§6 用配方法化二次型为标准型 拉格朗日配方法

用正交变换化二次型为标准型，具有保持几何形状不变的优点。

① 含平方项的f: 〈化标准型并求变换矩阵〉

eg: $f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

含平方项配方: $f=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2$

1. 写出线性变换 令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3 \\ x_2=y_2-2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

3. 写出标准型 就将f化为标准型 $f=y_1^2+y_2^2$

4. 写出变换矩阵（系数） 所用变换矩阵 $C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

② 不含平方项时: 〈化标准型并求变换矩阵〉 规范

eg: $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

1. 选择一项化为因式分解形式，使之出现平方项

由于含 x_1x_2 乘积项，故令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

2. 代回f 代入f 得 $f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$

3. 再配方 $f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$

(重复上述) 令 $\begin{cases} z_1=\sqrt{2}(y_1-y_3) \\ z_2=\sqrt{2}(y_2-2y_3) \\ z_3=\sqrt{6}y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1+\frac{1}{\sqrt{6}}z_3 \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2+\frac{2}{\sqrt{6}}z_3 \\ y_3=\frac{1}{\sqrt{6}}z_3 \end{cases}$

规范型 $f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$

两次变换相乘

变换矩阵 $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

($|C|=-\frac{1}{\sqrt{6}}\neq 0$)

§7 正定二次型

① **惯性定理**: 设二次型 $f=x^TAx$ 的秩为r，且有两个可逆变换 $x=Cy$ 及 $x=Pz$

使 $f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ry_r^2\ (k_i\neq 0)$ 及 $f=\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+\cdots+\lambda_rz_r^2\ (\lambda_i\neq 0)$

则 $k_1\sim k_r$ 与 $\lambda_1\sim\lambda_2$ 的正数个数相等 → 标准型

二次型的**正/负惯性指数**: 二次型的标准型的正/负系数个数

② 设二次型 $f(x)=x^TAx$，若对任 $x\neq 0$，都有
- $f(x)>0$，则称f为**正定二次型**，并称对称矩阵A是正定的
- $f(x)<0$，则称f为**负定二次型**，并称对称矩阵A是负定的

③ n元二次型 $f=x^TAx$ 为正定的充要条件 ⇔ ① f标准型的n个系数全为正 / ② 规范型n个系数全为1 / ③ 正惯性指数为n

推论: 对称矩阵A正定的充要条件 ⇔ A 特征值全为正 ①②③等价

④ **赫尔维茨定理**

对称矩阵A为正定 $\overset{充要}{\Longleftrightarrow}$ A的各阶主子式都为正 $a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$

对称矩阵A为负定 $\overset{充要}{\Longleftrightarrow}$ 奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正 $(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0$