§2 方阵的特征值与特征向量

n阶矩阵A，数λ和n维非零列向量x有：

$$Ax=\lambda x \iff (A-\lambda E)x=0$$

则称 数λ为矩阵A的**特征值**

x称A对应于特征值λ的**特征向量**

有非零解的充要条件：$|A-\lambda E|=0$

矩阵A的**特征方程**　　特征值即特征方程的解

记 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$，称为A的**特征多项式**

非零解 $x=p_i$，p_i为A对应于特征值λ_i的**特征向量**

n个

则kp_i也是对应于λ_i的特征向量 → 一个特征值可对应n个特征向量

但一个特征向量只对应一个特征值

★ $A=(a_{ij})$特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，有

(i) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+a_{nn}$

(ii) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n=|A|$

设λ是方阵A的特征值

(1) λ^k是A^k的特征值，$\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$的特征值

(2) A可逆时，$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}特征值.　　$A^*=|A|A^{-1}$

· 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵A的m个特征值，$p_1,p_2,p_m$是依次与之对应的特征向量

若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$各不相等，则$p_1,p_2,\cdots,p_m$线性无关

§3 相似矩阵

A与B相似：$P^{-1}AP=B$

称B是A的**相似矩阵**

$P^{-1}AP$称对A进行**相似变换**

$A\sim B$：

① $|A|=|B|$

② 均可逆或均不可逆

③ $A^{-1}\sim B^{-1}$，$A^m\sim B^m$

④ 特征值相同　推论→

⑤ $r(A)=r(B)$ (秩)

若A与对角矩阵Λ相似

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为A的n个特征

· **把矩阵A对角化**：求P，使$P^{-1}AP=\Lambda$，Λ为对角矩阵　　$AP=P\Lambda$

A能对角化的充要条件是A有n个线性无关的特征向量

若A的n个特征值互不相等，则A与对角矩阵相似

解题：

① $|A-\lambda E|=0$ 解出所有特征值λ (单根or重根)

② 解出所有特征值λ对应的特征向量p　　将λ代回$(A-\lambda E)x=0$ 解$x=p$

③ 若n个p都线性无关，则A可对角化

④ $P=(p_1,p_2\cdots p_n)=[\ \ ]$　排列顺序一致

~~A=P~~　$\Lambda=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$