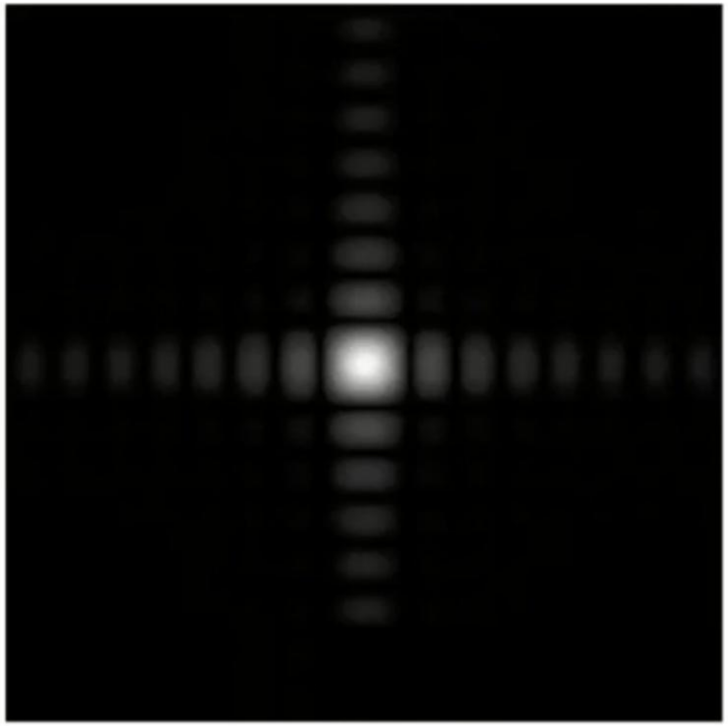


4.1 频率域变换概述

- 为什么要在频率域研究图像

✓ 卷积核的**频谱图**，比如3×3的卷积核就是构建一张中间3×3区域为白色幅值，其他部分为黑色幅值0的图像，对其进行傅里叶变换得到频谱图。

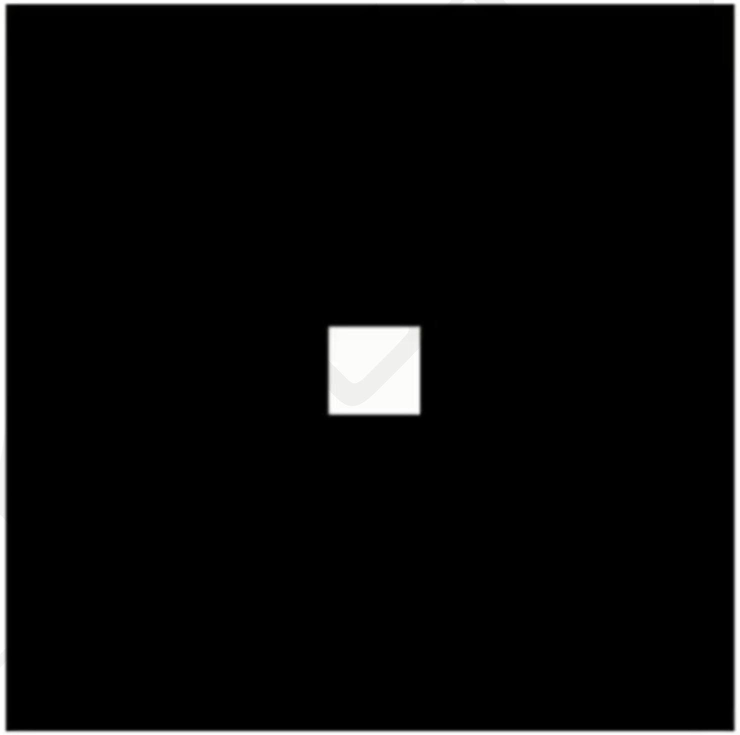


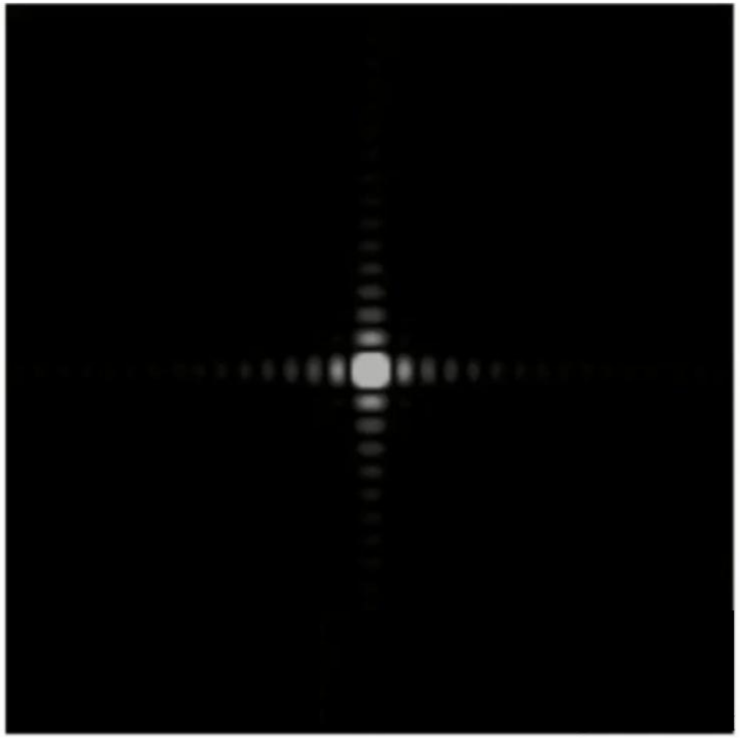


4.1 频率域变换概述

- 为什么要在频率域研究图像

✓如果将3×3扩大，变为7×7的卷积核得到的频谱图高频信息更少，所以和原图的频谱图做乘法后获得更少高频信息，从而时域的图像更模糊。





4.1 频率域变换概述

- 图像变换：将图像从空间域变换到某变换域（如傅立叶变换中的频率域），在变换域中进行处理，然后通过反变换把处理结果返回到空间域。
- 所有形式的图像变换都要求是二维可逆的正交变换。除了常用的傅立叶变换，还有离散余弦变换、沃尔什—哈达玛变换、斜变换、霍特林变换、哈尔变换、小波变换等。
- 本课程仅介绍傅立叶变换。

4.2 傅里叶变换

- 让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶（1768年3月21日-1830年5月16日），法国欧塞尔人，著名数学家、物理学家。

✓任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦和或余弦和形式

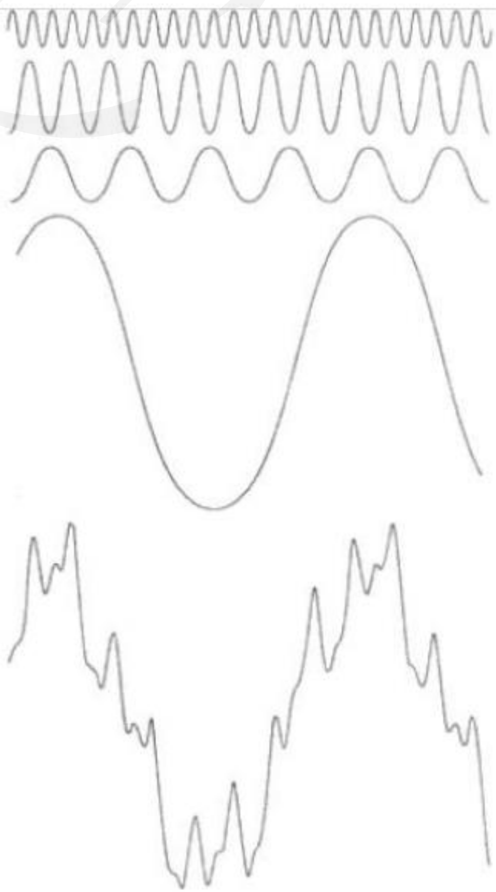
✓甚至非周期函数也可以用正弦和或余弦乘以加权函数的积分来表示

4.2 傅里叶变换

✓任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦和或余弦和形式

✓甚至非周期函数也可以用正弦和或余弦乘以加权函数的积分来表示

✓傅里叶变换的一般过程：



$$f(x,\ y) \xrightarrow{\text{DFT}} F(u,\ v) \xrightarrow[\text{滤波}]{H(u,\ v)} F(u,\ v)H(u,\ v) \xrightarrow{\text{IDFT}} g(x,\ y)$$

4.2.1 数学基础

（1） 泰勒级数

如果f(x)在点$x=x_0$具有任意阶导数，则f(x)可展开为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

（2） 指数函数泰勒展开

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$$

（3） 三角函数泰勒展开

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\cdots$$

4.2.1 数学基础

（4）欧拉公式

$$e^{jx}=1+\frac{(jx)^1}{1!}+\frac{(jx)^2}{2!}+\frac{(jx)^3}{3!}+\frac{(jx)^4}{4!}+\cdots$$

$$e^{jx}=[1-\frac{(x)^2}{2!}+\frac{(x)^4}{4!}-\frac{(x)^6}{6!}+\cdots]+j[\frac{(x)^1}{1!}-\frac{(x)^3}{3!}+\frac{(x)^5}{5!}-\frac{(x)^7}{7!}+\cdots]$$

$$e^{jx}=\cos x+j\sin x$$

4.2.1 数学基础

（5） 复数

✓ 复数的定义为： $C = R + jI, (j)^2 = -1$

✓ 复数的极坐标表示为： $C = |C|(\cos\theta + j\sin\theta)$

其中，
$$|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$$
$$\theta = \arctan\left(I/R\right)$$

✓ 根据欧拉公式 $C = |C|e^{j\theta}$

4.2.2 傅里叶级数

- 由泰勒级数展开可知，一个函数f(x)能够以多项式的形式逼近非多项式函数。
- 同理，将一个函数f(x)以三角函数的形式近似，就是傅里叶级数。
- 任何周期函数都可以用正弦函数和余弦函数构成的无穷级数来表示（选择正弦函数与余弦函数作为基函数是因为它们是正交的）。

4.2.2 傅里叶级数

- 对于周期是2T的函数f(x)，傅里叶级数为：

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}\right)$$

经过指数变换，得到：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n e^{jn\omega_0 x}\right)$$

其中，$a_n = \frac{1}{T}\int_T f(x)\cdot e^{jn\omega_0 x}dx$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 基频率

4.2.2 傅里叶级数

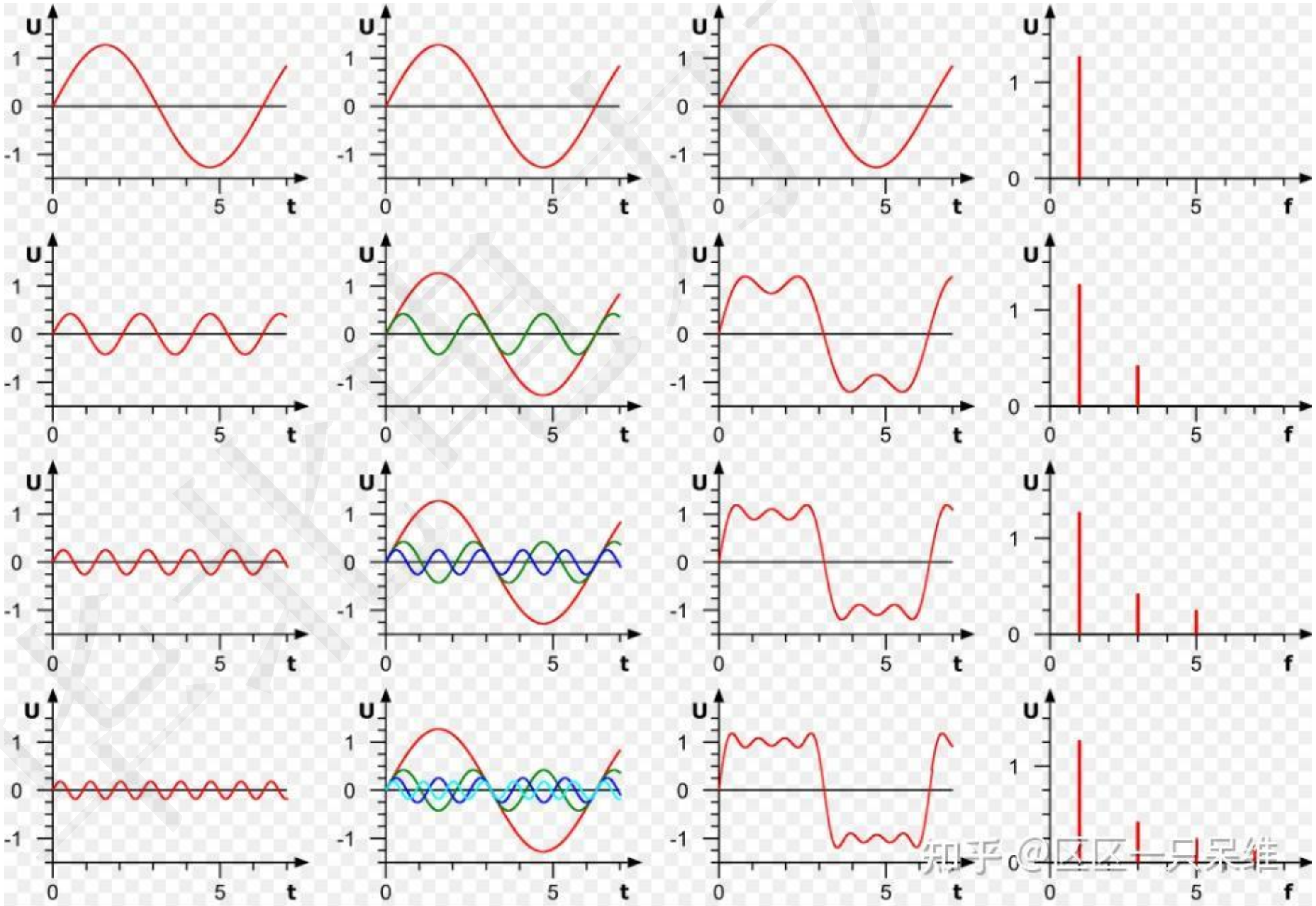
- 函数f(x)如何被近似?

4.2.2 傅里叶级数

- 函数f(x)如何被近似？

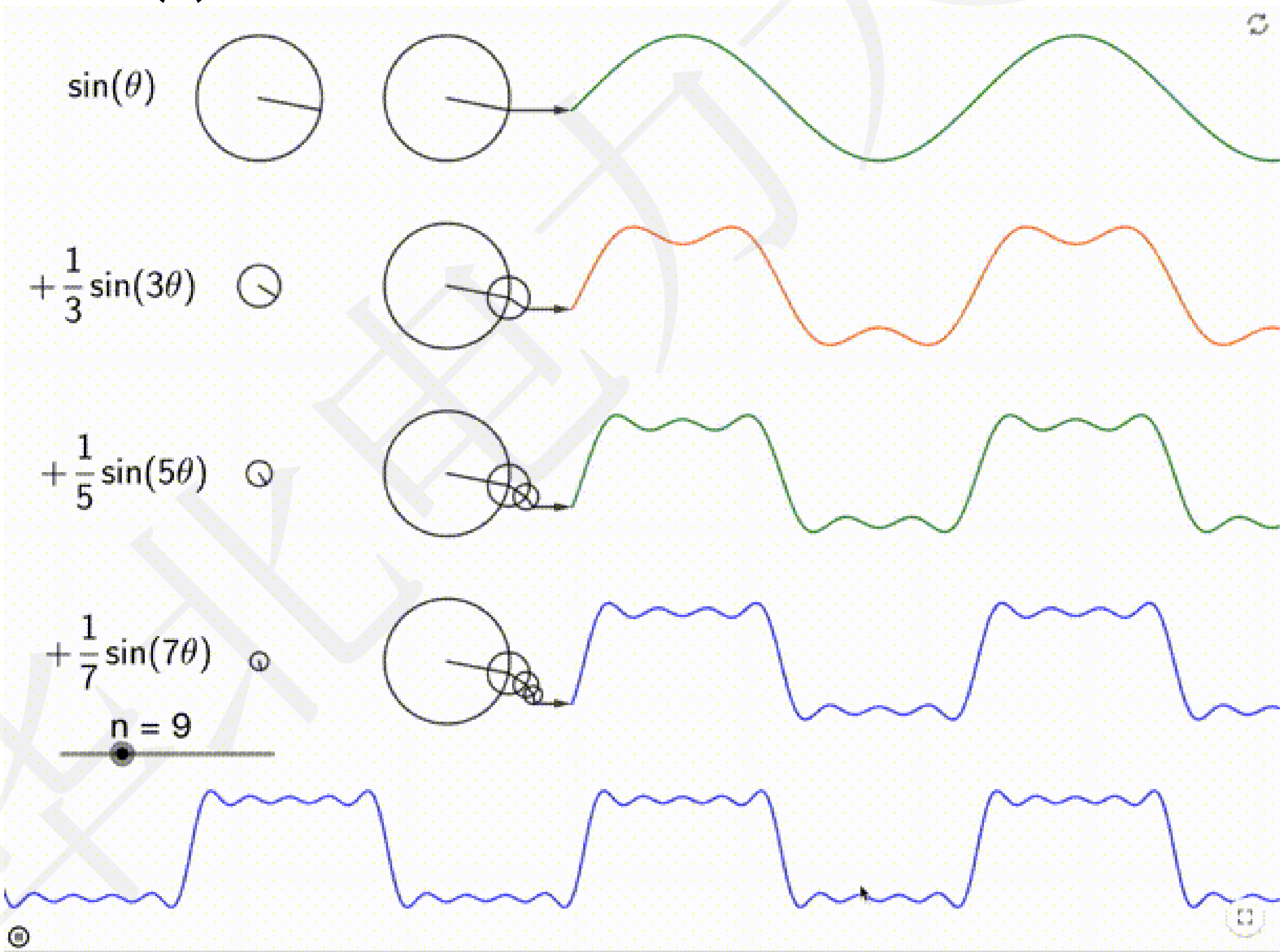
4.2.2 傅里叶级数

- 函数f(x)如何被近似？



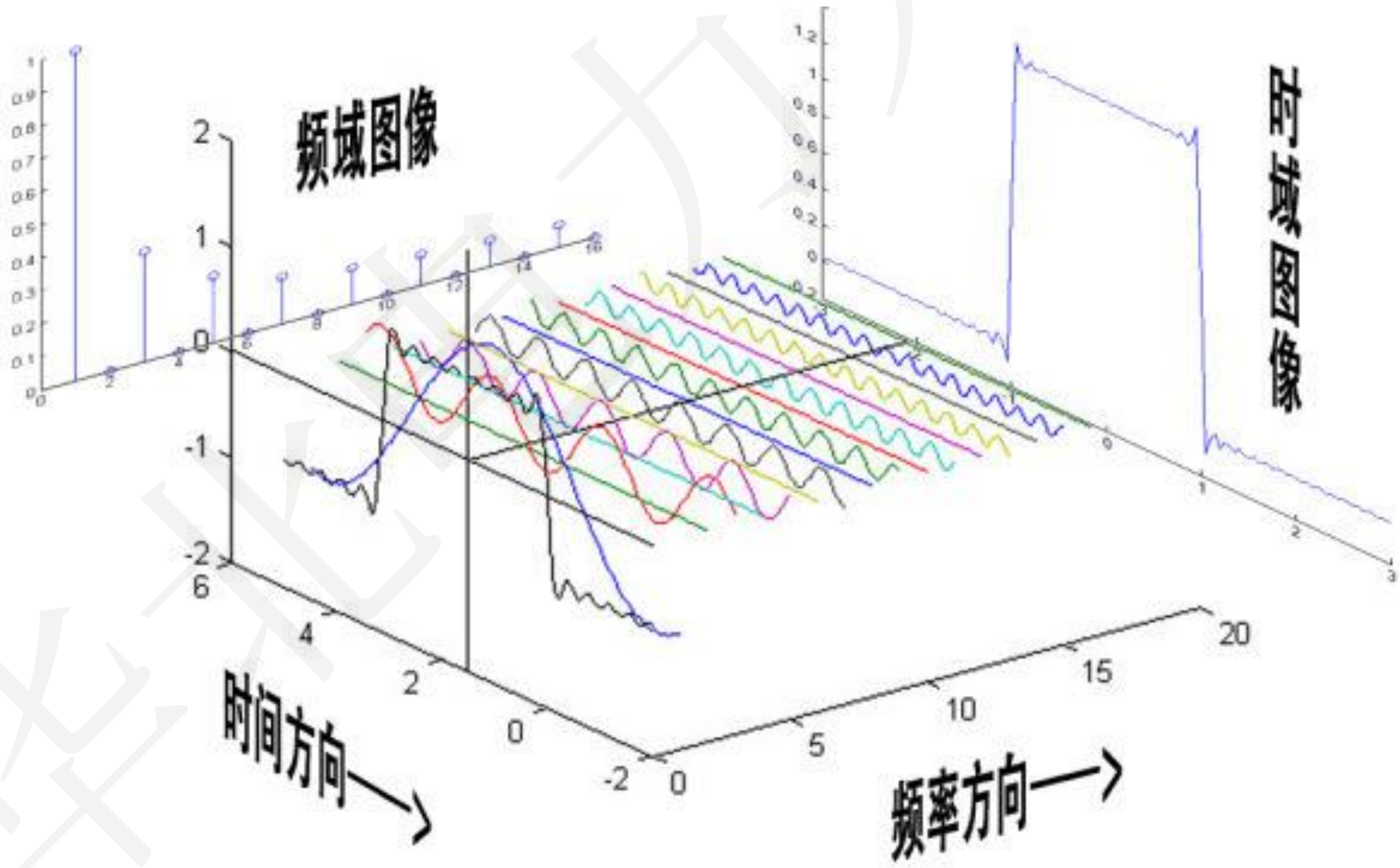
4.2.2 傅里叶级数

- 函数f(x)如何被近似？



4.2.2 傅里叶级数

- 函数f(x)如何被近似?



4.2.3 傅里叶变换

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n e^{jn\omega_0 x}\right)$$

- 那么非周期函数怎么办呢，能否找到一种更加一般的表达形式呢?

✓ 周期无穷大 $T \longrightarrow \infty \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T} \longrightarrow 0$

✓ $n\omega_0$ 变为连续的 $\Delta\omega=(n+1)\omega_0-n\omega_0=\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n e^{jn\omega_0 x}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cdot e^{jn\omega_0 x}dx\cdot e^{jn\omega_0 x}$$

4.2.3 傅里叶变换

- 那么非周期函数怎么办呢，能否找到一种更加一般的表达形式呢?
  - ✓ 整理得到傅里叶变换公式:

$$F(\omega)=F\left[f(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-j2\pi\omega x}dx$$

  - ✓ 傅里叶反变换为:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{j2\pi\omega x}d\omega$$

4.2.3 傅里叶变换

- 二维连续傅里叶变换

$$F(u,\mathrm{v})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

- 二维连续傅里叶反变换

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,\mathrm{v})\cdot e^{j2\pi(ux+vy)}dud\mathrm{v}$$

4.2.3 傅里叶变换

- 一维离散傅里叶变换

$$F(u) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j2\pi ux/N}$$

- 一维离散傅里叶反变换

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ux/N}$$

4.2.3 傅里叶变换

- 由欧拉公式可得，一维离散傅里叶变换

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\left(\cos\frac{2\pi ux}{N}-j\sin\frac{2\pi ux}{N}\right)$$

- 每个F(u) 由f(x)与对应频率的正弦和余弦乘积和组成。

✓ u值决定了变换的频率成份，因此，F(u) 覆盖的域(u值) 称为频率域，其中每一项都被称为傅里叶变换的频率分量，与f(x) 的“时间域”和“时间成份”相对应。

4.2.3 傅里叶变换

- 傅里叶变换的复数形式为：

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

- 傅里叶变换的极坐标形式为：

$$F(u) = \left|F(u)\right| e^{-j\phi(u)}$$

✓ 幅度或频率谱为：

$$\left|F(u)\right| = \left[R(u)^2 + I(u)^2 \right]^{1/2}$$

✓ 相角或相位谱为：

$$\phi(u) = \arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

4.2.3 傅里叶变换

- 二维离散傅里叶变换

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/N+vy/M)}$$

- 二维离散傅里叶反变换

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(u,v)\cdot e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/N+vy/M)}$$

4.2.3 傅里叶变换

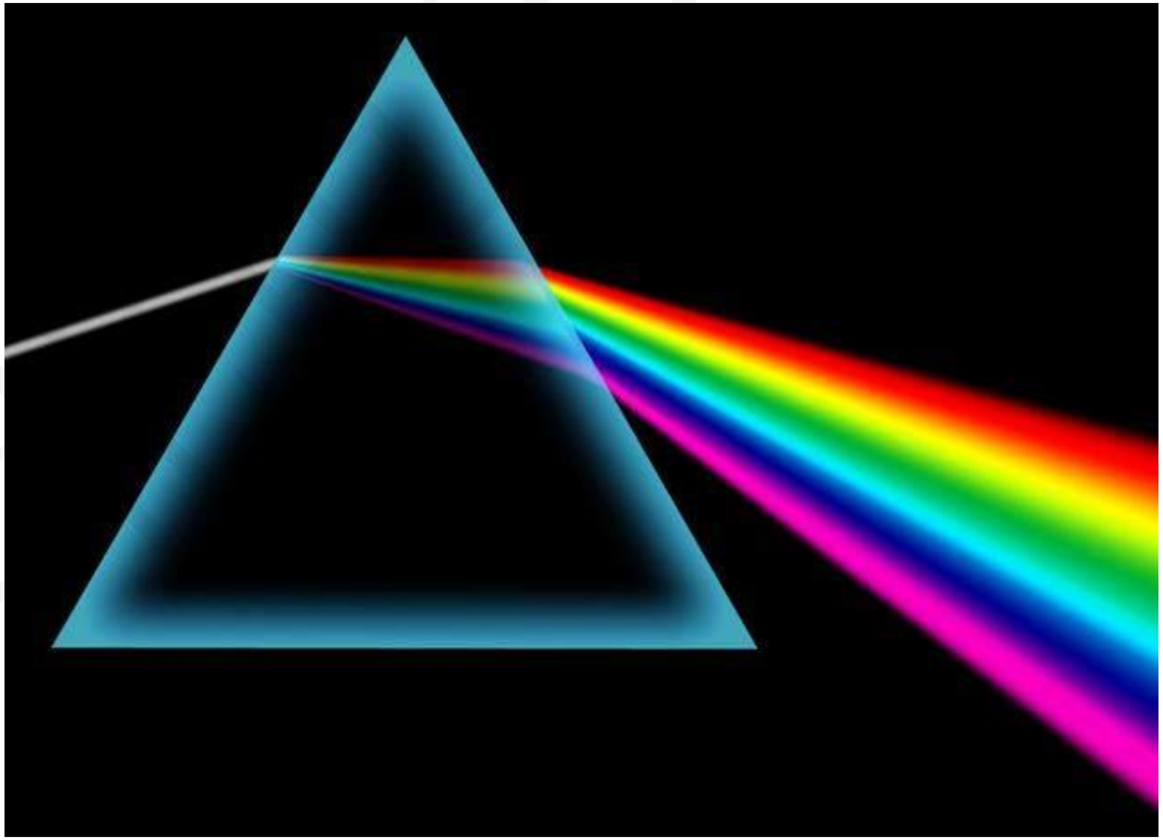
- 二维离散傅里叶变换

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/N+vy/M)}$$

$$F(0,0)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}f(x,y)$$

4.2.4 傅里叶变换的作用

- 傅里叶变换将信号分成不同频率成份。类似光学中的分色棱镜把白光按波长(频率)分成不同颜色，称数学棱镜。



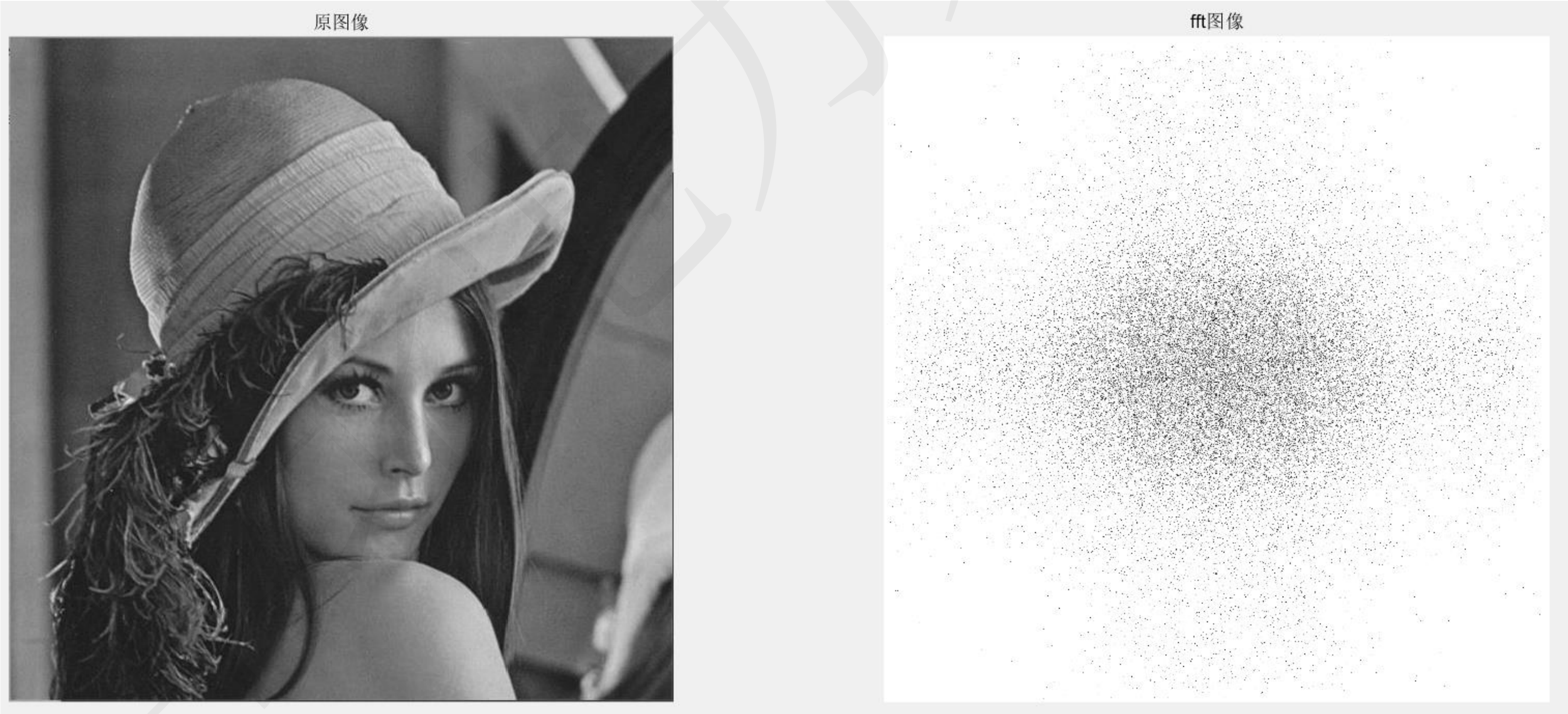
4.3 Matlab中的傅里叶变换

- fft，一维快速傅里叶变换
- fft2，二维快速傅里叶变换
- fftshift，傅里叶变换平移
- ifft，一维快速傅里叶反变换
- ifft2，二维快速傅里叶反变换

4.3.1 傅里叶变换fft2

- fft2，二维快速傅里叶变换

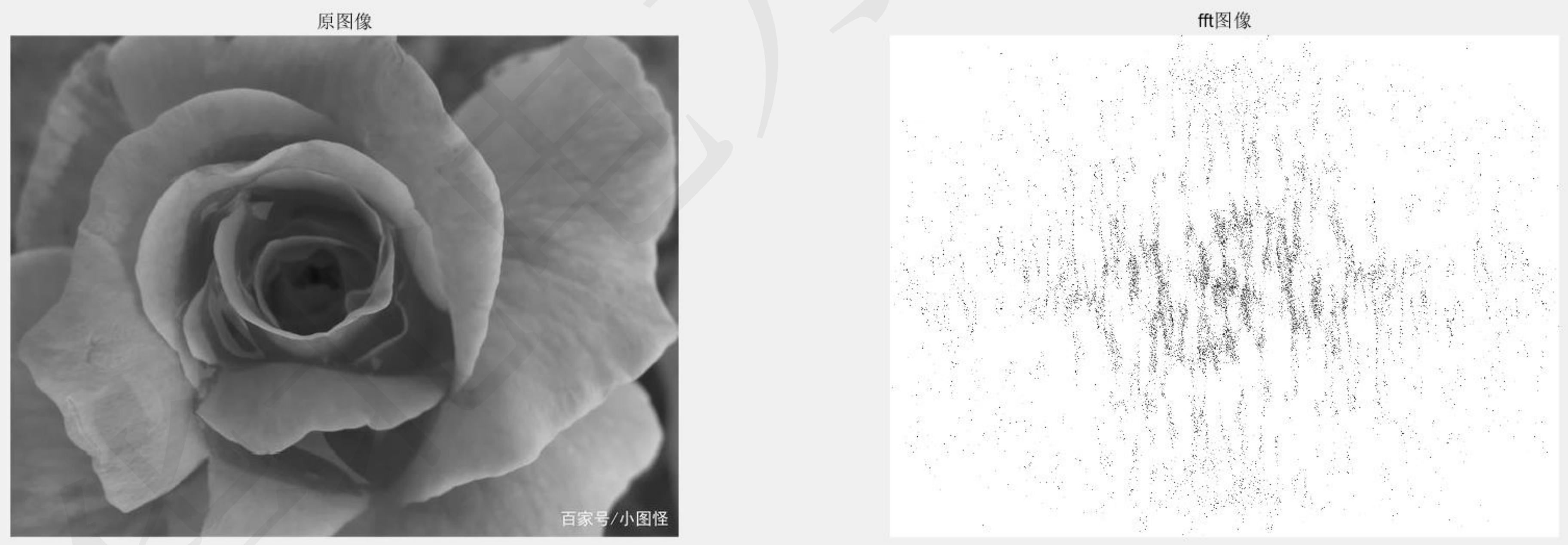
$$Y = \mathrm{fft2}(X)$$



4.3.1 傅里叶变换fft2

- fft2，二维快速傅里叶变换

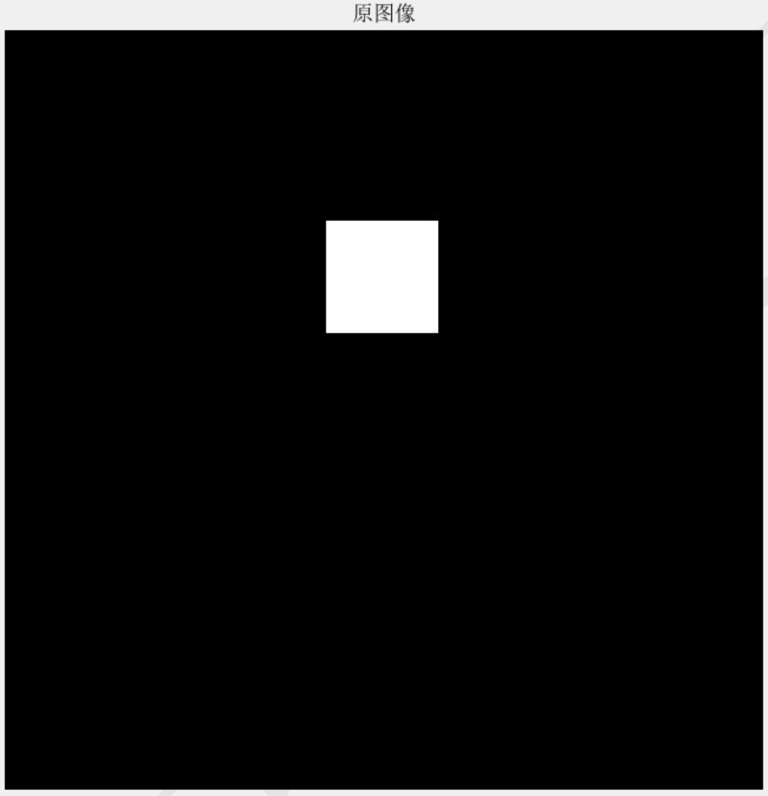
$$Y = fft2(X)$$

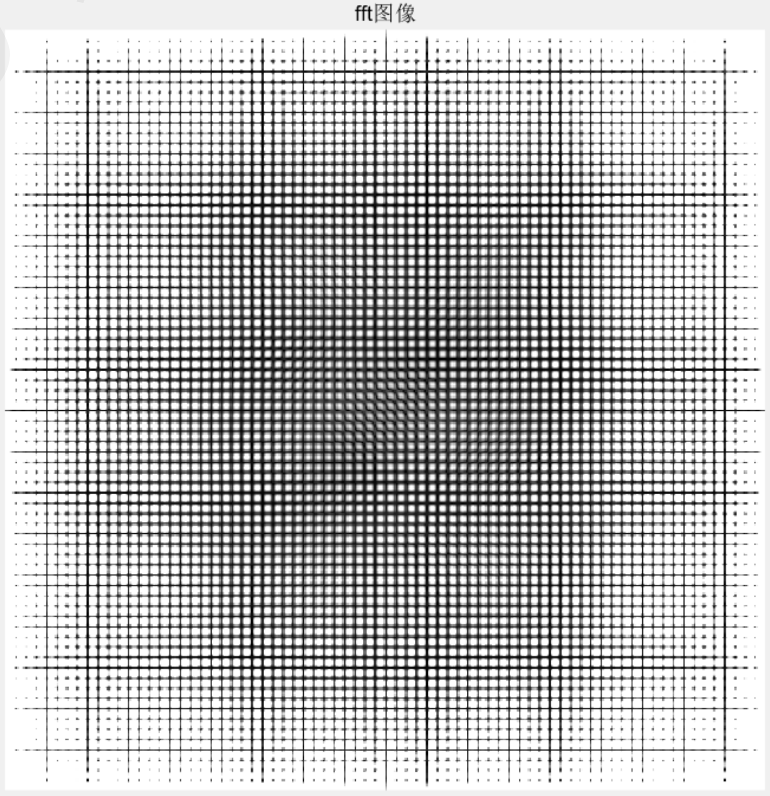


4.3.1 傅里叶变换fft2

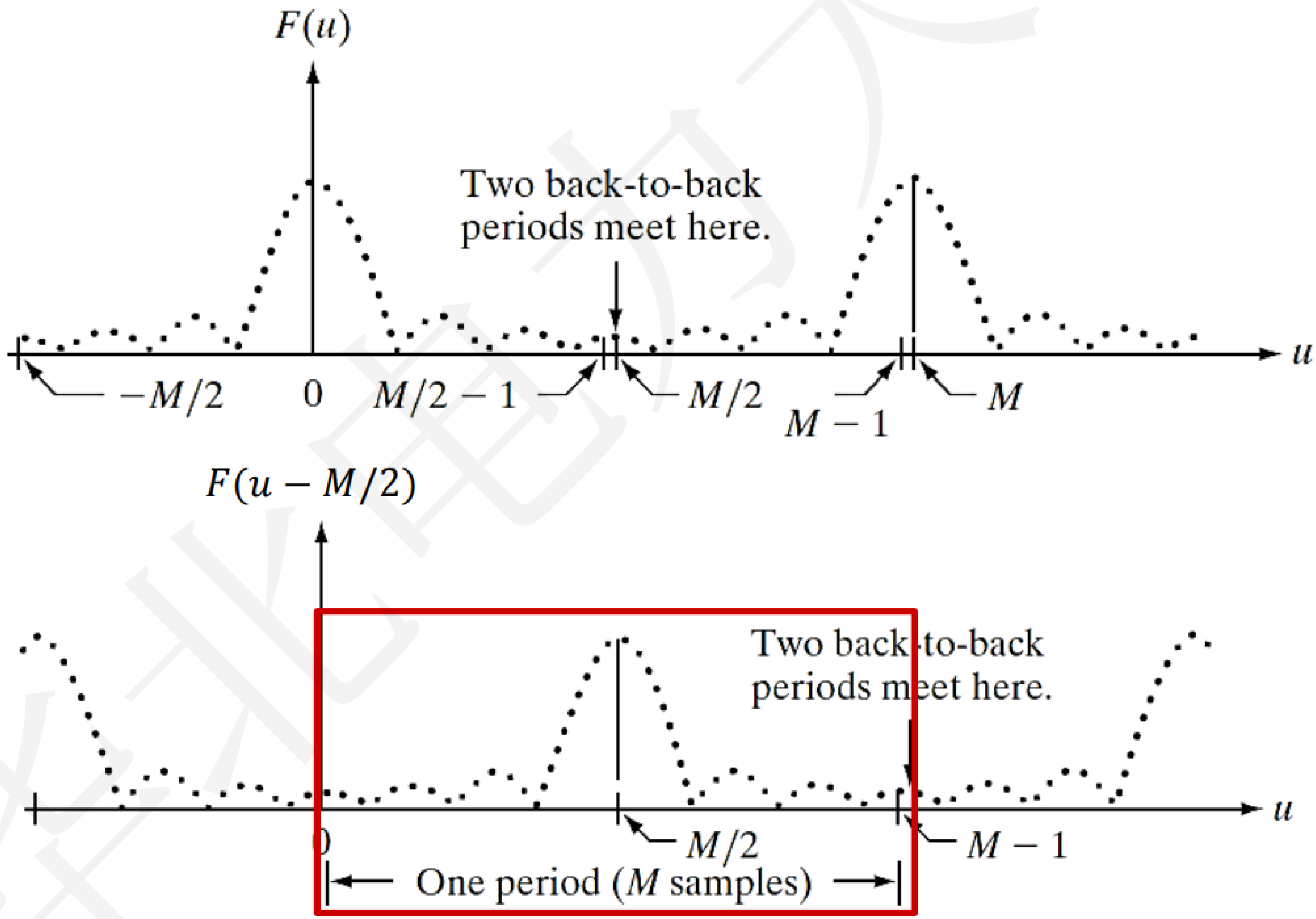
- fft2，二维快速傅里叶变换

$$Y = \mathrm{fft2}(X)$$



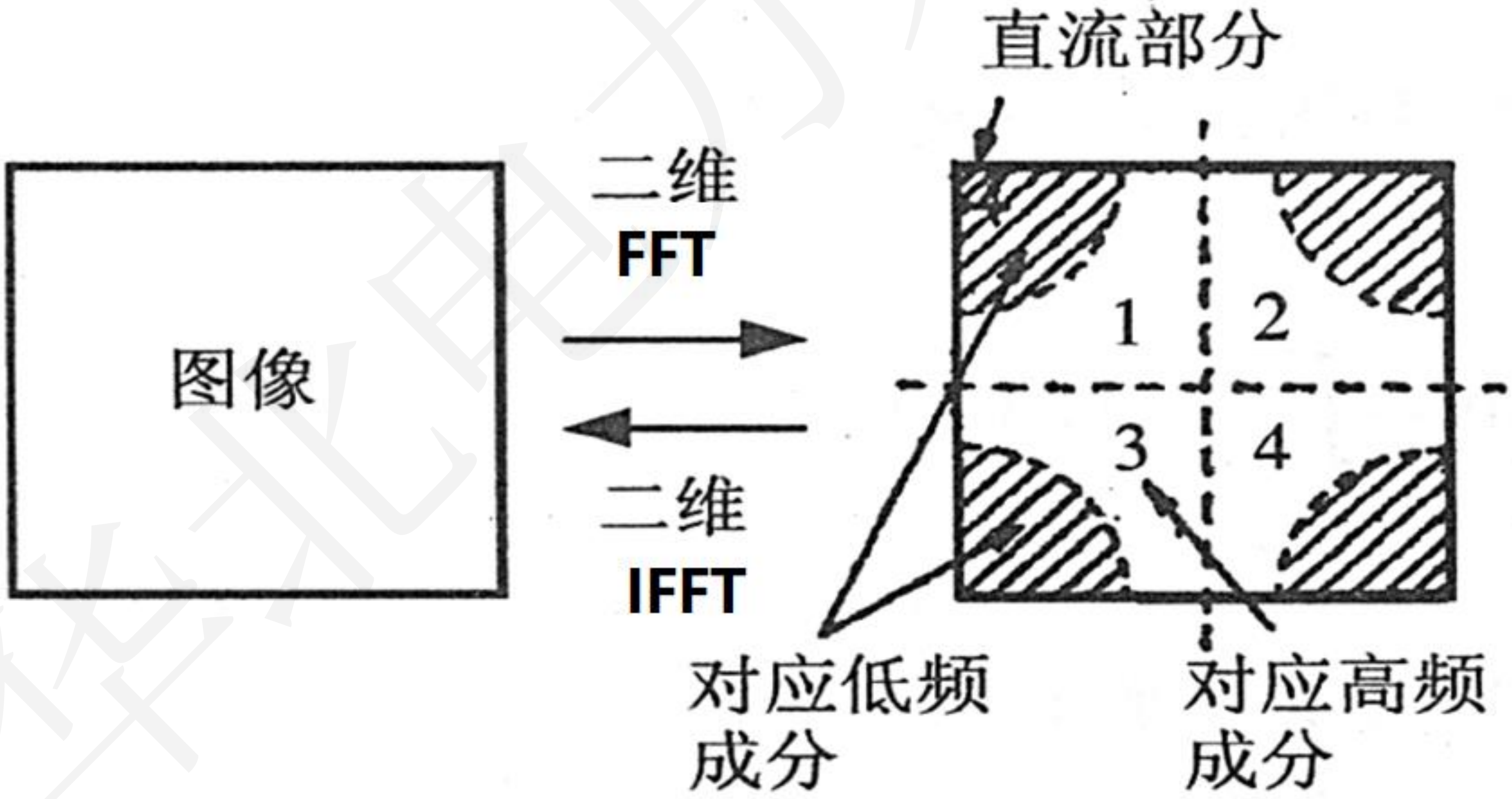


4.3.2 傅里叶变换平移fftshift



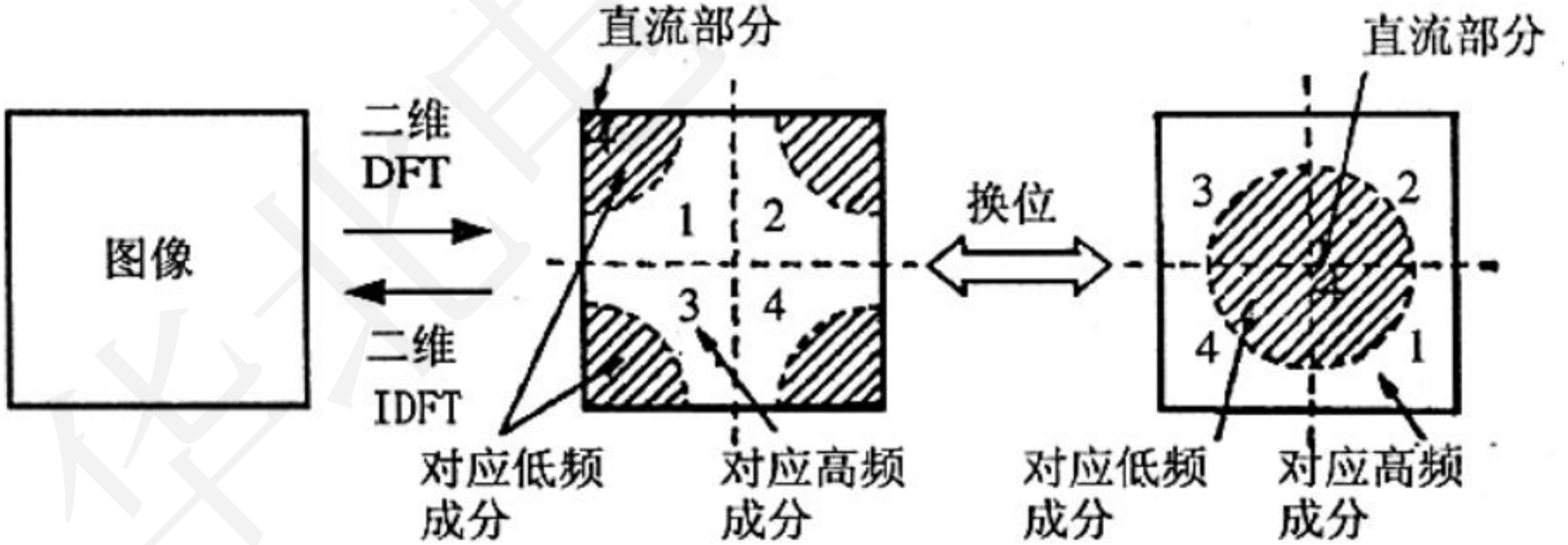
4.3.2 傅里叶变换平移fftshift

- 按照傅里叶变换公式，其幅值的强度分布特点为：



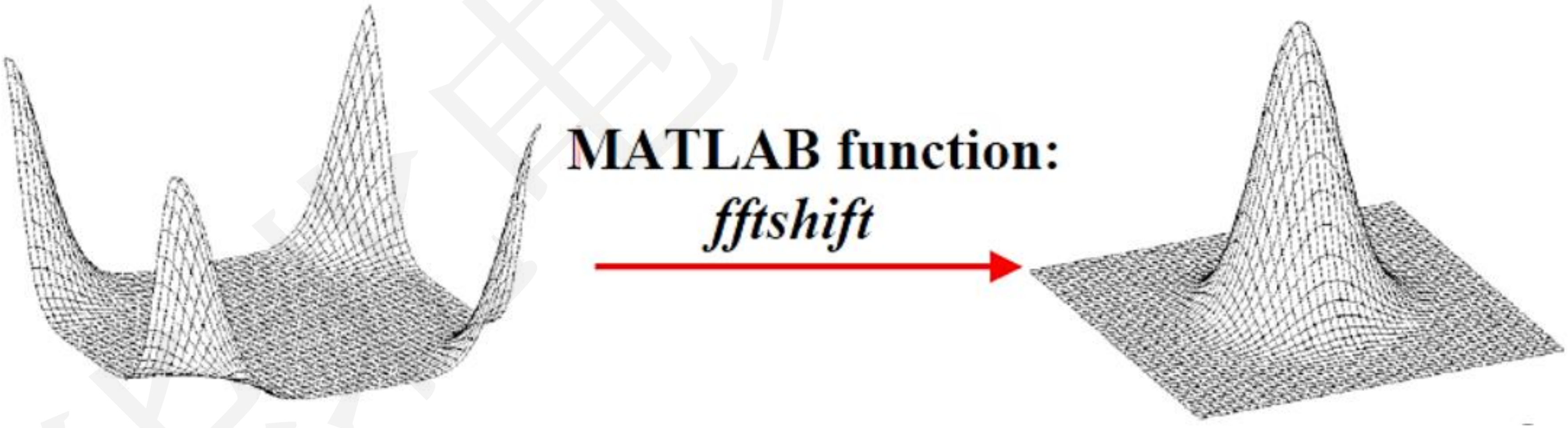
4.3.2 傅里叶变换平移fftshift

- 在光学傅立叶变换中，人们已习惯于变化领域中的低谱部分位于中央。
- 使频域的频谱分布中间低、周围高，有利于对频谱的解释和进行各种计算与分析。



4.3.2 傅里叶变换平移fftshift

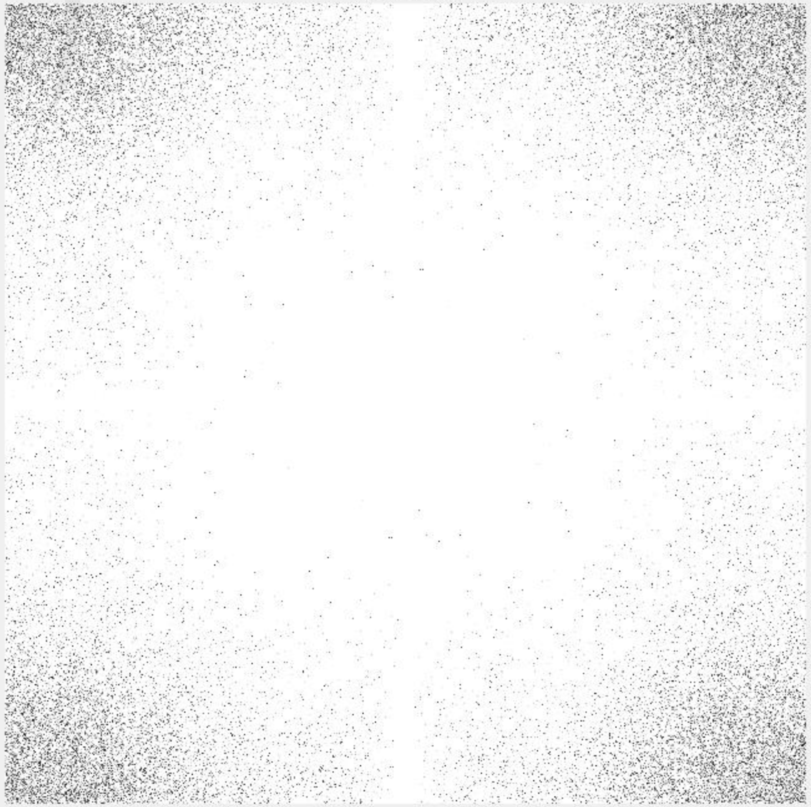
- 在光学傅立叶变换中，人们已习惯于变化领域中的低谱部分位于中央。



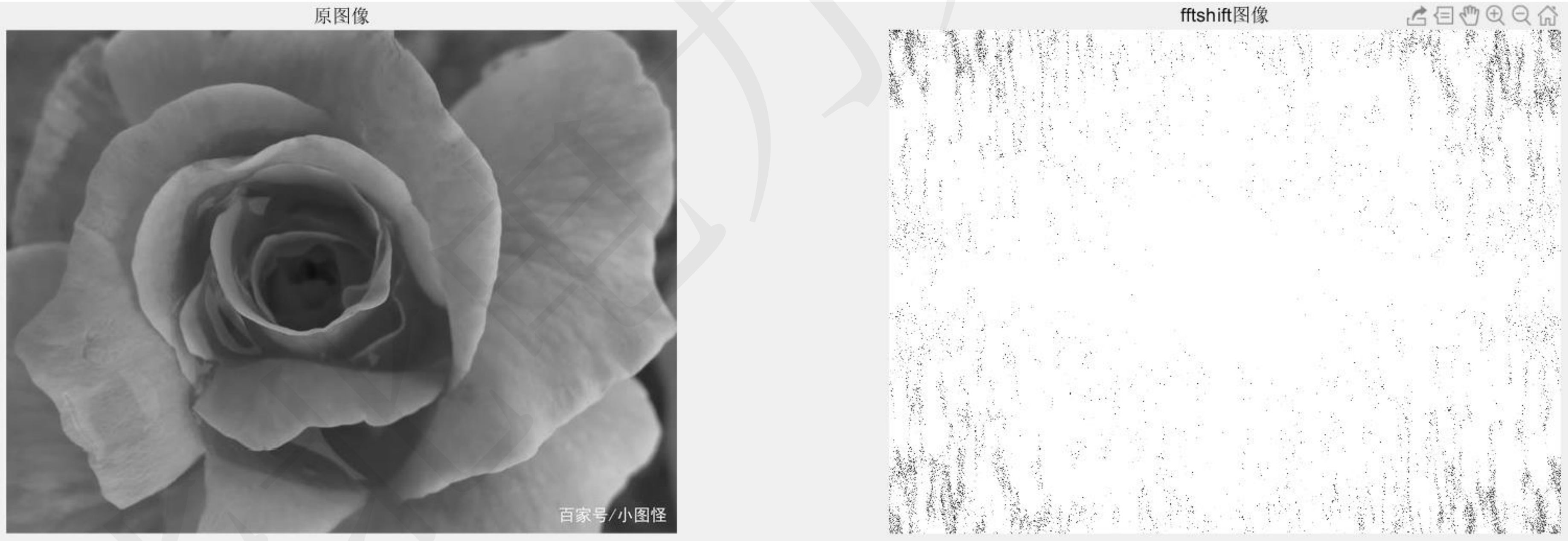
4.3.2 傅里叶变换平移fftshift

原图像

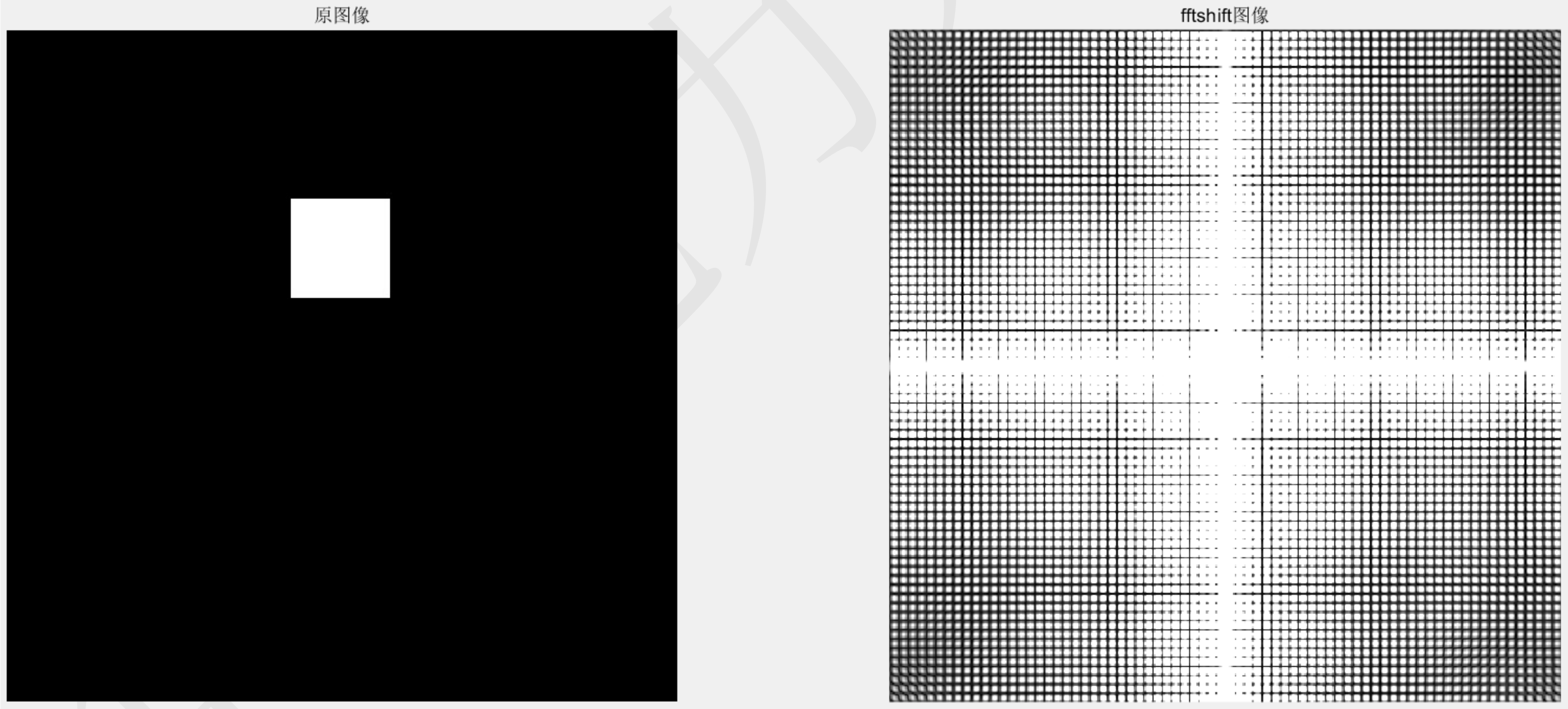
fftshift图像



4.3.2 傅里叶变换平移fftshift



4.3.2 傅里叶变换平移fftshift

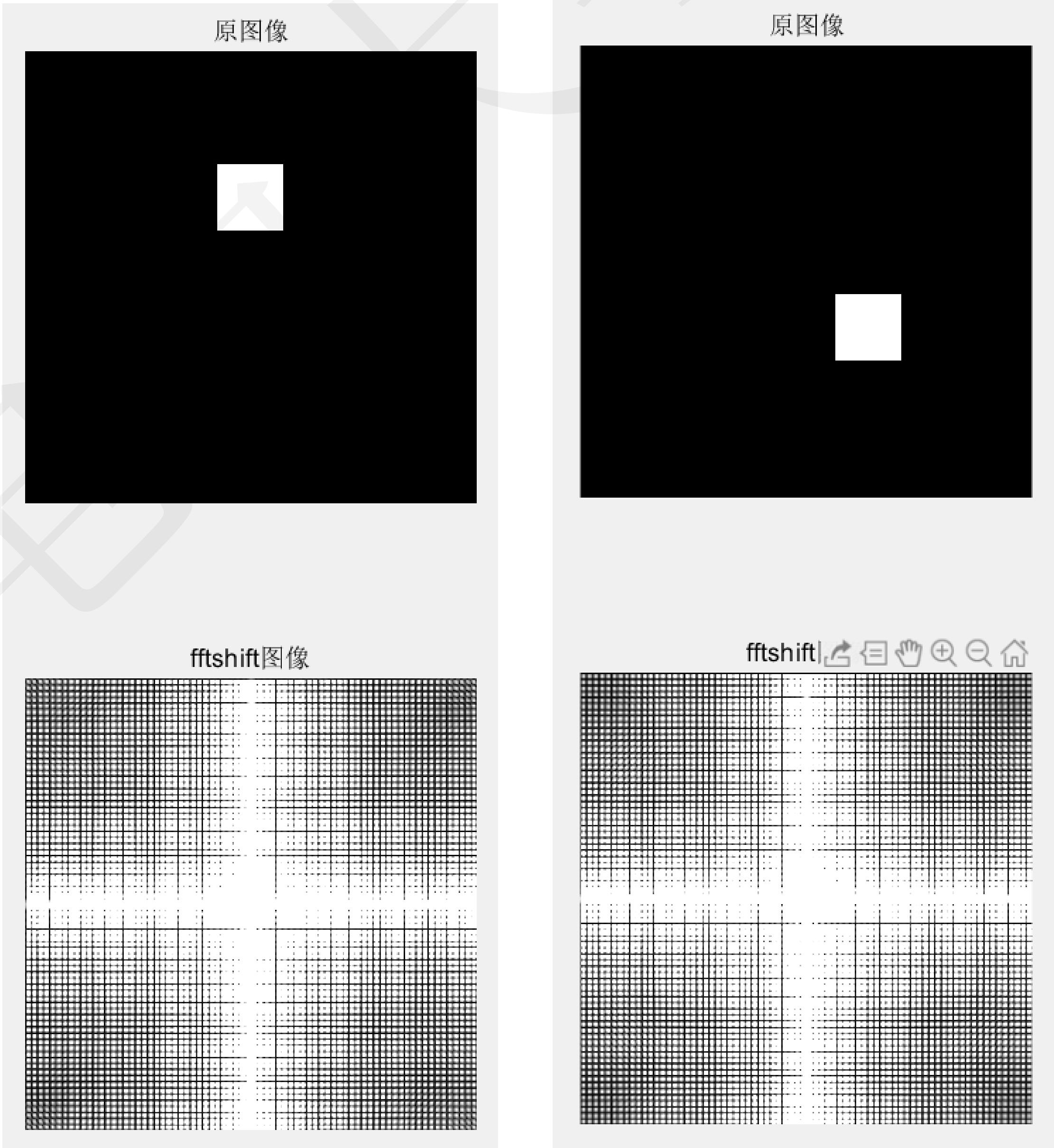


4.3.2 傅里叶变换平移fftshift

这里有个小白点

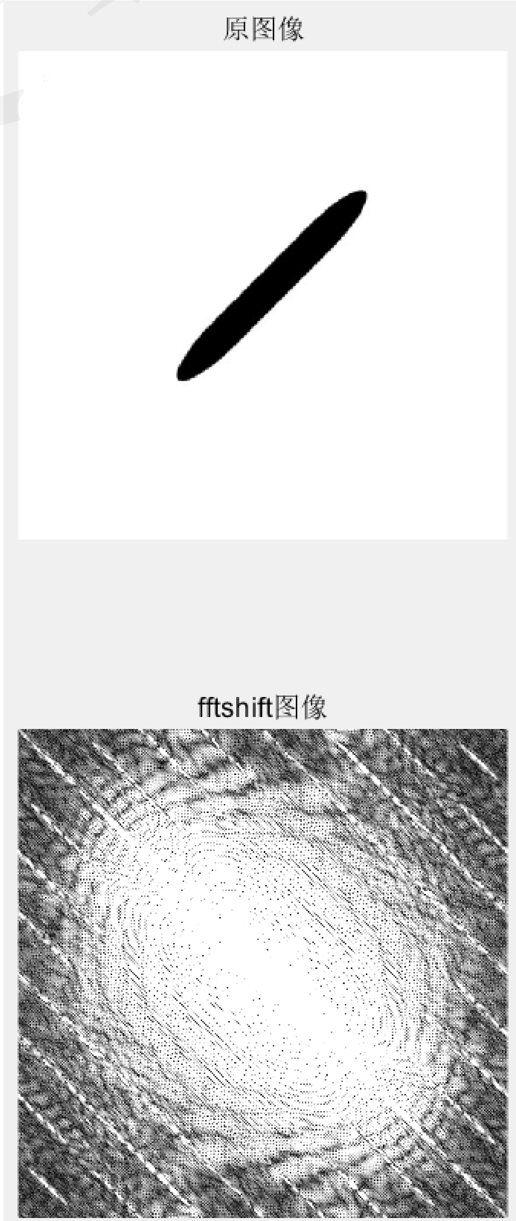
4.3.2 傅里叶变换平移fftshift

图像内容相同，但是分布不同，它们的傅里叶变换相同。

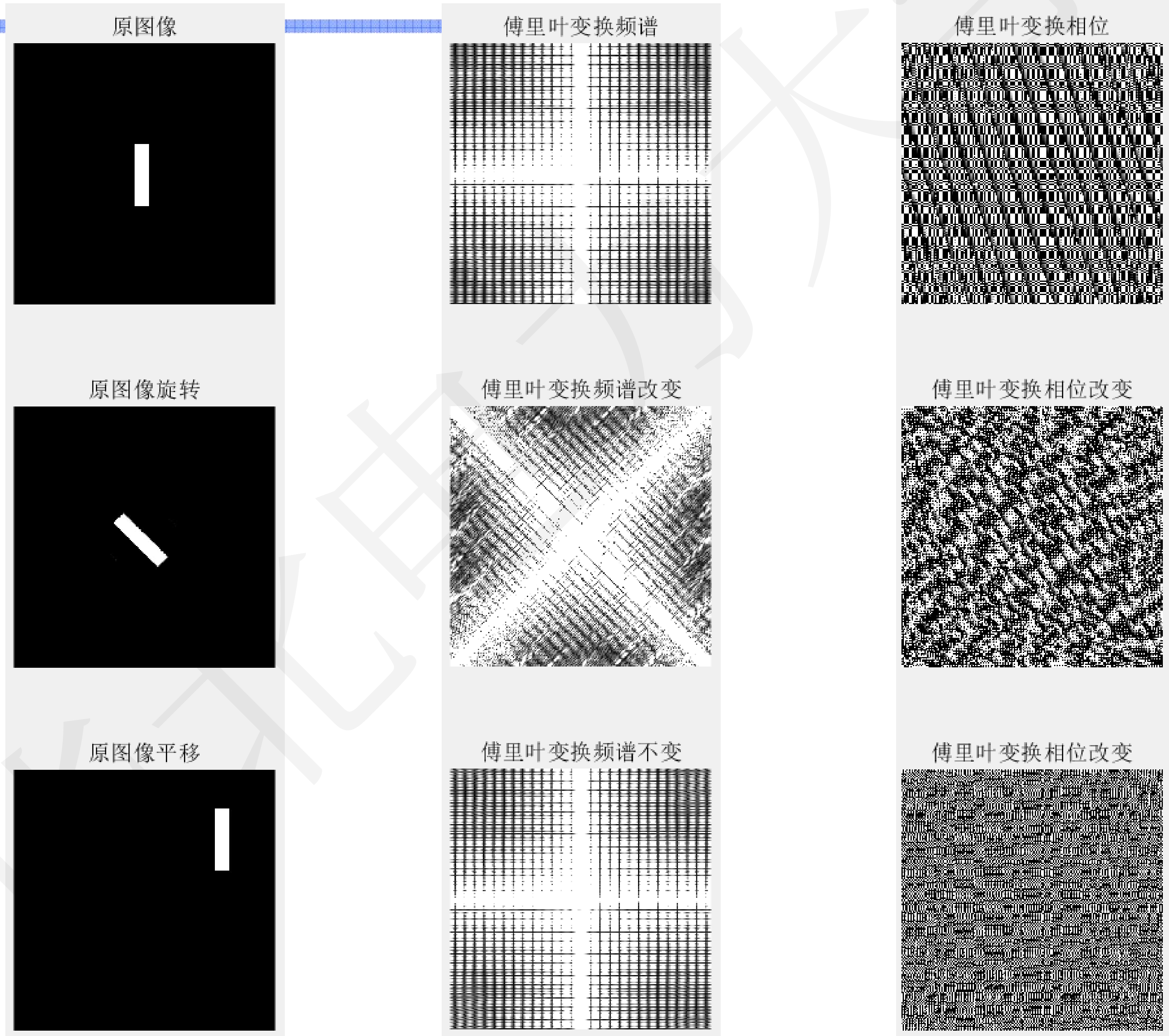


4.3.2 傅里叶变换平移fftshift

傅里叶变换后白色线条方向垂直于时域中的高频方向。



4.3.2 傅里叶变换平移fftshift



4.3.2 傅里叶变换平移fftshift

```
I1 = imread('whiteblock1.jpg');
I1 = rgb2gray(I1);
I1 = im2double(I1);

I2 = fft2(I1); %快速傅里叶变换
I2 = fftshift(I2); %平移
I3 = abs(I2); %由于I2包含复数，必须通过abs取频谱
I4 = angle(I2); %通过angle取得相位
```

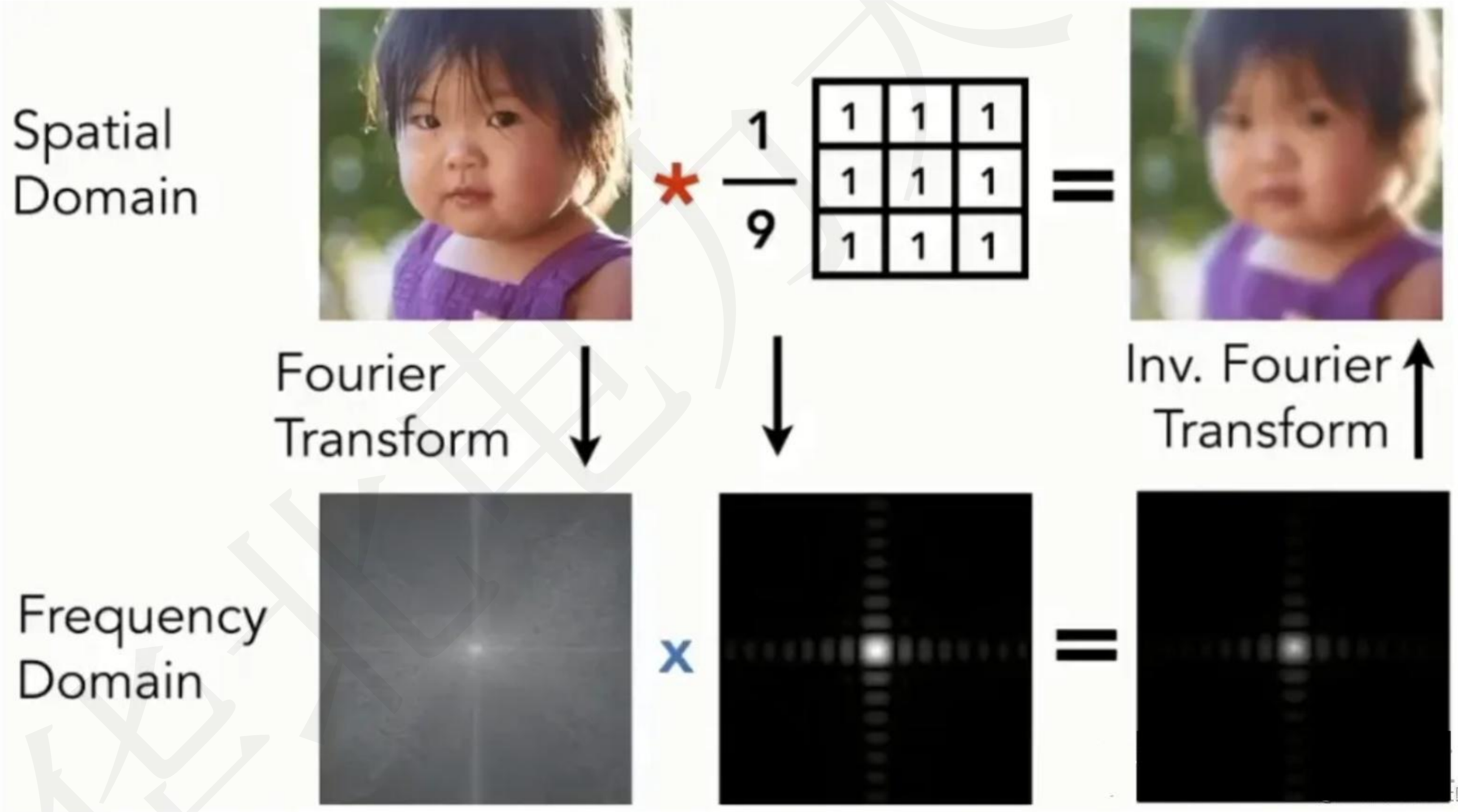
4.3.3 傅里叶反变换ifft2

- 将频域图像变换为时域图像。

4.3.3 傅里叶反变换ifft

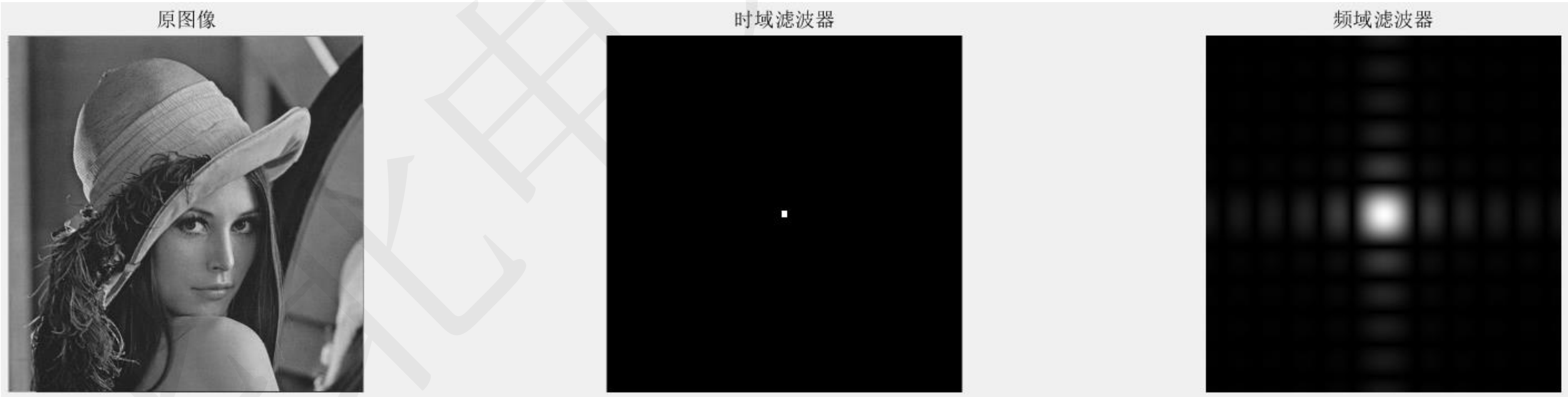
```
I1 = imread('lena.jpg');
I1 = rgb2gray(I1);
I1 = im2double(I1);

I2 = fft2(I1); %快速傅里叶变换
I3 = fftshift(I2); %平移
I4 = ifft2(I2); %傅里叶反变换

figure(1);
subplot(2,2,1);imshow(I1);title('原图像');
subplot(2,2,2);imshow(abs(I2));title('傅里叶滤波器');
subplot(2,2,3);imshow(abs(I3));title('傅里叶平移器');
subplot(2,2,4);imshow(I4);title('傅里叶反变换');
```

4.4 从空间滤波器获得频率域滤波器



4.4.1 空间过滤器进行频率域变换

- 卷积核的频谱图，构建一张中间n×n区域为白色幅值，其他部分为黑色幅值0的图像，对其进行傅里叶变换得到频谱图。

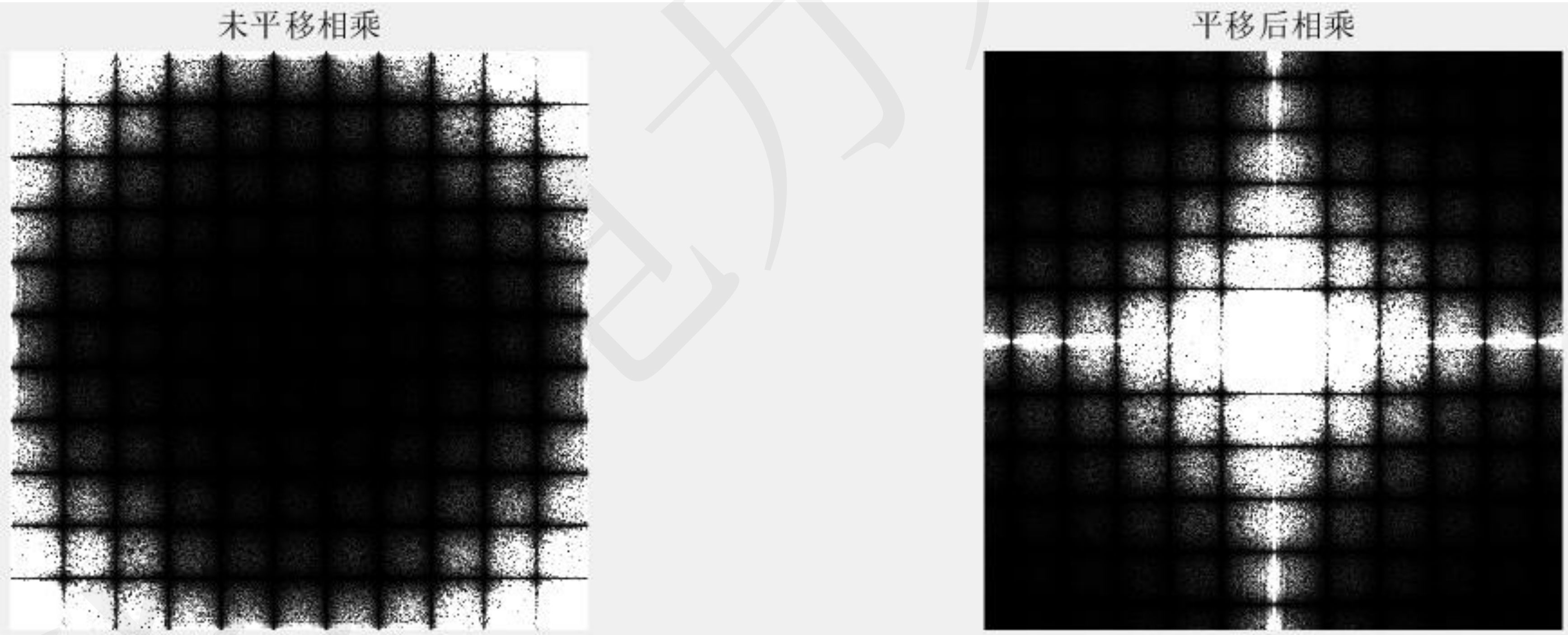


4.4.1 空间过滤器进行频率域变换

```
I1 = imread('lena.jpg');
I1 = rgb2gray(I1);
I1 = im2double(I1);%转换为double

[W, H] = size(I1);%获得图像大小
x=round(W/2);%图像中心点坐标
y=round(H/2);%
h=5;%卷积核大小2*h+1
I2 = zeros(W, H);%构建全0图像
I2(x-h:x+h,y-h:y+h)=1;%将卷积核置为1
I2 = I2/(2*h+1)/(2*h+1);%均值

I2fft = fft2(I2);
I2fftshift = fftshift(I2fft);
```

4.4.2 滤波器频率相乘

- 时域的卷积等于频域的相乘

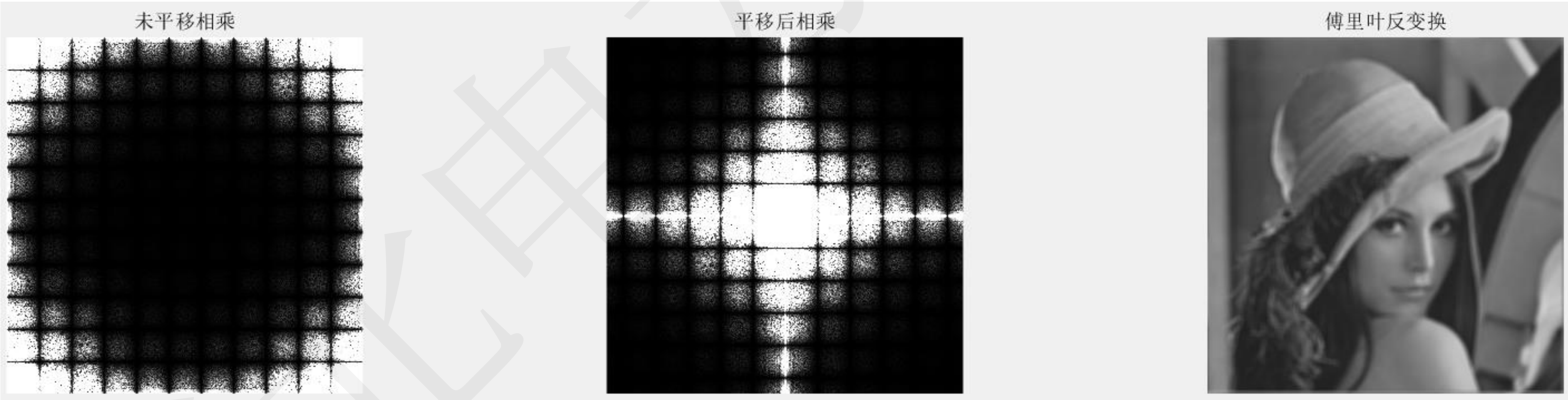


4.4.2 滤波器频率相乘

```
I1fft = fft2(I1); %原图像傅里叶变换
I1fftshift = fftshift(I1fft); %原图像傅里叶平移

I3 = I1fft.*I2fft; %傅里叶相乘
I4 = I1fftshift.*I2fftshift; %平移后相乘

subplot(2,3,4);imshow(abs(I3));title('未平移相乘'); %I3是复数
subplot(2,3,5);imshow(abs(I4));title('平移后相乘');
```

4.4.3 傅里叶反变换

- 对频率域相乘后的图像进行反变换。



4.4.3 傅里叶反变换

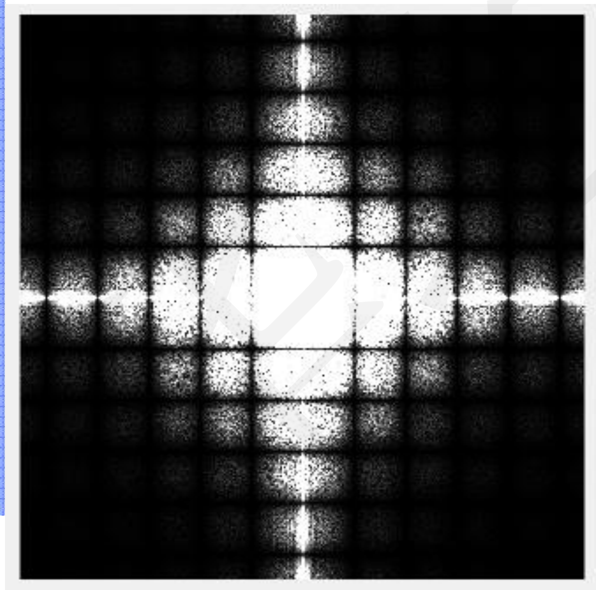
```
I1fft = fft2(I1); %原图像傅里叶变换
I1fftshift = fftshift(I1fft); %原图像傅里叶平移

I3 = I1fft.*I2fft; %傅里叶相乘
I4 = I1fftshift.*I2fftshift; %平移后相乘

I5 = ifft2(I3);
I5 = fftshift(I5); %反变换后图像需要再次平移

subplot(2,3,4);imshow(abs(I3));title(‘未平移相乘’); %I3是复数
subplot(2,3,5);imshow(abs(I4));title('平移后相乘’);
subplot(2,3,6);imshow(I5);title('傅里叶反变换');
```

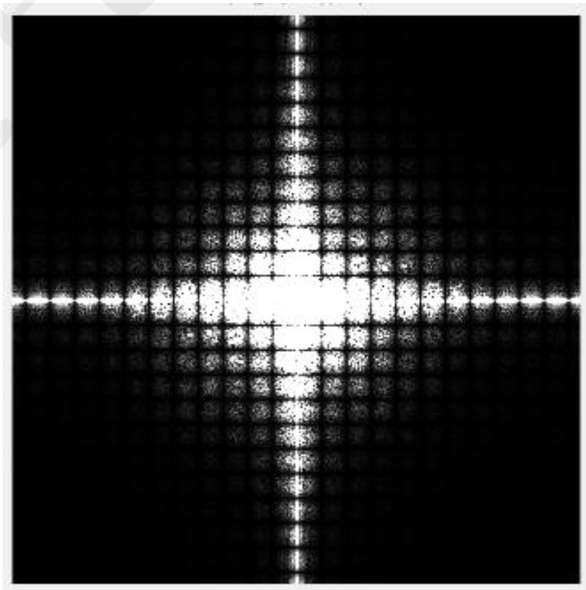
4.4.3 傅里叶反变换

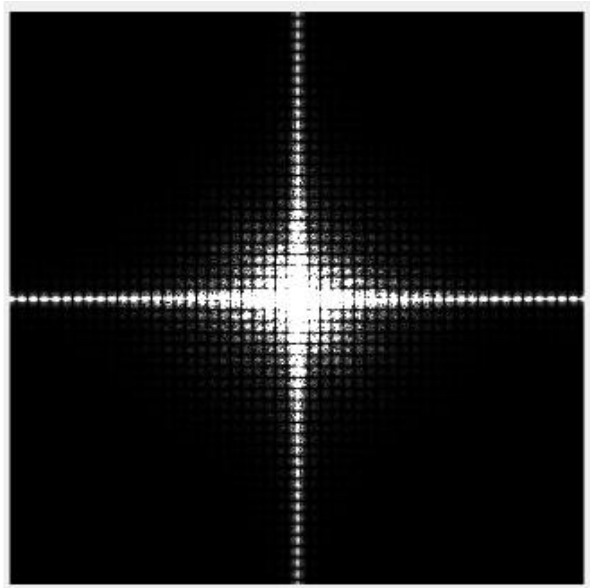
卷积核11*11

卷积核23*23

卷积核51*51

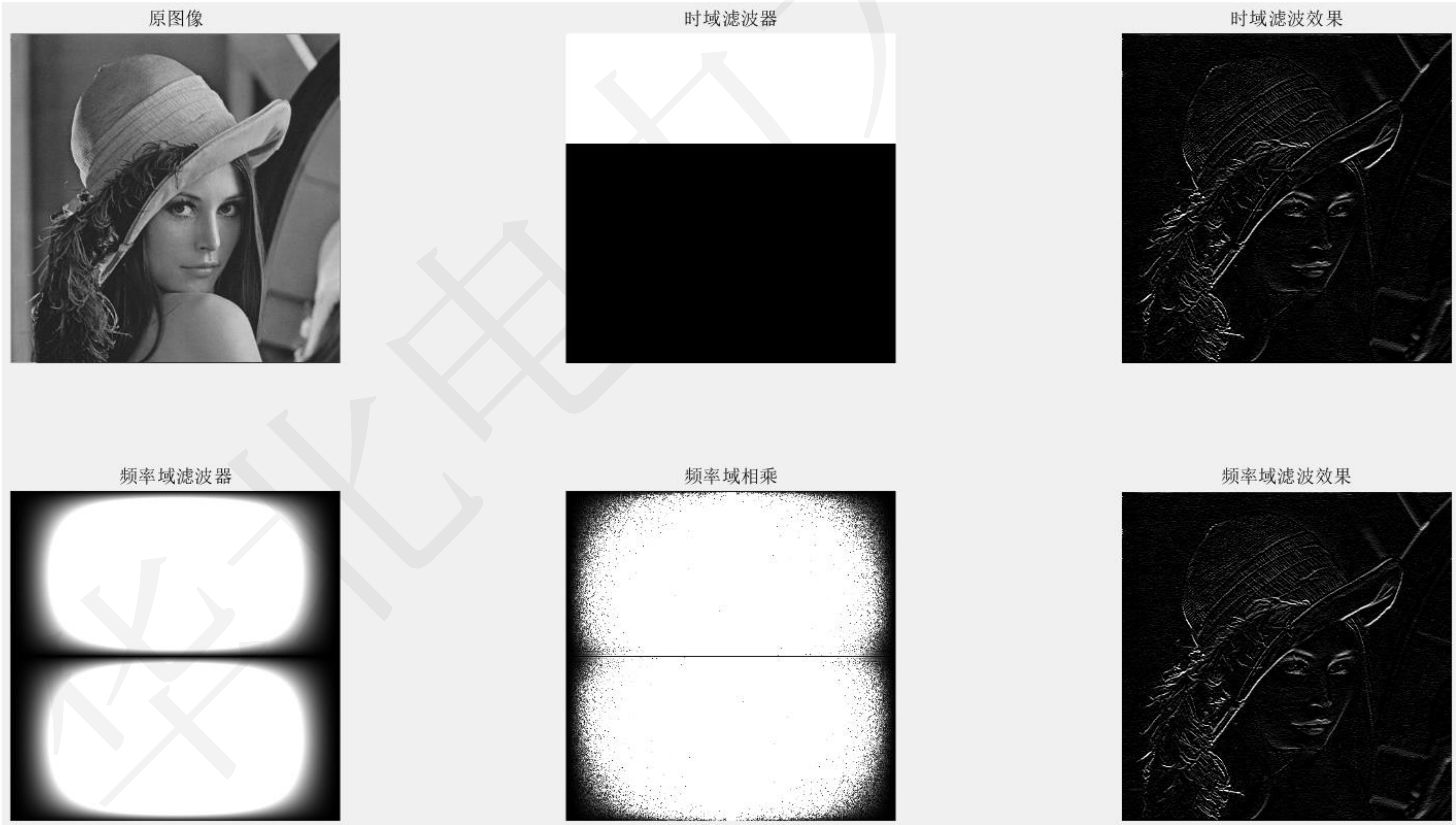






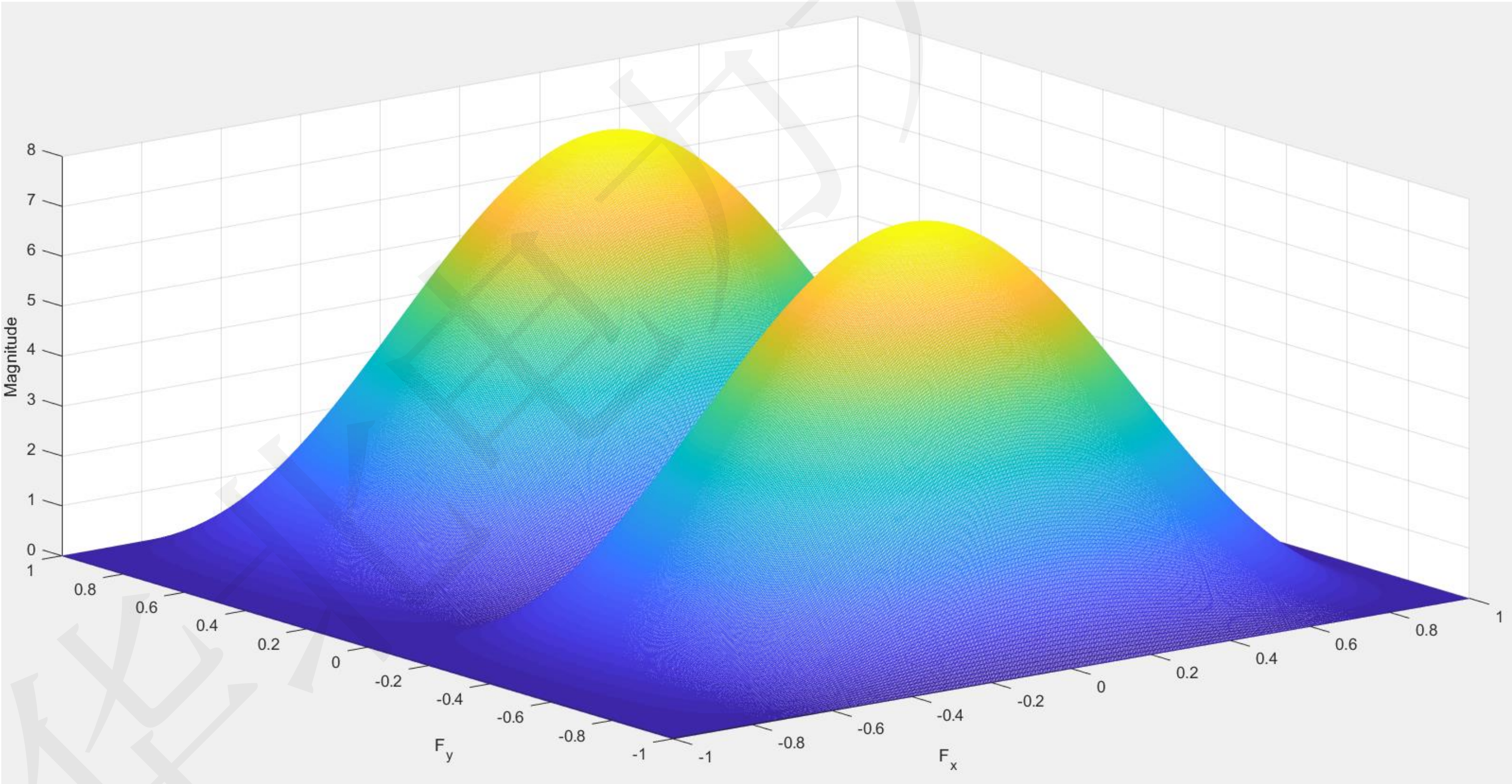
4.4.4 freqz2函数

- 把空间域滤波器变成相应频率域滤波器。



4.4.4 freqz2函数

- 把空间域滤波器变成相应频率域滤波器。



freqz2(kernel, 640, 640)

4.4.4 freqz2函数

```
I1 = imread('lena.jpg');
I1 = rgb2gray(I1);
I1 = im2double(I1);
kernel = fspecial('sobel'); %时域滤波器
I2 = imfilter(I1, kernel); %时域滤波

kernelfft = freqz2(kernel, 640, 640); %将时域滤波器转为频域滤波器
I1fft = fft2(I1);   %原图转为频率域图
I1fftshift = fftshift(I1fft);
I3 = I1fftshift.*kernelfft; %频率域滤波
I4 = ifft2(I3); %反变换
```