



华北电力大学
NORTH CHINA ELECTRIC POWER UNIVERSITY

4 频率域滤波



主要内容

- 频率域变换概述
 - ✓ 为什么要在频率域研究图像
- 傅里叶变换
 - ✓ 数学基础
 - ✓ 傅里叶级数
 - ✓ 傅里叶变换
- Matlab中的傅里叶变换函数
 - ✓ fft2
 - ✓ fftshift
 - ✓ ifft2



主要内容

- 从空间滤波器获得频率域滤波器
 - ✓ 对空间滤波器进行傅里叶变换
 - ✓ 将空间域滤波器直接转为频域滤波器
- 频率域低通滤波器
 - ✓ 理想低通滤波器
 - ✓ 巴特沃思低通滤波器
 - ✓ 高斯低通滤波器
- 频率域高通滤波器
 - ✓ 理想高通滤波器
 - ✓ 巴特沃思高通滤波器
 - ✓ 高斯高通滤波器



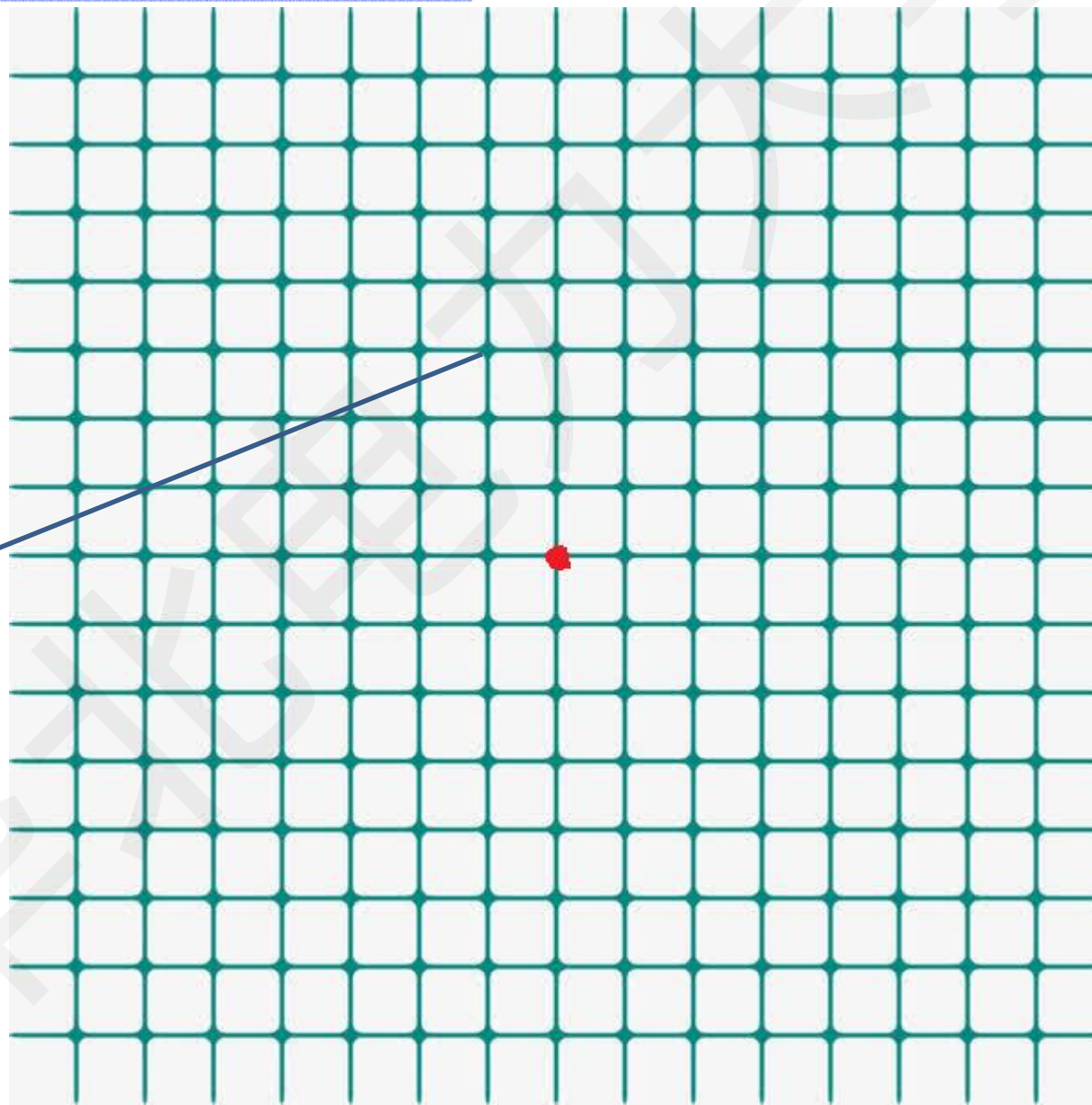
4.5 在频率域生成滤波器

- 直接在频率域构造滤波器，这些滤波器都被规定为到滤波器中心点的距离函数。
 - ✓ meshgrid函数



4.5 在频率域生成滤波器

$(-1,3)$ 距离?





4.5 在频率域生成滤波器

✓ (1) $u = -W/2:(W/2-1);$

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
----	----	----	----	----	---	---	---	---	---

✓ (2) $v = -H/2:(H/2-1);$

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
----	----	----	----	----	---	---	---	---	---

✓ (3) $[V, U] = \text{meshgrid}(v, u);$

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

V

-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

U



4.5 在频率域生成滤波器

✓ (4) $D = \sqrt{U.^2 + V.^2}$; % $D = \text{hypot}(U, V)$; 快速计算

D

7.071	6.403	5.831	5.385	5.099	5	5.099	5.385	5.831	6.403
6.403	5.657	5	4.472	4.123	4	4.123	4.472	5	5.657
5.831	5	4.243	3.606	3.162	3	3.162	3.606	4.243	5
5.385	4.472	3.606	2.828	2.236	2	2.236	2.828	3.606	4.472
5.099	4.123	3.162	2.236	1.414	1	1.414	2.236	3.162	4.123
5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
5.099	4.123	3.162	2.236	1.414	1	1.414	2.236	3.162	4.123
5.385	4.472	3.606	2.828	2.236	2	2.236	2.828	3.606	4.472
5.831	5	4.243	3.606	3.162	3	3.162	3.606	4.243	5
6.403	5.657	5	4.472	4.123	4	4.123	4.472	5	5.657



4.5.1 理想低通滤波器

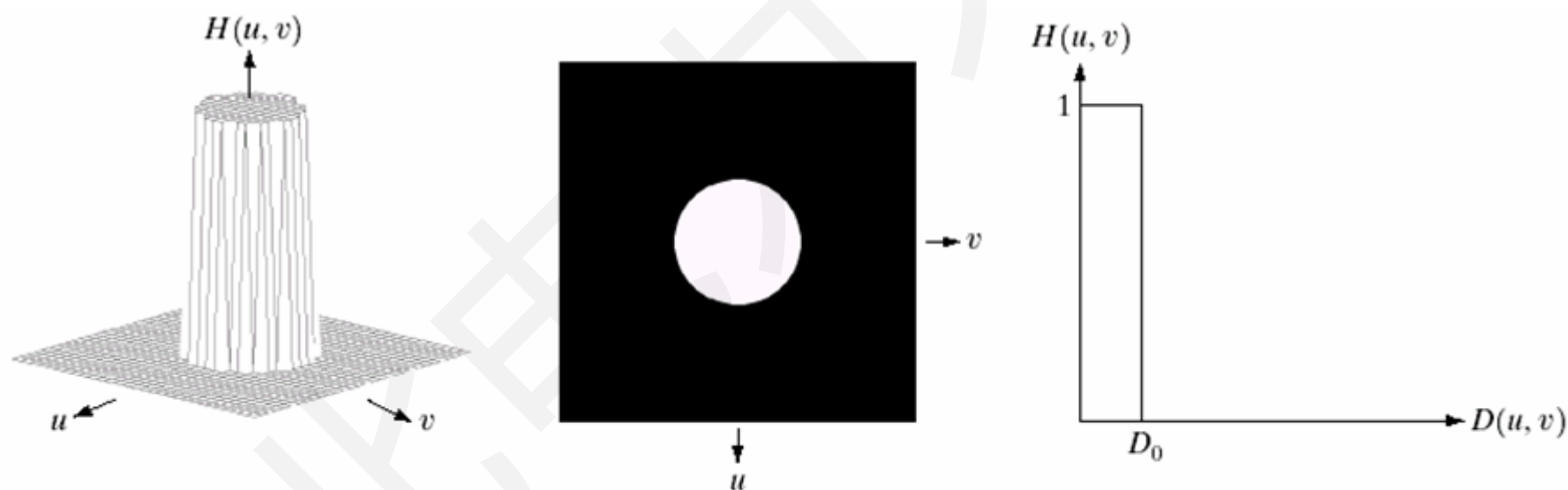
- 截断傅里叶变换中的所有处于指定距离 D_0 之外的高频成分。

$$H_{ILPF}(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}, \quad D_0 > 0$$

频率域的中心在 $(\frac{P}{2}, \frac{Q}{2})$ ，从点 (u, v) 到中心（原点）的距离如下

$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

4.5.1 理想低通滤波器



说明：在半径为 D_0 的圆内，所有频率没有衰减地通过滤波器，而在此半径的圆之外的所有频率完全被衰减掉。



4.5.1 理想低通滤波器

- 图像的总功率值 P_T 为：

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u, v)$$

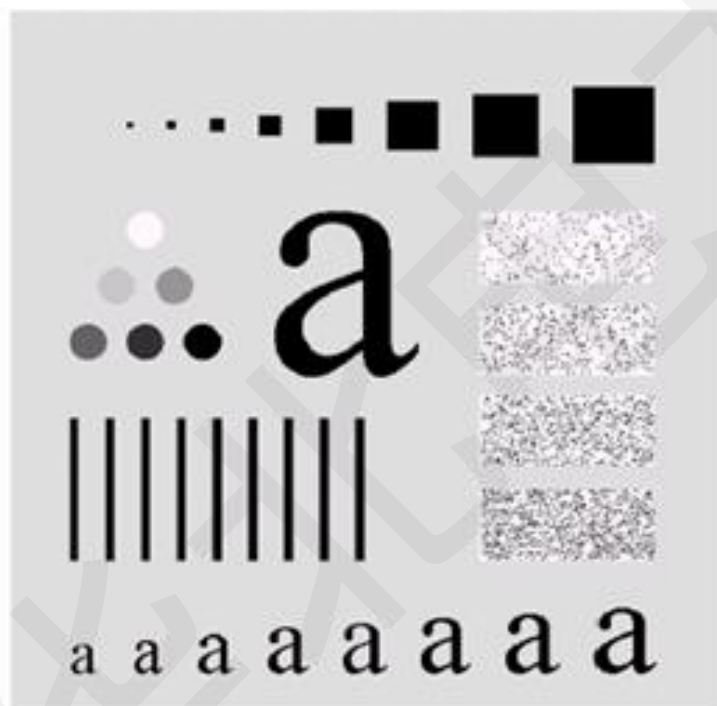
$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

- 原点在频率域的中心，半径为 D_0 的圆包含的功率为：

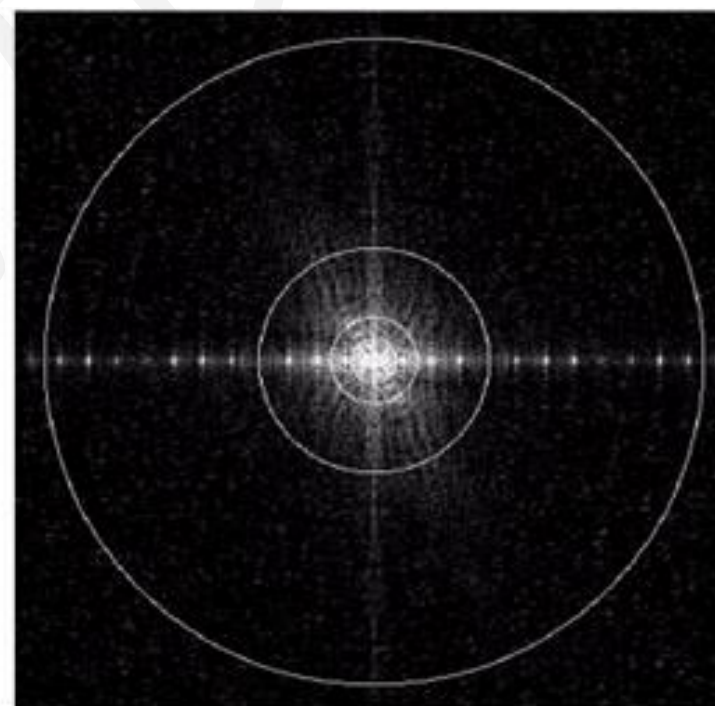
$$\alpha = \left[\sum_u \sum_v P(u, v) / P_T \right]$$

4.5.1 理想低通滤波器

圆环，占图像总功率的百分比为半径为5，15，30，80和230个像素时92.0%，94.6%，96.4%，98.0%和99.5%



500×500像素的原图

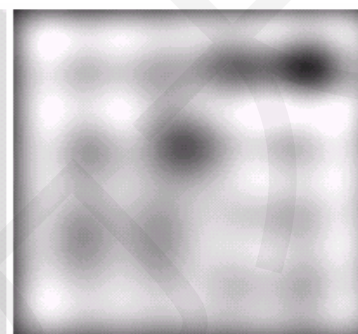
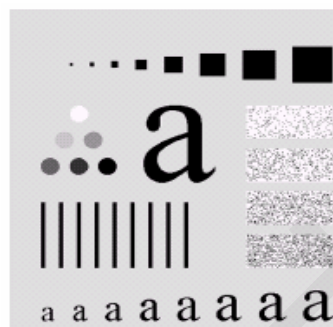


图像的傅里叶频谱



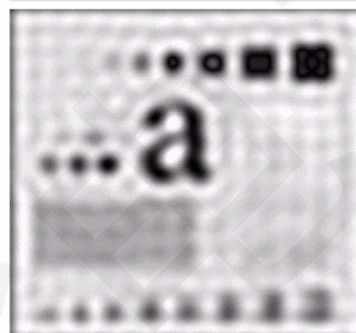
4.5.1 理想低通滤波器

原图



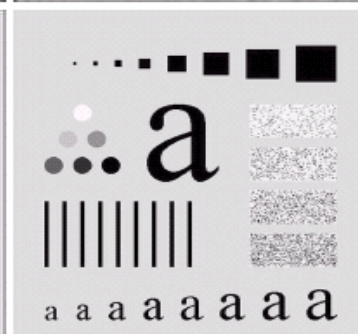
半径是5的理想低通滤波, 滤除8%的总功率, 模糊说明多数尖锐细节在8%的功率之内这

半径是15的理想低通滤波, 滤除5.4%的总功率



半径是30的理想低通滤波, 滤除3.6%的总功率

半径是80的理想低通滤波, 滤除2%的总功率



半径是230的理想低通滤波, 滤除0.5%的总功率, 与原图接近说明边缘信息在0.5%以上的功率中

结论: 半径 D_0 越小, 模糊越大; 半径 D_0 越大, 模糊越小



4.5.1 理想低通滤波器

```
I1 = imread('mean.jpg');  
I1 = rgb2gray(I1); I1 = im2double(I1);  
[W, H] = size(I1); %图像的尺寸  
u = -W/2:(W/2-1); %构建u: 1*W  
v = -H/2:(H/2-1); %构建v: 1*H  
[V, U] = meshgrid(v,u); %构建网格数组, U中每行相同, V中每列相同  
D=sqrt(U.^2+V.^2); %计算离中心位置的距离, D=hypot(U,V);快速计算方法  
D0=5;  
K=double(D<=D0); % 构建滤波器, 小于D0距离的置为1, 其他为0  
J=fftshift(fft2(I1)); %原图傅里叶变换  
L=J.*K; % 频率域滤波  
I=ifft2(fftshift(L)); %傅里叶反变换  
figure(1);  
subplot(1,2,1);imshow(I1);title('原图像');  
subplot(1,2,2);imshow(I);title('频率域滤波效果');
```



4.5.2 巴特沃思低通滤波器

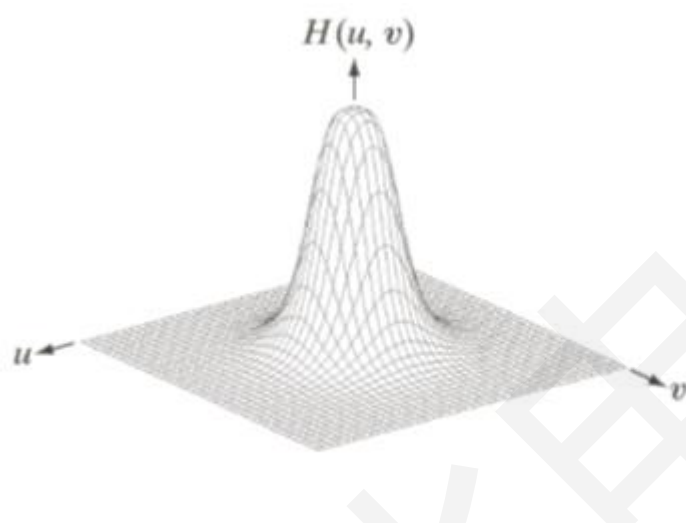
- n阶巴特沃思低通滤波器(BLPF)定义如下

$$H_{BLPF}(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

- ✓ D_0 为截至频率距原点的距离， $D(u,v)$ 是点 (u,v) 距原点的距离。当 $D(u,v)=D_0$ 时， $H(u,v)=0.5$ (最大值是1，当 $D(u,v)=0$)
- ✓ 它的特性是连续性衰减，而不象理想滤波器那样陡峭变化，即明显的不连续性。因此采用该滤波器滤波在抑制噪声的同时，图像边缘的模糊程度大大减小。

4.5.2 巴特沃思低通滤波器

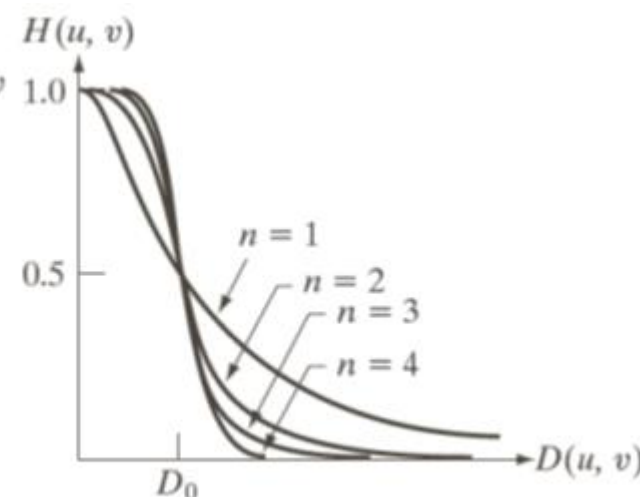
透视图



滤波器



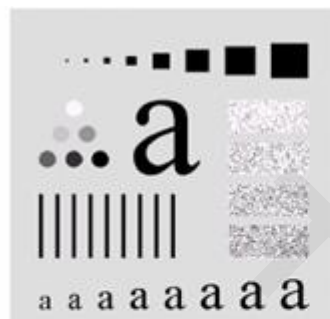
阶数从1到4的滤波器横截面



可用于平滑处理，如图像由于量化不足产生虚假轮廓时，常可用低通滤波进行平滑以改进图像质量。通常，BLPF的平滑效果好于ILPF。

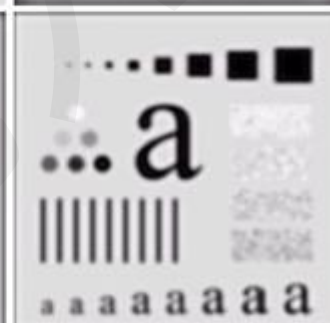
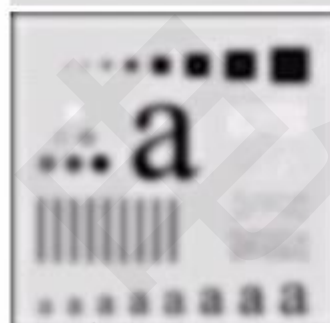
4.5.2 巴特沃思低通滤波器

原图



半径是5的BLPF滤波

半径是15的BLPF滤波



半径是30的BLPF滤波

半径是80的BLPF滤波



半径是230的BLPF滤波

$n=2$

4.5.2 巴特沃思低通滤波器

所有的滤波器都有半径为5的截止频率 D_0

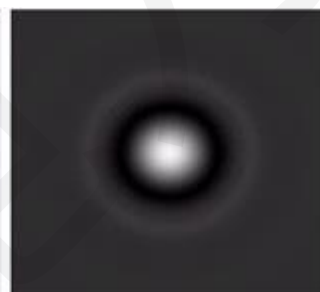
阶数 $n=1$ 无
振铃和负值



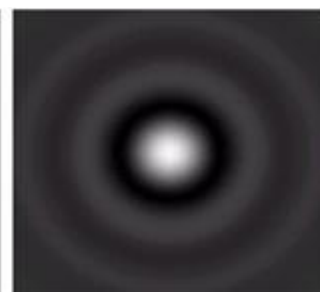
阶数 $n=2$ 轻微
振铃和负值



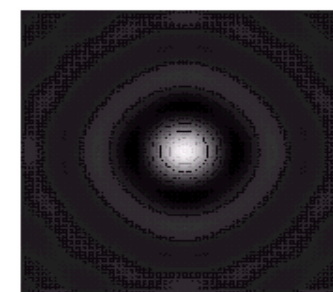
阶数 $n=5$ 明显
振铃和负值



阶数 $n=20$ 与
ILPF相似



ILPF



二阶BLPF处于有效低通滤波和可接受的振铃特征之间



4.5.2 巴特沃思低通滤波器

```
I1 = imread('mean.jpg');  
I1 = rgb2gray(I1); I1 = im2double(I1);  
[W, H] = size(I1); % 图像的尺寸  
u = -W/2:(W/2-1); % 构建u: 1*W  
v = -H/2:(H/2-1); % 构建v: 1*H  
[V, U] = meshgrid(v,u); % 构建网格数组, U中每行相同, V中每列相同  
D=sqrt(U.^2+V.^2); % 计算离中心位置的距离, D=hypot(U,V); 快速计算方法  
D0=5; n=2;  
K=1./(1+(D./D0).^(2*n)); % 构建滤波器  
J=fftshift(fft2(I1)); % 原图傅里叶变换  
L=J.*K; % 频率域滤波  
I=ifft2(fftshift(L)); % 傅里叶反变换  
figure(1);  
subplot(1,2,1); imshow(I1); title('原图像');  
subplot(1,2,2); imshow(I); title('频率域滤波效果');
```



4.5.3 高斯低通滤波器

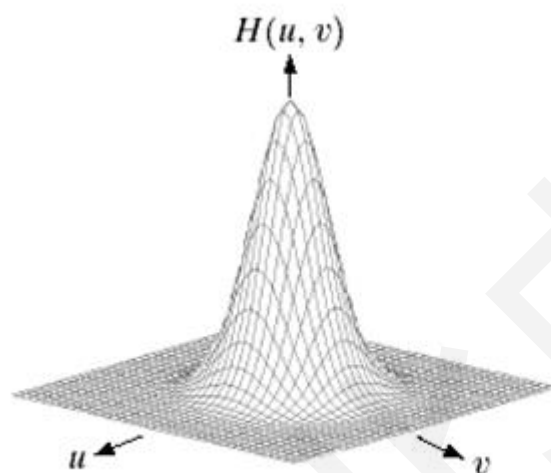
- 二维高斯低通滤波器(GLPF)定义如下

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

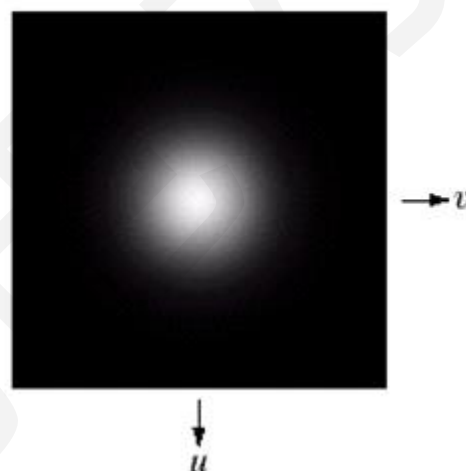
- ✓ 当 $D(u, v)=D_0$ 时，滤波器下降到它最大值的0.607处。

4.5.3 高斯低通滤波器

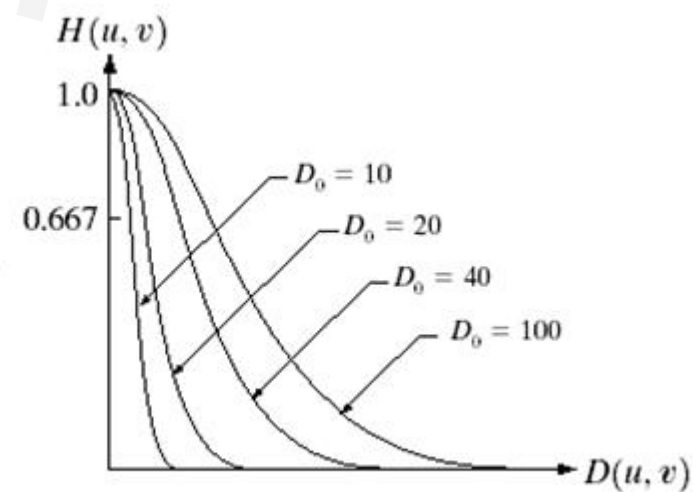
透视图



滤波器



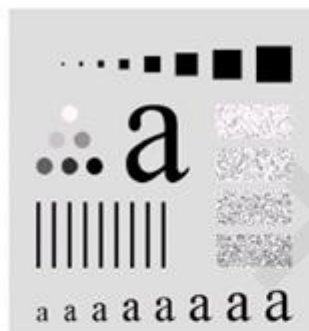
各种 D_0 值的滤波器横截面





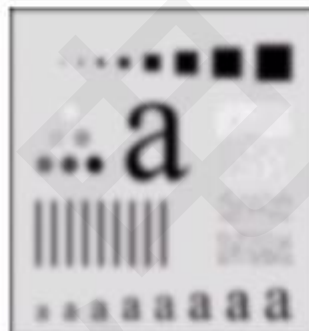
4.5.3 高斯低通滤波器

原图



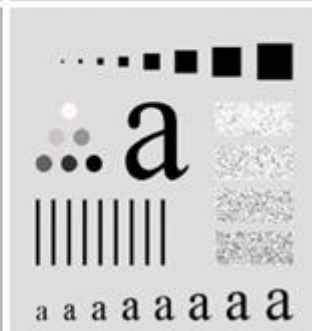
半径是5的GLPF滤波

半径是15的GLPF滤波



半径是30的GLPF滤波

半径是80的GLPF滤波



半径是230的GLPF滤波



4.5.3 高斯低通滤波器

```
I1 = imread('mean.jpg');  
I1 = rgb2gray(I1); I1 = im2double(I1);  
[W, H] = size(I1); %图像的尺寸  
u = -W/2:(W/2-1); %构建u: 1*W  
v = -H/2:(H/2-1); %构建v: 1*H  
[V, U] = meshgrid(v,u); %构建网格数组, U中每行相同, V中每列相同  
D=sqrt(U.^2+V.^2); %计算离中心位置的距离, D=hypot(U,V);快速计算方法  
D0=5;  
K=exp(-(D.^2)./(2*D0.^2)); % 构建滤波器  
J=fftshift(fft2(I1)); %原图傅里叶变换  
L=J.*K; % 频率域滤波  
I=ifft2(fftshift(L)); %傅里叶反变换  
figure(1);  
subplot(1,2,1);imshow(I1);title('原图像');  
subplot(1,2,2);imshow(I);title('频率域滤波效果');
```



4.6 频率域高通滤波器

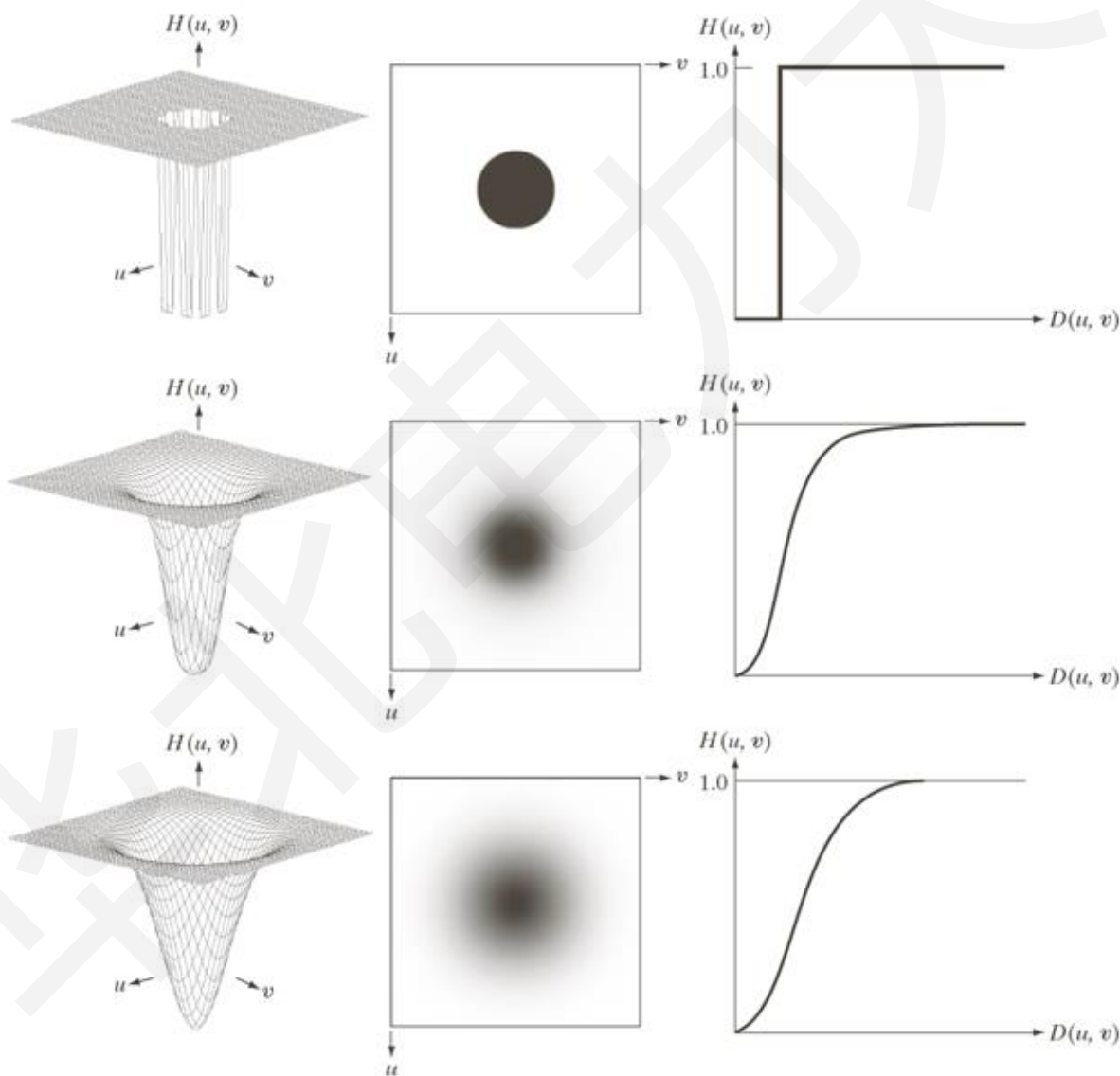
- 图像的边缘、细节主要位于高频部分，而图像的模糊是由于高频成分比较弱产生的。频率域锐化就是为了消除模糊，突出边缘。因此采用高通滤波器让高频成分通过，使低频成分削弱，再经逆傅立叶变换得到边缘锐化的图像。
 - ✓ 理想高通滤波器
 - ✓ 巴特沃思高通滤波器
 - ✓ 高斯高通滤波器

4.6 频率域高通滤波器

透视

图像表示

横截面



理想高通滤波器

巴特沃思高通

高斯高通滤波器



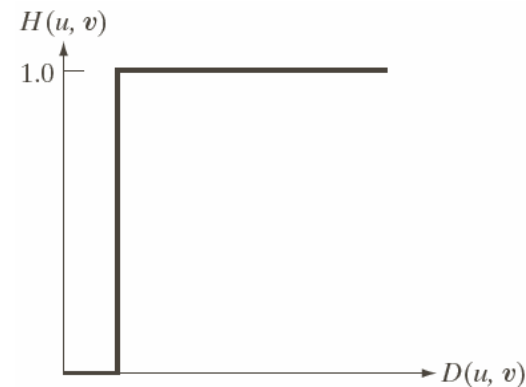
4.6.1 理想高通滤波器

- 截断傅里叶变换中所有处于指定距离 D_0 之内的低频成分

$$H_{IHPF}(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}, \quad D_0 > 0$$

✓ 频率域的中心在 $(\frac{P}{2}, \frac{Q}{2})$, 从点 (u, v) 到中心 (原点) 的距离如下

$$D(u, v) = \left[\left(u - \frac{P}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{Q}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



4.6.1 理想高通滤波器

$D_0=30$



$D_0=60$



$D_0=160$





4.6.1 理想高通滤波器

```
I1 = imread('mean.jpg');
I1 = rgb2gray(I1); I1 = im2double(I1);
[W, H] = size(I1); %图像的尺寸
u = -W/2:(W/2-1); %构建u: 1*W
v = -H/2:(H/2-1); %构建v: 1*H
[V, U] = meshgrid(v,u); %构建网格数组, U中每行相同, V中每列相同
D=sqrt(U.^2+V.^2); %计算离中心位置的距离, D=hypot(U,V);快速计算方法
D0=5;
K=double(D>D0); % 构建滤波器, 小于等于D0距离的置为0, 其他为1
J=fftshift(fft2(I1)); %原图傅里叶变换
L=J.*K; % 频率域滤波
I=ifft2(fftshift(L)); %傅里叶反变换
figure(1);
subplot(1,2,1);imshow(I1);title('原图像');
subplot(1,2,2);imshow(I);title('频率域滤波效果');
```



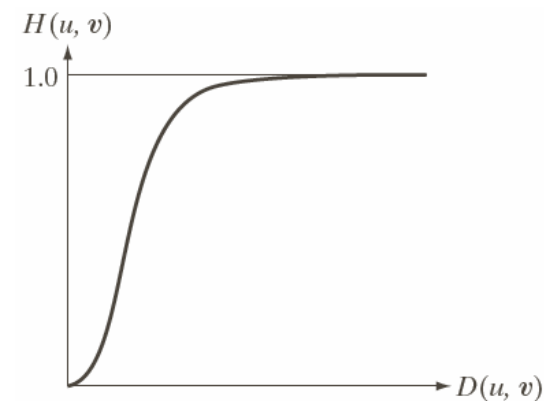

4.6.2 巴特沃思高通滤波器

- n 阶巴特沃思高通滤波器(BHPF)定义如下

$$H_{BHPF}(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

$$H_{BHPF}(u, v) = 1 - H_{BLPF}(u, v) = 1 - \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

$$= \left[\frac{D(u, v) / D_0}{1 + D(u, v) / D_0} \right]^{2n} = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

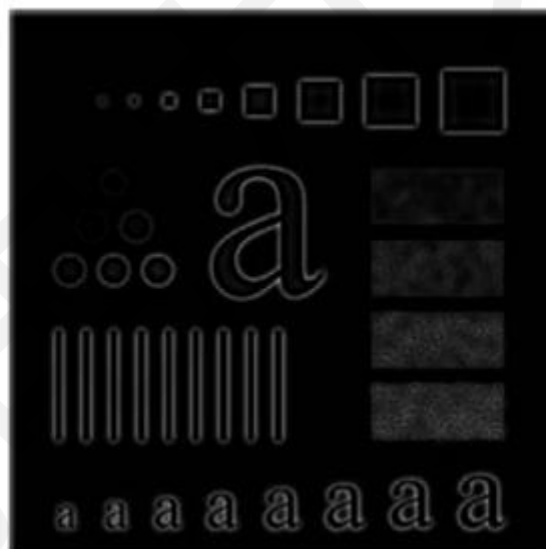


4.6.2 巴特沃思高通滤波器

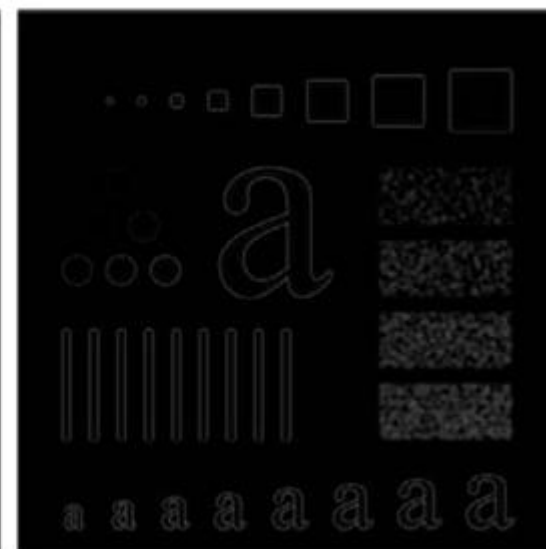
$D_0=30$



$D_0=60$



$D_0=160$





4.6.2 巴特沃思高通滤波器

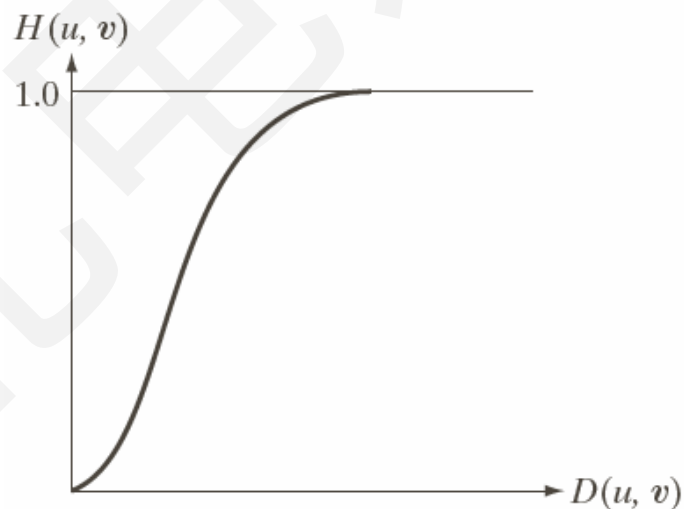
```
I1 = imread('mean.jpg');  
I1 = rgb2gray(I1); I1 = im2double(I1);  
[W, H] = size(I1); % 图像的尺寸  
u = -W/2:(W/2-1); % 构建u: 1*W  
v = -H/2:(H/2-1); % 构建v: 1*H  
[V, U] = meshgrid(v,u); % 构建网格数组, U中每行相同, V中每列相同  
D=sqrt(U.^2+V.^2); % 计算离中心位置的距离, D=hypot(U,V); 快速计算方法  
D0=5; n=2;  
K=1./(1+(D0./D).^(2*n)); % 构建滤波器  
J=fftshift(fft2(I1)); % 原图傅里叶变换  
L=J.*K; % 频率域滤波  
I=ifft2(fftshift(L)); % 傅里叶反变换  
figure(1);  
subplot(1,2,1); imshow(I1); title('原图像');  
subplot(1,2,2); imshow(I); title('频率域滤波效果');
```




4.6.3 高斯高通滤波器

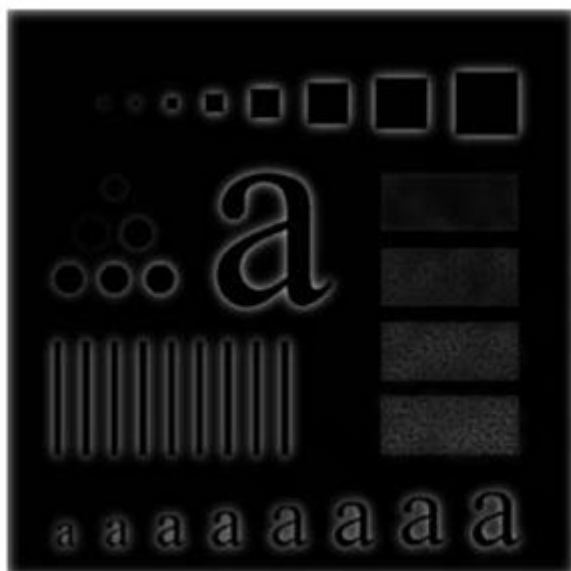
- 截频距原点为 D_0 的高斯高通滤波器(GHPF)定义为

$$H_{GHPF}(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$



4.6.3 高斯高通滤波器

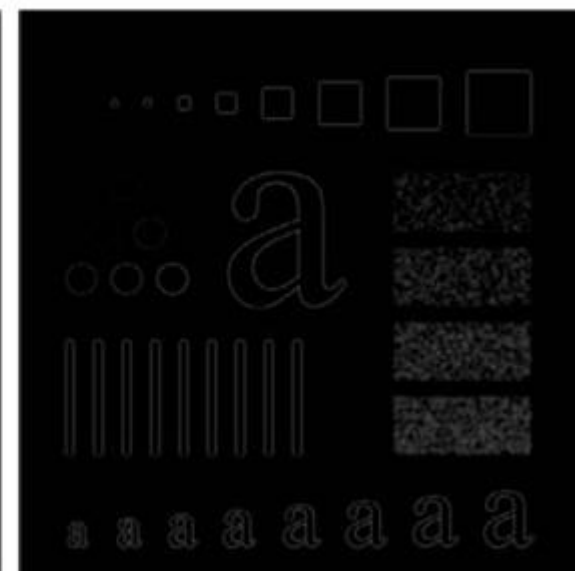
$D_0=30$



$D_0=60$



$D_0=160$





4.6.3 高斯高通滤波器

```
I1 = imread('mean.jpg');  
I1 = rgb2gray(I1); I1 = im2double(I1);  
[W, H] = size(I1); %图像的尺寸  
u = -W/2:(W/2-1); %构建u: 1*W  
v = -H/2:(H/2-1); %构建v: 1*H  
[V, U] = meshgrid(v,u); %构建网格数组, U中每行相同, V中每列相同  
D=sqrt(U.^2+V.^2); %计算离中心位置的距离, D=hypot(U,V);快速计算方法  
D0=5;  
K=1-exp(-(D.^2)./(2*D0.^2)); % 构建滤波器  
J=fftshift(fft2(I1)); %原图傅里叶变换  
L=J.*K; % 频率域滤波  
I=ifft2(fftshift(L)); %傅里叶反变换  
figure(1);  
subplot(1,2,1);imshow(I1);title('原图像');  
subplot(1,2,2);imshow(I);title('频率域滤波效果');
```




4.6.3 高斯高通滤波器

- 截频距原点为 D_0 的高斯高通滤波器(GHPF)定义为

$$H_{GHPF}(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

