向量组的线性相关性

n维向量空间　n维向量全体组成的集合

$R^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$

n维向量空间 R^n 中的 n-1 维超平面

n维向量集合 $\{x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T \mid a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$

1. 向量组及其线性组合

n维向量：n个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组（n个分量）

- 实向量：分量全为实数　　复向量：分量全为复数
- n维行向量　$a^T=(a_1,a_2,\cdots a_n)$
- n维列向量　$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

向量组（矩阵）：若干个同维数的行/列向量所组成的集合

• 含有限个向量的有序向量组可以与矩阵一一对应

eg: $A_{n\times m}=(a_1,a_2,\cdots a_m)$　　$B_{m\times n}=\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_n^T\end{pmatrix}$

② 点空间：构成"空间"的元素是点

向量空间：取定了坐标系的点空间

如点集 $\Pi=\{P(x,y,z)\mid ax+by+cz=d\}$ 是一平面

那么向量集 $\{\vec{r}=(x,y,z)^T \mid ax+by+cz=d\}$

也叫空间向量 R^3 中的平面，并将 Π 作为其图形

③ **线性组合**：给定向量组 $A: a_1,a_2,\cdots,a_m$，对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，表达式 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m$ 称向量组A的一个线性组合

充要条件：$R(A)=R(A,b)$

向量b能由向量组A线性表示（向量b是向量组A的线性组合）

$\exists$ 一组 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$，使 $b=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m$

$\Leftrightarrow$ 就是方程组 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=b$ 有解

向量组B能由向量组A线性表示　同上充要条件：$R(A)=R(A,B)$

B组中每个向量都能由向量组A线性表示

即 $b_j=k_{1j}a_1+k_{2j}a_2+\cdots+k_{mj}a_m=(a_1,a_2,\cdots a_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix}$（线性表示）

$(b_1,b_2,\cdots,b_l)=(a_1,a_2,\cdots a_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix}$　$K_{m\times l}=(k_{ij})$ 系数矩阵

(A,B)

若能相互线性表示，则称两向量组等价

充要条件：$R(A)=R(B)=R(A,B)$

2. 向量组的线性相关性

① 给定向量组 $A: a_1,a_2,\cdots,a_m$，如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$（方程解不全为0）

则称向量组A是线性相关的，否则称它线性无关

- m=1时，对于只含一个向量a的向量组，a=0时线性相关，$a\neq0$ 时线性无关
- m=2，线性相关 $\Leftrightarrow$ a_1,a_2 分量对应成比例（几何意义：两向量共线）
- m=3，线性相关 → 三向量共面

② 向量组 $A: a_1,a_2,\cdots,a_m\ (m\geq2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 在向量组A中至少有一个向量能由其余m-1个向量线性表示

③ 向量组 $A: a_1,a_2,\cdots,a_m$ 线性相关 $\overset{充要}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{R(A)<m}$　解不全为0

向量组A线性无关 $\overset{充要}{\Longleftrightarrow}$ $R(A)=m$

④ (1) 组A，组 $B=A+a_{m+1}+\cdots$（B包含A）

若A相关（少）则B也相关；若B无关（多）则A也无关

(2) m个n维向量组成的向量组，$n<m$ 时一定相关

(3) $A: a_1,a_2,\cdots a_m$ 线性无关，$B: a_1,\cdots a_m,b$ 相关

则b必能由A线性表示，且表达式唯一

(1)中称A为B时 部分组

即 一个向量组若有线性相关的部分组，则该向量组相

一个向量组若线性无关，则其任何部分组都线性无关

含零向量的向量组必线性相关