相似矩阵及二次型

§1 向量的内积、长度与正交性

内积：有n维向量 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$，$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

$[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \iff \boxed{[x,y]=x^Ty}$

（数量积的推广）

施瓦茨不等式：$[x,y]^2\le[x,x][y,y]$ → $-1\le\dfrac{[x,y]}{\|x\|\|y\|}\le1$

长度（范数）：$\|x\|=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

- 非负性：$\|x\|\ge0$
- 齐次性：$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$
- 单位向量：$x=\dfrac{a}{\|a\|}$ → 单位化

夹角：$\cos\theta=\dfrac{[x,y]}{\|x\|\|y\|}$　　$\theta=\arccos\dfrac{[x,y]}{\|x\|\|y\|}$

正交：$[x,y]=0$ 时，称x与y正交　　$x=0$时与任何向量都正交

- 若n维向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关.
- **标准正交基**：n维向量 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 是向量空间V的一个基，它们两两正交且都是单位向量

① 求向量在标准正交基中坐标：V中任一向量a可表示为 $a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_re_r$

若求 λ_i，可用 e_i^T 左乘 a，即 $\lambda_i=e_i^Ta=[a,e_i]$

② 施密特正交化

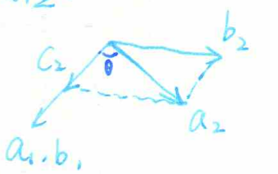
$b_1=a_1$

$b_2=a_2-\dfrac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1$

$\cdots$

$b_r=a_r-\dfrac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]}b_1-\dfrac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2]}b_2-\cdots-\dfrac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1},b_{r-1}]}b_{r-1}$

☆ 推：



$b_2=a_2-c_2$，c_2为a_2在b_1上的投影向量

$c_2=\underbrace{\dfrac{[b_1,a_2]}{\|b_1\|\|a_2\|}}_{\cos\theta}\cdot\underbrace{\|a_2\|}_{投影}\cdot\underbrace{\dfrac{b_1}{\|b_1\|}}_{方向向量}=\dfrac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1$

- **正交矩阵**：$A^TA=E\ (A^{-1}=A^T)$ $\iff$ $\begin{bmatrix}a_1^T\\a_2^T\\\vdots\\a_n^T\end{bmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=E$

$\boxed{a_i^Ta_j=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\ne j\end{cases}}$

A的行（列）向量都是单位向量且两两正交

A的n个行（列）向量构成 R^n 的一个标准正交基

(i) 若A为正交矩阵，则 $A^{-1}=A^T$ 也是正交矩阵，且 $|A|=\pm1$

(ii) 若A、B都是正交矩阵，则AB也是正交矩阵

- 若P为正交矩阵，则线性变换 $y=Px$ 称为正交变换