

第十三章 非正弦周期电流电路 和信号的频谱

本章重点

13-1	非正弦周期信号
13-2	非正弦周期函数分解为傅里叶级数
13-3	有效值、平均值和平均功率
13-4	非正弦周期电流电路的计算
*13-5	对称三相电路中的高次谐波
*13-6	傅里叶级数的指数形式
*13-7	傅里叶积分简介

● 重点

1. 周期函数分解为傅里叶级数
2. 非正弦周期函数的有效值和平均功率
3. 非正弦周期电流电路的计算

13-1 非正弦周期信号

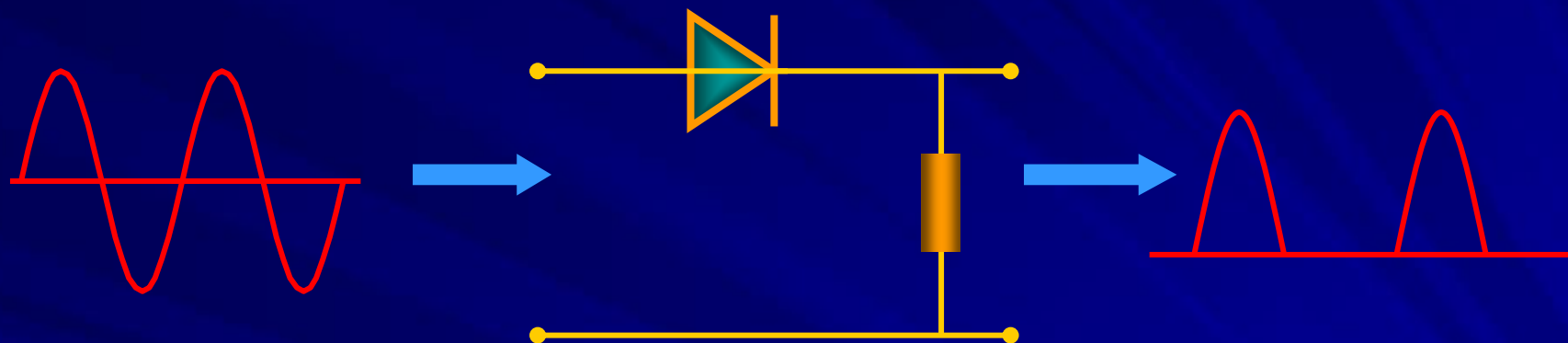
生产实际中，经常会遇到非正弦周期电流电路。在电子技术、自动控制、计算机和无线电技术等方面，电压和电流往往都是周期性的非正弦波形。

● 非正弦周期交流信号的特点

(1) 不是正弦波

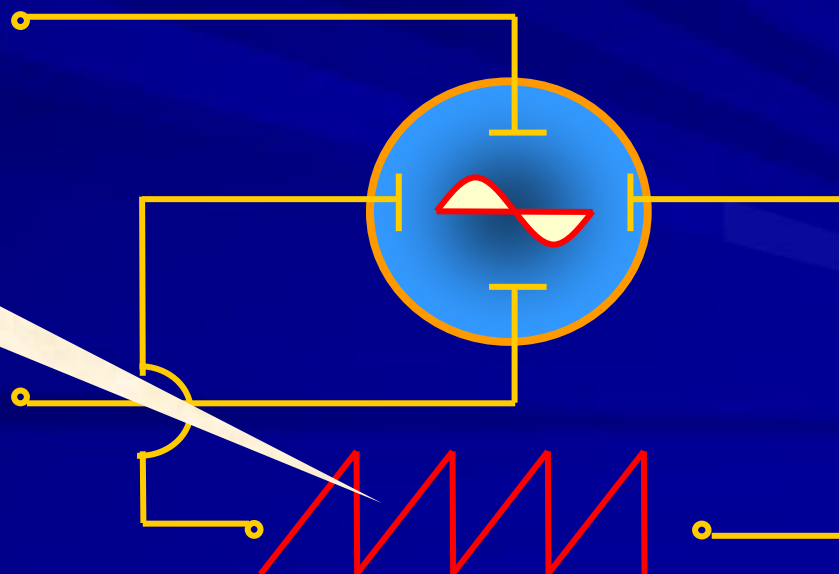
(2) 按周期规律变化 $\longrightarrow f(t) = f(t + nT)$

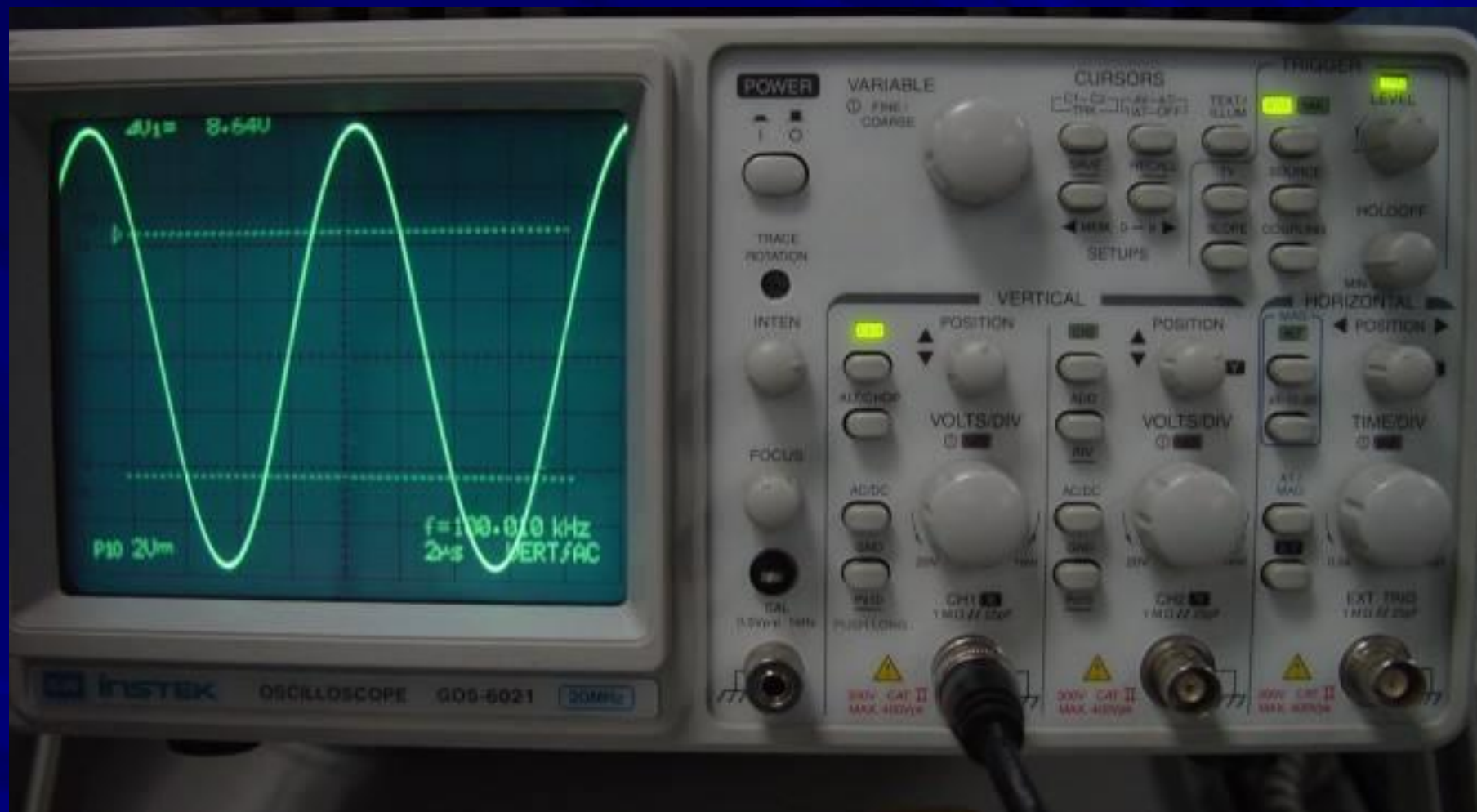
例1-1 半波整流电路的输出信号。



例1-2 示波器内的水平扫描电压。

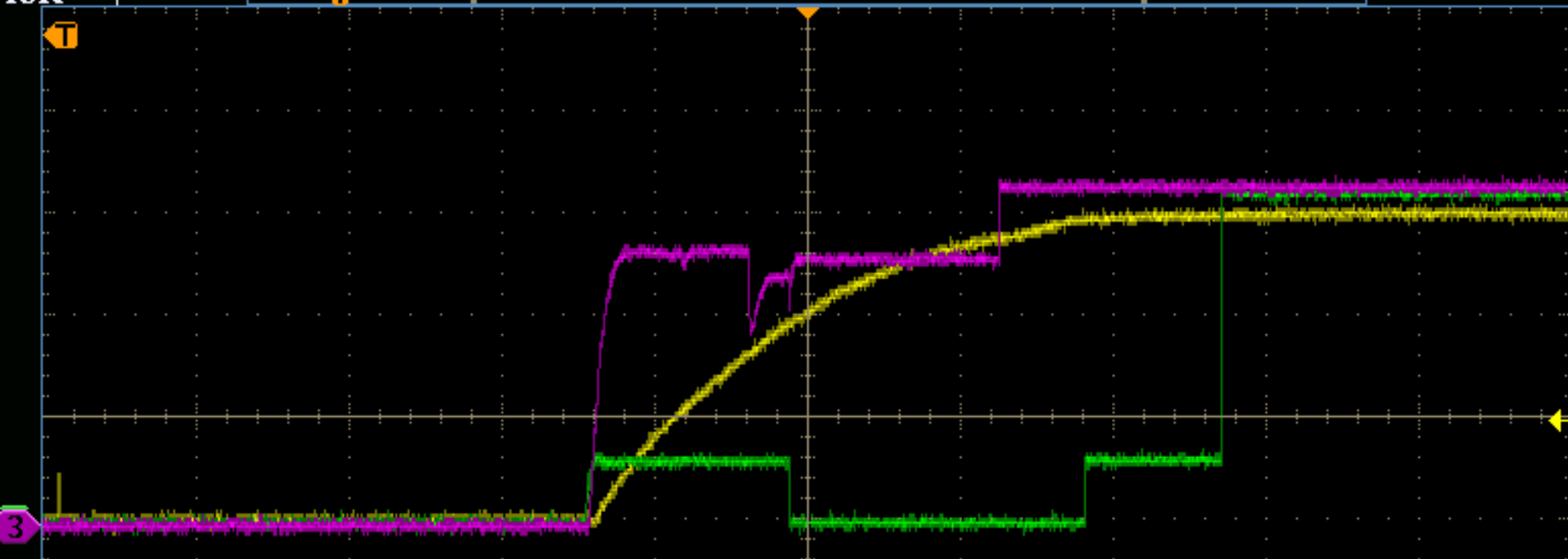
周期性锯齿波







Tek Stop



1 1.00 V 40.0ms 25.0kS/s 1 1.02 V
3 1.00 V 4 1.00 V 278.6000ms 10k points

	Value	Mean	Min	Max	Std Dev
1 Amplitude	3.04 V	2.10	240m	3.04	1.37
1 Frequency	---- Hz	No period found			
1 Mean	1.63 V	958m	6.86m	1.63	558m
1 Peak-Peak	3.24 V	2.65	240m	5.48	1.99

22 Aug 2017
09:28:34

Coupling

DC

AC

Termination
set by
TPP1000

Invert

On

Off

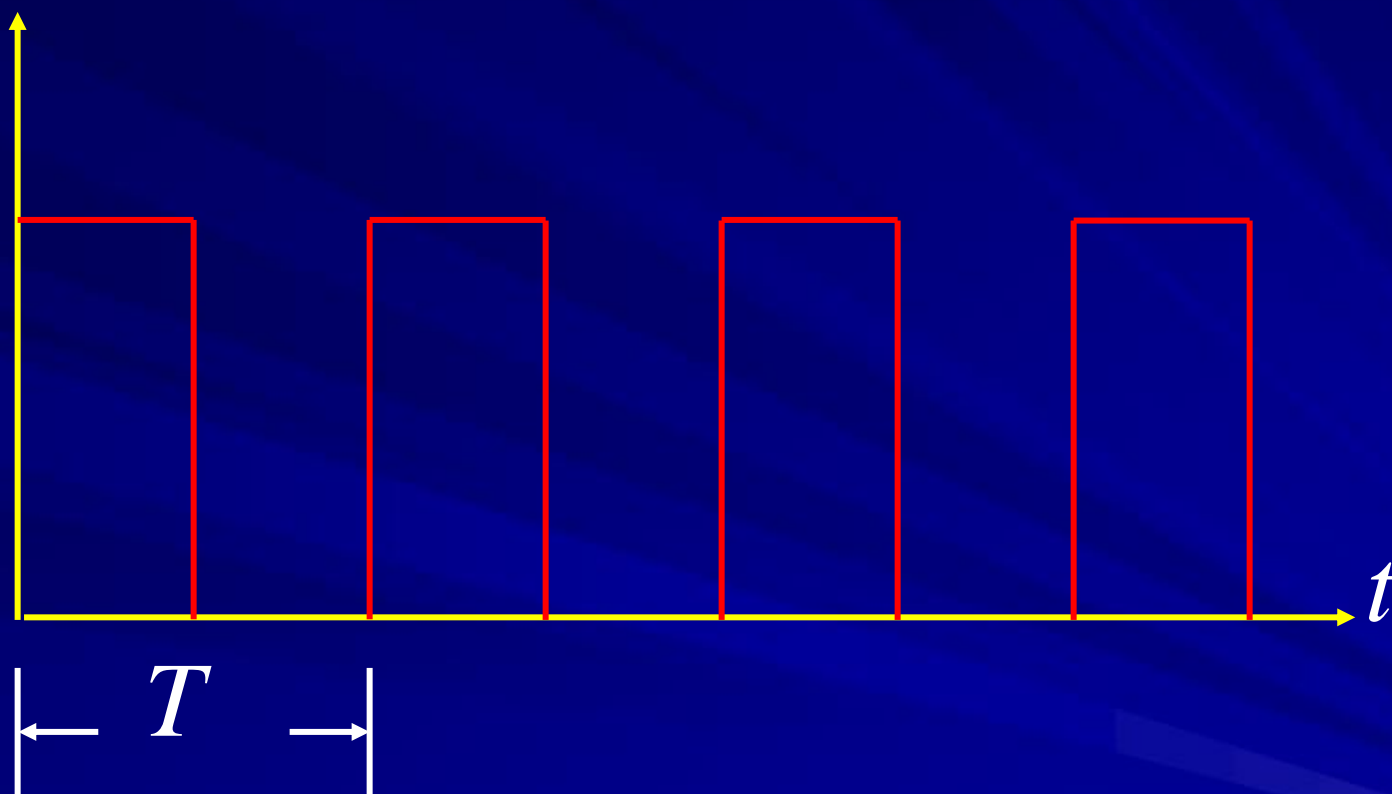
Bandwidth

Full

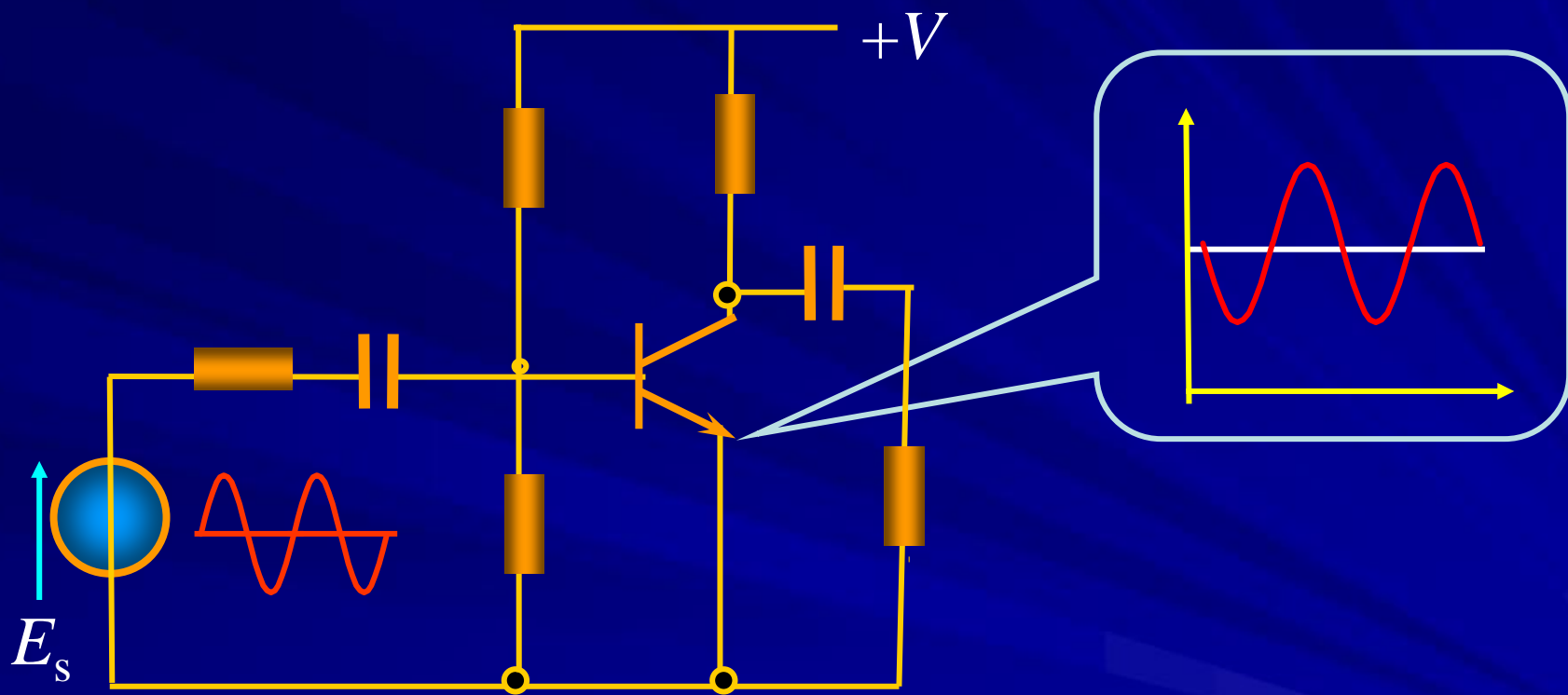
3 Label

More

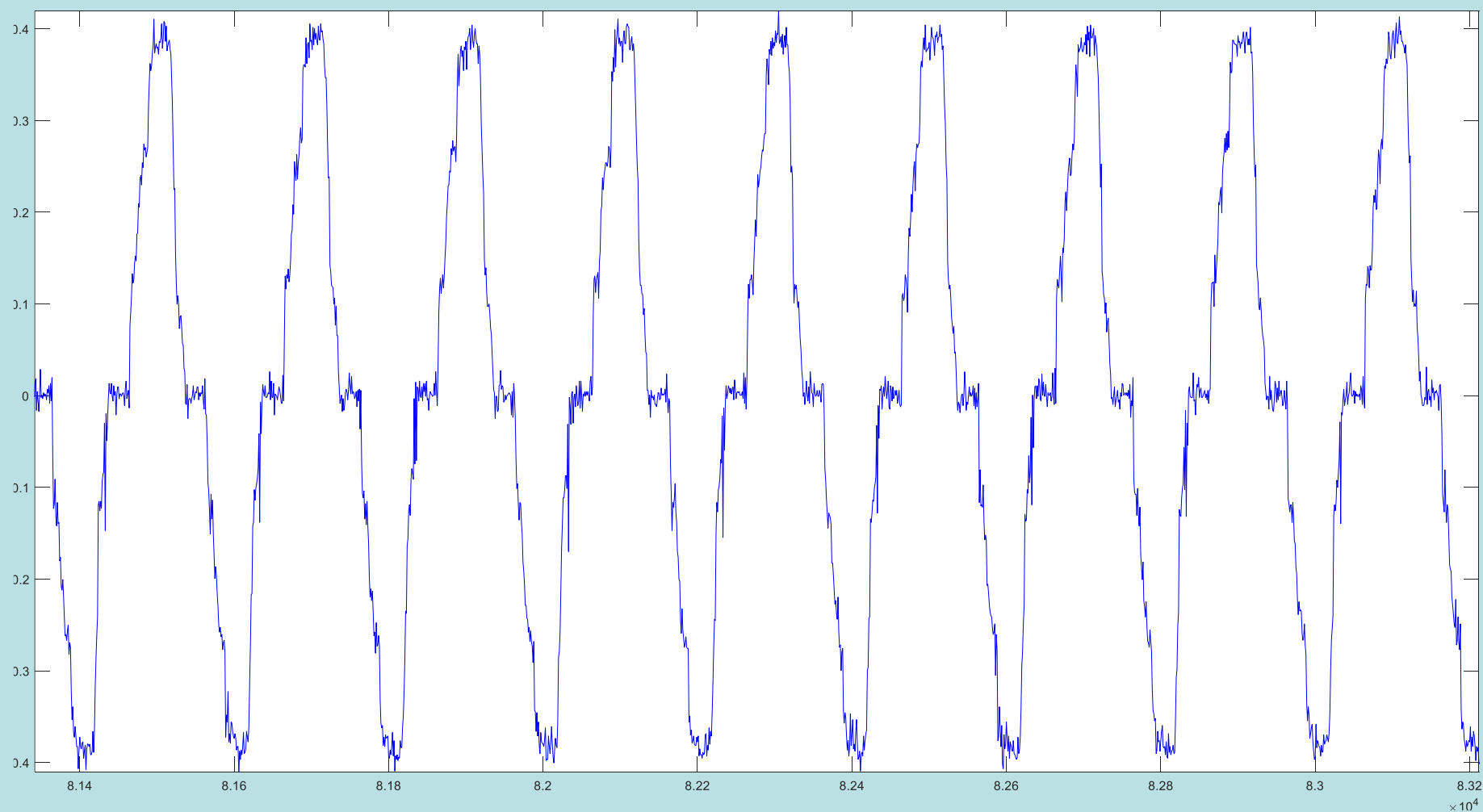
例1-3 脉冲电路中的脉冲信号。



例1-4 交、直流共存电路。



DELL笔记本运行时的电流波形



13-2 非正弦周期函数分解为傅里叶级数

若周期函数满足狄里赫利条件：

- ① 周期函数极值点的数目为有限个。
- ② 间断点的数目为有限个。
- ③ 在一个周期内绝对可积，即

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty$$

可展开成收敛的傅里叶级数



注意

一般电工里遇到的周期函数都能满足狄里赫利条件。

周期函数展开成傅里叶级数：

直流分量

$$f(t) = A_0 + A_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) +$$

基波（和原函数同频）

$$A_{2m} \cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + \dots$$

二次谐波
(2倍频)

$$A_{nm} \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) +$$

高次谐波

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

也可表示成

$$A_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) = a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

系数之间的关系为

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = a_0 \\ A_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ a_k = A_{km} \cos \varphi_k \\ \varphi_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) \end{array} \right. \quad b_k = -A_{km} \sin \varphi_k$$

系数的计算:

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k\omega_1 t) d(\omega_1 t)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(k\omega_1 t) d(\omega_1 t)$$

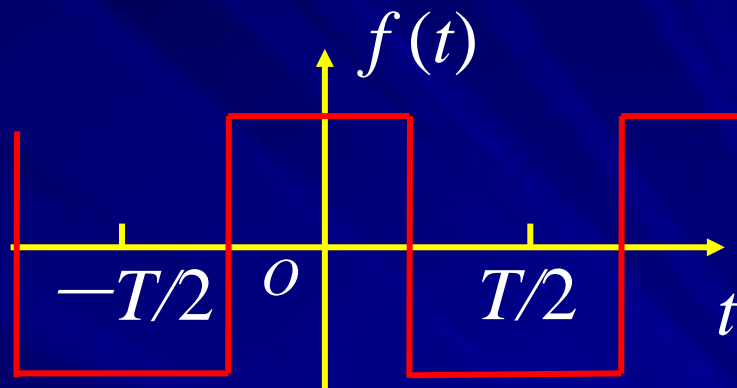
求出 A_0 、 a_k 、 b_k **便可得到原函数** $f(t)$ **的展开式。**



注意 利用函数的对称性可使系数的确定简化

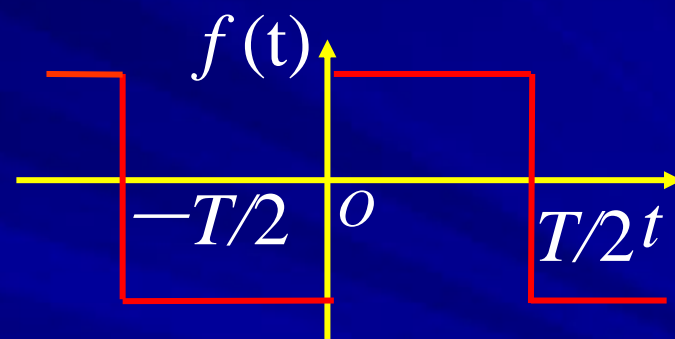
①偶函数

$$f(t) = f(-t) \quad b_k = 0$$



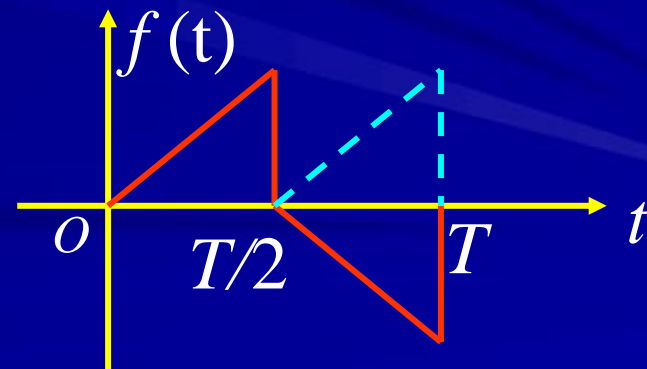
②奇函数

$$f(t) = -f(-t) \quad a_k = 0$$



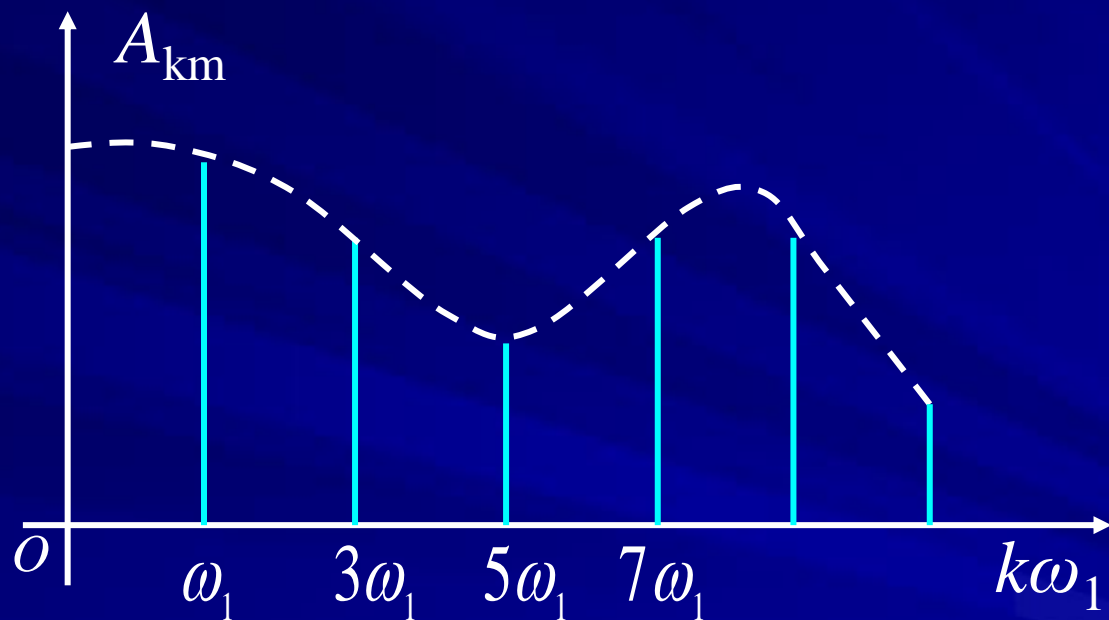
③奇谐波函数

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad a_{2k} = b_{2k} = 0$$



周期函数的频谱图:

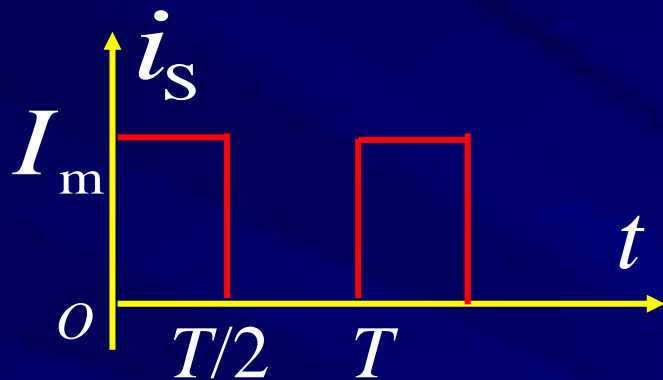
幅度频谱

 $A_{km} - k\omega_1$ 的图形

相位频谱

 $\varphi_k - k\omega_1$ 的图形

例2-1 周期性方波信号的分解。



$$i_s(t) = \begin{cases} I_m & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

解

图示矩形波电流在一个周期内的表达式为

直流分量:
$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m dt = \frac{I_m}{2}$$

谐波分量:
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i_s(\omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t)$$
$$= \frac{I_m}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \cos(k\omega t) \right] \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ 为偶数} \\ \frac{2I_m}{k\pi} & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} i_s(\omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t)$$

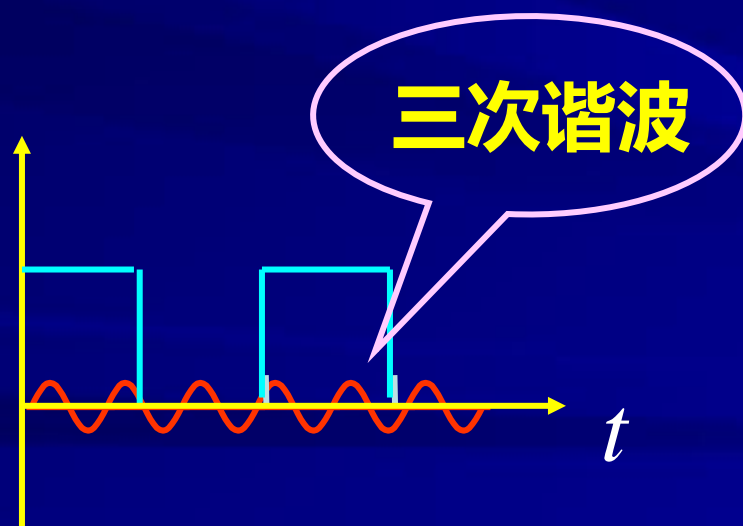
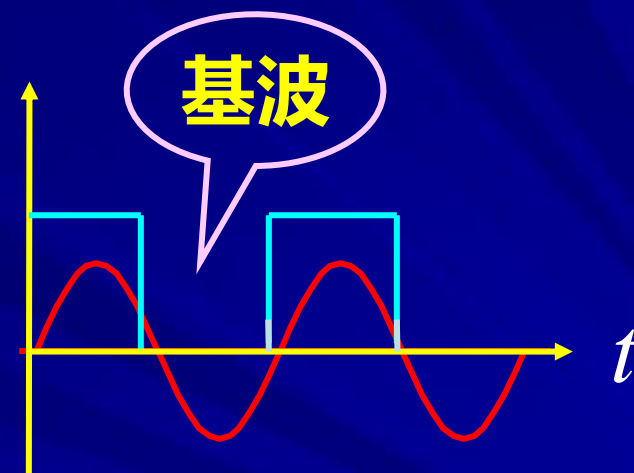
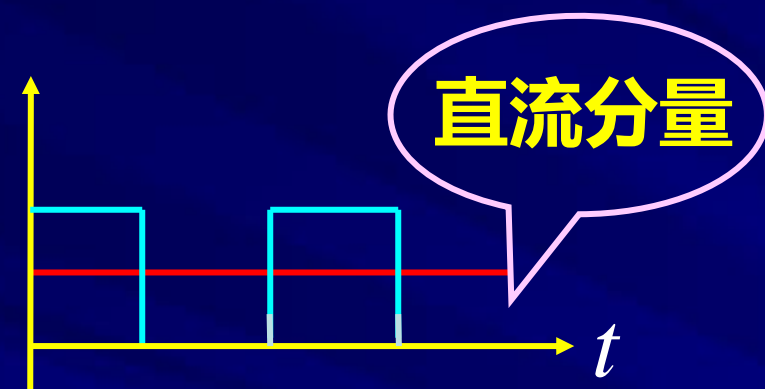
$$= \frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \sin(k\omega t) \Big|_0^{\pi} = 0$$

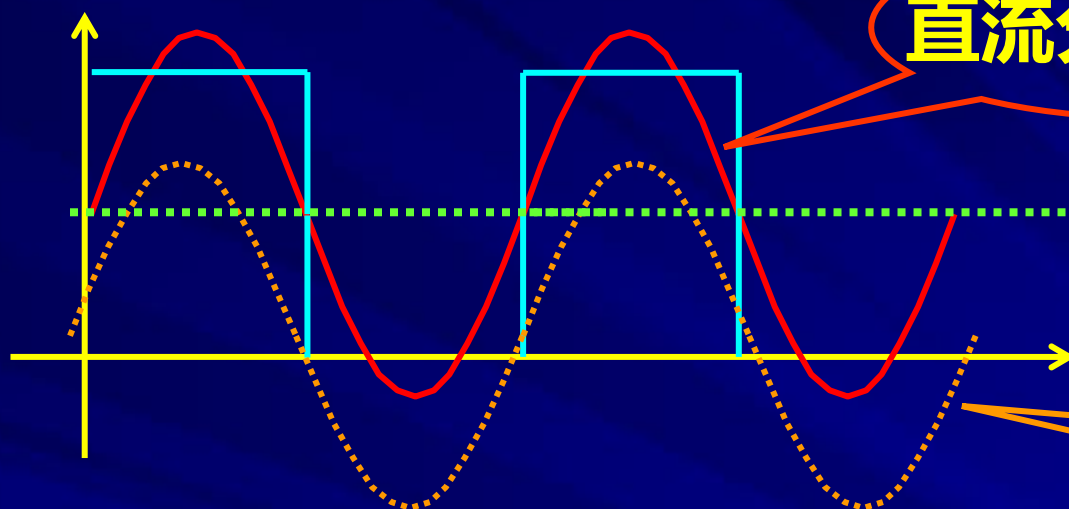
$$A_k = \sqrt{b_k^2 + a_k^2} = b_k = \frac{2I_m}{k\pi} \quad (k \text{ 为奇数})$$

i_s 的展开式为

$$i_s = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \cdots \right]$$

周期性方波波形分解

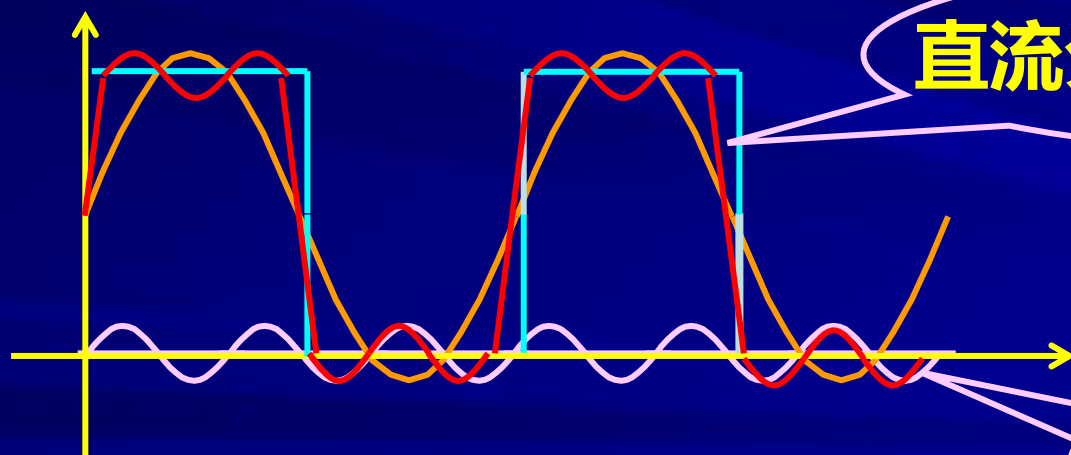




直流分量+基波

直流分量

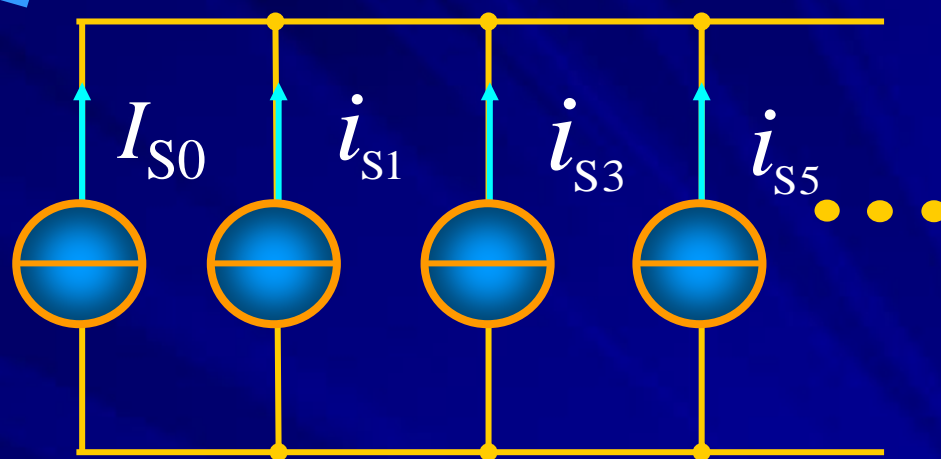
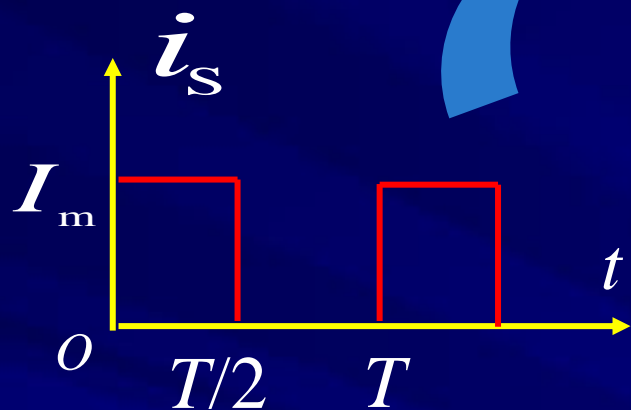
基波



直流分量+基波+三次谐波

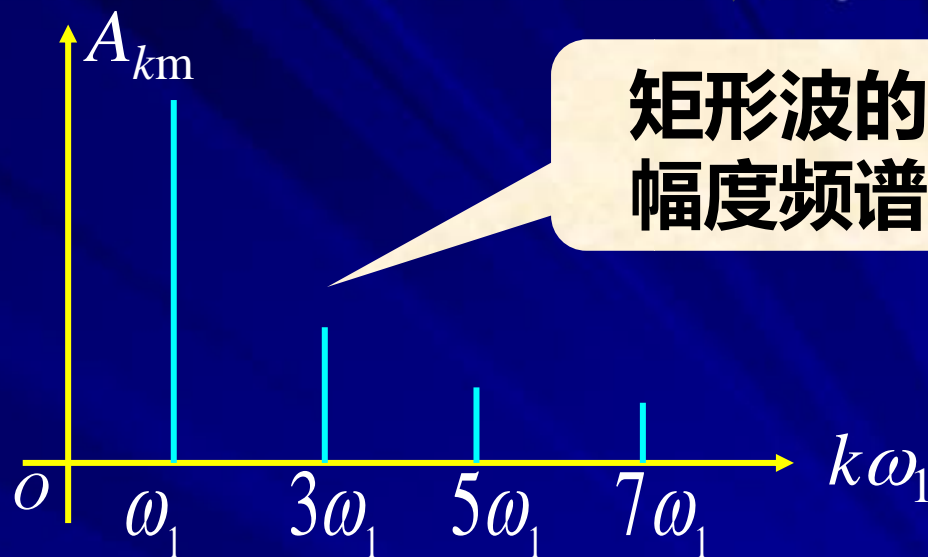
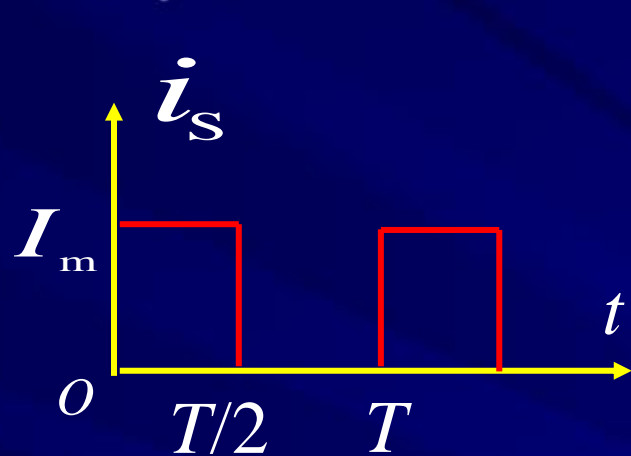
三次谐波

等效电源

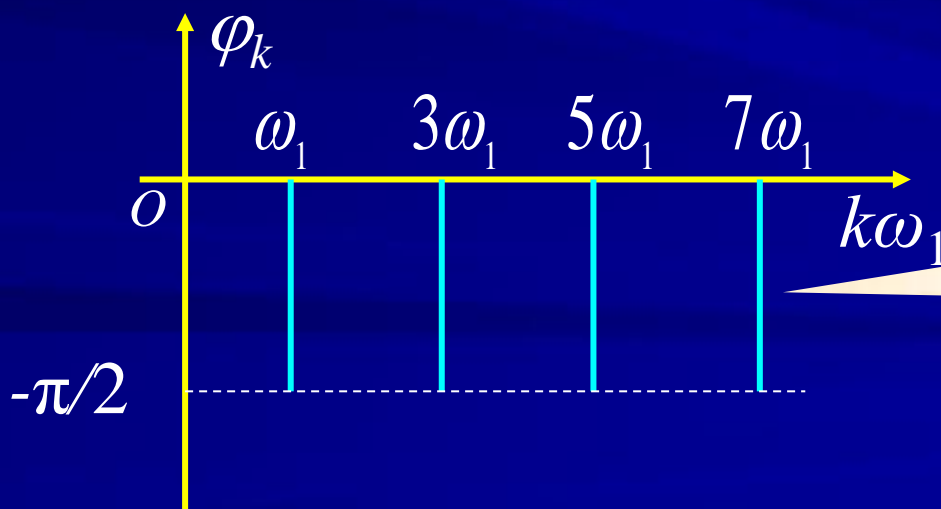


$$i_s = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

 I_{S0} i_{S1} i_{S3} i_{S5}



$$i_s = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$



13-3 有效值、平均值和平均功率

1. 三角函数的性质

① 正弦、余弦信号一个周期内的积分为0。

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\omega t) d(\omega t) = 0 \quad \int_0^{2\pi} \cos(k\omega t) d(\omega t) = 0$$

② \sin^2 、 \cos^2 在一个周期内的积分为 π 。

k 整数

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(k\omega t) d(\omega t) = \pi \quad \int_0^{2\pi} \cos^2(k\omega t) d(\omega t) = \pi$$

③三角函数的正交性。

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\omega t) \cdot \sin(p\omega t) d(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k\omega t) \cdot \cos(p\omega t) d(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\omega t) \cdot \sin(p\omega t) d(\omega t) = 0$$

$$(k \neq p)$$

2. 非正弦周期函数的有效值

若
$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

则有效值:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(\omega t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k) \right]^2 dt} \end{aligned}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k) \right]^2 dt}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \cos^2(k\omega_1 t + \varphi_k) dt = I_k^2$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2I_0 \cos(k\omega t + \varphi_k) dt = 0$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k) I_{qm} \cos(q\omega t + \varphi_q) dt = 0$$

$$(k \neq q)$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{km}^2}{2}}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$$



结论 周期函数的有效值为直流分量及各次谐波分量有效值平方和的方根。

3. 非正弦周期函数的平均值

若
$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

其直流值为

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T i(\omega t) dt = I_0$$

其平均值为

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(\omega t)| dt$$

正弦量的平均值为

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |I_m \cos(\omega t)| dt = 0.898 I$$

4. 非正弦周期交流电路的平均功率

$$\begin{cases} u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{uk}) \\ i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \cos(k\omega t + \varphi_{ik}) \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i dt$$

利用三角函数的正交性，得

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k \quad (\varphi_k = \varphi_{uk} - \varphi_{ik}) \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + \cdots \end{aligned}$$

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \cdots$$



结论

平均功率 = 直流分量的功率 + 各次谐波的平均功率

已知某电压源 $u(t) = 30 + 50\cos(2000t + 45^\circ)$ V
请问该电压有效值为

A

30V

B

42.43V

C

51.96V

D

46.37V

提交

已知某元件端电压，电流方向关联

$$u(t) = 220\sqrt{2} \cos(\omega t) \text{V}$$

$$i = [5\sqrt{2} \cos(\omega t - 60^\circ) + 1.18\sqrt{2} \cos(3\omega t - 15^\circ)] \text{A}$$

则该元件吸收的有功功率为

- ☒ A 550W
- ☐ B 1452.92W
- ☐ C 765.6W
- ☐ D 2905.84W

提交

13-4 非正弦周期电流电路的计算

1. 计算步骤

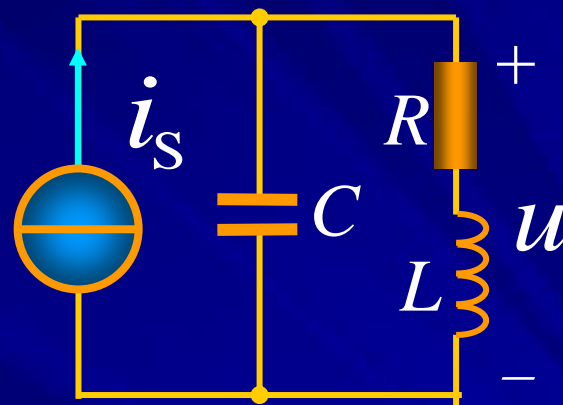
- ①利用傅里叶级数，将非正弦周期函数展开成若干种频率的谐波信号。
- ②对各次谐波分别应用相量法计算。（注意：交流各谐波的 X_L 、 X_C 不同，对直流 C 相当于开路、 L 相当于短路。）
- ③将以上计算结果转换为瞬时值叠加。

2. 计算举例

例4-1 方波信号激励的电路，求 u ，已知：

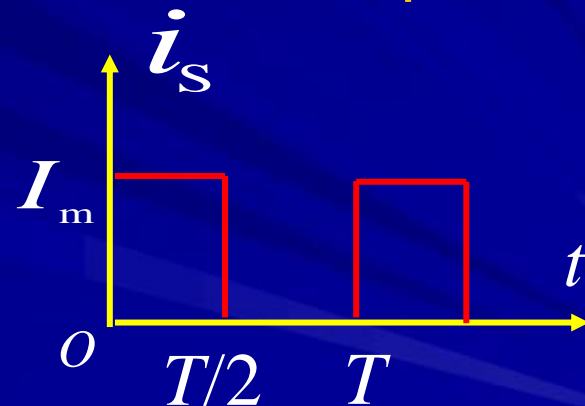
$$R = 20\Omega, L = 1\text{mH}, C = 1000\text{pF}$$

$$I_m = 157\mu\text{A}, T = 6.28\mu\text{s}$$



解 (1) 方波信号的展开式为

$$i_s = \frac{I_m}{2} + \frac{2I_m}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \cdots \right]$$



代入已知数据：

$$I_m = 157\mu\text{A}, T = 6.28\mu\text{s}$$

直流分量:

$$I_0 = \frac{I_m}{2} = \frac{157}{2} \mu\text{A} = 78.5 \mu\text{A}$$

基波最大值:

$$I_{1m} = \frac{2I_m}{\pi} = \frac{2 \times 1.57}{3.14} \mu\text{A} = 100 \mu\text{A}$$

三次谐波最大值:

$$I_{3m} = \frac{1}{3} I_{1m} = 33.3 \mu\text{A}$$

五次谐波最大值:

$$I_{5m} = \frac{1}{5} I_{1m} = 20 \mu\text{A}$$

角频率:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{6.28 \times 10^{-6}} \text{rad/s} = 10^6 \text{ rad/s}$$

电流源各频率的谐波分量为

$$I_{s0} = 78.5 \mu\text{A} \quad i_{s1} = 100 \sin 10^6 t \mu\text{A}$$

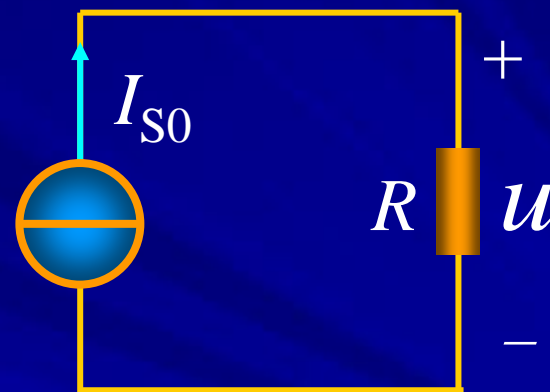
$$i_{s3} = \frac{100}{3} \sin 3 \cdot 10^6 t \mu\text{A} \quad i_{s5} = \frac{100}{5} \sin 5 \cdot 10^6 t \mu\text{A}$$

(2) 对各次谐波分量单独计算:

(a) 直流分量 I_{s0} 作用

$$I_{s0} = 78.5 \mu\text{A}$$

电容断路，电感短路



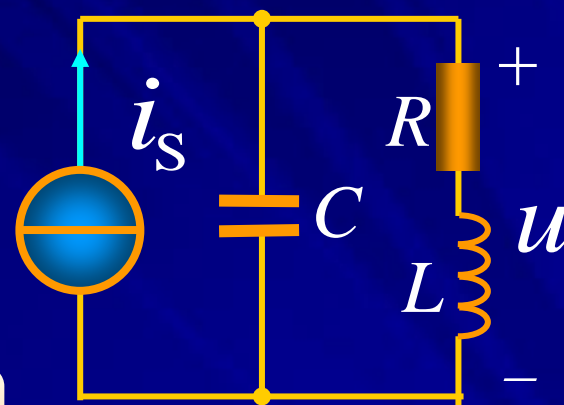
$$U_0 = RI_{s0} = 20 \times 78.5 \times 10^{-6} \text{V} = 1.57 \text{mV}$$

(b)基波作用

$$i_{s1} = 100 \sin(10^6 t) \mu\text{A}$$

$$-\frac{1}{\omega_1 C} = \frac{-1}{10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} \Omega = -1\text{k}\Omega$$

$$\omega_1 L = 10^6 \times 10^{-3} \Omega = 1\text{k}\Omega$$



$$X_L \gg R$$

$$Z(\omega_1) = \frac{(R + jX_L) \cdot (jX_C)}{R + j(X_L + X_C)} \approx -\frac{X_L X_C}{R} = \frac{L}{RC} = 50\text{k}\Omega$$

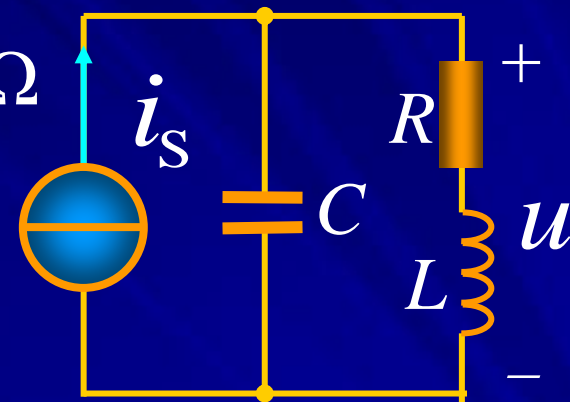
$$\dot{U}_1 = \dot{I}_{s1} \cdot Z(\omega_1) = \frac{100 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} \cdot 50 \times 10^3 \angle 0^\circ \text{ V} = \frac{5000}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ mV}$$

(c) 三次谐波作用

$$i_{s3} = \frac{100}{3} \sin(3 \cdot 10^6 t) \mu\text{A}$$

$$\frac{1}{3\omega_1 C} = \frac{1}{3 \times 10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} \Omega = 0.33 \text{ k}\Omega$$

$$3\omega_1 L = 3 \times 10^6 \times 10^{-3} \Omega = 3 \text{ k}\Omega$$



$$Z(3\omega_1) = \frac{(R + jX_{L3})(-jX_{C3})}{R + j(X_{L3} - X_{C3})} = 374.5 / -89.19^\circ \Omega$$

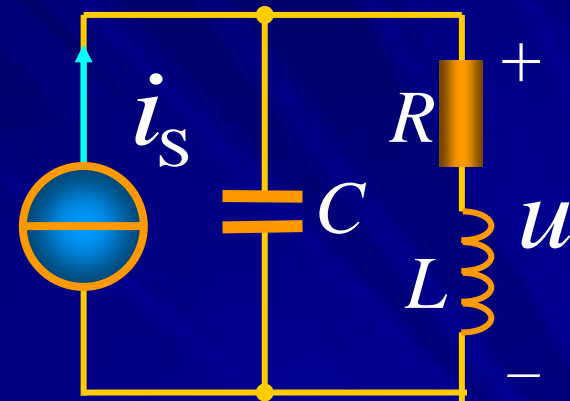
$$\dot{U}_3 = \dot{I}_{s3} \cdot Z(3\omega_1) = 33.3 \times \frac{10^{-6}}{\sqrt{2}} \times 374.5 / -89.19^\circ \text{ V}$$

$$= \frac{12.47}{\sqrt{2}} / -89.2^\circ \text{ mV}$$

(d)五次谐波作用 $i_{s5} = \frac{100}{5} \sin(5 \cdot 10^6 t) \mu\text{A}$

$$\frac{1}{5\omega_1 C} = \frac{1}{5 \times 10^6 \times 1000 \times 10^{-12}} \Omega = 0.2 \text{ k}\Omega$$

$$5\omega_1 L = 5 \times 10^6 \times 10^{-3} \Omega = 5 \text{ k}\Omega$$



$$Z(5\omega_1) = \frac{(R + jX_{L5})(-jX_{C5})}{R + j(5X_{L5} - X_{C5})} = 208.3 \angle -89.53^\circ \Omega$$

$$\dot{U}_5 = \dot{I}_{s5} \cdot Z(5\omega_1) = 20 \times 10^{-6} / \sqrt{2} \cdot 208.3 \angle -89.53^\circ \text{ V}$$

$$= \frac{4.166}{\sqrt{2}} \angle -89.53^\circ \text{ mV}$$

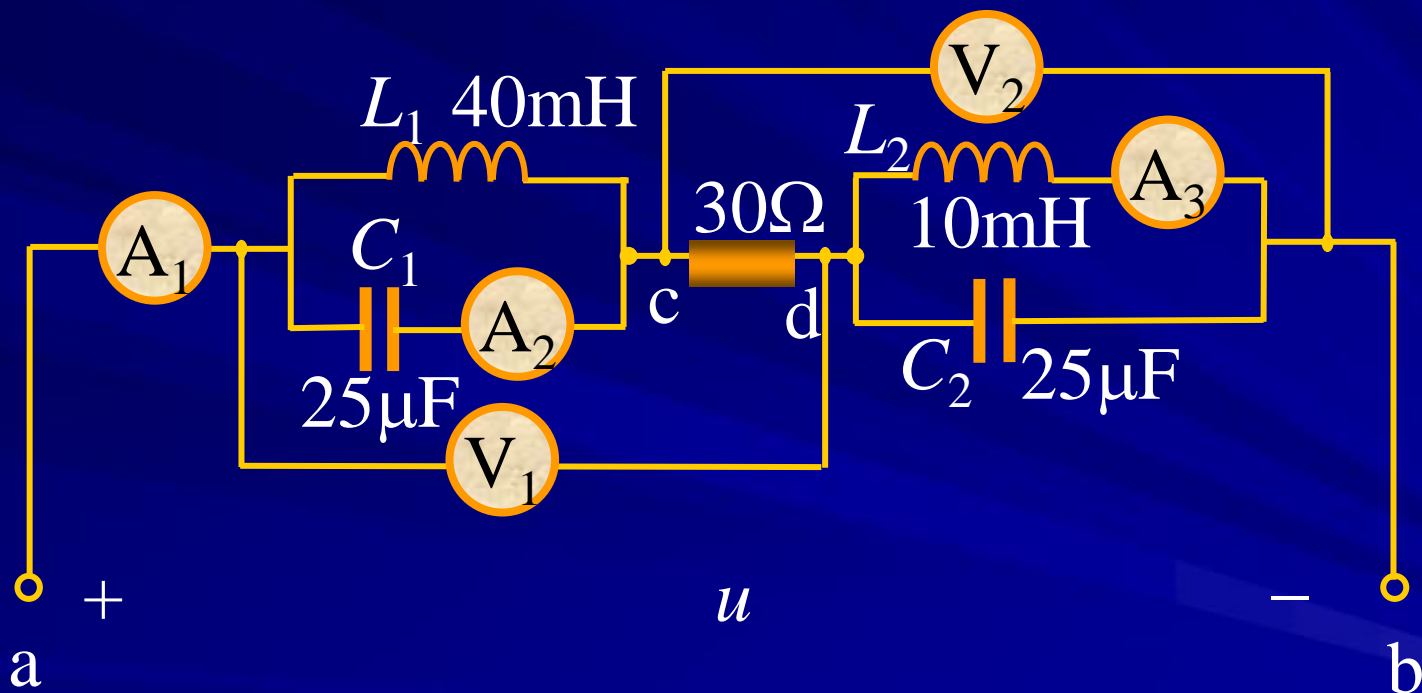
(3)各谐波分量计算结果瞬时值叠加

$$U_0 = 1.57 \text{ mV} \quad \dot{U}_3 = \frac{12.47}{\sqrt{2}} \angle -89.2^\circ \text{ mV}$$
$$\dot{U}_1 = \frac{5000}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ mV} \quad \dot{U}_5 = \frac{4.166}{\sqrt{2}} \angle -89.53^\circ \text{ mV}$$

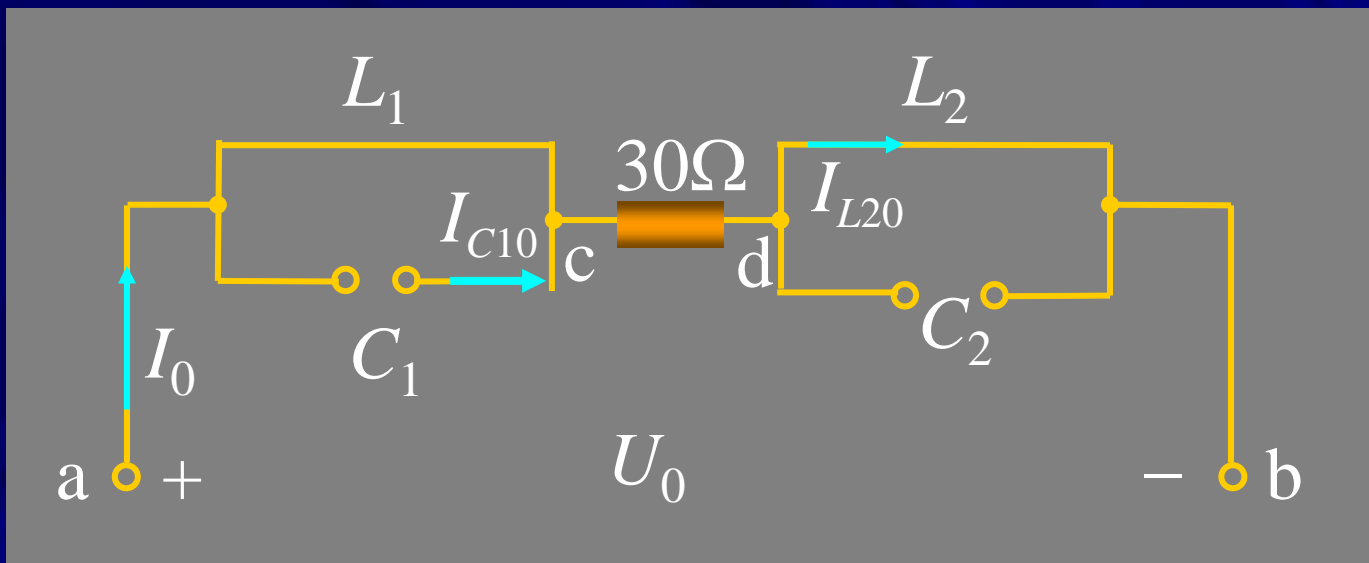
$$u = U_0 + u_1 + u_3 + u_5$$
$$\approx [1.57 + 5000 \sin(\omega t) +$$
$$12.47 \sin(3\omega t - 89.2^\circ) +$$
$$4.166 \sin(5\omega t - 89.53^\circ)] \text{ mV}$$

例4-2 求电路中各表读数(有效值),

已知: $u = [30 + 120 \cos(10^3 t) + 60 \cos(2 \times 10^3 t + \frac{\pi}{4})] \text{V}$ 。



解



(1) $U_0=30\text{V}$ 作用于电路, L_1 、 L_2 短路, C_1 、 C_2 开路。

$$I_0 = I_{L20} = U_0 / R = 30 / 30 \text{A} = 1 \text{A},$$

$$I_{C10} = 0,$$

$$U_{ad0} = U_{cb0} = U_0 = 30 \text{V}$$

(2) $u_1 = 120\cos(1\,000t)\text{V}$ 作用

$$\omega L_1 = 10^3 \times 40 \times 10^{-3} \Omega = 40\Omega \quad \omega L_2 = 10^3 \times 10 \times 10^{-3} \Omega = 10\Omega$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{10^3 \times 25 \times 10^{-6}} \Omega = 40\Omega$$

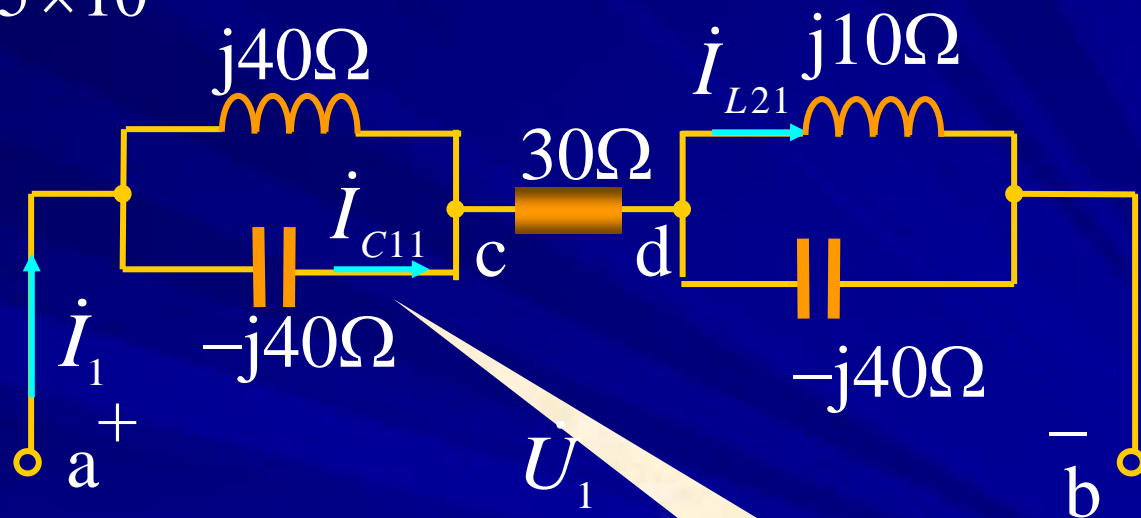
$$\dot{U}_1 = 120/\underline{0^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{L21} = 0$$

$$\dot{U}_{cb1} = 0$$

$$\dot{U}_{ad1} = \dot{U}_1 = 120/\underline{0^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{I}_{C11} = \frac{j\omega C_1 \dot{U}_1}{-j40} = \frac{120/\underline{0^\circ}}{-j40} \text{ A} = 3/\underline{90^\circ} \text{ A}$$



并联谐振

(3) $u_2 = 60\cos(2000t + \pi/4)\text{V}$ 作用

$$2\omega L_1 = 2000 \times 40 \times 10^{-3} \Omega = 80\Omega, \quad 2\omega L_2 = 2000 \times 10 \times 10^{-3} \Omega = 20\Omega$$

$$\frac{1}{2\omega C_1} = \frac{1}{2\omega C_2} = \frac{1}{2000 \times 25 \times 10^{-6}} \Omega = 20\Omega$$

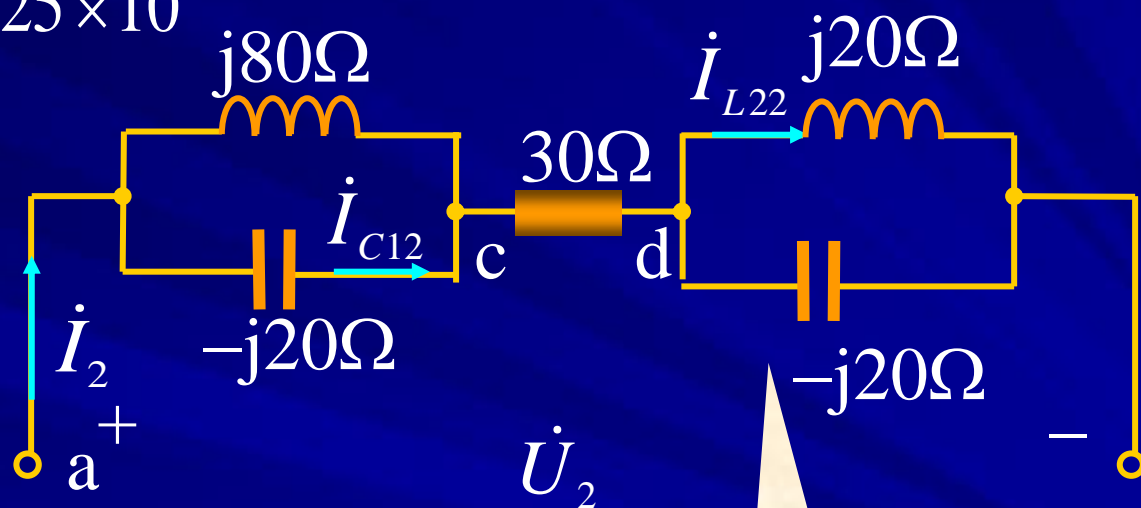
$$\dot{U}_2 = 60/\underline{45^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{C12} = 0$$

$$\dot{U}_{ad2} = 0$$

$$\dot{U}_{cb2} = \dot{U}_2 = 60/\underline{45^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{I}_{L22} = \frac{\dot{U}_1}{j2\omega L_2} = \frac{60/\underline{45^\circ}}{j20} \text{ A} = 3/\underline{-45^\circ} \text{ A}$$



并联谐振

所求电压、电流的瞬时值为

$$i = I_0 + i_1 + i_2 = 1 \text{ A}$$

$$i_{C1} = I_{C10} + i_{C11} + i_{C12} = 3 \cos(1000t + 90^\circ) \text{ A}$$

$$i_{L2} = I_{L20} + i_{L21} + i_{L22} = [1 + 3 \cos(2000t - 45^\circ)] \text{ A}$$

$$u_{ad} = U_{ad0} + u_{ad1} + u_{ad2} = [30 + 120 \cos(1000t)] \text{ V}$$

$$u_{cb} = U_{cb0} + u_{cb1} + u_{cb2} = [30 + 60 \cos(2000t + 45^\circ)] \text{ V}$$

表A₁的读数: $I = 1 \text{ A}$ **表A₂的读数:** $3 / \sqrt{2} = 2.12 \text{ A}$

表A₃的读数: $\sqrt{1^2 + (3 / \sqrt{2})^2} = 2.35 \text{ A}$

表V₁的读数: $\sqrt{30^2 + (120 / \sqrt{2})^2} = 90 \text{ V}$

表V₂的读数: $\sqrt{30^2 + (60 / \sqrt{2})^2} = 52.0 \text{ V}$

例4-3 已知 $u(t)$ 是周期函数，波形如图， $L=1/2\pi$ H， $C=125/\pi$ μ F，求理想变压器一次电流 $i_1(t)$ 及输出电压 u_2 的有效值。

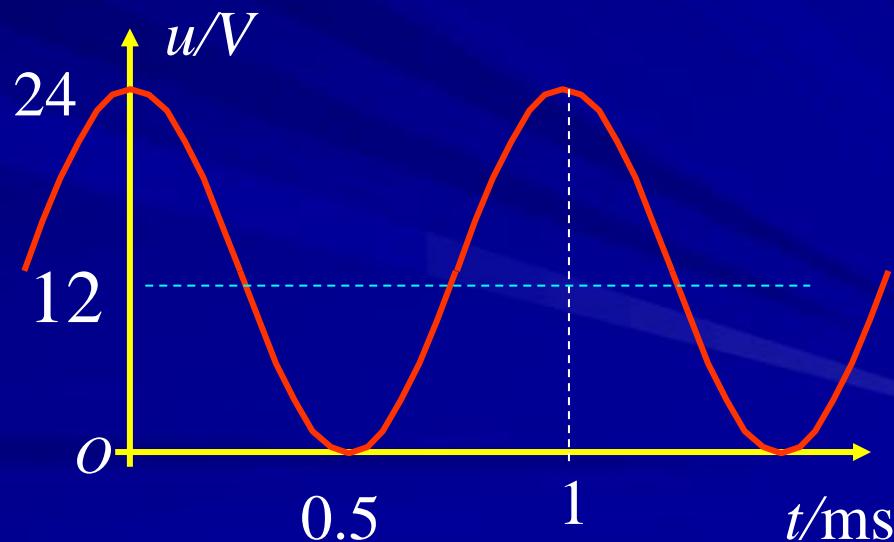
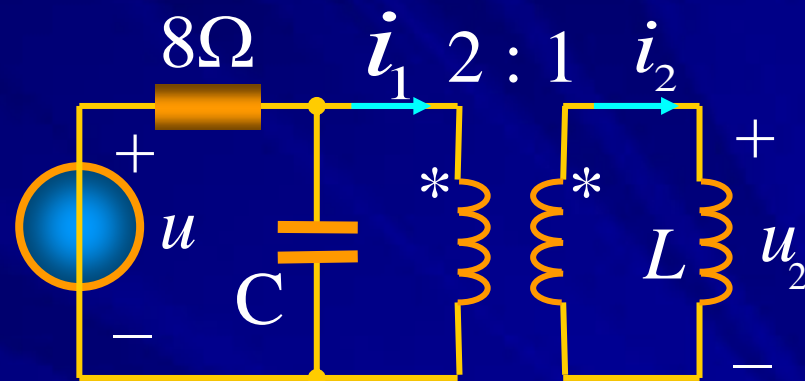
解 $\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 10^3$ rad/s

$$u(t) = 12 + 12 \cos(\omega t)$$

当 $u=12$ V作用时，电容开路、电感短路，有

$$i_1 = 12/8\text{A} = 1.5\text{A}$$

$$u_2 = 0$$



当 $u = 12\cos(\omega t)$ 作用时

$$X_C = \frac{-1}{\omega C} = \frac{-\pi}{2\pi \times 10^3 \times 125 \times 10^{-6}} = -4\Omega$$

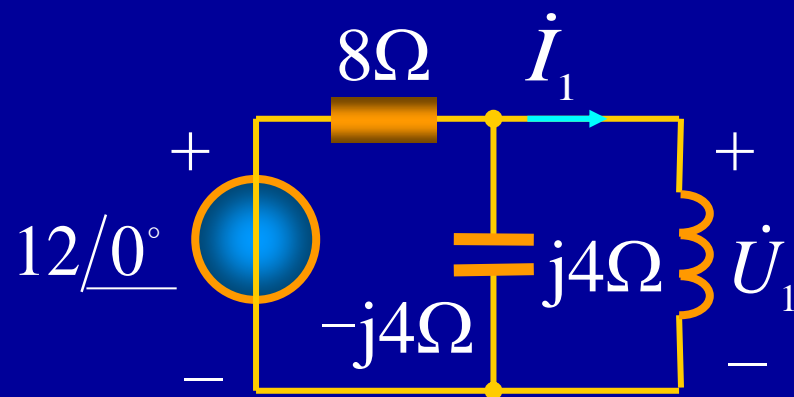
$$X_L = \omega L = 2\pi \times 10^3 \times \frac{1}{2\pi} \times 10^{-3} = 1\Omega$$

振幅相量

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{j4} = \frac{12}{j4} = -j3\text{A}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U} = 12/\underline{0^\circ} \text{V}$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{n} \dot{U}_1 = 6/\underline{0^\circ} \text{V}$$

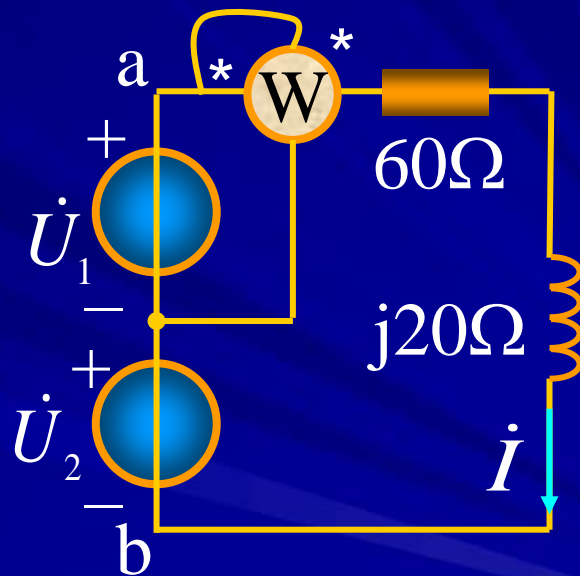


$$U_2 = \frac{6}{\sqrt{2}} \text{V} = 4.243\text{V} \quad i_1 = [1.5 + 3\cos(\omega t - 90^\circ)]\text{A}$$

例4-4 已知： $u_1 = 220\sqrt{2} \cos(\omega t) \text{V}$

$$u_2 = [220\sqrt{2} \cos \omega t + 100\sqrt{2} \cos(3\omega t + 30^\circ)] \text{V}$$

求 U_{ab} 、 i 、及功率表的读数。

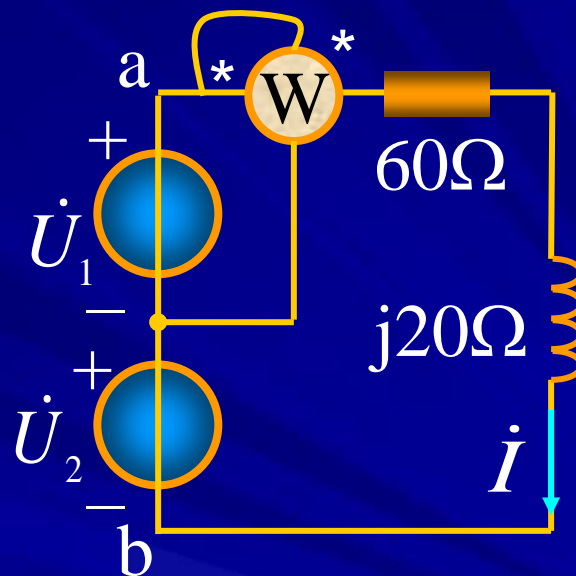


已知： $u_1 = 220\sqrt{2} \cos(\omega t) \text{ V}$

$$u_2 = [220\sqrt{2} \cos \omega t + 200\sqrt{2} \cos(3\omega t + 30^\circ)] \text{ V}$$

$U_{ab} = ?$

- ☐ A 380V
- ☐ B 440V
- ☐ C 451V
- ☒ D 483V



提交

例4-4 已知： $u_1 = 220\sqrt{2} \cos(\omega t) \text{ V}$

$$u_2 = [220\sqrt{2} \cos \omega t + 100\sqrt{2} \cos(3\omega t + 30^\circ)] \text{ V}$$

求 U_{ab} 、 i 、及功率表的读数。

解 $U_{ab} = \sqrt{440^2 + 100^2} \text{ V} = 451.22 \text{ V}$

一次谐波作用： $\dot{U}_{ab(1)} = 440 \angle 0^\circ \text{ V}$

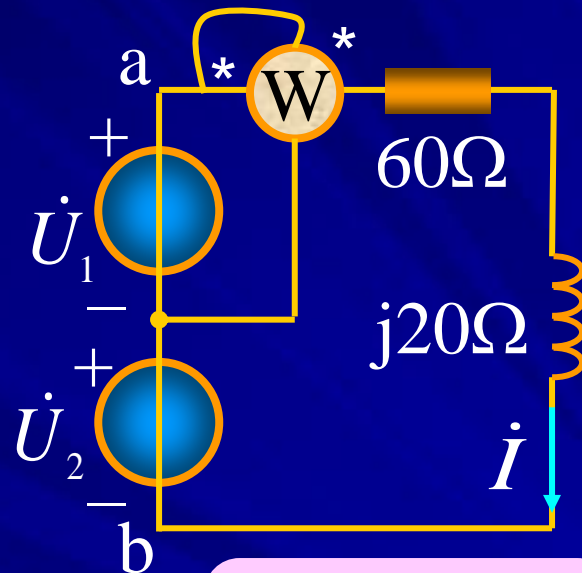
$$\dot{I}_{(1)} = \frac{440}{60 + j20} \text{ A} = 6.96 \angle -18.4^\circ \text{ A}$$

三次谐波作用： $\dot{U}_{ab(3)} = 100 \angle 30^\circ \text{ V}$

$$\dot{I}_{(3)} = \frac{100 \angle 30^\circ}{60 + j60} \text{ A} = 1.18 \angle -15^\circ \text{ A}$$

$$i = [6.96\sqrt{2} \cos(\omega t - 18.4^\circ) + 1.18\sqrt{2} \cos(3\omega t - 15^\circ)] \text{ A}$$

$$P = 220 \times 6.96 \cos 18.4^\circ \text{ W} = 1452.92 \text{ W}$$



测的是 u_1 的功率

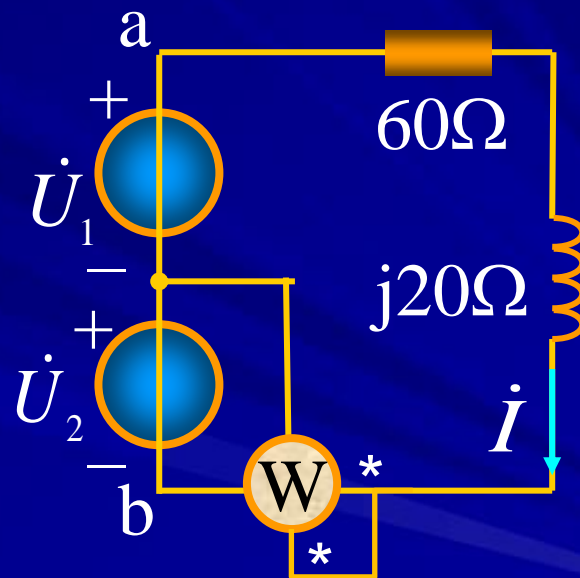
已知： $u_1 = 220\sqrt{2} \cos(\omega t) \text{V}$

$u_2 = [220\sqrt{2} \cos \omega t + 100\sqrt{2} \cos(3\omega t + 30^\circ)] \text{V}$

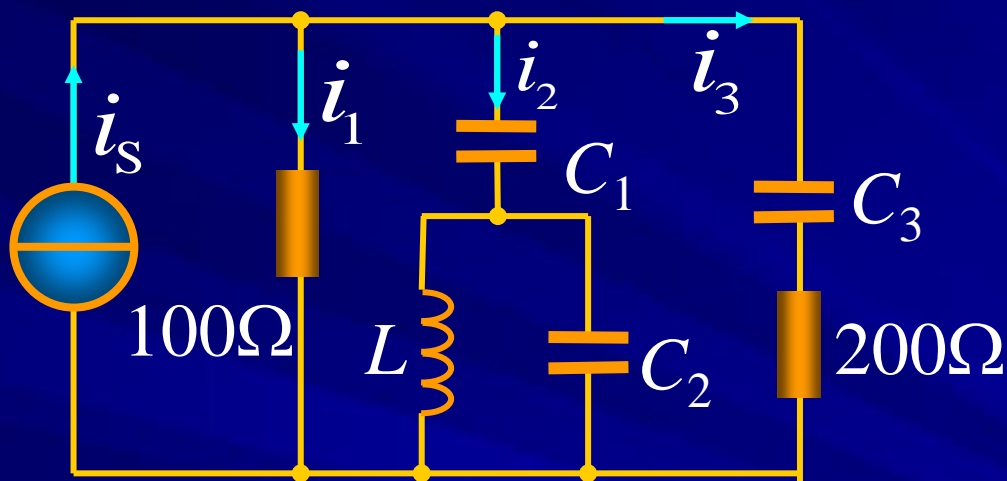
$i = [6.96\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ) + \sqrt{2} \cos(3\omega t - 15^\circ)] \text{A}$

问功率表的读数是多少？

- ☒ A -1396.7W
- ☐ B 1396.7W
- ☐ C 1536.34W
- ☐ D -1536.34W

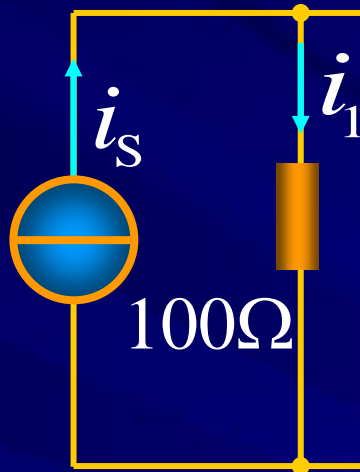


例4-5 已知： $i_s = [5 + 20\cos(10^3 t) + 10\cos(3 \times 10^3 t)]\text{A}$
 $L = 0.1\text{H}$, $C_3 = 1\mu\text{F}$, C_1 中只有基波电流, C_3 中只有三次谐波电流, 求 C_1 、 C_2 和各支路电流。



解 C_1 中只有基波电流, 说明 L 和 C_2 对三次谐波发生并联谐振。即

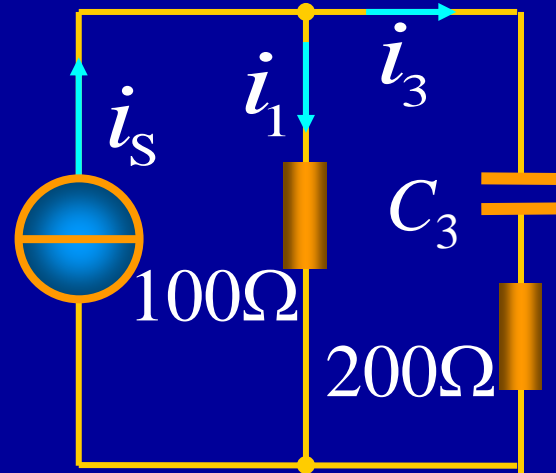
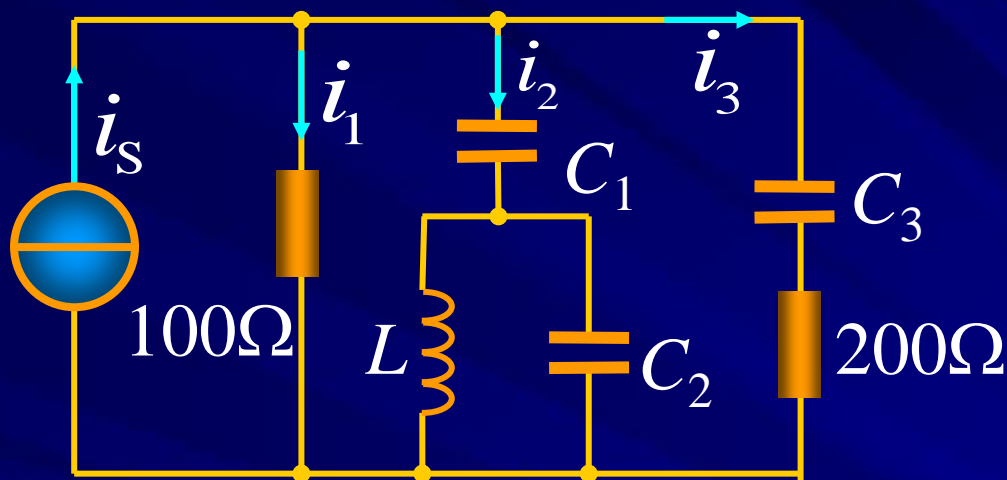
$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{9 \times 10^5} \text{F}$$



C_3 中只有三次谐波电流，说明 L 、 C_1 、 C_2 对一次谐波发生串联谐振。即

$$\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{L/C_2}{j(\omega L - 1/\omega C_2)} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{8}{9 \times 10^5} \text{F}$$

直流作用： $i_1 = i_s = 5\text{A}$



一次谐波作用: $i_2(t) = i_s = 20 \cos(1\,000t) \text{ A}$

三次谐波作用: $\dot{I}_{3(3)} = \frac{100 \times 10}{100 + 200 - j10^3/3} \text{ A} = 2.23 \angle 48^\circ \text{ A}$

$$\dot{I}_{1(3)} = \dot{I}_s - \dot{I}_{3(3)} = \left(10 - \frac{30}{9 - j10}\right) \text{ A} = 8.67 \angle -11^\circ \text{ A}$$

$$i_1(t) = [5 + 8.67 \cos(3\,000t - 11^\circ)] \text{ A}$$

$$i_3(t) = 2.23 \cos(3\,000t + 48^\circ) \text{ A}$$

*13-5 对称三相电路中的高次谐波

1. 对称三相电路中的高次谐波

设 $u_A = u(t)$ $u_B = u(t - \frac{T}{3})$ $u_C = u(t - \frac{2T}{3})$

展开成傅里叶级数(k 为奇数), 则有

$$\begin{cases} u_A = \sum U_{m(k)} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) & \text{A相} \\ u_B = \sum U_{m(k)} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k - \frac{2k\pi}{3}) & \text{B相} \\ u_C = \sum U_{m(k)} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k + \frac{2k\pi}{3}) & \text{C相} \end{cases}$$



讨论

①令 $k=6n+1$, ($n=0,1,2,\cdots$), 即: $k=1,7,13,\cdots$

各相的初相分别为

A相

B相

C相

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_k \\ \varphi_k - 4n\pi - \frac{2}{3}\pi \\ \varphi_k + 4n\pi + \frac{2}{3}\pi \end{array} \right.$$

正序对称
三相电源

②令 $k=6n+3$, 即: $k=3,9,15,\cdots$

各相的初相分别为

A相

$$\varphi_k$$

B相

$$\varphi_k - (2n + 1)2\pi$$

C相

$$\varphi_k + (2n + 1)2\pi$$

零序对称
三相电源③令 $k = 6n + 5$, 即: $k = 5, 11, 17, \dots$

各相的初相分别为

A相

$$\varphi_k$$

B相

$$\varphi_k - (2n + 2)2\pi + \frac{2}{3}\pi$$

C相

$$\varphi_k + (2n + 2)2\pi - \frac{2}{3}\pi$$

负序对称
三相电源



结论

- ①三相对称的非正弦周期量（奇谐波）可分解为3类对称组，即正序对称组、负序对称组和零序对称组。
- ②在上述对称的非正弦周期电压源作用下的对称三相电路的分析计算，按3类对称组分别进行。对于正序和负序对称组，可直接引用第十二章的方法和有关结论。

2. 零序组分量的响应

①对称的三角形电源

零序组电压源是等幅同相的电源

$$\dot{U}_{A(k)} = \dot{U}_{B(k)} = \dot{U}_{C(k)} = \dot{U}_{s(k)}$$

在三角形电源的回路中将产生零序环流

$$\dot{I}_{0(k)}(\text{零序}) = \frac{3\dot{U}_{s(k)}}{3Z_0} = \frac{\dot{U}_{s(k)}}{Z_0}(\text{零序})$$

电源内阻

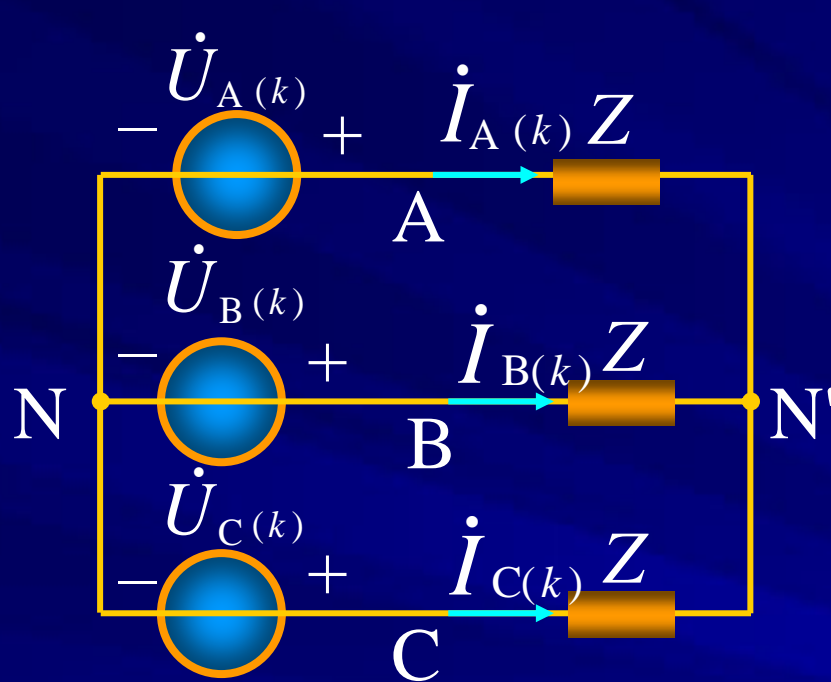
线电压 $\dot{U}_{AB(k)} = \dot{U}_{BC(k)} = \dot{U}_{CA(k)} = \dot{U}_{s(k)} - \dot{I}_{0(k)}Z_0 = 0$



结论 ①在环流的作用下零序线电压为零。

②整个系统中除电源中有零序组环流外，其余部分的电压、电流中将不含零序组分量。

②星形对称电源（无中性线对称系统）



$$\dot{U}_{N'N(k)} (\text{零序}) = \dot{U}_{s(k)} (\text{零序})$$

$$\dot{I}_{A(k)} = \dot{I}_{B(k)} = \dot{I}_{C(k)} = \frac{\dot{U}_{s(k)} - \dot{U}_{N'N}}{Z} = 0$$

$$\dot{U}_{AB(k)} = \dot{U}_{A(k)} - \dot{U}_{B(k)} = 0$$

$$\dot{U}_{BC(k)} = \dot{U}_{CA(k)} = 0$$



结论除了中点电压和电源相电压中含有零序组电压分量外，系统的其余部分的电压、电流都不含零序组分量。

③三相四线制对称系统

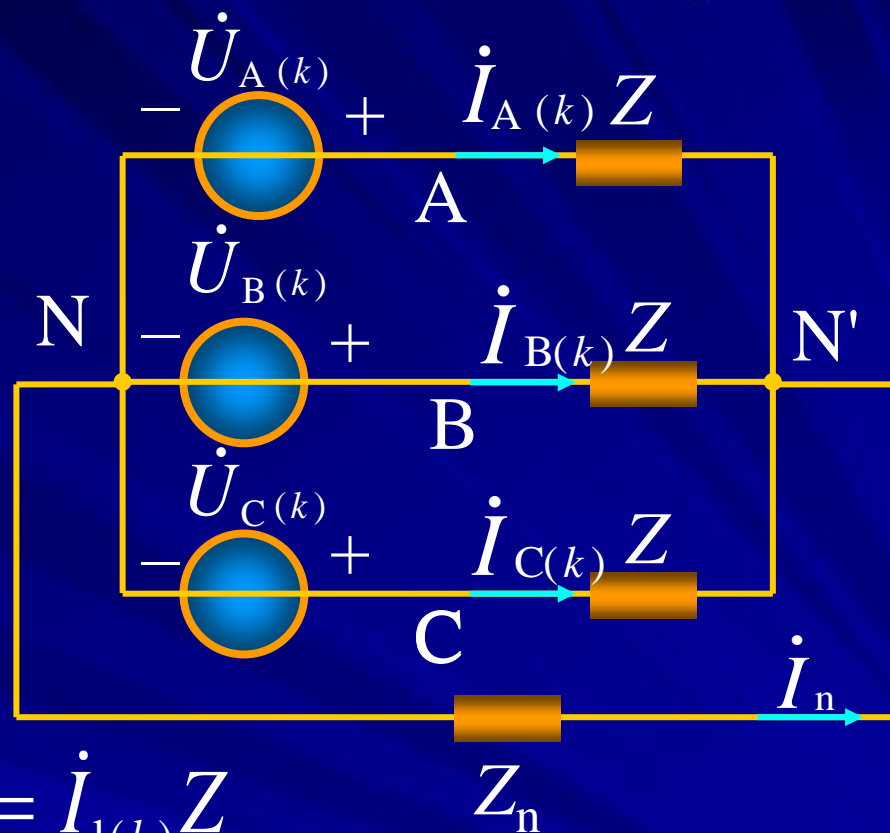
$$\dot{I}_{A(k)} = \dot{I}_{B(k)} = \dot{I}_{C(k)} = \frac{\dot{U}_{s(k)}}{Z + 3Z_n}$$

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{3Z_n \dot{U}_{s(k)}}{Z + 3Z_n}$$

$$\dot{I}_{n(k)} = -3\dot{I}_{1(k)}$$

$$\dot{U}_{AN'(k)} = \dot{U}_{BN'(k)} = \dot{U}_{CN'(k)} = \dot{I}_{1(k)} Z$$

$$\dot{U}_{AB(k)} = \dot{U}_{BC(k)} = \dot{U}_{CA(k)} = 0$$



结论 除线电压外，电路中其余部分的电压、电流中都含零序组分量。

*13-6 傅里叶级数的指数形式

1. 傅里叶级数的指数形式

三角形形式

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \phi_k)$$

利用欧拉公式有

$$\begin{aligned} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \phi_k) &= \frac{1}{2} [A_{km} (e^{j(k\omega_1 t + \phi_k)} + e^{-j(k\omega_1 t + \phi_k)})] \\ &= \frac{1}{2} A_{km} e^{j\phi_k} e^{jk\omega_1 t} + \frac{1}{2} A_{km} e^{-j\phi_k} e^{-jk\omega_1 t} \\ &= c_k e^{jk\omega_1 t} + c_k^* e^{-jk\omega_1 t} \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_1 t}$$

确定系数

指数形式

因为

$$a_k = A_{km} \cos \phi_k \quad b_k = -A_{km} \sin \phi_k$$

$$A_{km} e^{j\phi_k} = a_k - jb_k$$

$$\begin{aligned} \rightarrow c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_1 t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_1 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) [\cos(k\omega_1 t) - j \sin(k\omega_1 t)] dt \end{aligned}$$



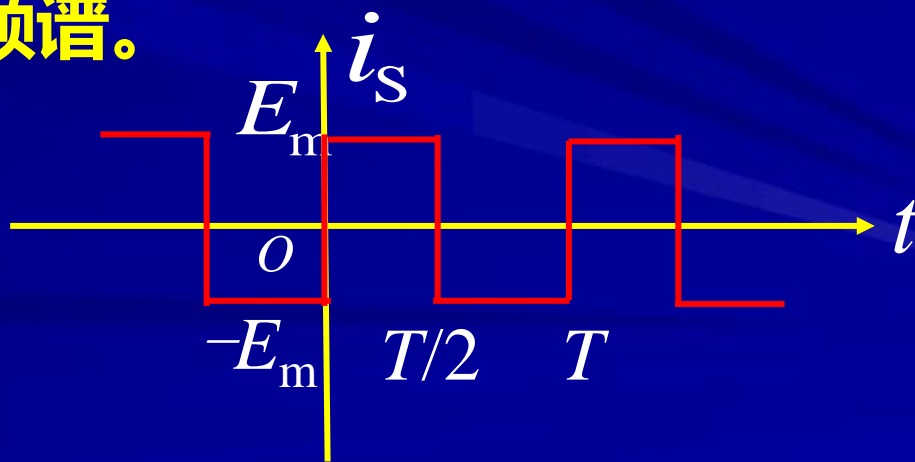
注意 画傅里叶级数指数形式的频谱时

①画出 $|c_k|$ 对正、负 k 的关系，频谱图对于纵轴对称，只要研究“正半边”即可，其线谱“高度”是傅氏频谱的一半。

②画出 c_k 的辐角与 k 的关系得相位频谱

例6-1 试将矩形波展开为指数形式的傅氏级数，并画出幅度频谱和相位频谱。

解



$$A_{km} e^{j\phi_k} = a_k - jb_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{E_m}{jk\pi} (1 - e^{-jk\pi})^2$$

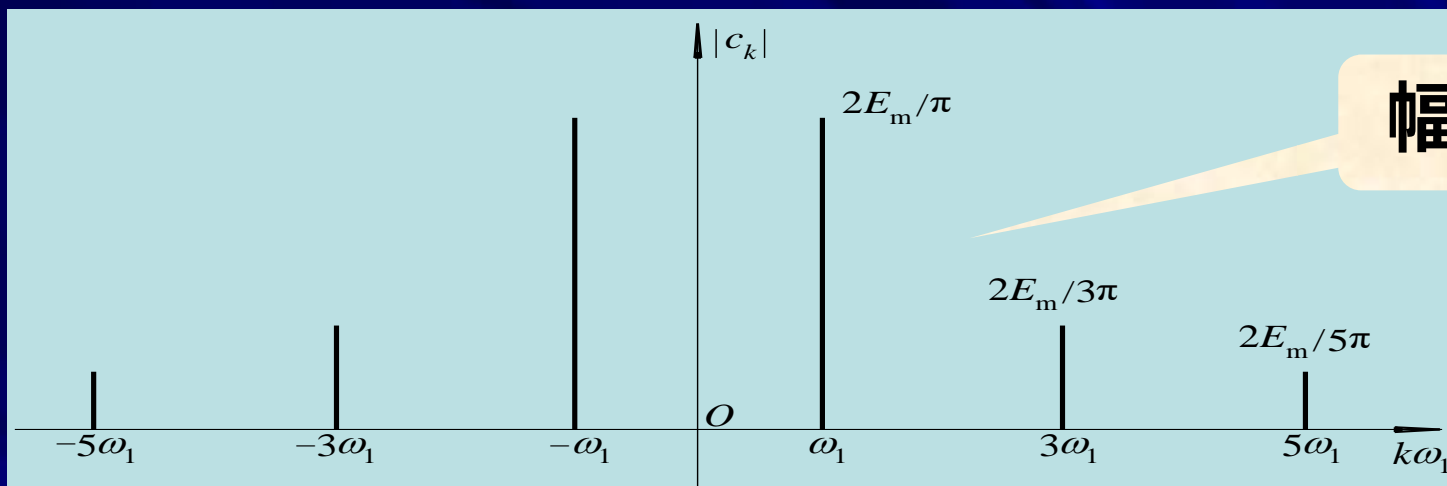
$$c_k = \frac{1}{2} A_{km} e^{j\phi_k} = \frac{E_m}{j2k\pi} (1 - 2e^{-jk\pi} + e^{-j2k\pi})$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{E_m}{j2k\pi} \times 4 = \frac{2E_m}{jk\pi} & \text{当 } k \text{ 为奇数时} \\ 0 & \text{当 } k \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

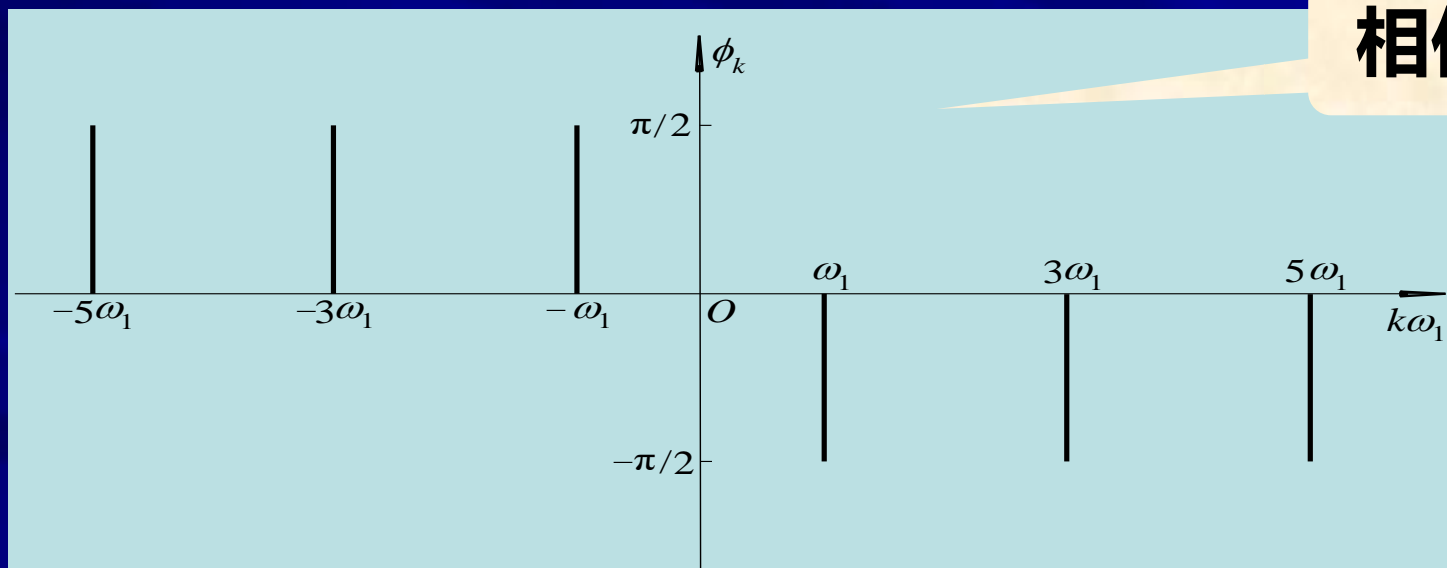
$$f(t) = \frac{2E_m}{\pi} (e^{j(\omega_1 t - \pi/2)} + e^{-j(\omega_1 t - \pi/2)}) +$$

$$\frac{2E_m}{3\pi} (e^{j(3\omega_1 t - \pi/2)} + e^{-j(3\omega_1 t - \pi/2)}) + \dots$$

幅度频谱



相位频谱



*13-7 傅里叶积分简介

1. 傅里叶级数积分 (正变换)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$



注意

①上式表述的频谱函数是离散的线状频谱，
相邻谱线之间的频差

$$\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

②当 $T \rightarrow \infty$ 时, $\Delta\omega \rightarrow 0$, 离散的线状频谱将变为连续的频谱, 即 c_k 变为 ω 的连续函数。

③如 $f(t)$ 在周期内的积分有界 (满足狄里赫利条件)
 c_k 在全频域内是一个无限小的连续函数。

定义
$$F(jk\omega_1) = Tc_k = \frac{2\pi c_k}{\Delta\omega} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow d\omega \\ k\omega_1 \rightarrow \omega}} F(jk\omega_1) = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶正变换

2. 傅里叶逆变换

$$F(jk\omega_1) = Tc_k = \frac{2\pi c_k}{\Delta\omega} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

$$\rightarrow c_k = \frac{F(jk\omega_1)}{T} = \frac{\Delta\omega F(jk\omega_1)}{2\pi}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega F(jk\omega_1)}{2\pi} e^{-jk\omega_1 t}$$

当 $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, $k\omega_1 \rightarrow \omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

傅里叶逆变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶逆
变换对



注意

任一非周期信号都可以看作周期为无限长的周期信号，所以傅里叶变换对为分析研究任意信号奠定了理论基础。在线性电路中，任一形式激励的零状态响应，都可以通过傅里叶变换对，用谐波分析法进行分析研究。