

# 第2章 电阻电路的等效变换

## 本章重点

2.1	引言
2.2	电路的等效变换
2.3	电阻的串联和并联
2.4	电阻的Y形连接和 $\Delta$ 形连接的等效变换
2.5	电压源、电流源的串联和并联
2.6	实际电源的两种模型及其等效变换
2.7	输入电阻

## ● 重点:

1. 电路等效的概念;
2. 电阻的串、并联;
3. 电阻的Y— $\Delta$  变换;
4. 电压源和电流源的等效变换;

## 2.1 引言

### ●电阻电路

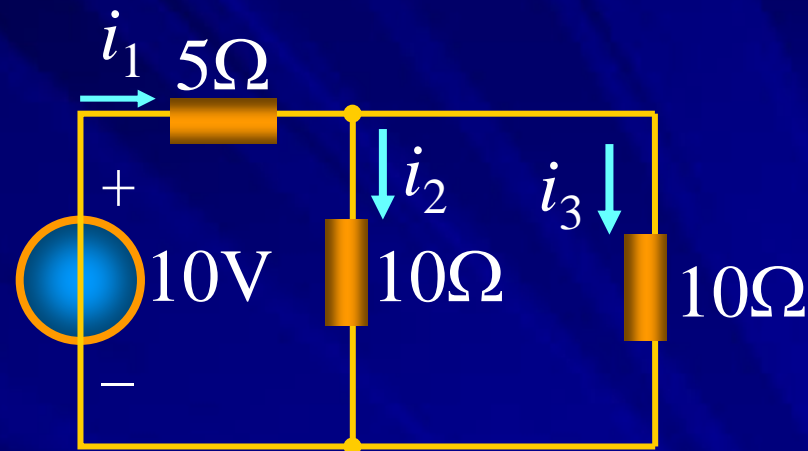
→ 仅由电源和线性电阻构成的电路

### ●分析方法

→ ①欧姆定律和基尔霍夫定律是分析电阻电路的依据；

②等效变换的方法,也称化简的方法。

图中电流 $i_1 = ?$



A

0.4A

B

0.67A

C

1A

D

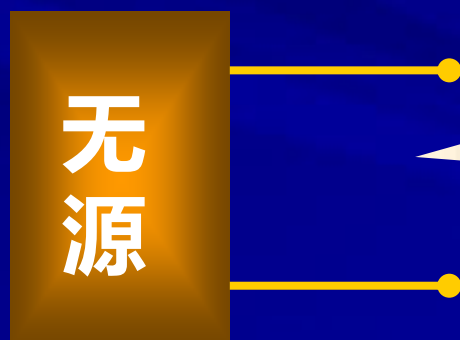
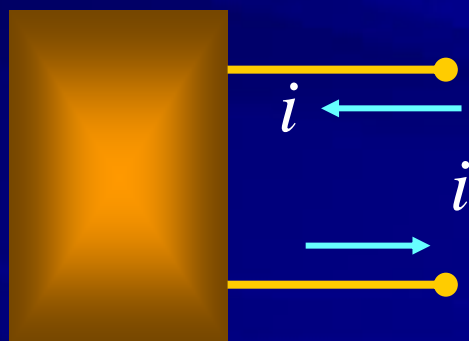
1.25A

提交

## 2.2 电路的等效变换

### 1. 两端电路（网络）

任何一个复杂的电路, 向外引出两个端钮, 且从一个端子流入的电流等于从另一端子流出的电流, 则称这一电路为二端网络 (或一端口网络)。



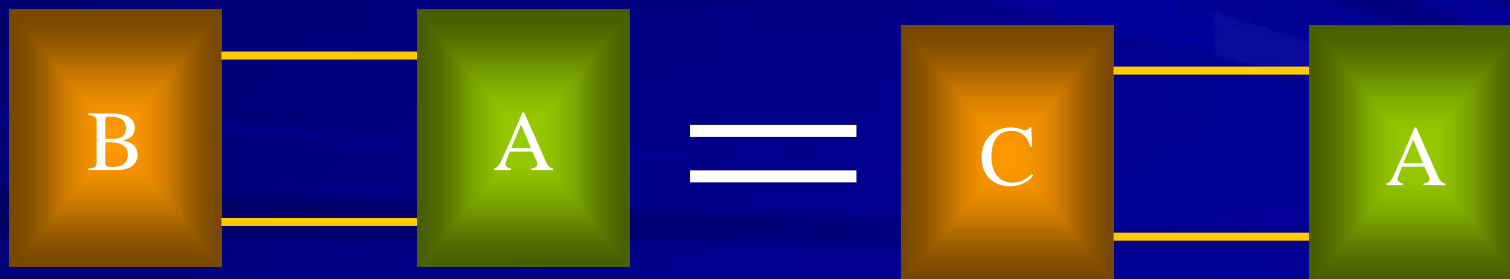
无源  
一  
端  
口

## 2. 两端电路等效的概念

两个两端电路，端口具有相同的电压、电流关系，则称它们是等效的电路。



对A电路中的电流、电压和功率而言，满足：



**明确**

### ①电路等效变换的条件:

→ **两电路具有相同的VCR;**

### ②电路等效变换的对象:

→ **未变化的外电路<sub>A</sub>中的电压、电流和功率;  
(即对外等效, 对内不等效)**

### ③电路等效变换的目的:

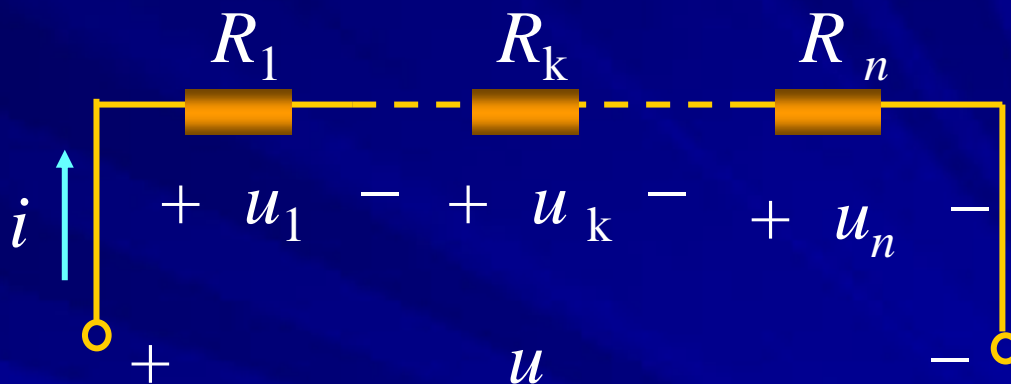
→ **化简电路, 方便计算。**



## 2.3 电阻的串联和并联

### 1. 电阻串联

#### ① 电路特点

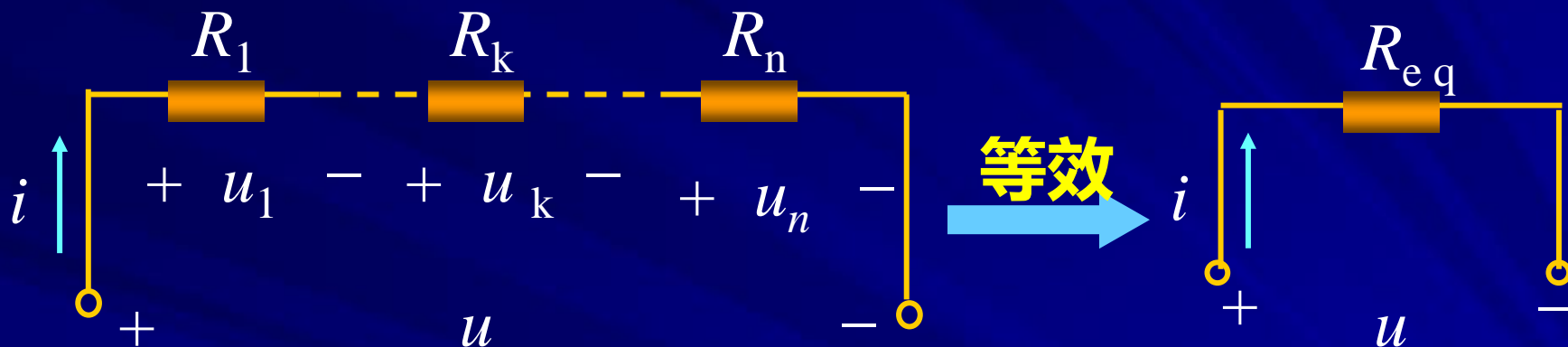


- (a) 各电阻顺序连接，流过同一电流 (KCL);
- (b) 总电压等于各串联电阻的电压之和 (KVL)。

$$u = u_1 + \cdots + u_k + \cdots + u_n$$



## ②等效电阻



由欧姆定律

$$u = R_1 i + \cdots + R_k i + \cdots + R_n i = (R_1 + \cdots + R_n) i = R_{eq} i$$

$$R_{eq} = R_1 + \cdots + R_k + \cdots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k > R_k$$



**结论** 串联电路的总电阻等于各分电阻之和。

### ③ 串联电阻的分压

$$u_k = R_k i = R_k \frac{u}{R_{eq}} = \frac{R_k}{R_{eq}} u < u$$

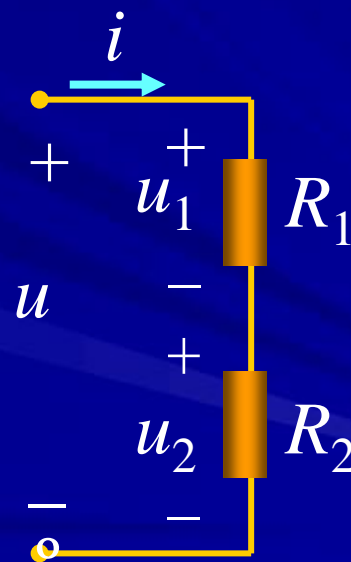


表明

电压与电阻成正比，因此串联电阻电路可作分压电路。

例 两个电阻的分压：

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \quad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$



**④功率**

$$p_1=R_1 i^2, \quad p_2=R_2 i^2, \quad \dots, \quad p_n=R_n i^2$$

$$p_1:p_2:\dots:p_n=R_1:R_2:\dots:R_n$$

**总功率**

$$p=R_{\text{eq}} i^2=(R_1+R_2+\dots+R_n) i^2$$

$$=R_1 i^2+R_2 i^2+\dots+R_n i^2$$

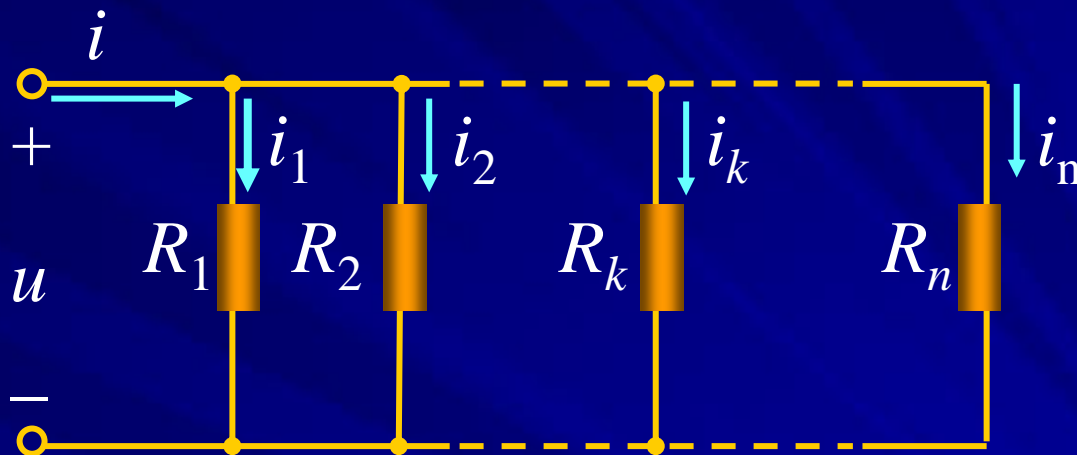
$$=p_1+p_2+\dots+p_n$$

**表明**

- ①电阻串联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成正比；
- ②等效电阻消耗的功率等于各串联电阻消耗功率的总和。

## 2. 电阻并联

### ① 电路特点

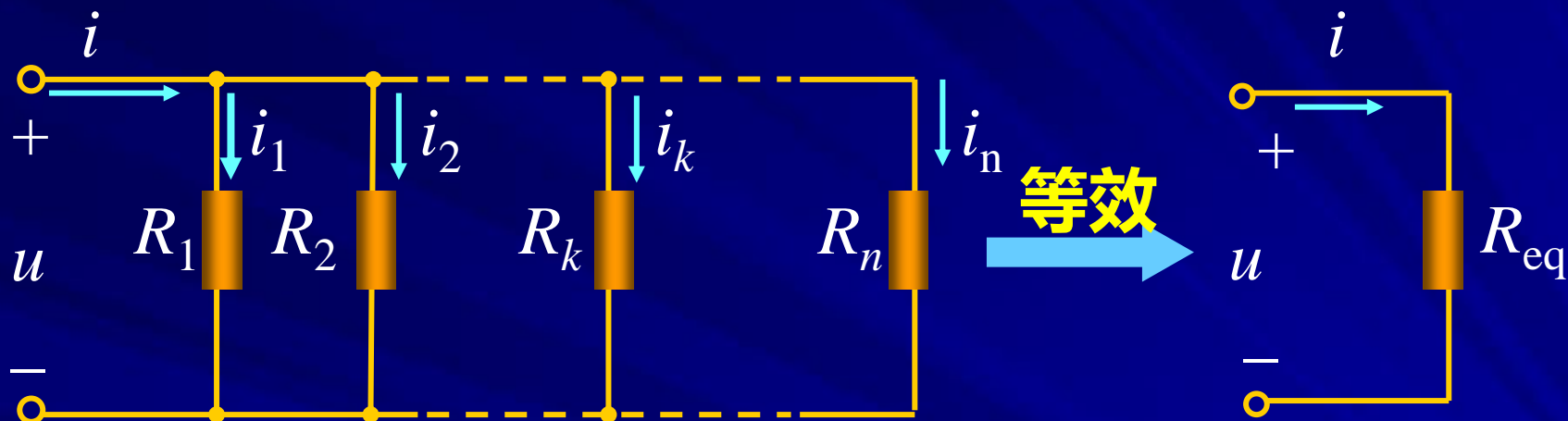


(a) 各电阻两端为同一电压 (KVL);

(b) 总电流等于流过各并联电阻的电流之和(KCL)。

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_n$$

## ②等效电阻



由KCL:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots + i_n$$

$$= u/R_1 + u/R_2 + \dots + u/R_n$$

$$= u(1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n) = uG_{eq}$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{k=1}^n G_k > G_k$$



**结论** 等效电导等于并联的各电导之和。

$$\frac{1}{R_{eq}} = G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad \text{即} \quad R_{eq} < R_k$$

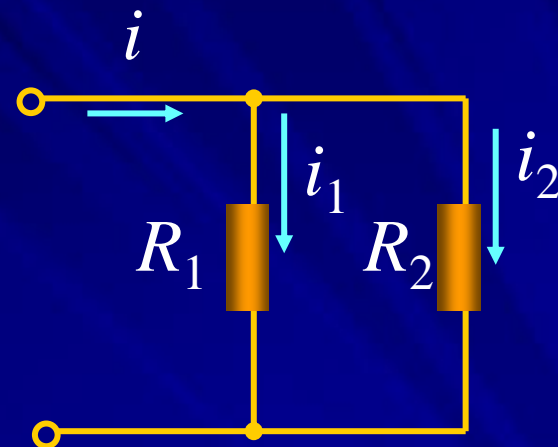
### ③ 并联电阻的分流

电流分配与  
电导成正比

$$\frac{i_k}{i} = \frac{u / R_k}{u / R_{eq}} = \frac{G_k}{G_{eq}} \longrightarrow i_k = \frac{G_k}{G_{eq}} i$$

## 例 两电阻的分流:

$$R_{eq} = \frac{1/R_1 \cdot 1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_2 i}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_1 i}{R_1 + R_2} = (i - i_1)$$



**④功率**

$$p_1 = G_1 u^2, \quad p_2 = G_2 u^2, \quad \dots, \quad p_n = G_n u^2$$

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = G_1 : G_2 : \dots : G_n$$

**总功率**

$$\begin{aligned} p &= G_{\text{eq}} u^2 = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) u^2 \\ &= G_1 u^2 + G_2 u^2 + \dots + G_n u^2 \\ &= p_1 + p_2 + \dots + p_n \end{aligned}$$



**表明 ①电阻并联时，各电阻消耗的功率与电阻大小成反比；**

**②等效电阻消耗的功率等于各并联电阻消耗功率的总和**

两个电灯泡，一个额定功率50W，另一个额定功率100W，当它们串联时哪个更亮一些？  
并联时哪个更亮一些？

A

串联时50W灯泡更亮，并联时100W灯泡更亮

B

串联时100W灯泡更亮，并联时50W灯泡更亮

C

一直是100W灯泡更亮

D

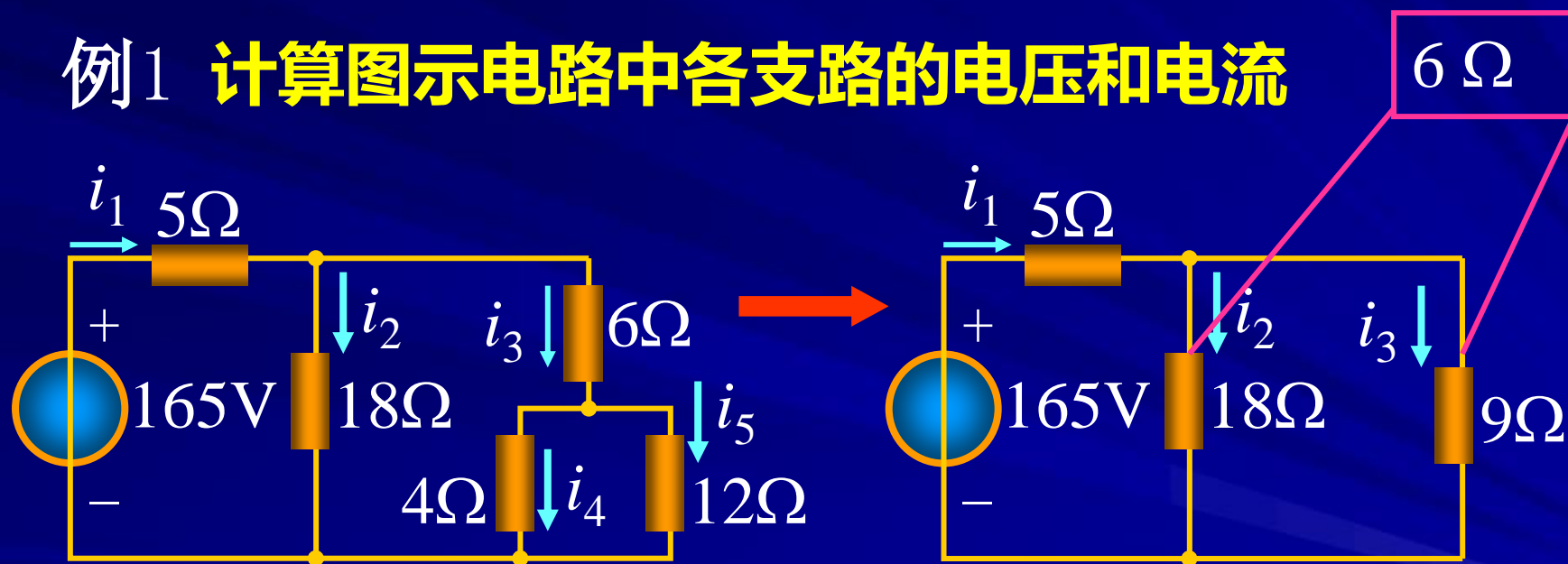
一直是50W灯泡更亮

提交

### 3.电阻的串并联

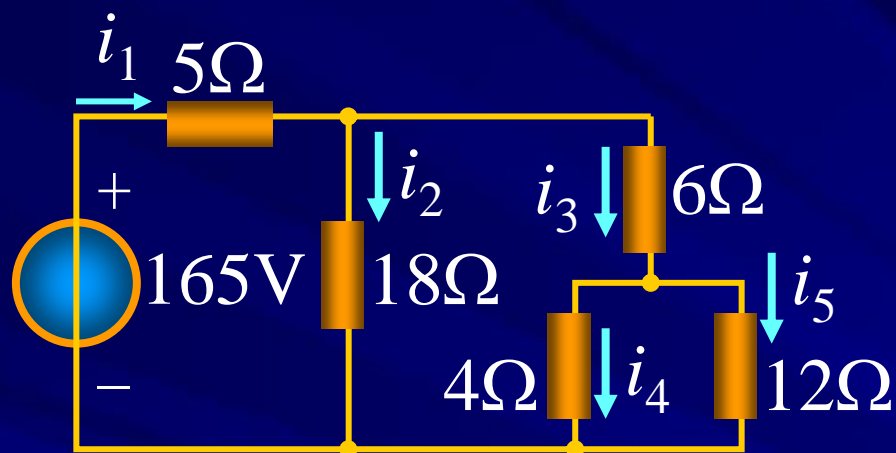
电路中有电阻的串联，又有电阻的并联，这种连接方式称电阻的串并联。

例1 计算图示电路中各支路的电压和电流



$$i_1 = 165/11 = 15\text{A}$$

$$u_2 = 6i_1 = 6 \times 15 = 90\text{V}$$

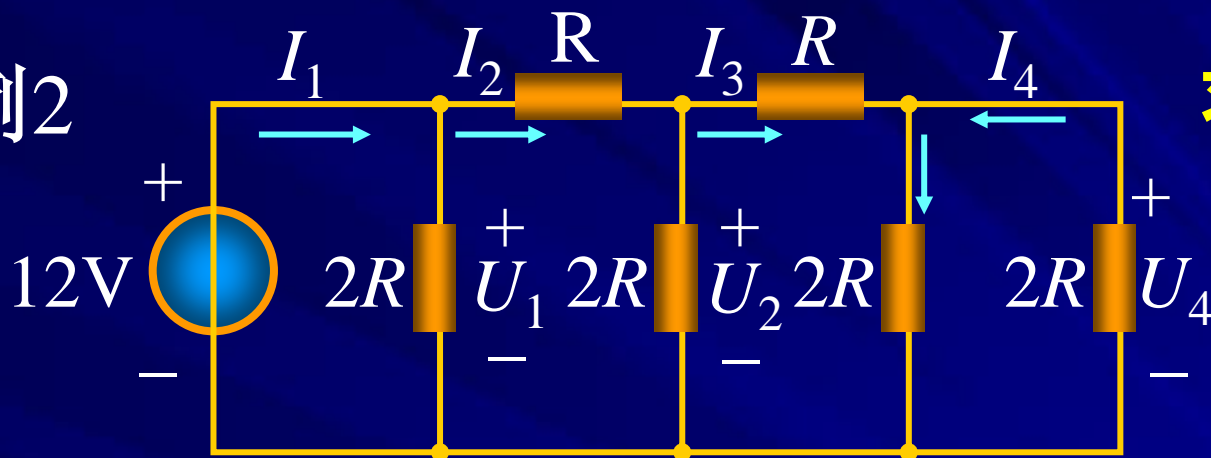


$$i_2 = 90/18 = 5\text{A} \quad u_3 = 6i_3 = 6 \times 10 = 60\text{V}$$

$$i_3 = 15 - 5 = 10\text{A} \quad u_4 = 3i_3 = 30\text{V}$$

$$i_4 = 30/4 = 7.5\text{A} \quad i_5 = 10 - 7.5 = 2.5\text{A}$$

例2

求:  $I_1, I_4, U_4$ 

解

①用分流方法做

$$I_4 = -\frac{1}{2}I_3 = -\frac{1}{4}I_2 = -\frac{1}{8}I_1 = -\frac{1}{8}\frac{12}{R} = -\frac{3}{2R}$$

$$U_4 = -I_4 \times 2R = 3V \quad I_1 = \frac{12}{R}$$

②用分压方法做

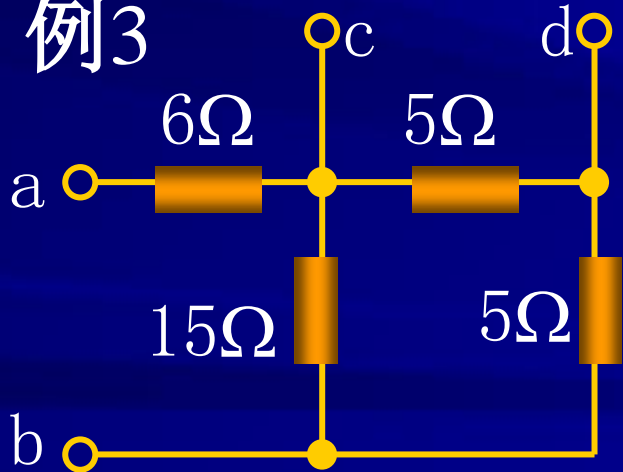
$$U_4 = \frac{U_2}{2} = \frac{1}{4}U_1 = 3V \quad I_4 = -\frac{3}{2R}$$

从以上例题可得求解串、并联电路的一般步骤：

- ① 求出等效电阻或等效电导；
- ② 应用欧姆定律求出总电压或总电流；
- ③ 应用欧姆定律或分压、分流公式求各电阻上的电流和电压

以上的关键在于识别各电阻的串联、并联关系！

例3



求:  $R_{ab}$ ,  $R_{cd}$

$$R_{ab} = (5 + 5) // 15 + 6 = 12\Omega$$

$$R_{cd} = (15 + 5) // 5 = 4\Omega$$

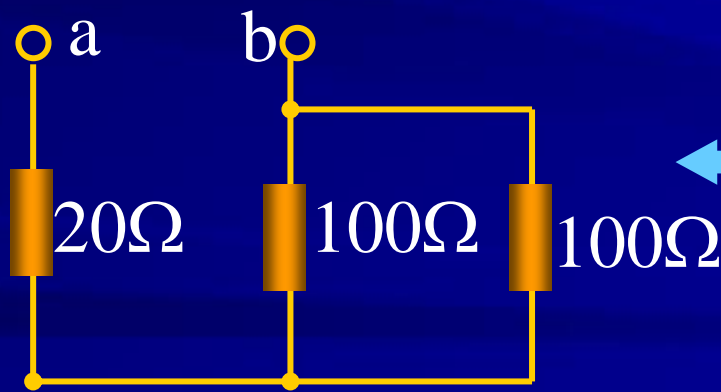
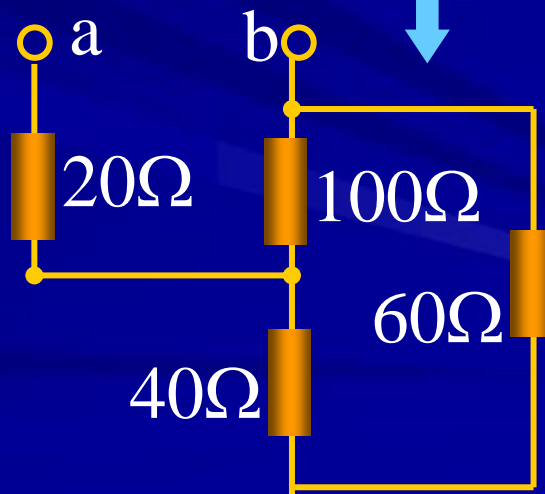
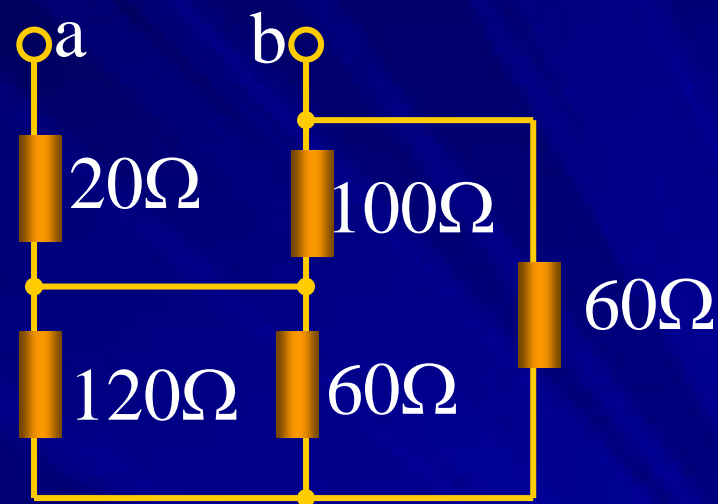
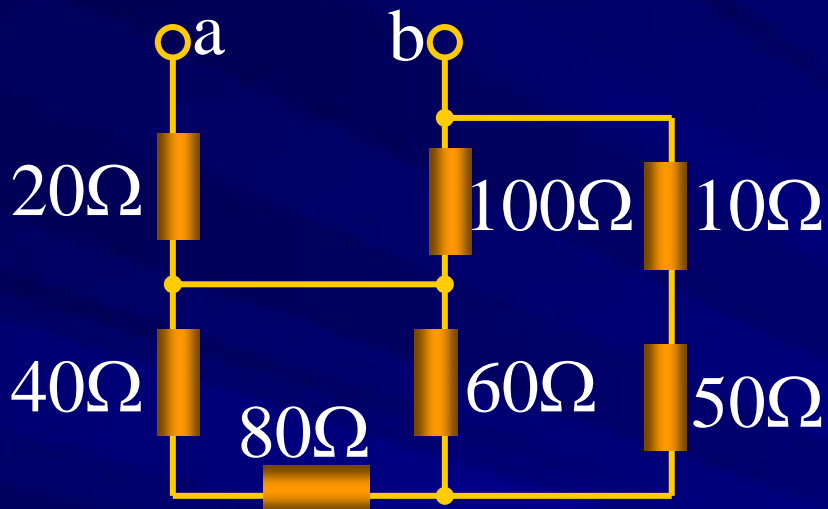


**注意 等效电阻针对端口而言**



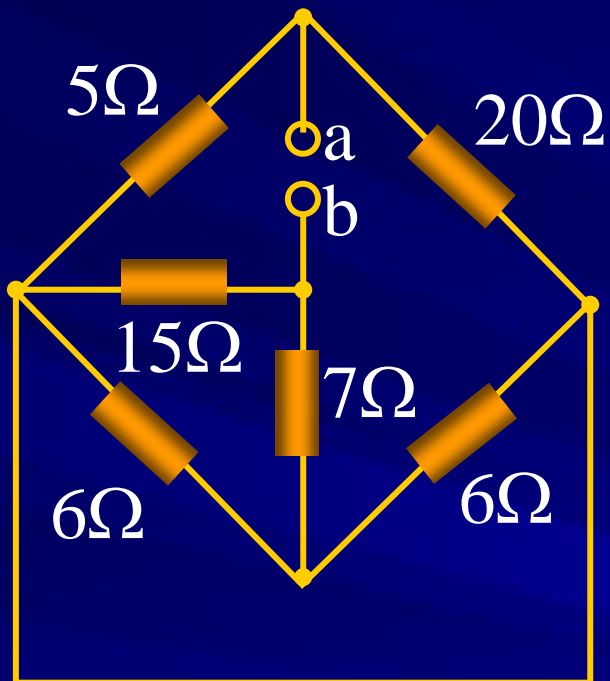
例4 求:  $R_{ab}$

$$R_{ab} = 70\Omega$$

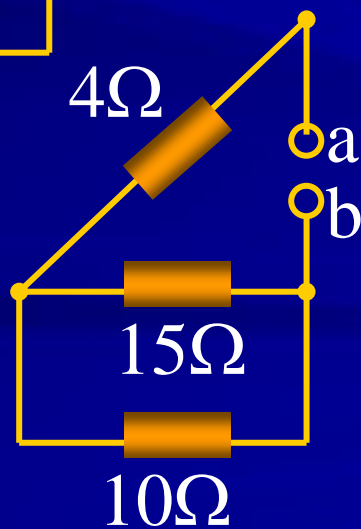
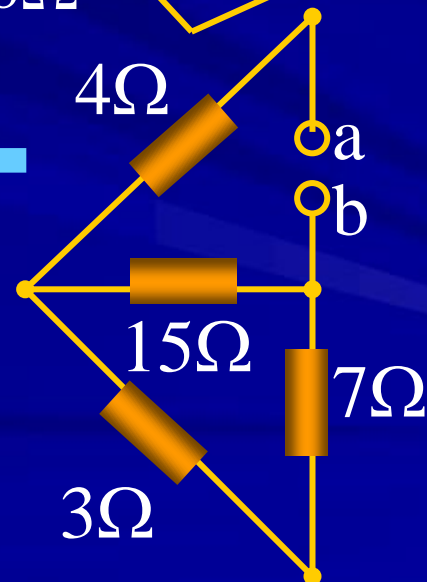
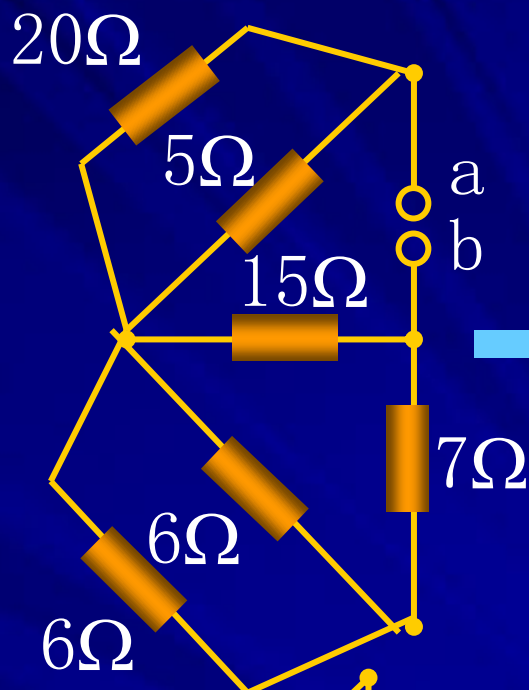




例5 求:  $R_{ab}$



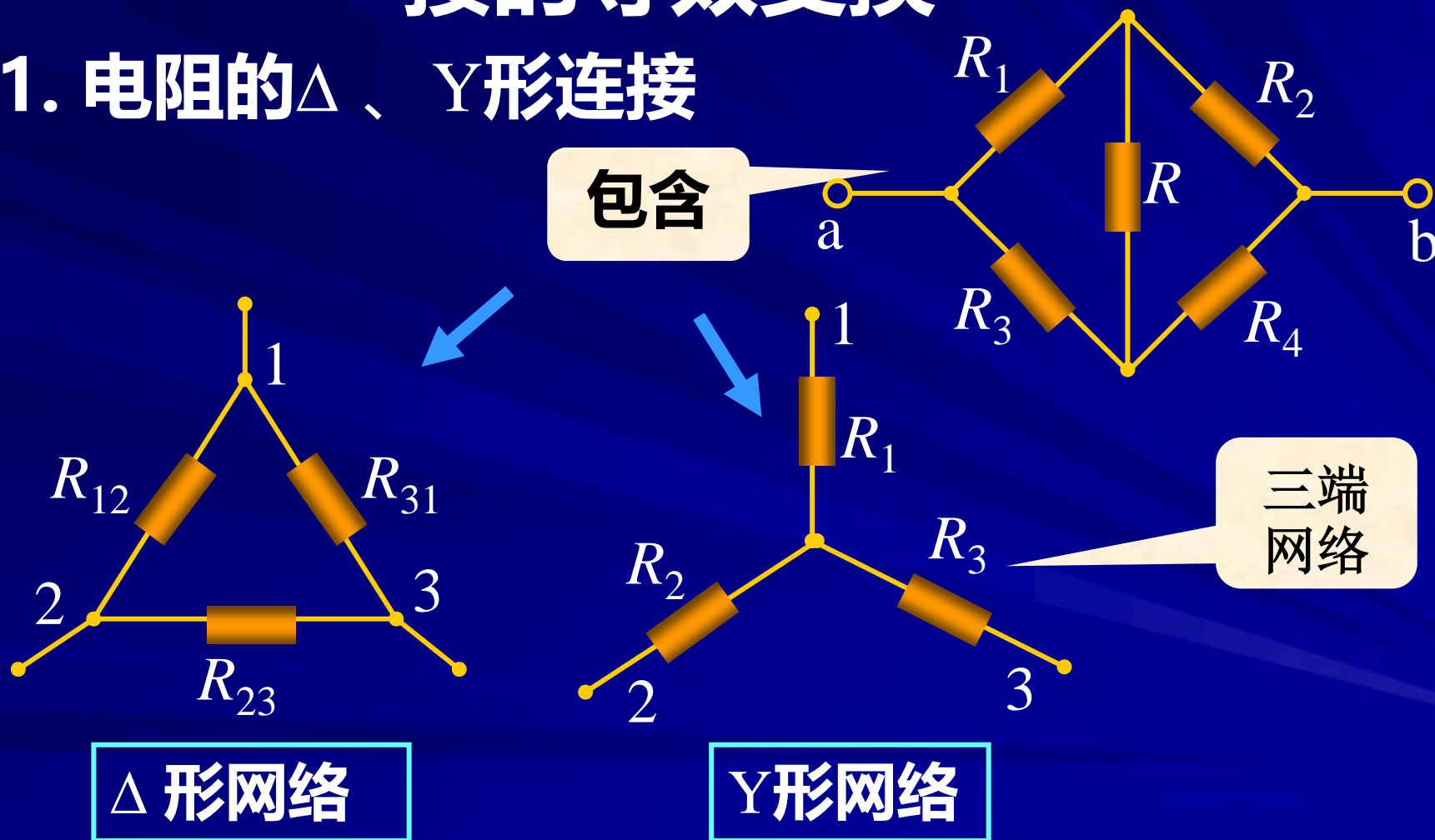
缩短无  
电阻支路

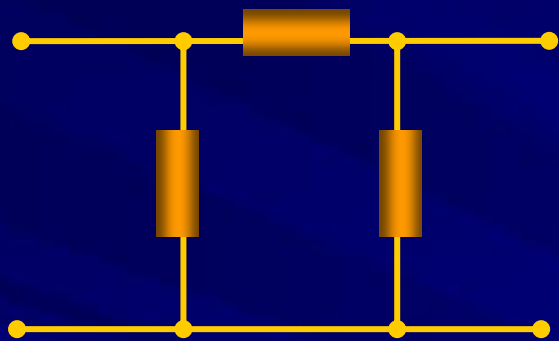
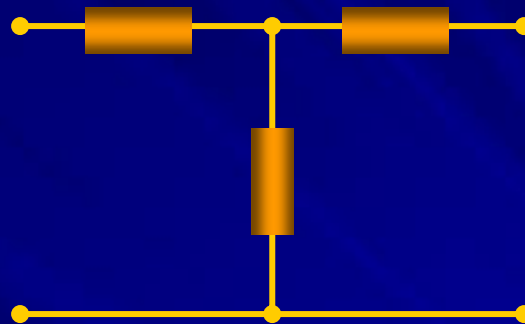


$$R_{ab} = 10\Omega$$

## 2.4 电阻的Y形连接和 $\Delta$ 形连接的等效变换

### 1. 电阻的 $\Delta$ 、Y形连接



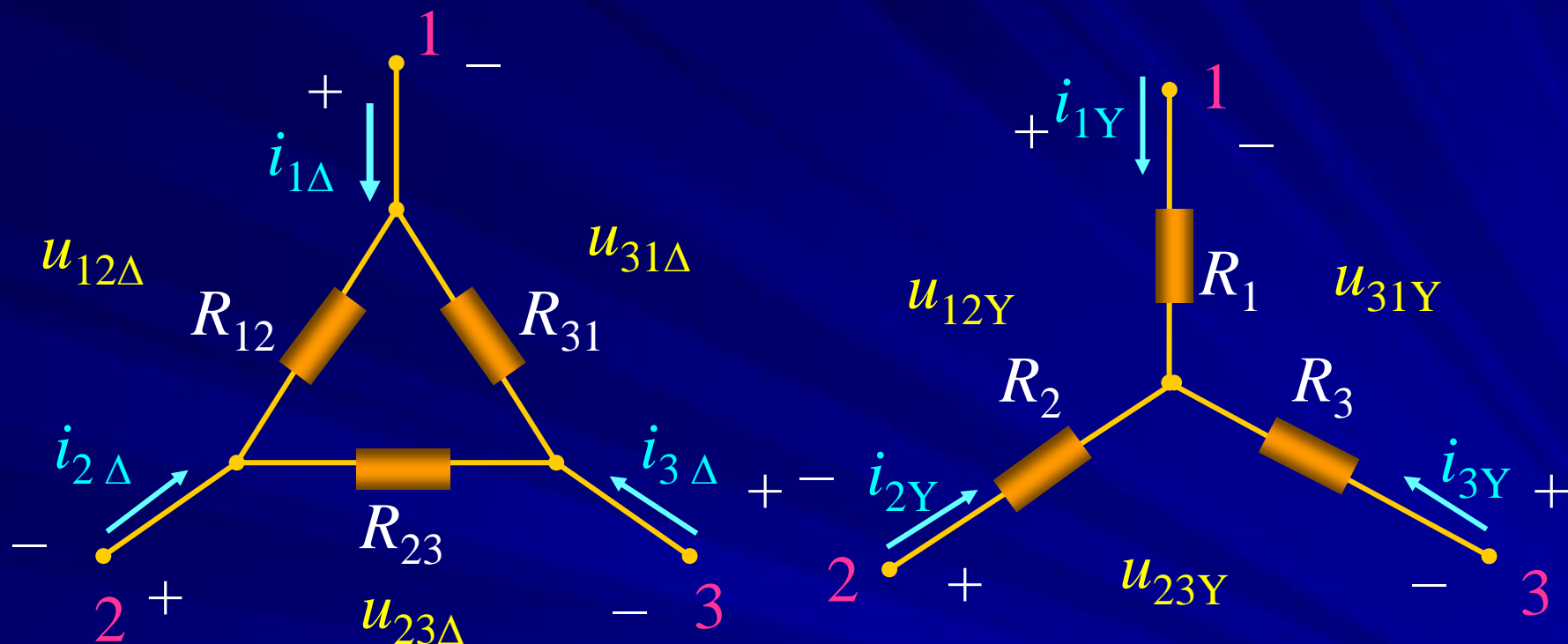
$\Delta$ , Y 网络的变形: $\pi$  型电路 ( $\Delta$  型)

T 型电路 (Y、星型)



**注意** 这两个电路当它们的电阻满足一定的关系时，能够相互等效。

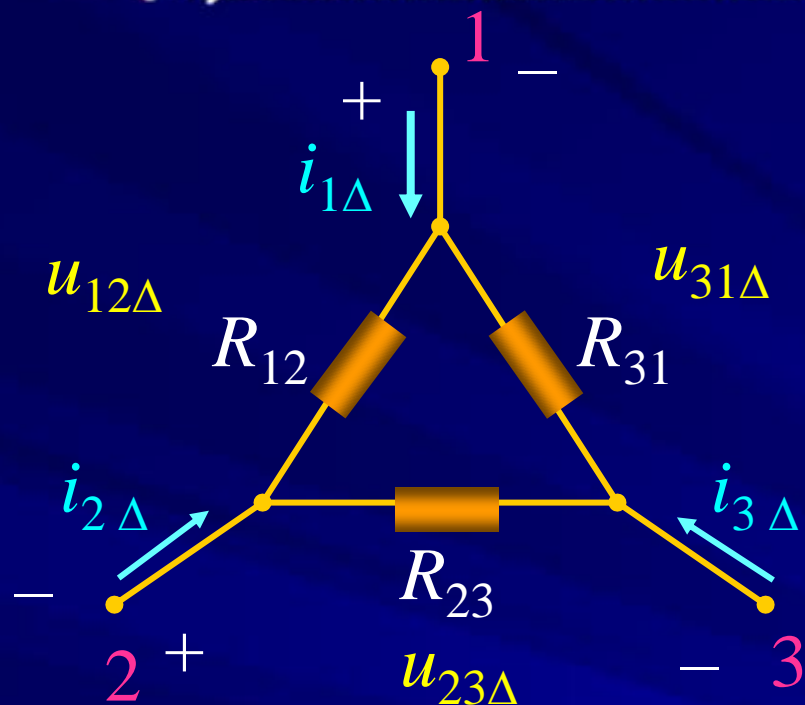
## 2. $\Delta$ —Y 变换的等效条件



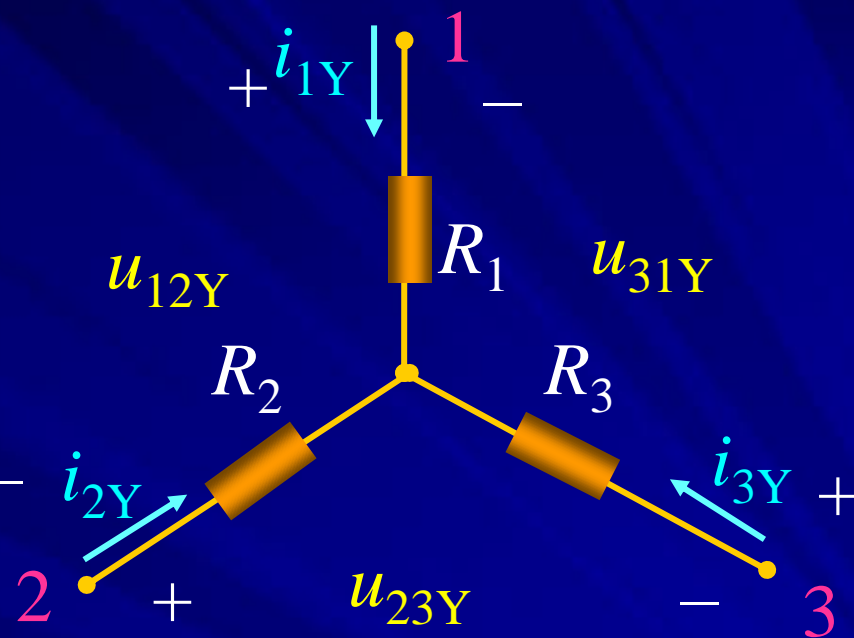
**等效条件:**

$$i_{1\Delta} = i_{1Y}, \quad i_{2\Delta} = i_{2Y}, \quad i_{3\Delta} = i_{3Y},$$

$$u_{12\Delta} = u_{12Y}, \quad u_{23\Delta} = u_{23Y}, \quad u_{31\Delta} = u_{31Y}$$



+



**$\Delta$ 接: 用电压表示电流**

$$\left. \begin{aligned} i_{1\Delta} &= u_{12\Delta}/R_{12} - u_{31\Delta}/R_{31} \\ i_{2\Delta} &= u_{23\Delta}/R_{23} - u_{12\Delta}/R_{12} \\ i_{3\Delta} &= u_{31\Delta}/R_{31} - u_{23\Delta}/R_{23} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

**$Y$ 接: 用电流表示电压**

$$\left. \begin{aligned} u_{12Y} &= R_1 i_{1Y} - R_2 i_{2Y} \\ u_{23Y} &= R_2 i_{2Y} - R_3 i_{3Y} \\ u_{31Y} &= R_3 i_{3Y} - R_1 i_{1Y} \\ i_{1Y} + i_{2Y} + i_{3Y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由式(2)解得:

$$\left. \begin{aligned} i_{1Y} &= \frac{u_{12Y}R_3 - u_{31Y}R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ i_{2Y} &= \frac{u_{23Y}R_1 - u_{12Y}R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \\ i_{3Y} &= \frac{u_{31Y}R_2 - u_{23Y}R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \end{aligned} \right\} (3)$$
$$\left. \begin{aligned} i_{1\Delta} &= u_{12\Delta}/R_{12} - u_{31\Delta}/R_{31} \\ i_{2\Delta} &= u_{23\Delta}/R_{23} - u_{12\Delta}/R_{12} \\ i_{3\Delta} &= u_{31\Delta}/R_{31} - u_{23\Delta}/R_{23} \end{aligned} \right\} (1)$$

根据等效条件, 比较式(3)与式(1), 得  
Y→Δ的变换条件:



$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \end{aligned} \right\} \text{或} \left\{ \begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{23} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ G_{31} &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \end{aligned} \right.$$

类似可得到由 $\Delta \rightarrow Y$ 的变换条件:

$$\left\{ \begin{aligned} G_1 &= G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12} G_{31}}{G_{23}} \\ G_2 &= G_{23} + G_{12} + \frac{G_{23} G_{12}}{G_{31}} \\ G_3 &= G_{31} + G_{23} + \frac{G_{31} G_{23}}{G_{12}} \end{aligned} \right\} \text{或} \left\{ \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned} \right.$$



简记方法:

$$R_Y = \frac{\Delta \text{相邻电阻乘积}}{\sum R_{\Delta}}$$

$\Delta$ 变Y

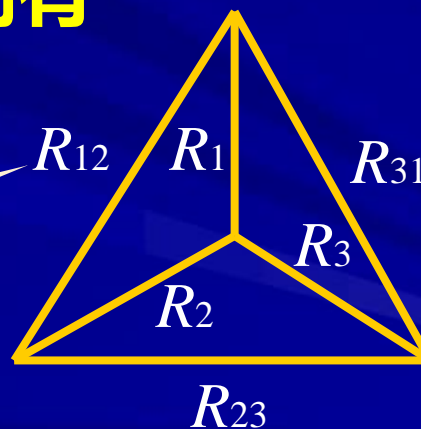
$$G_{\Delta} = \frac{Y \text{相邻电导乘积}}{\sum G_Y}$$

Y变 $\Delta$

特例: 若三个电阻相等(对称), 则有

$$R_{\Delta} = 3R_Y$$

外大内小

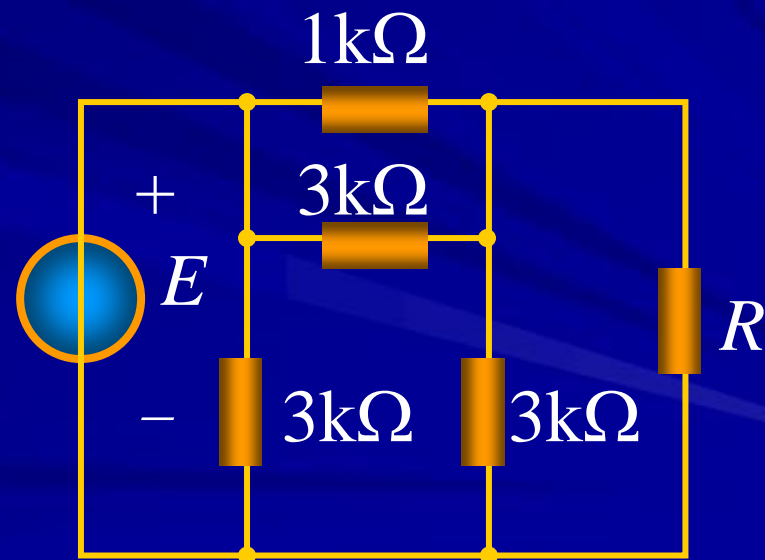
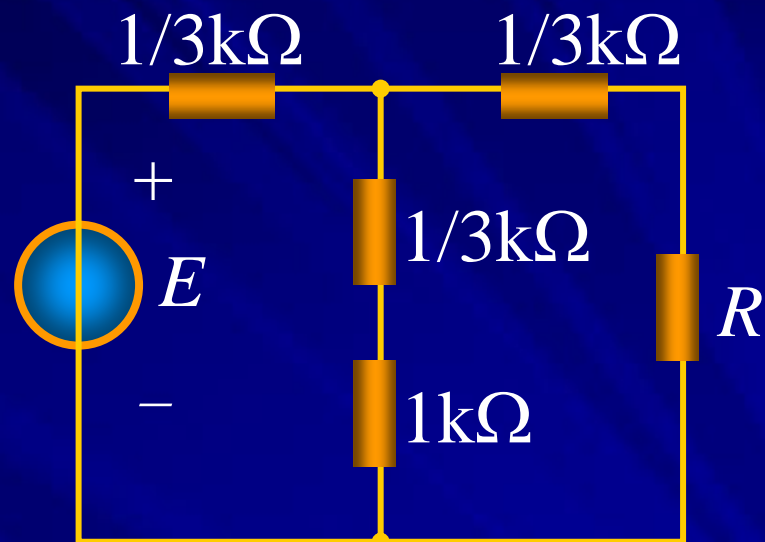
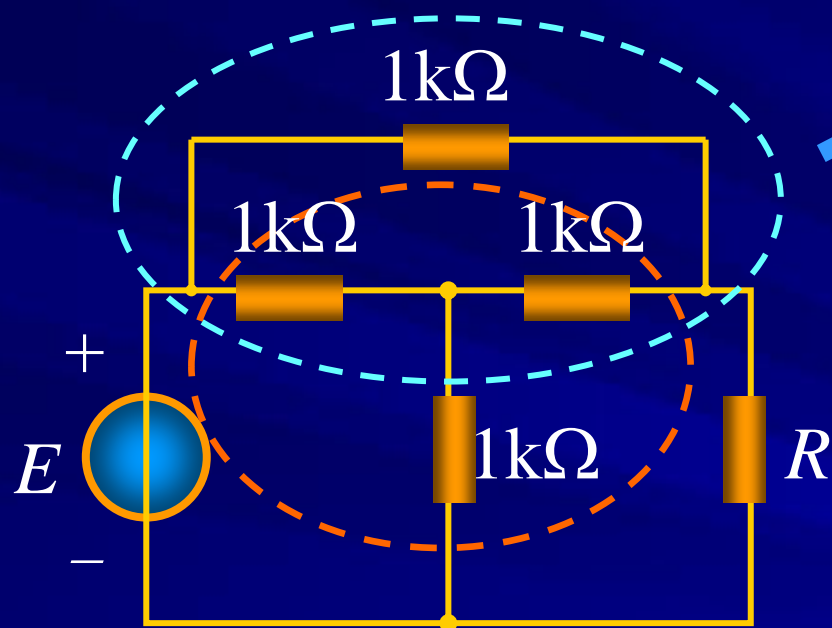


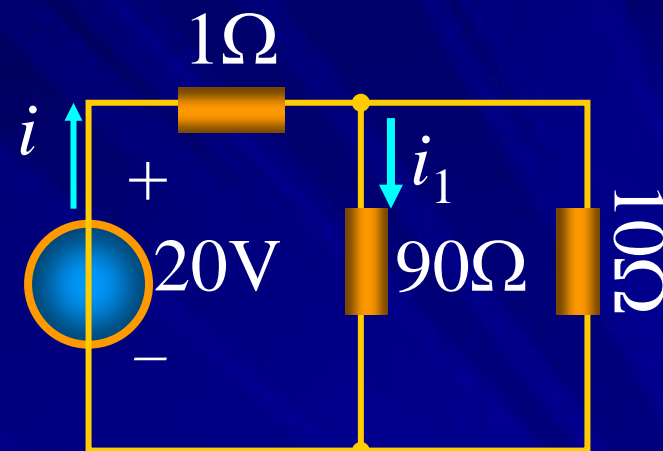


## 注意

- ①等效对外部(端钮以外)有效，对内不成立。
- ②等效电路与外部电路无关。
- ③用于简化电路

## 例1 桥 T 电路

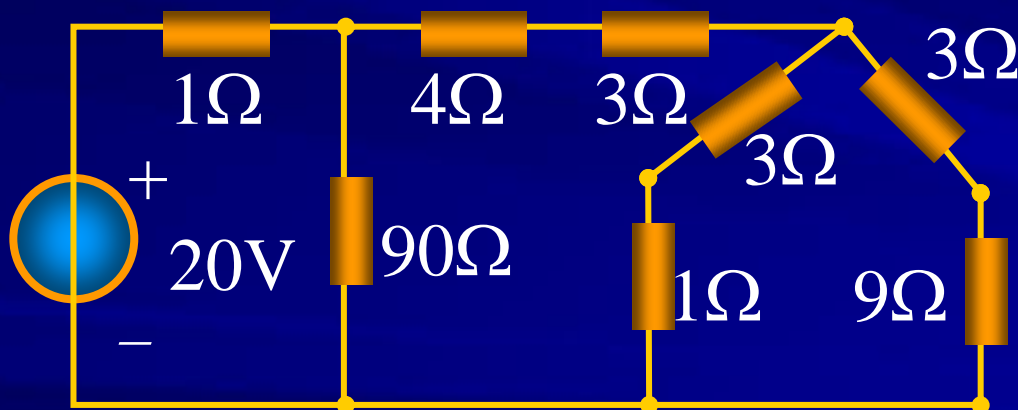


例2 计算 $90\Omega$ 电阻吸收的功率

$$R_{eq} = 1 + \frac{10 \times 90}{10 + 90} = 10\Omega$$

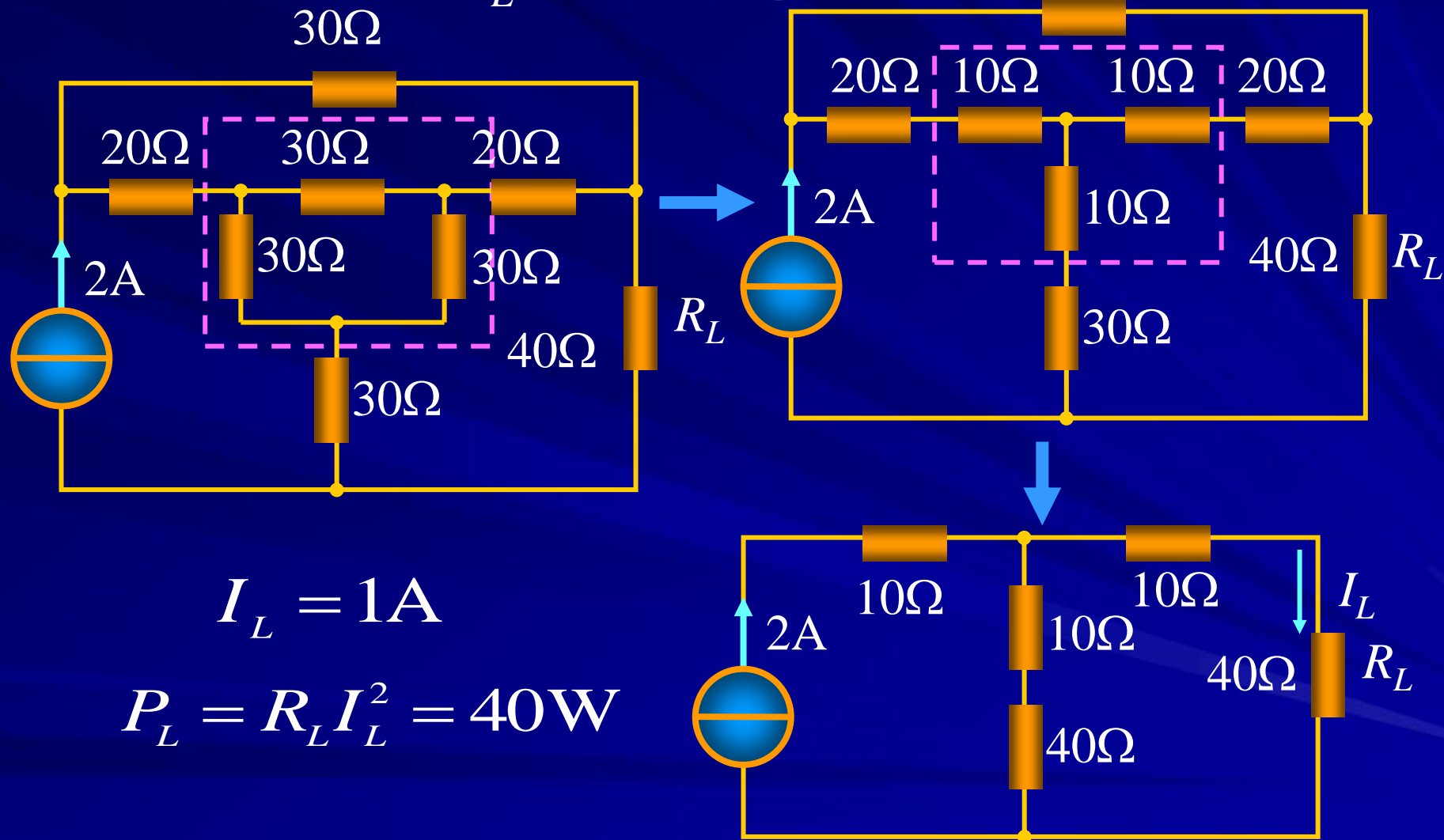
$$i = 20 / 10 = 2A$$

$$i_1 = \frac{10 \times 2}{10 + 90} = 0.2A$$



$$P = 90i_1^2 = 90 \times (0.2)^2 = 3.6W$$

### 例3 求负载电阻 $R_L$ 消耗的功率



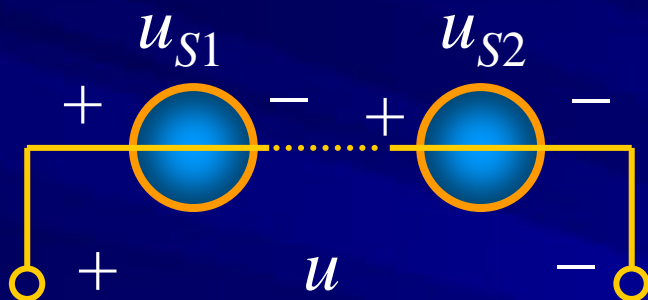
## 2.5 电压源、电流源的串联和并联

### 1. 理想电压源的串联和并联

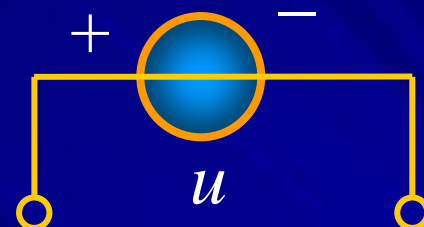
注意参考方向

① 串联

$$u = u_{s1} + u_{s2} = \sum u_{sk}$$



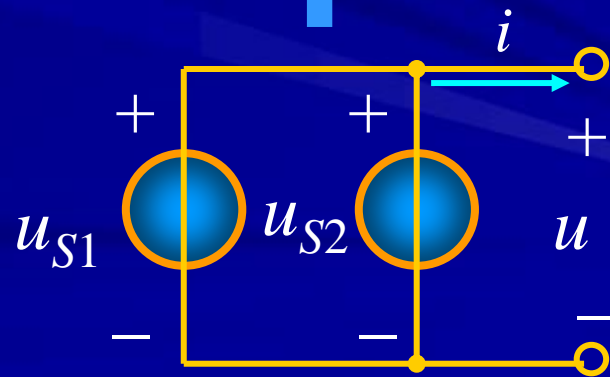
等效电路



② 并联

$$u = u_{s1} = u_{s2}$$

等效电路

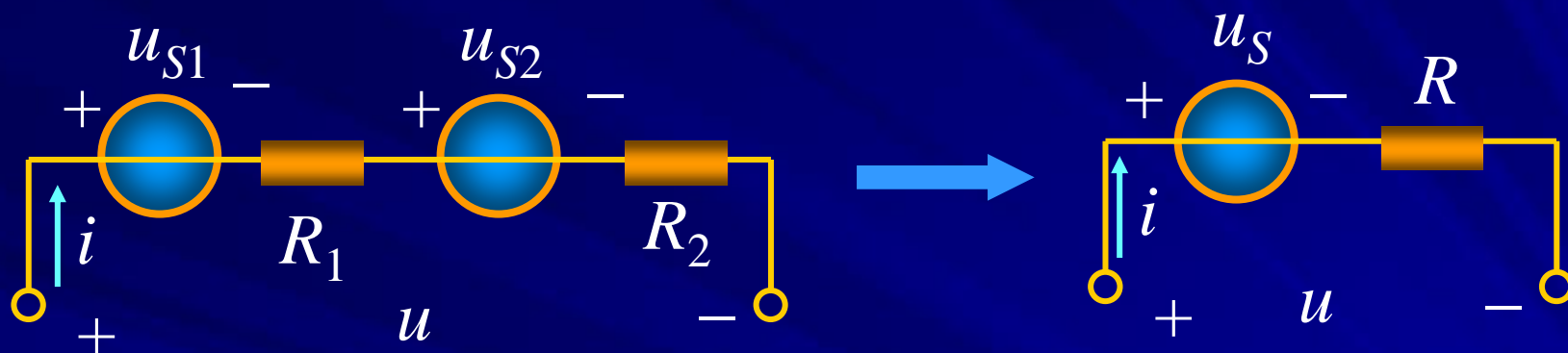


注意

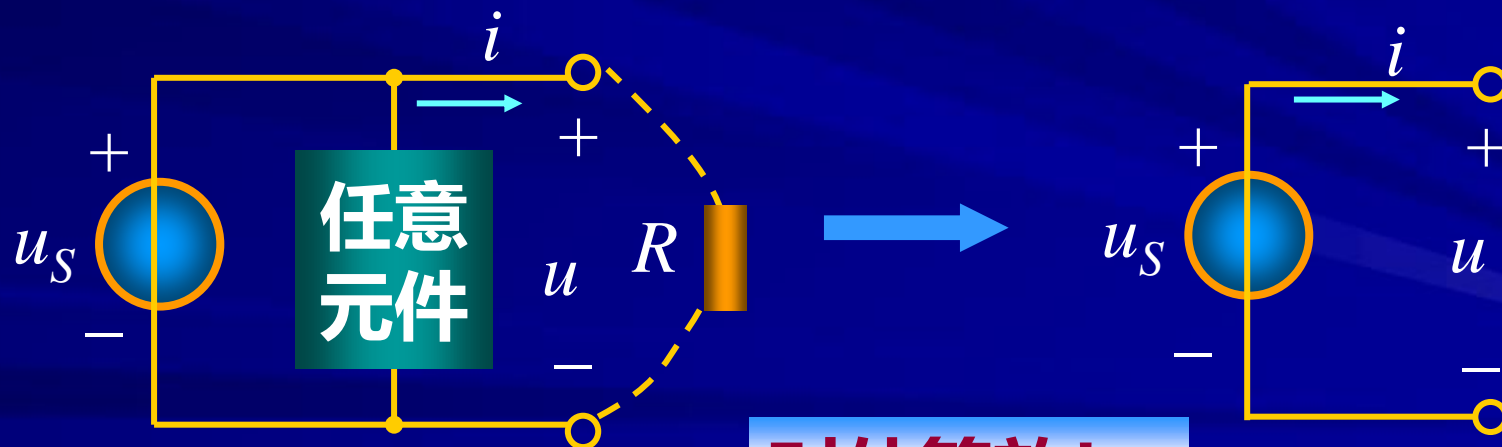
相同电压源才能并联,  
电源中的电流不确定。



### ③电压源与支路的串、并联等效



$$u = u_{s1} + R_1 i + u_{s2} + R_2 i = (u_{s1} + u_{s2}) + (R_1 + R_2) i = u_S + R i$$



**对外等效!**

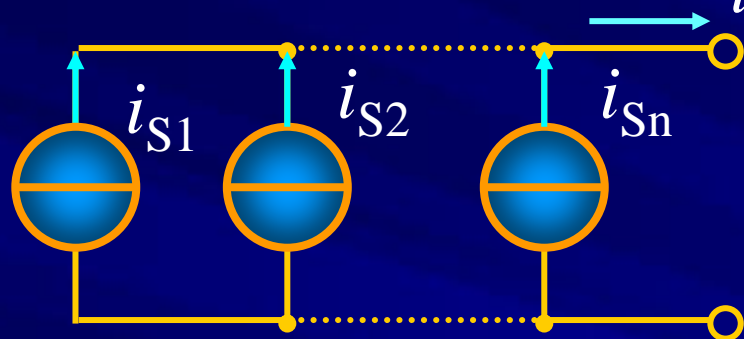


## 2. 理想电流源的串联并联

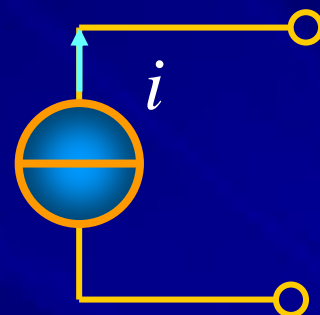
注意参考方向

### ① 并联

$$i = i_{s1} + i_{s2} + \cdots + i_{sn} = \sum i_{sk}$$



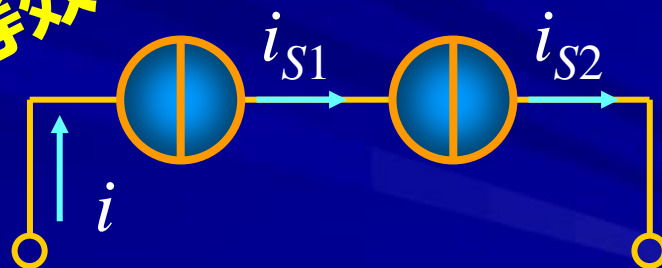
等效电路



### ② 串联

$$i = i_{s1} = i_{s2}$$

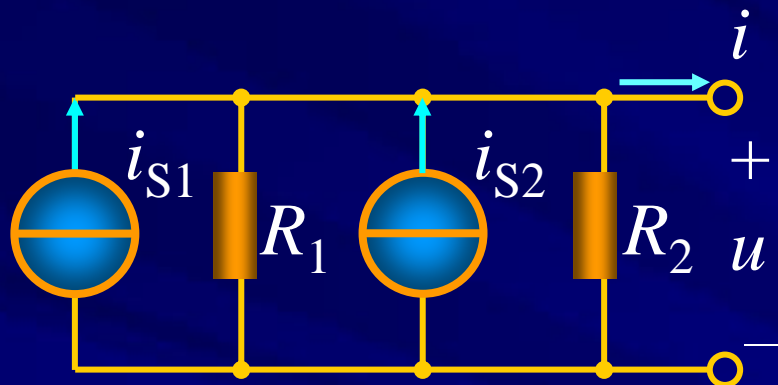
等效电路



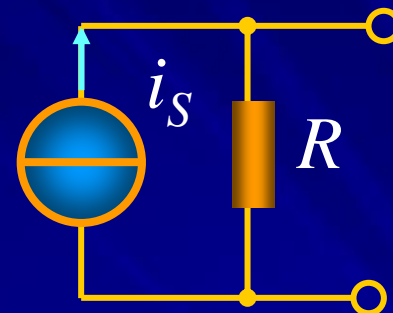
注意

相同的理想电流源才能串联, 每个电流源的端电压不能确定。

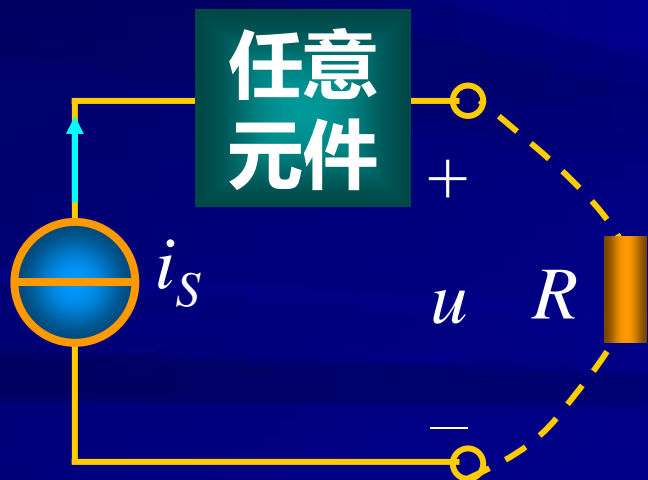
### 3. 电流源与支路的串、并联等效



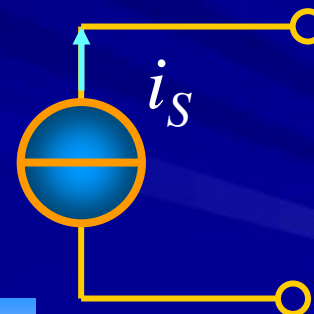
等效电路



$$i = i_{s1} - u/R_1 + i_{s2} - u/R_2 = i_{s1} + i_{s2} - (1/R_1 + 1/R_2)u = i_s - u/R$$



等效电路

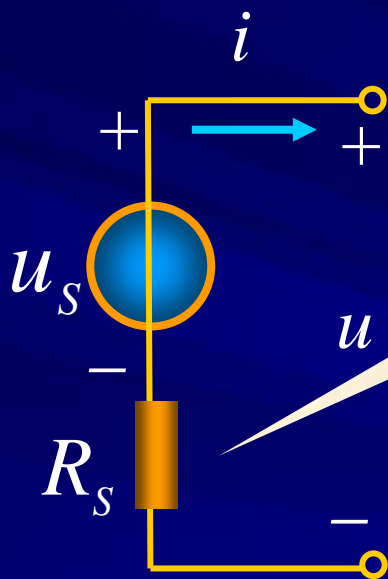


对外等效!

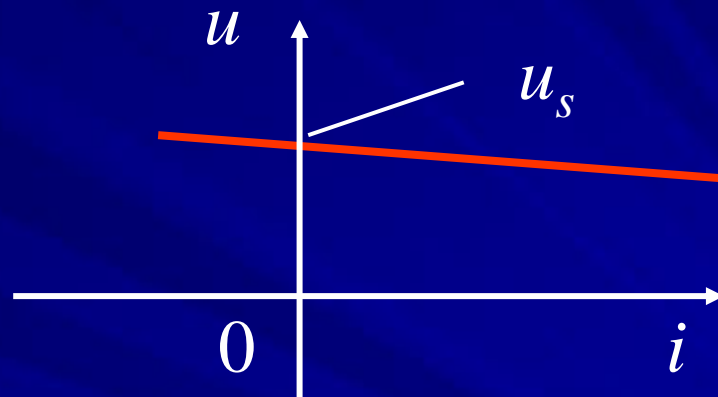
## 2.6 实际电源的两种模型及其等效变换

### 1. 实际电压源

伏安特性:  $u = u_s - R_s i$



考虑内阻



一个好的电压源要求  $R_s \rightarrow 0$

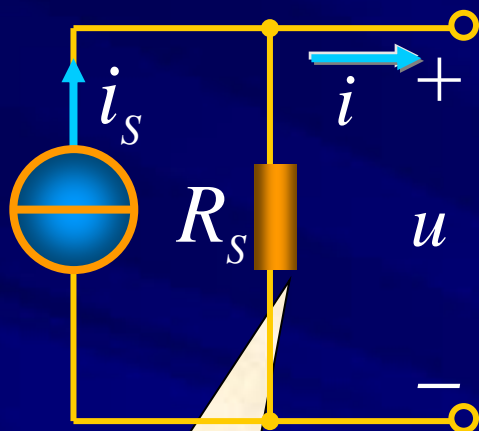


注意

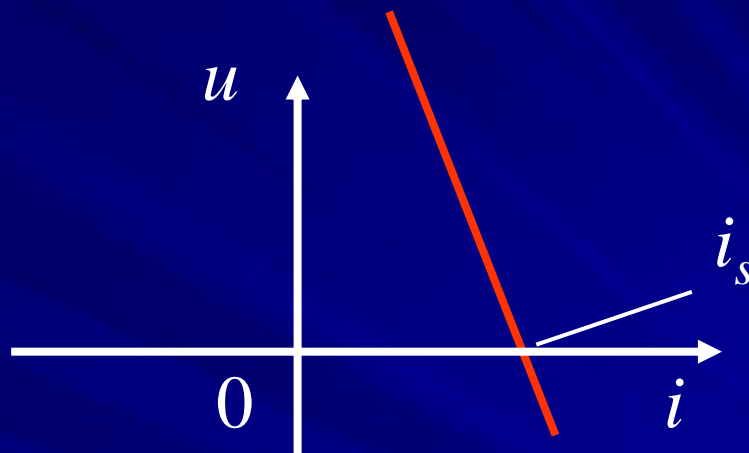
实际电压源也不允许短路。因其内阻小，若短路，电流很大，可能烧毁电源。

## 2. 实际电流源

伏安特性:  $i = i_s - \frac{u}{R_s}$



考虑内阻



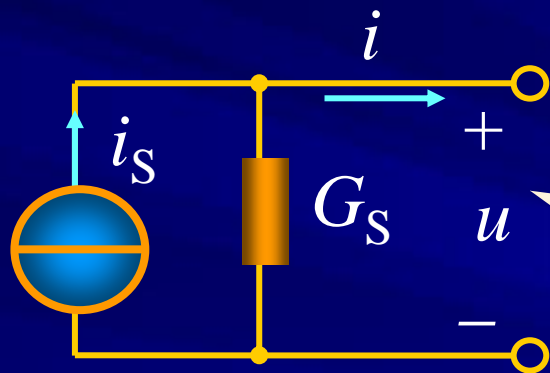
一个好的电流源要求  $R_s \rightarrow \infty$



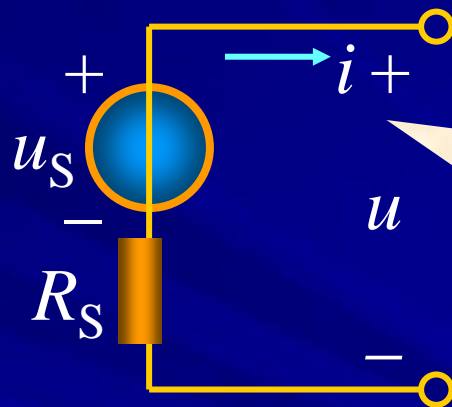
实际电流源也不允许开路。因其内阻大，若开路，电压很高，可能烧毁电源。

### 3.电压源和电流源的等效变换

实际电压源、实际电流源两种模型可以进行等效变换，所谓的等效是指端口的电压、电流在转换过程中保持不变。



实际  
电流  
源



实际  
电压  
源

端口特性  $i = i_S - G_S u$

$$\begin{aligned} i_S &= u_S / R_S \\ G_S &= 1 / R_S \end{aligned}$$

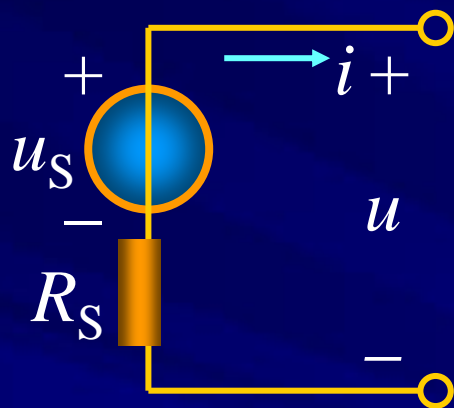
$$u = u_S - R_S i$$

$$i = u_S / R_S - u / R_S$$

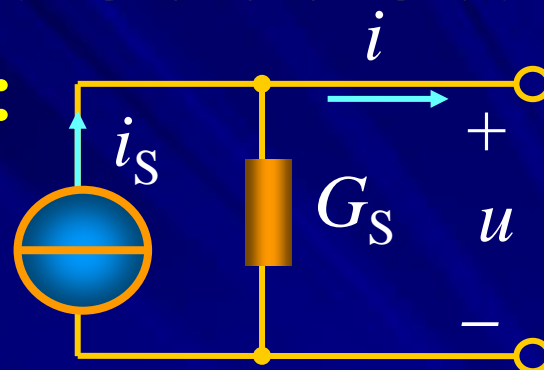
比较可得等效条件



## 小结 电压源变换为电流源:

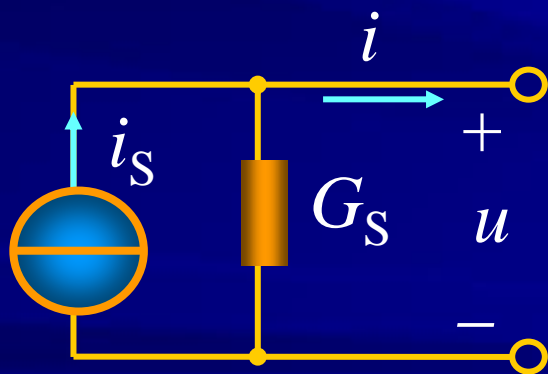


转换

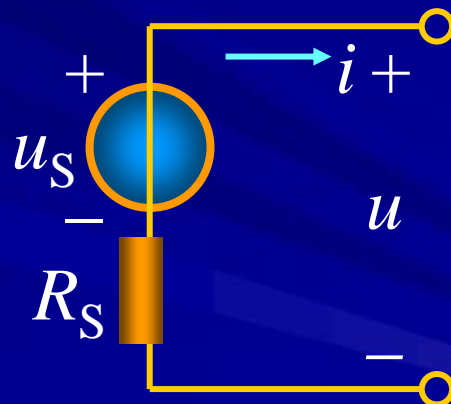


$$i_s = u_s / R_s, \quad G_s = 1 / R_s$$

## 电流源变换为电压源:



转换



$$u_s = i_s / G_s, \quad R_s = 1 / G_s$$



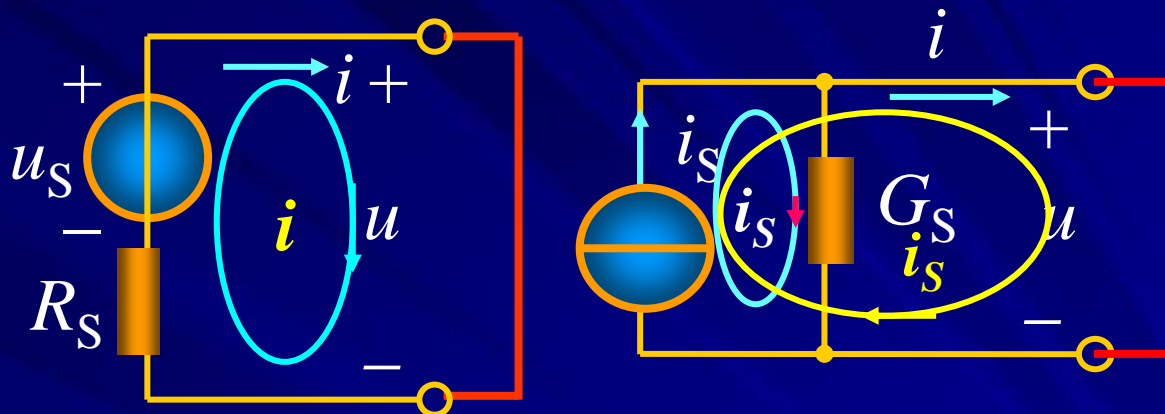


注意

## ①变换关系

数值关系

方向：电流源电流方向与电压源电压方向相反。



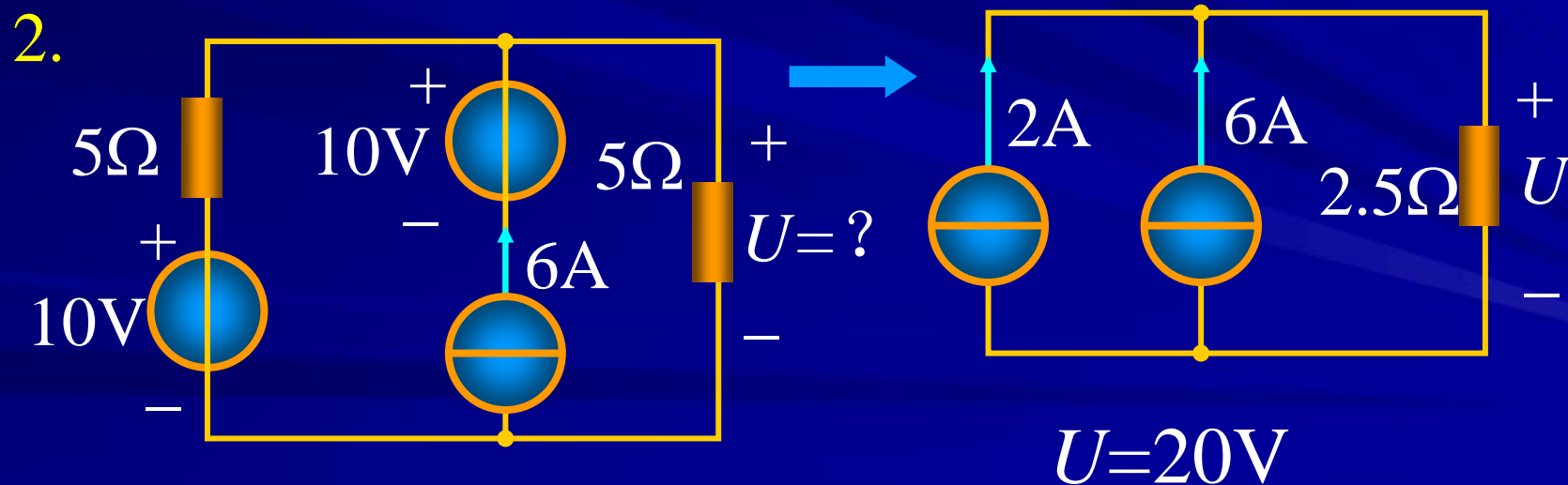
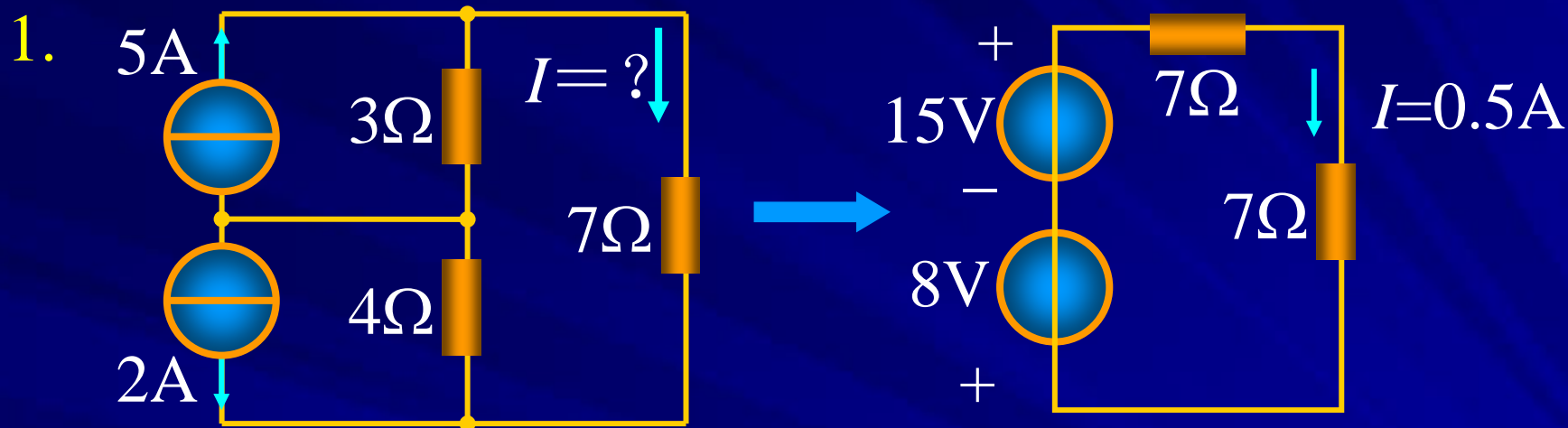
②等效是对外部电路等效，对内部电路是不等效的。

表现在

- 电压源开路， $R_S$ 上无电流流过
- 电流源开路， $G_S$ 上有电流流过。
- 电压源短路， $R_S$ 上有电流；
- 电流源短路， $G_S$ 上无电流。

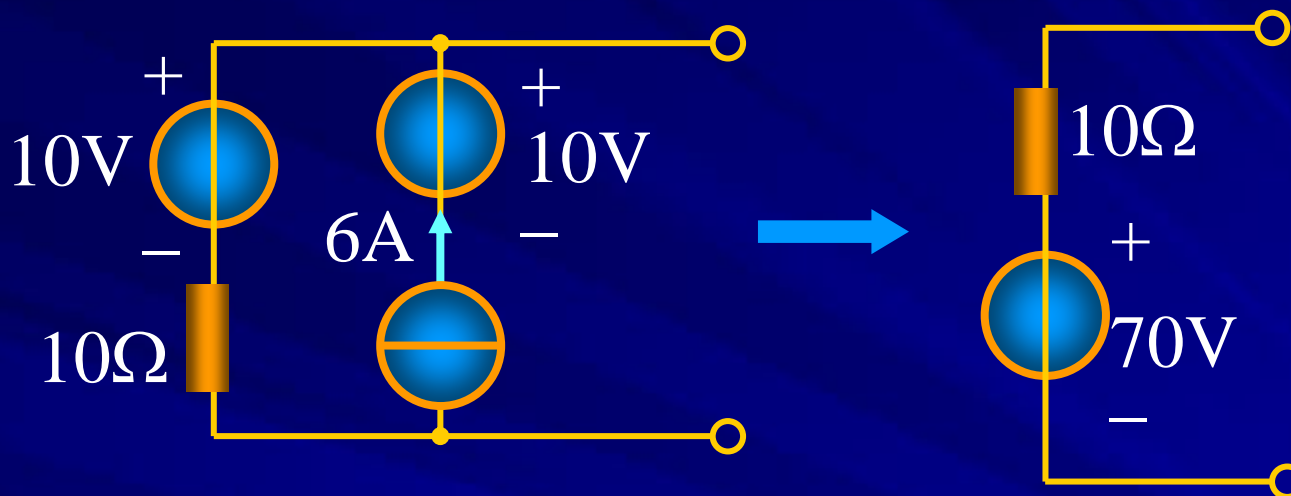
③理想电压源与理想电流源不能相互转换。

# 例1 利用电源转换简化电路计算

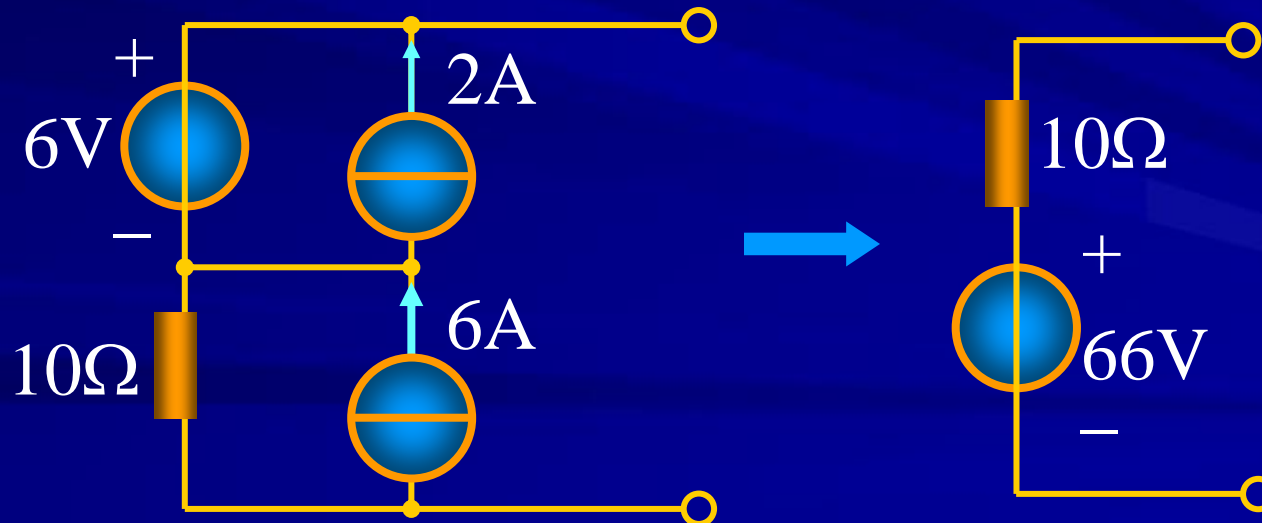


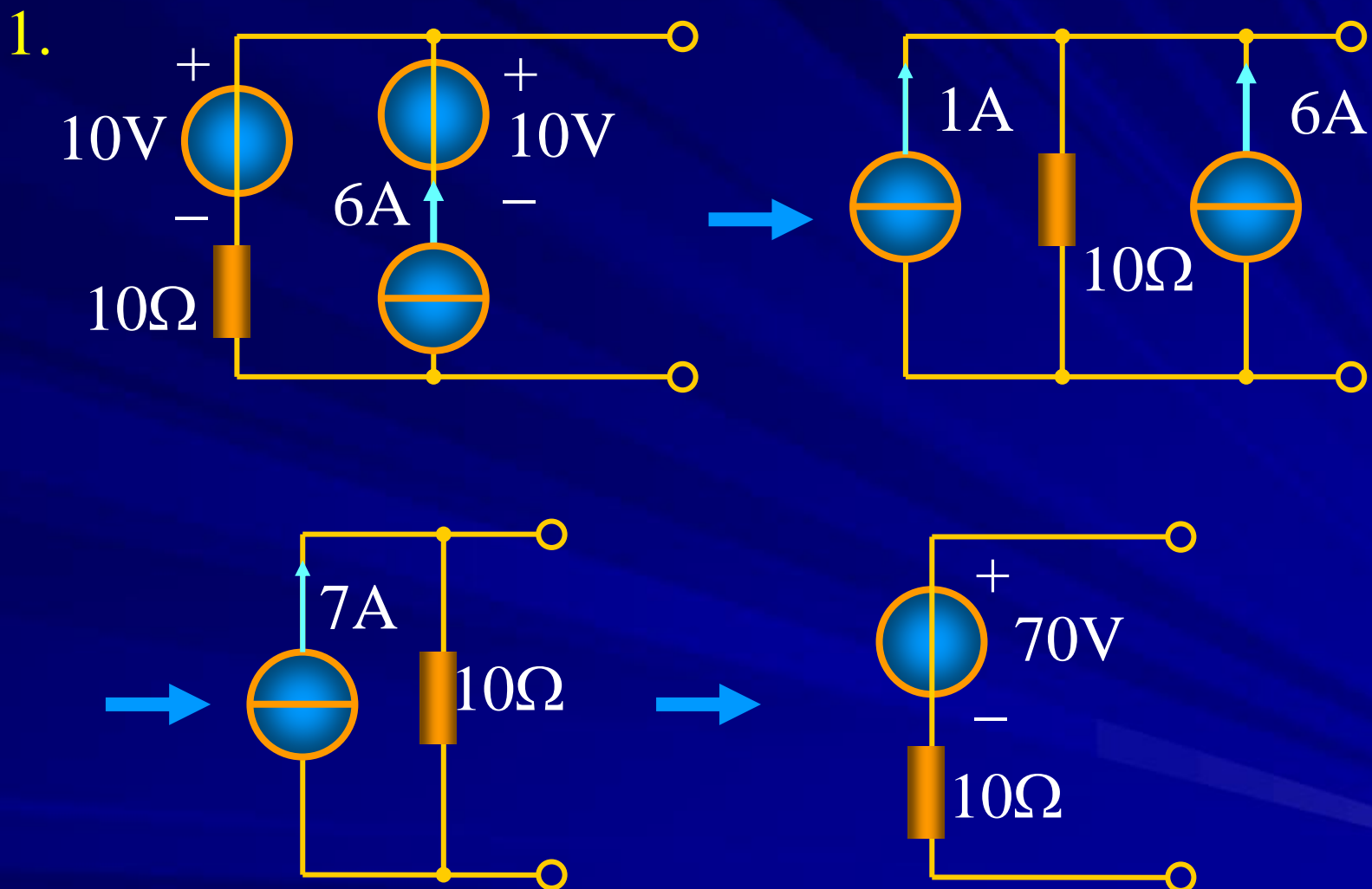
## 例2 把电路转换成一个电压源和一个电阻的串连

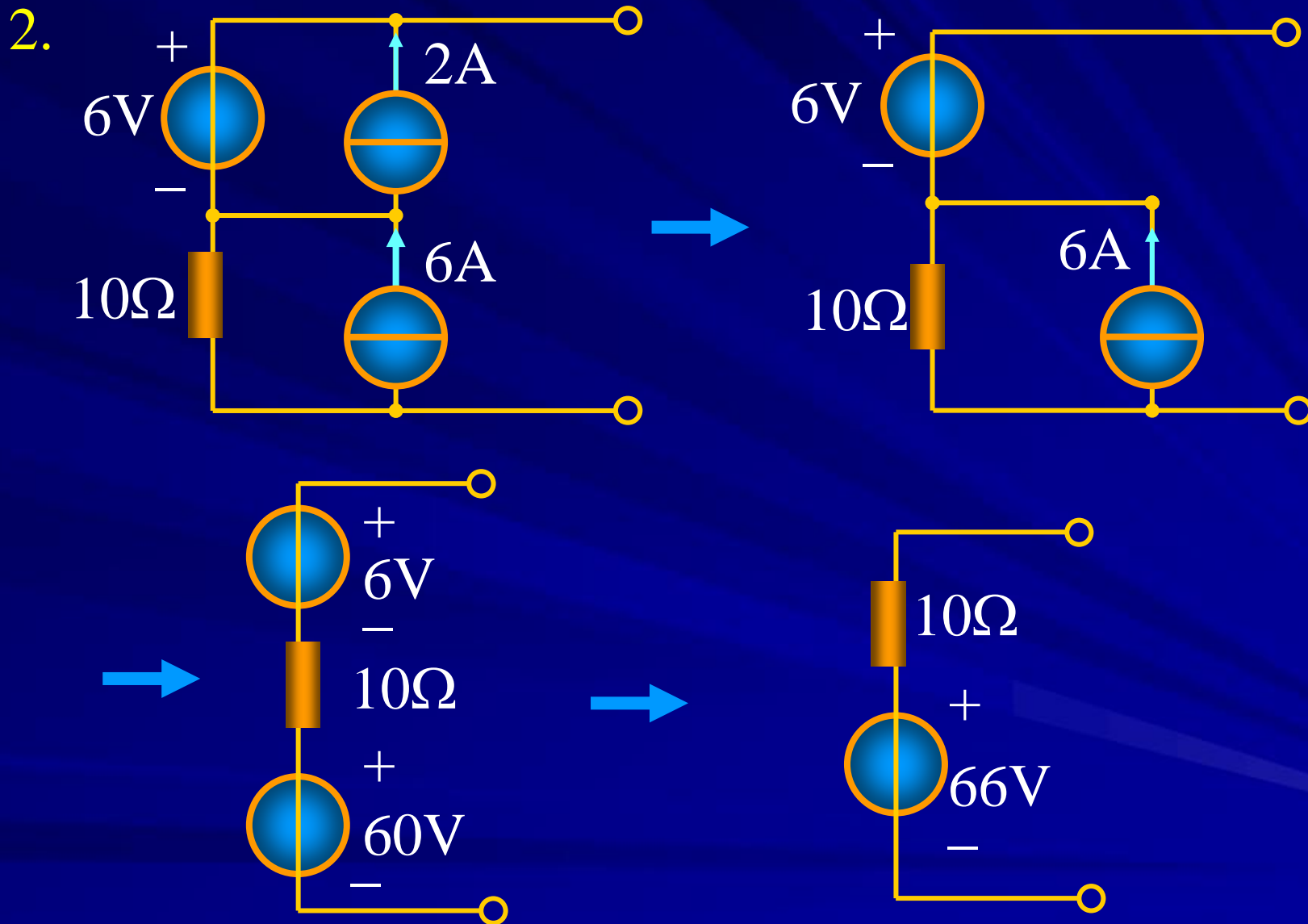
1.

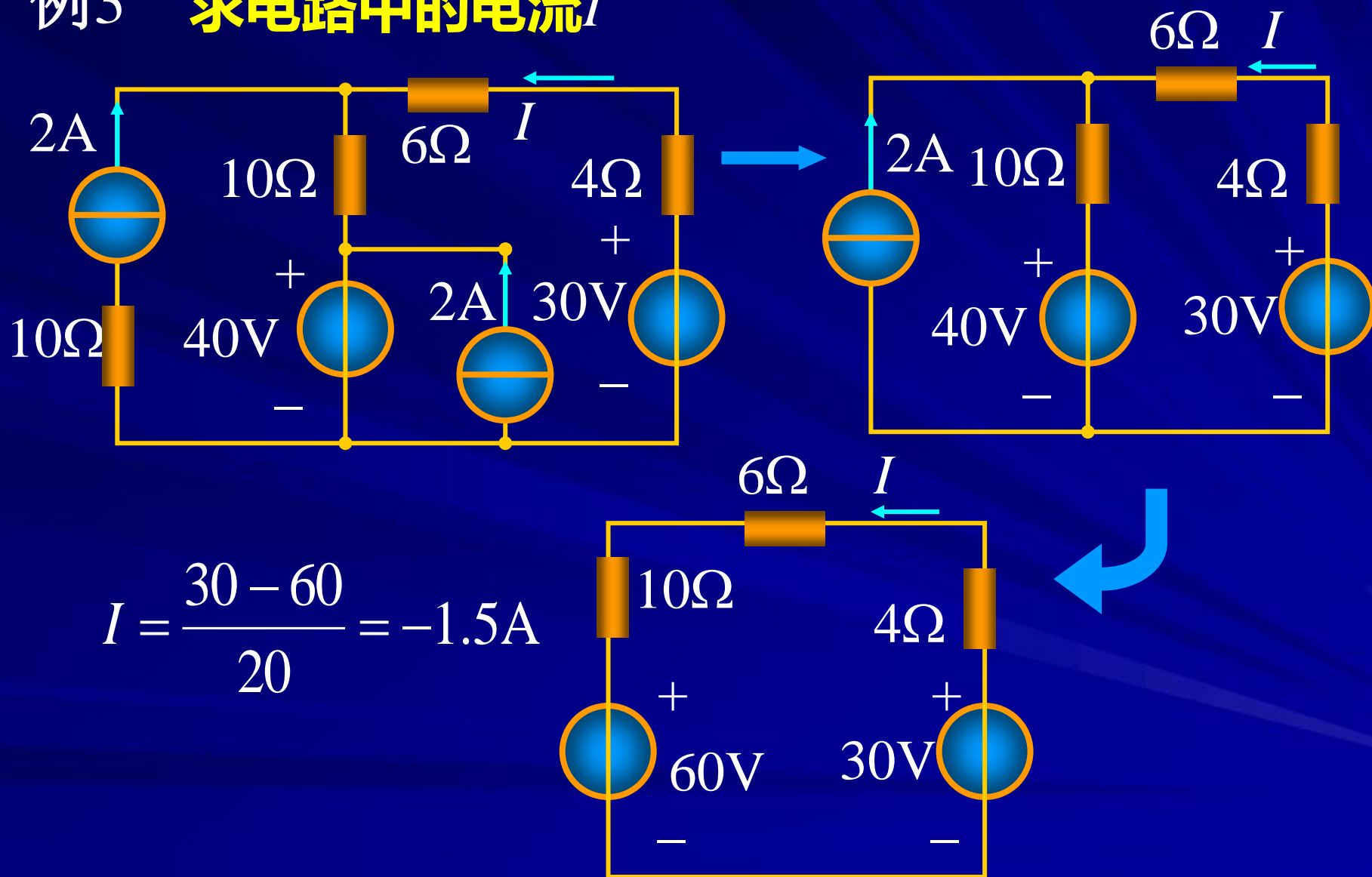


2.







例3 求电路中的电流 $I$ 




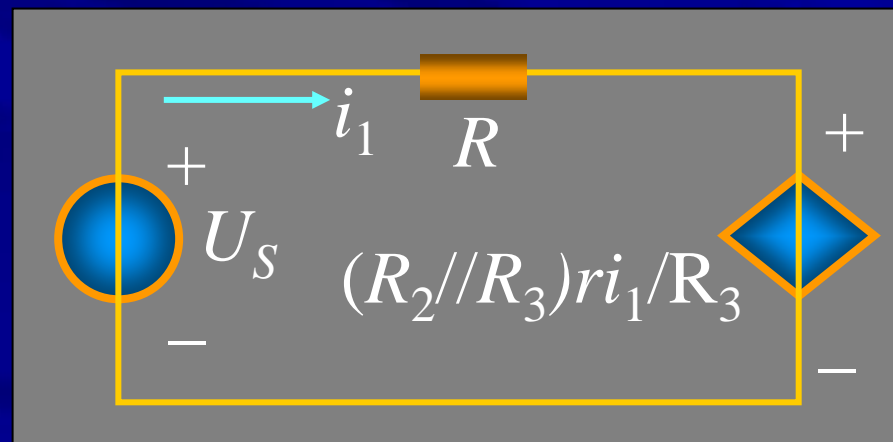
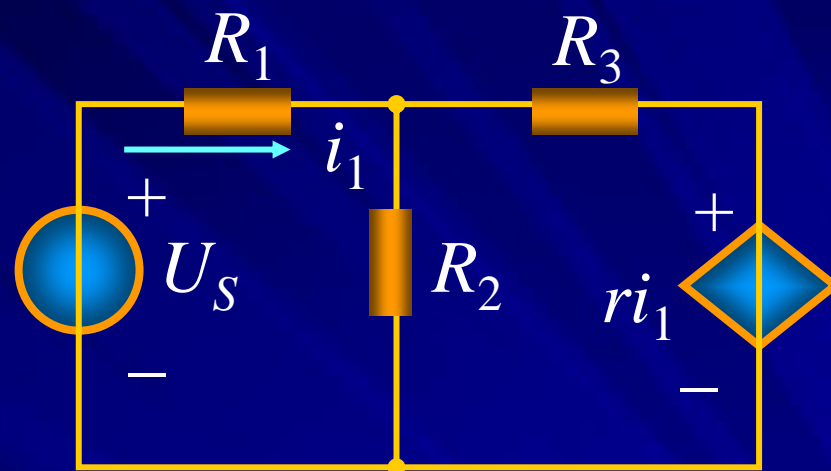
例4 求电流  $i_1$ 

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

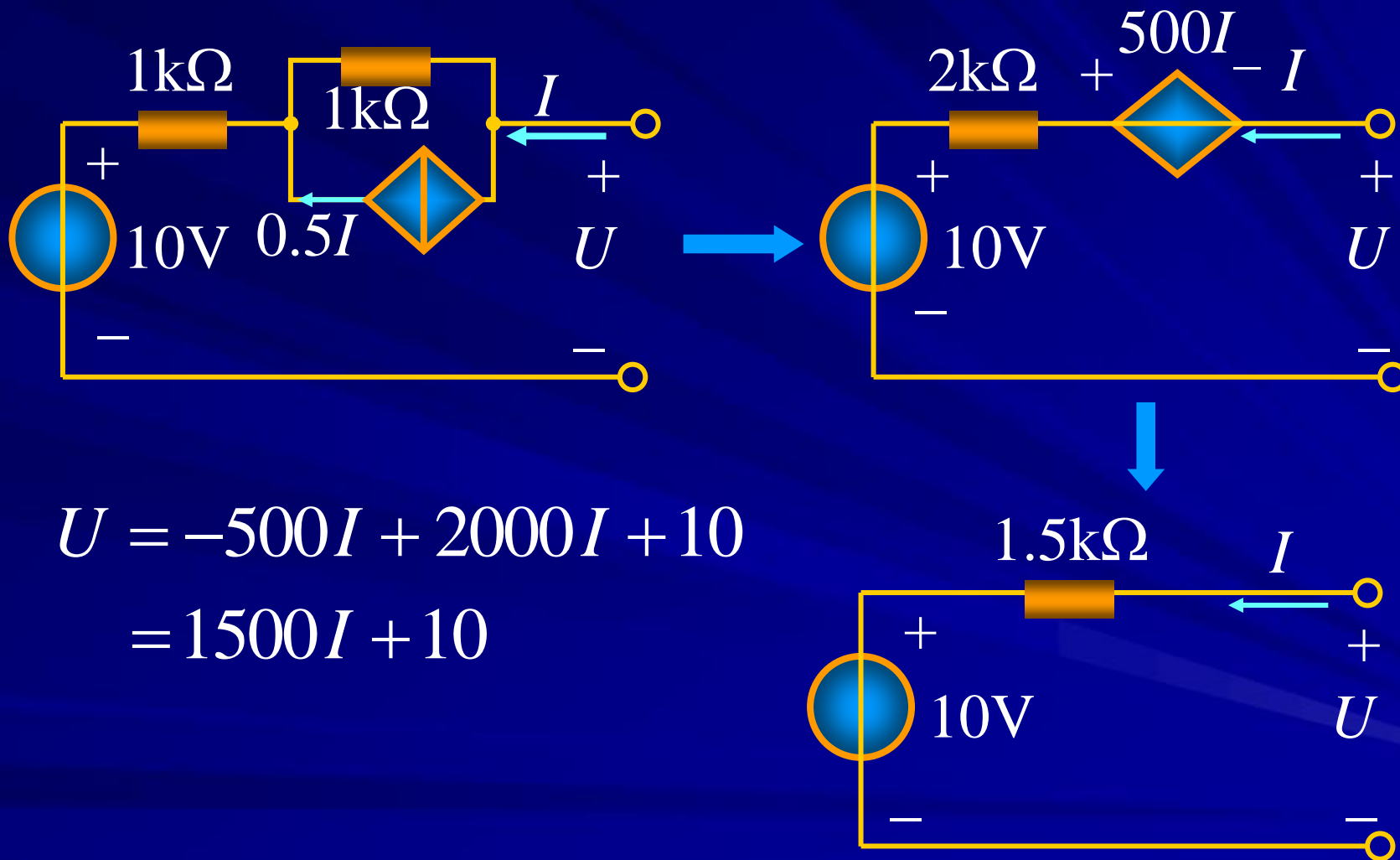
$$Ri_1 + (R_2 // R_3)ri_1 / R_3 = U_s$$

$$i_1 = \frac{U_s}{R + (R_2 // R_3)r / R_3}$$

 **注意** 受控源和独立源一样可以进行电源转换；转换过程中注意不要丢失控制量。



# 例5 把电路转换成一个电压源和一个电阻的串连



$$\begin{aligned} U &= -500I + 2000I + 10 \\ &= 1500I + 10 \end{aligned}$$

$$U_s = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$$

A

6

B

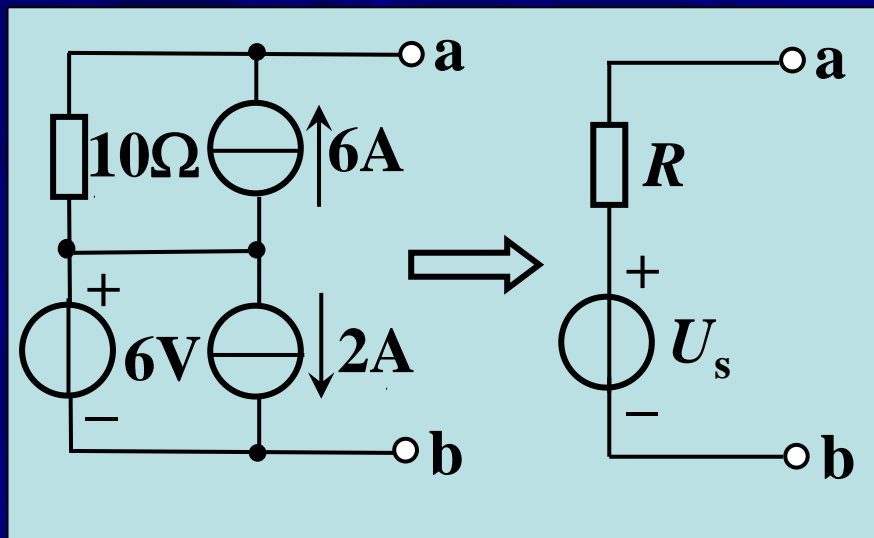
60

C

-60

D

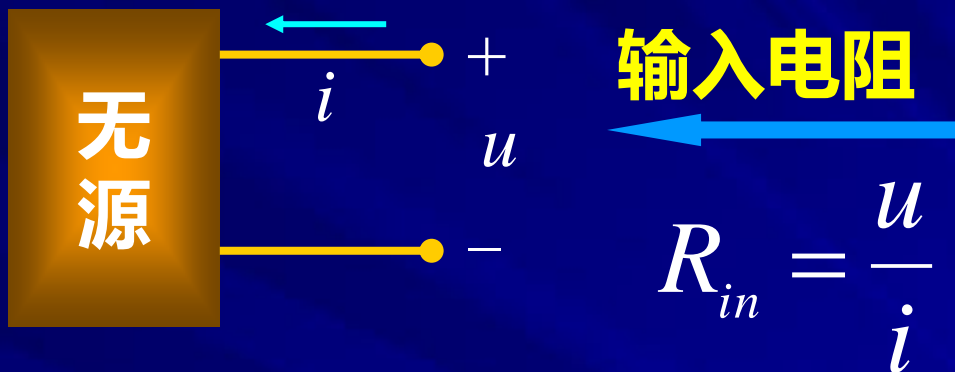
66



提交

## 2.7 输入电阻

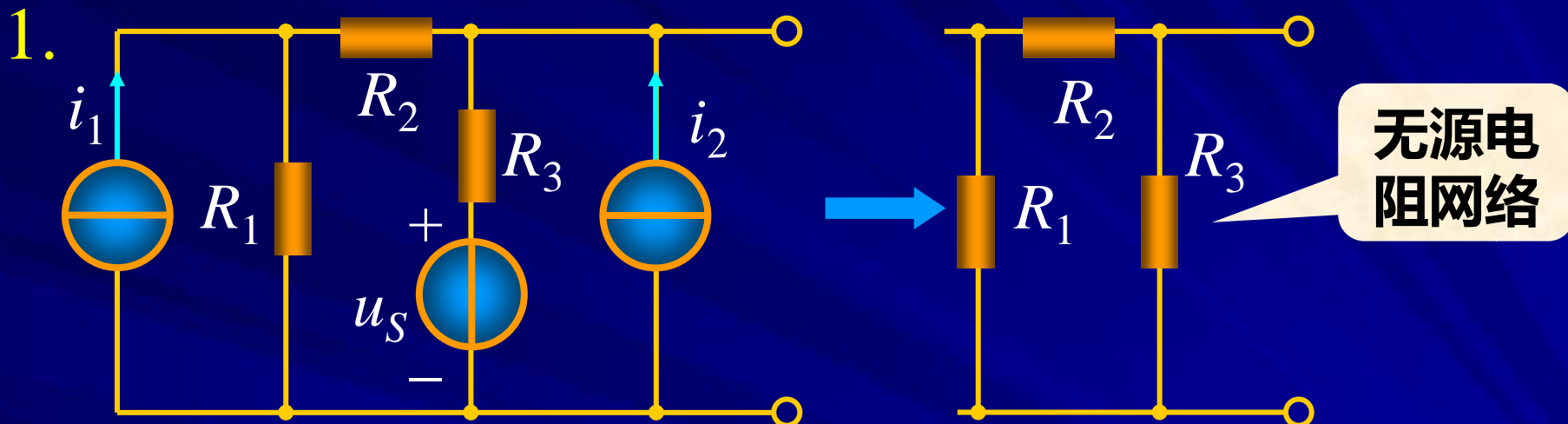
### 1. 定义



### 2. 计算方法

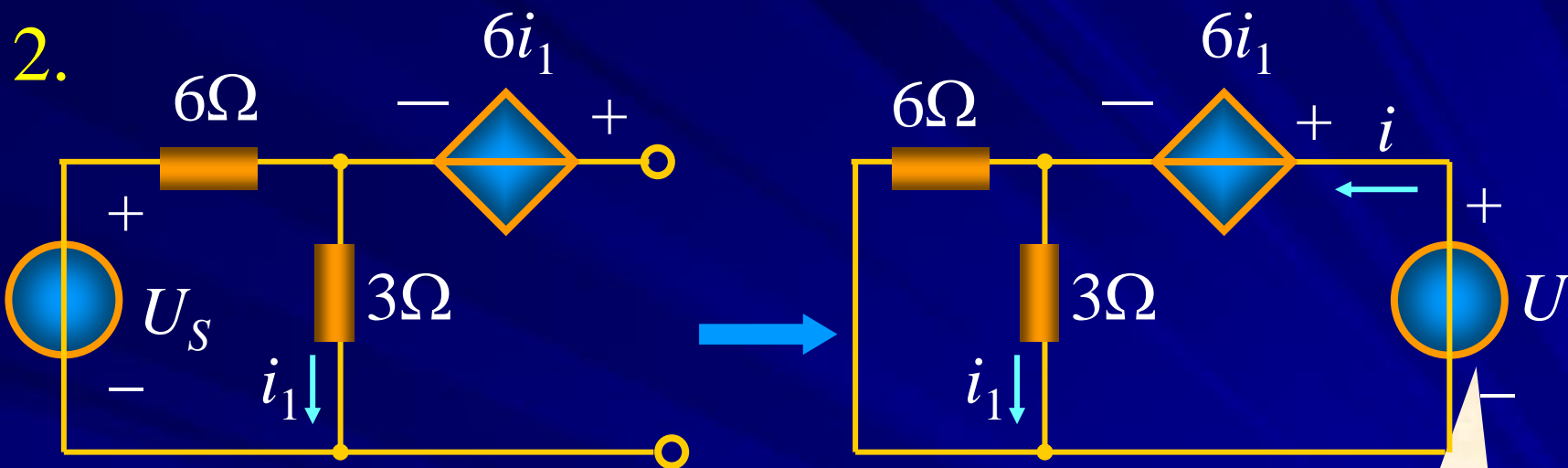
- ①如果一端口内部仅含电阻，则应用电阻的串、并联和 $\Delta$ —Y变换等方法求它的等效电阻；
- ②对含有受控源和电阻的两端电路，用电压、电流法求输入电阻，即在端口加电压源，求得电流，或在端口加电流源，求得电压，得其比值。

# 例 计算下列一端口电路的输入电阻

**解**

先把有源网络的独立源置零：电压源短路；  
电流源开路，再求输入电阻。

$$R_{in} = (R_1 + R_2) // R_3$$



$$i = i_1 + \frac{3i_1}{6} = 1.5i_1$$

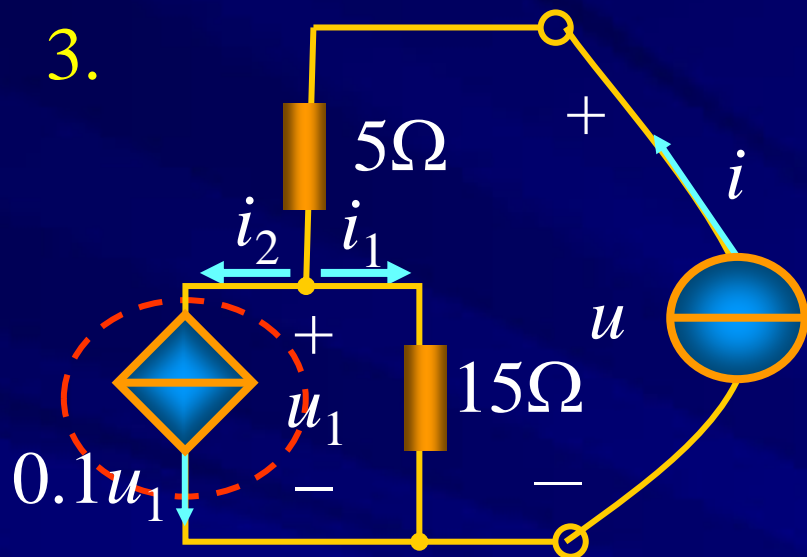
$$U = 6i_1 + 3i_1 = 9i_1$$

$$R_{in} = \frac{U}{i} = \frac{9i_1}{1.5i_1} = 6\Omega$$

外加电  
压源



3.

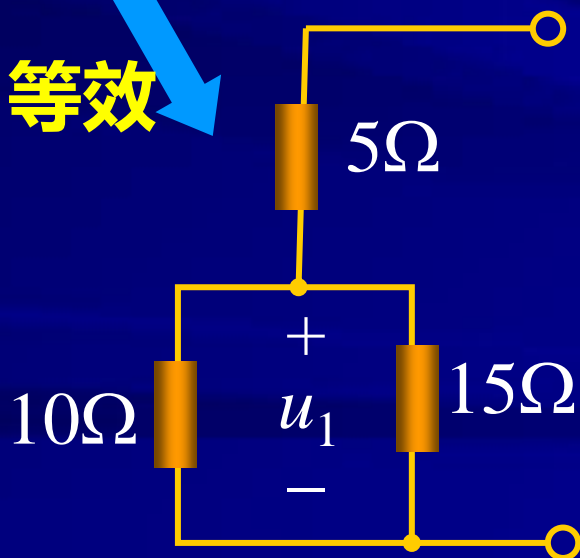


$$u_1 = 15i_1 \quad i_2 = \frac{u_1}{10} = 1.5i_1$$

$$i = i_1 + i_2 = 2.5i_1$$

$$u = 5i + u_1 = 5 \times 2.5i_1 + 15i_1 = 27.5i_1$$

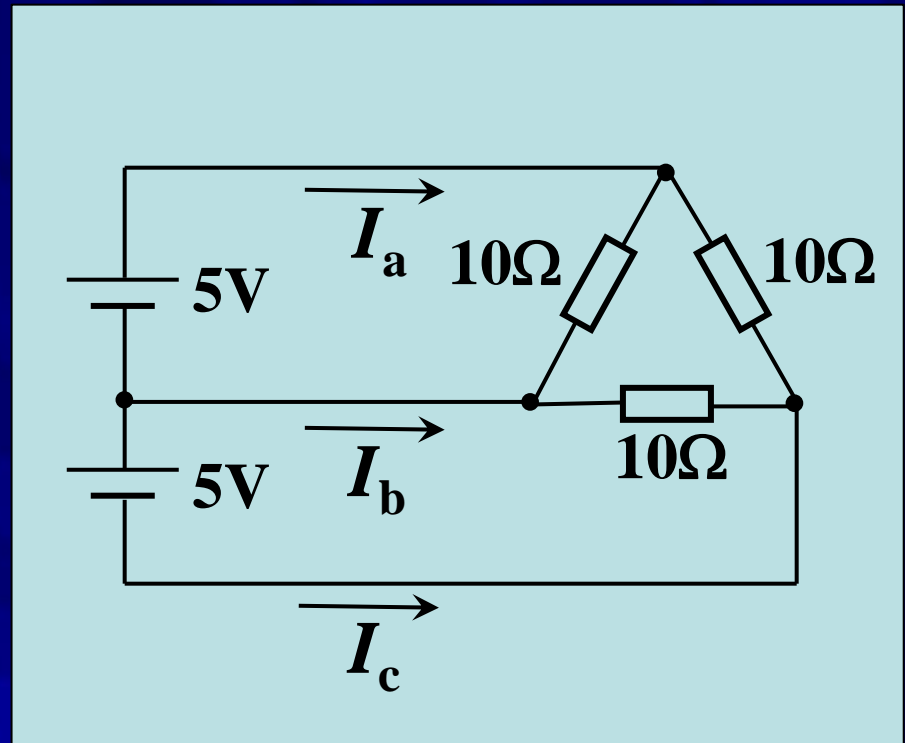
等效



$$R_{in} = \frac{u}{i} = \frac{27.5i_1}{2.5i_1} = 11\Omega$$

$$R_{in} = 5 + \frac{10 \times 15}{10 + 15} = 11\Omega$$

$I_a = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}$



提交