3. 向量组的秩

① 设有向量组A，如果在A中能选出r个向量 $a_1, a_2, \cdots a_r$，满足：

(i) 向量组 A_0：$a_1, a_2, \cdots a_r$ 线性无关

(ii) 向量组A中任意r+1个向量(如果有)都线性相关

则称 A_0 是A的一个最大线性无关向量组(最大无关组)

无关向量组 向量个数最大 ①最大 ②无关

最大无关组所含向量个数r称向量组A的秩，记 R_A

只含零向量的向量组没有最大无关组，规定它的秩为0

向量个数与维数的最小值

② 推论：设向量组 A_0：$a_1, a_2, \cdots a_r$ 是向量组A的一个部分组，且满足

(i) 向量组 A_0 线性无关

(ii) 向量组A的任一向量都能由 A_0 线性表示

那么 A_0 便是A的一个最大无关组

即能与向量组自身等价的线性无关部分组一定是最大无关组

③ 矩阵的秩 = 列向量组的秩 = 行向量组的秩

若 D_r 是矩阵A的一个最高阶非零子式，则 D_r 所在的r列(行)即是A的列(行)向量组的一个最大无关组

E_r !! ~~非零行所在的首~~

非零行首非零元所在的列 即是一最大无关组

4. 线性方程组的解的结构

① 若 $x=\xi_1$，$x=\xi_2$ 为向量方程的解，则 $x=\xi_1+\xi_2$ 也是

若 $x=\xi_1$ 为向量方程的解，k为实数，则 $x=k\xi_1$ 也是解

方程全体解集的最大无关组 S_0：$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_t$

的任何线性组合 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$

称方程的通解

齐次线性方程组的解集的最大无关组称为该方程的 基础解系

② 设m×n矩阵A的秩R(A)=r，则n元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集S的秩 $R_S=n-r$

③ $x_1=\eta_1$ 及 $x_2=\eta_2$ 都是 $Ax=b$ 的解

则 $x=\eta_1-\eta_2$ 为 $Ax=0$ 的解

非齐次方程的通解=对应齐次方程的通解+非齐次方程一特解

5. 向量空间

① 设V为n维向量的集合，如果集合V非空且集合V对于向量的加法及数乘两种运算封闭，那么就称集合V为向量空间

指在V中可进行加法和数乘两种运算，即：

$a\in V, b\in V$ 则 $a+b\in V$

$a\in V, \lambda\in R$，则 $\lambda a\in V$

$V=\{x=(0,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$ ✓ 是向量空间

$V=\{x=(1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_2,\cdots,x_n\in R\}$ ✗ 不是

→非零常数

$x\in V$，$\lambda x\notin V$

$S=\{x \mid Ax=0\}$ 的解集 ✓

$S=\{x \mid Ax=b\}$ 的解集 ✗ 通解+特解

常量

② 设a, b为两个已知的n维向量，集合

$L=\{x=\lambda a+\mu b \mid \lambda,\mu\in R\}$ 是一个向量空间

由向量a, b生成的

由向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 所生成的向量空间为

$L=\{x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\in R\}$

③ 设有向量空间 V_1, V_2，若 $V_1\subseteq V_2$，则称 V_1 为 V_2 的子空间