第十章 含有耦合电感的电路

本章重点

首页

●重点

1.互感和互感电压

2.有互感电路的计算

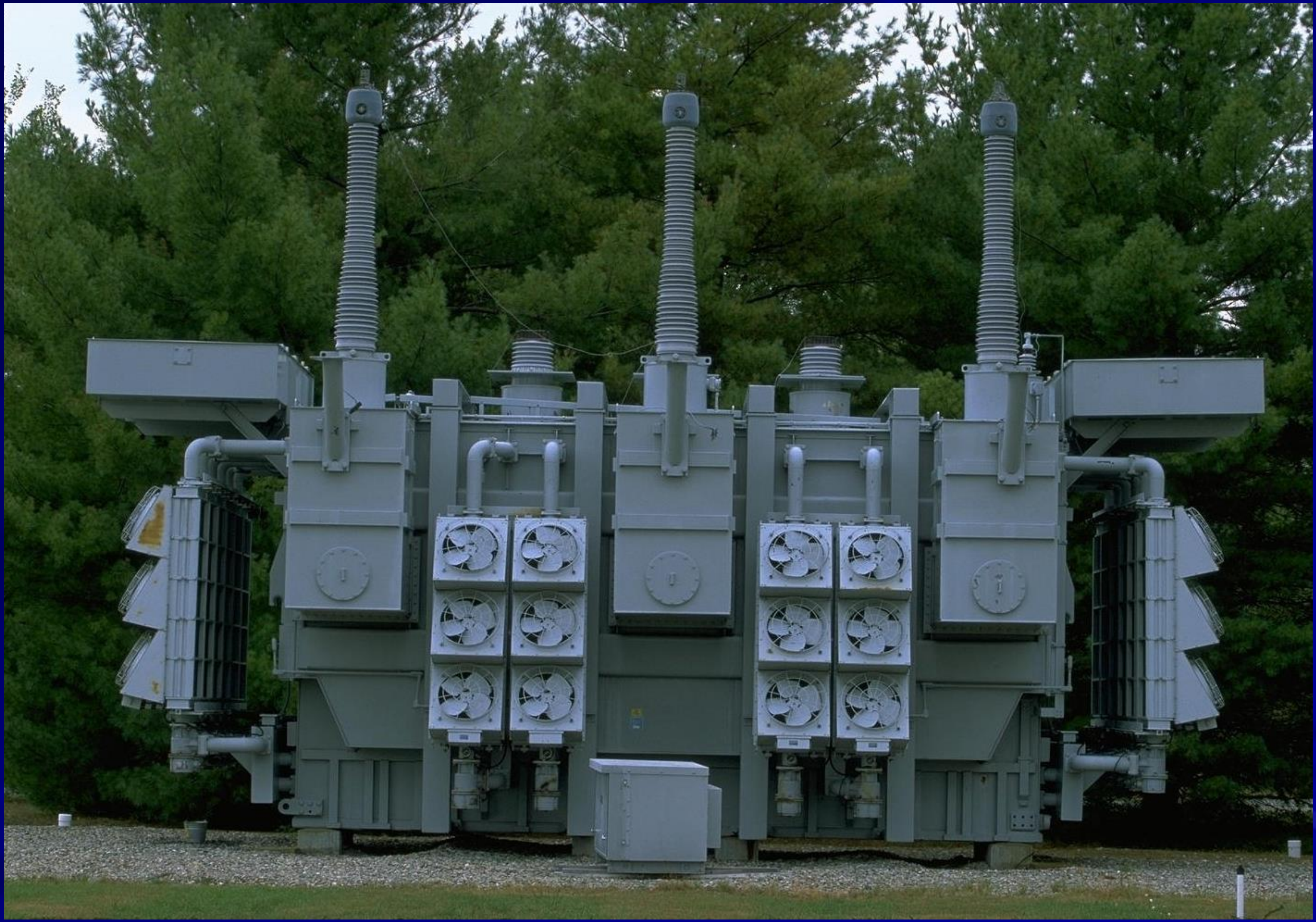
3.变压器和理想变压器原理

10-1 互感

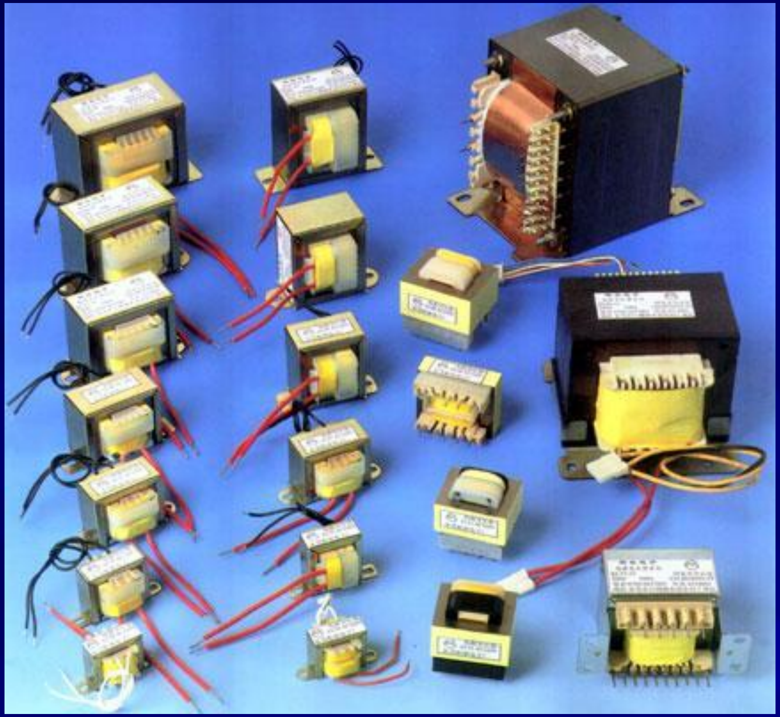
耦合电感元件属于多端元件，在实际电路中，如收音机、电视机中的中周线圈、振荡线圈，整流电源里使用的变压器等都是耦合电感元件，熟悉这类多端元件的特性，掌握包含这类多端元件的电路问题的分析方法是非常必要的。

变压器

电力变压器



三相电力变压器



小变压器

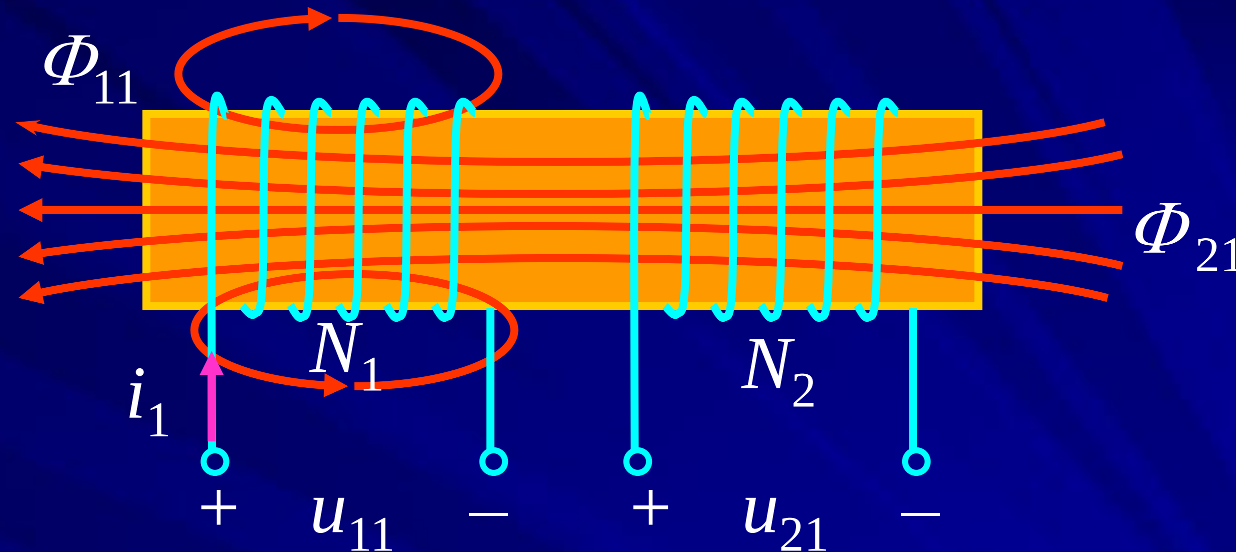
调压器

整流器

牵引电磁铁

电流互感器

1. 互感



线圈1中通入电流i_1时，在线圈1中产生磁通，同时，有部分磁通穿过临近线圈2，这部分磁通称为互感磁通。两线圈间有磁的耦合。

定义Ψ：磁通链， $\Psi = N\Phi$

空心线圈，Ψ 与 i 成正比。当只有一个线圈时：

$\Psi_1 = \Psi_{11} = L_1 i_1$ L_1 **为自感系数，单位 H(亨)**

当两个线圈都有电流时，每一线圈的磁通链为自感磁通链与互感磁通链的代数和：

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1$$

称 M_{12}、M_{21} 为互感系数，单位 H(亨)。

注意 ① M **值与线圈的形状、几何位置、空间媒质有关，与线圈中的电流无关，满足** $M_{12}=M_{21}$。

② L **总为正值，** M **值有正有负。**

2. 耦合系数

用耦合系数k 表示两个线圈磁耦合的紧密程度。

$$k \overset{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leqslant 1$$

$k=1$ 称全耦合: 漏磁 $\Phi_{\sigma 1} = \Phi_{\sigma 2} = 0$

满足: → $\Phi_{11} = \Phi_{21}$， $\Phi_{22} = \Phi_{12}$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{(Mi_1)(Mi_2)}{L_1 i_1 L_2 i_2}} = \sqrt{\frac{\Psi_{12}\Psi_{21}}{\Psi_{11}\Psi_{22}}} \leqslant 1$$

注意耦合系数 k 与线圈的结构、相互几何位置、空间磁介质有关。

单选题 1分

设置

对于两个耦合的电感线圈，假定其电感分别为2mH和18mH，两者间可能的最大互感为

A 2mH

B 4mH

C 6mH

D 8mH

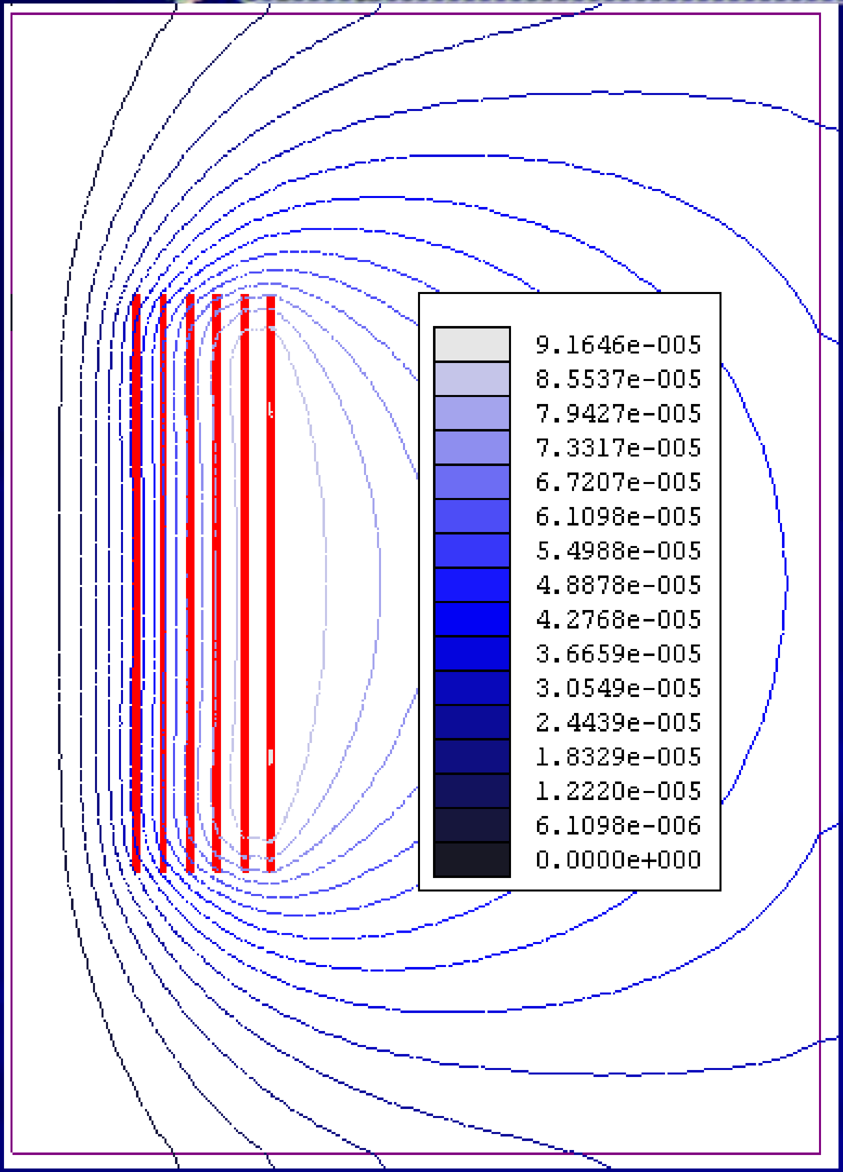
提交

互感现象 → 利用——变压器：信号、功率传递

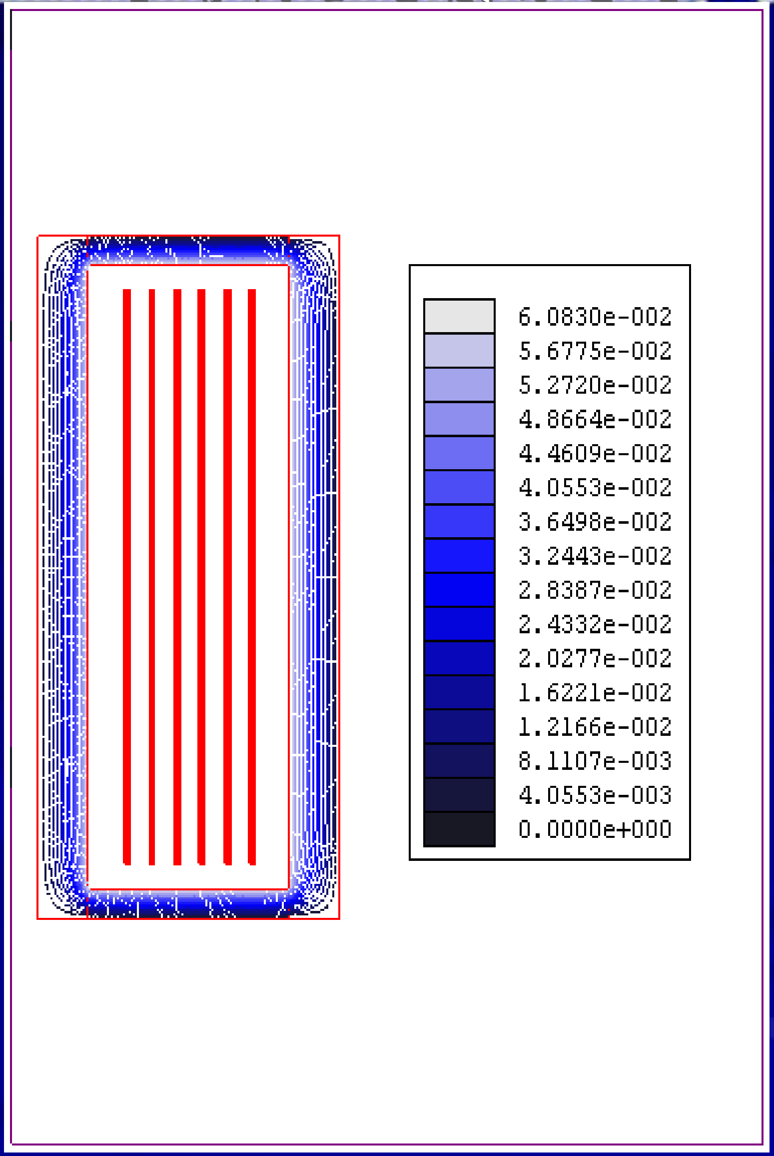
避免——干扰

克服：合理布置线圈相互位置或增加屏蔽减少互感作 用。

电抗器



电抗器磁场



铁磁材料屏蔽磁场

3. 耦合电感上的电压、电流关系

当i_1为时变电流时，磁通也将随时间变化，从而在线圈两端产生感应电压。

当i_1、u_{11}、u_{21}方向与Φ 符合右手螺旋法则时，根据电磁感应定律和楞次定律有

$$u_{11}=\frac{\mathrm{d}\Psi_{11}}{\mathrm{d}t}=L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$ → 自感电压

$$u_{21}=\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$ → 互感电压

当两个线圈同时通以电流时，每个线圈两端的电压均包含自感电压和互感电压。

$$\begin{cases} \Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M_{12} i_2 \\ \Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M_{21} i_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = u_{21} + u_{22} = \pm M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

在正弦交流电路中，其相量形式的方程为

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \pm \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

注意

两线圈的自感磁通链和互感磁通链方向一致，互感电压取正，否则取负。表明互感电压的正、负：

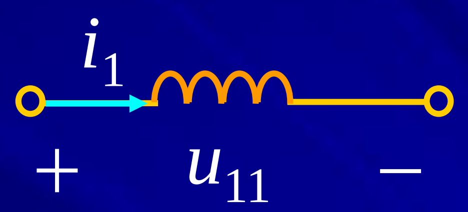
（1）与电流的参考方向有关。

（2）与线圈的相对位置和绕向有关。

4.互感线圈的同名端

对自感电压，当u，i 取关联参考方向，u、i 与Φ符合右手螺旋法则，其表达式为

$$u_{11} = \frac{\mathrm{d}\Psi_{11}}{\mathrm{d}t} = N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

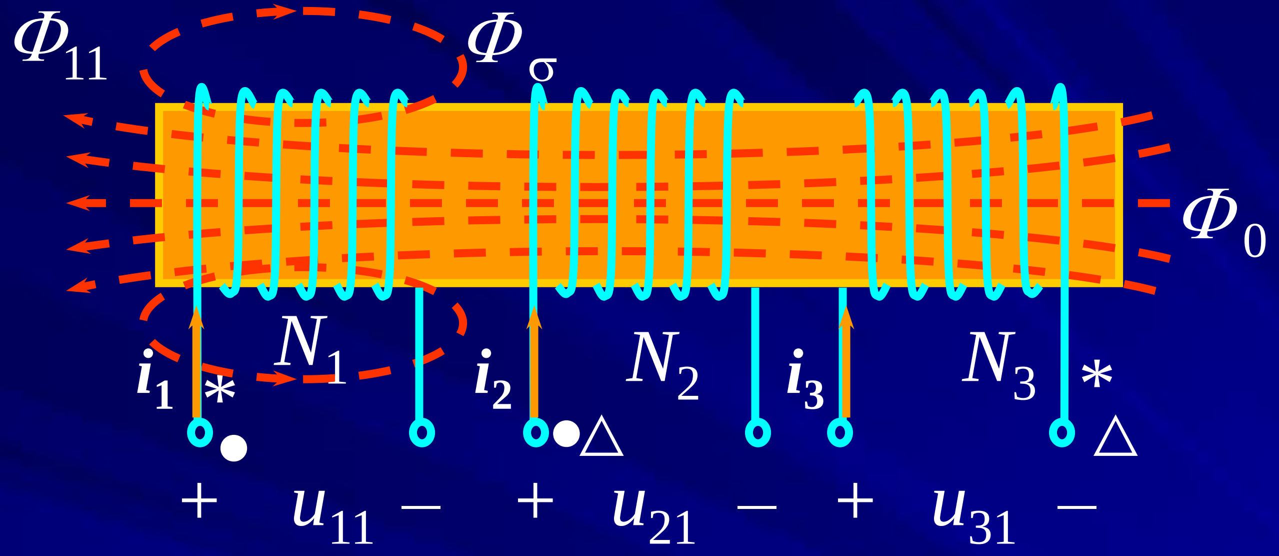


上式说明，对于自感电压由于电压、电流为同一线圈上的，只要参考方向确定了，其数学描述便可容易地写出，可不用考虑线圈绕向。

对互感电压，因产生该电压的电流在另一线圈上，因此，要确定其符号，就必须知道两个线圈的绕向。这在电路分析中显得很不方便。为解决这个问题引入同名端的概念。

同名端

当两个电流分别从两个线圈的对应端子同时流入或流出，若所产生的磁通相互加强时，则这两个对应端子称为两互感线圈的同名端。



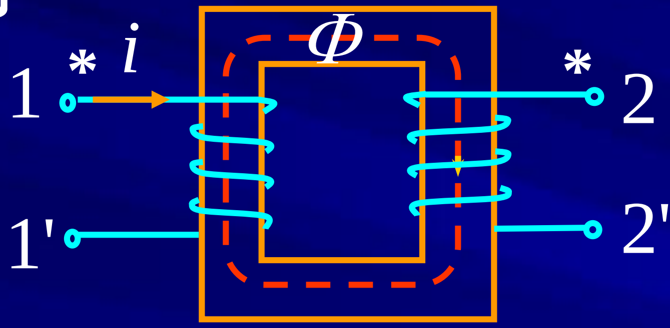
$$u_{21} = M_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \qquad u_{31} = -M_{31}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

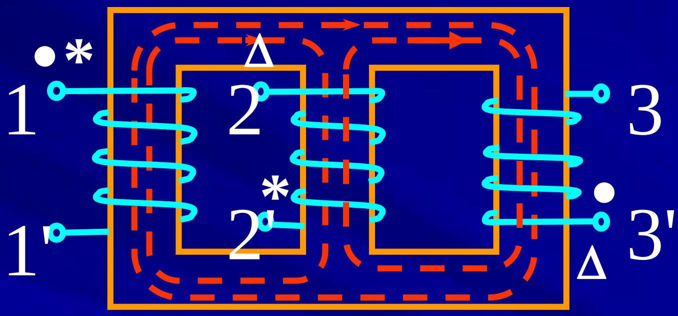
注意 **线圈的同名端必须两两确定。**

确定同名端的方法：

(1)当两个线圈中电流同时由同名端流入(或流出)时，两个电流产生的磁场相互增强。

例



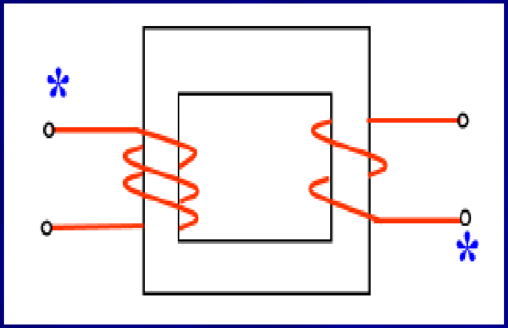


(2)当随时间增大的时变电流从一线圈的一端流入时，将会引起另一线圈相应同名端的电位升高。

单选题 1分

设置

如图标注的同名端是



A 错误

B 正确

提交

同名端的实验测定：

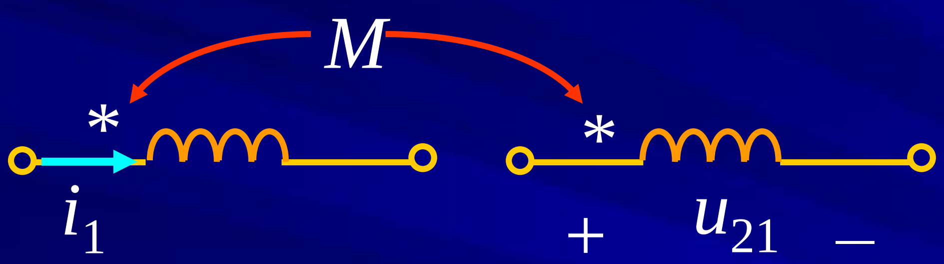
如图电路，当闭合开关 S 时，i 增加，

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}>0,\qquad u_{22'}=M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}>0$$ **电压表正偏。**

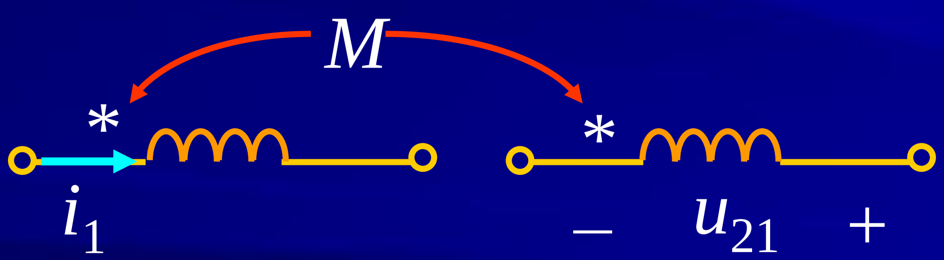
当两组线圈装在黑盒里，只引出四个端线组，要确定其同名端，就可以利用上面的结论来加以判断。

由同名端及u、i参考方向确定互感线圈的特性方程

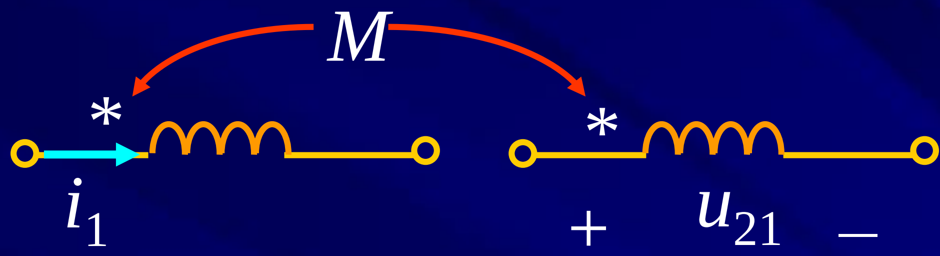
有了同名端，表示两个线圈相互作用时，就不需考虑实际绕向，而只画出同名端及u、i参考方向即可。



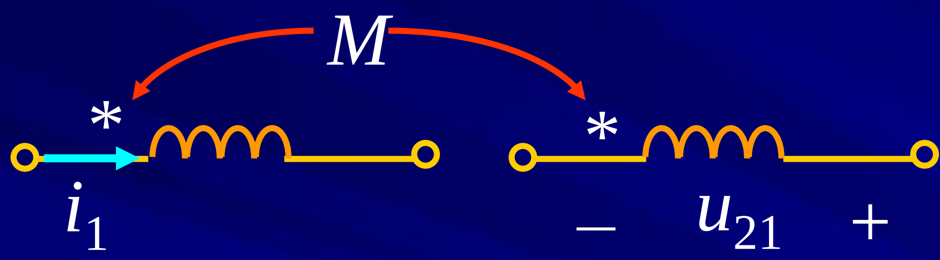
$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



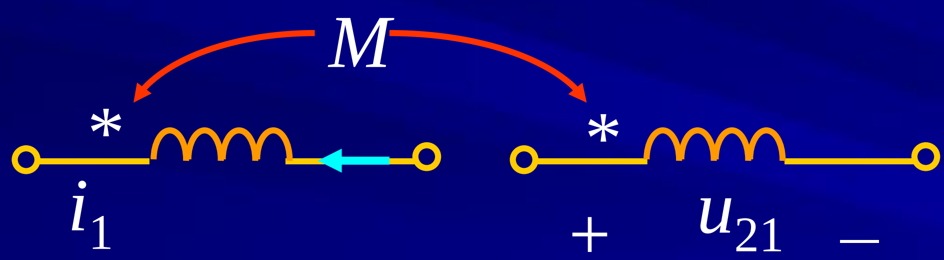
$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



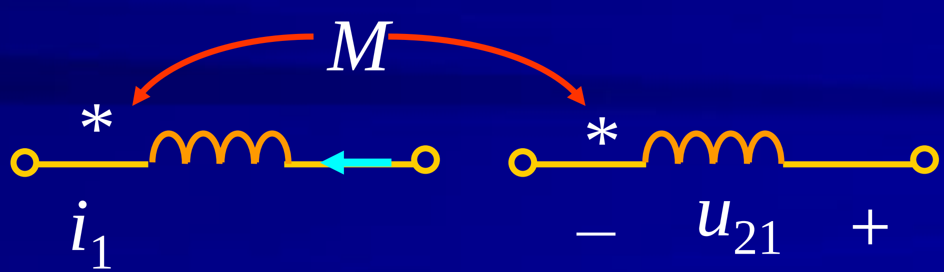
$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



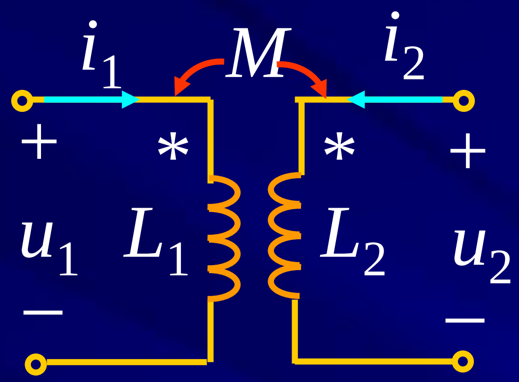
$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

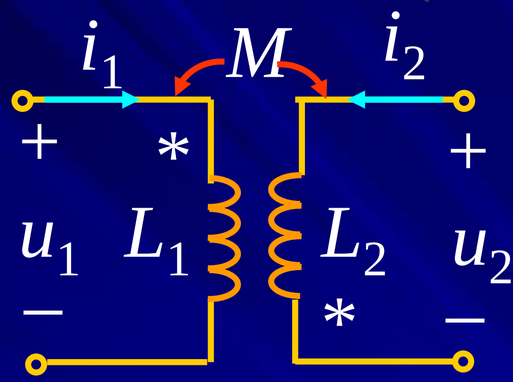


$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

例1-1

写出图示电路电压、电流关系式





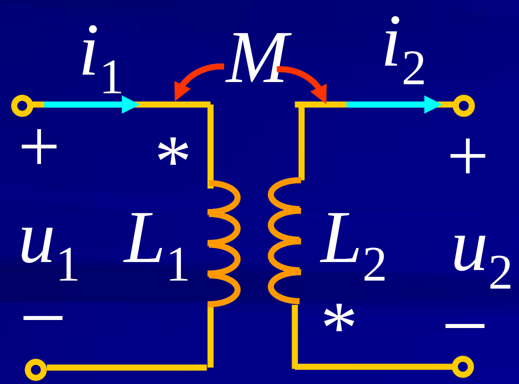
解

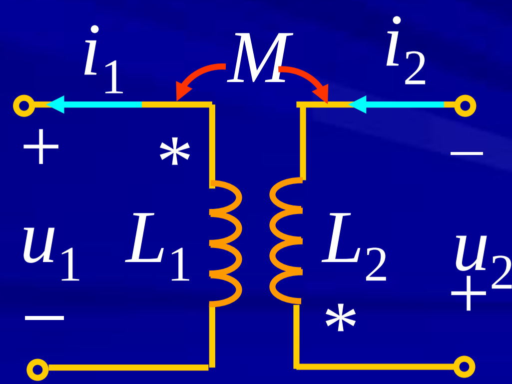
$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

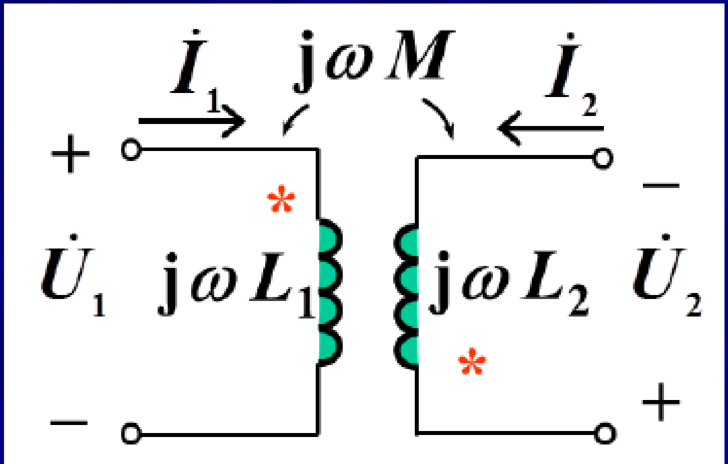




单选题 1分

设置

下列公式正确的是



A
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2$$

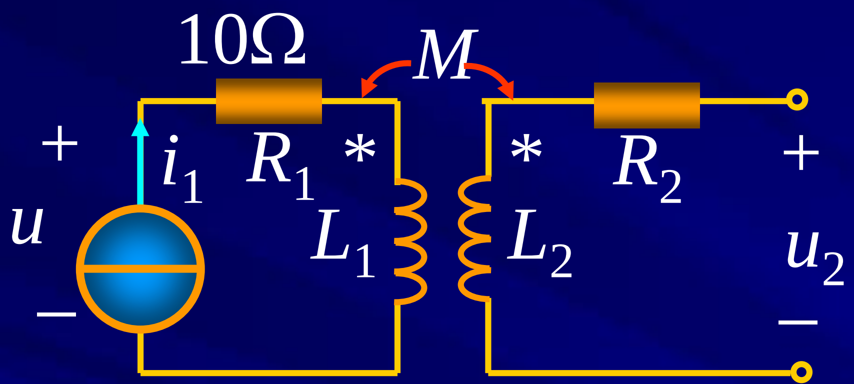
B
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2$$

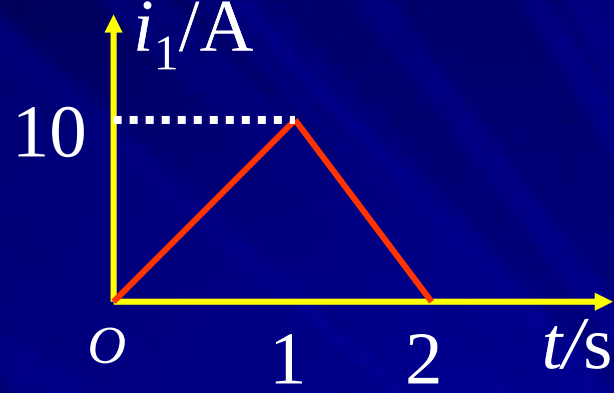
C
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = j\omega M\dot{I}_1 - j\omega L_2\dot{I}_2$$

D
$$\dot{U}_1 = -j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = -j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2$$

提交

例1-2 **已知** $L_1=5\mathrm{H}, L_2=2\mathrm{H}, M=1\mathrm{H}$，求$u(t)$和$u_2(t)$。





解

$$u_2(t)=M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}10\mathrm{V} & 0<t<1\mathrm{s}\\ -10\mathrm{V} & 1\mathrm{s}<t<2\mathrm{s}\\ 0 & 2\mathrm{s}<t\end{cases}$$

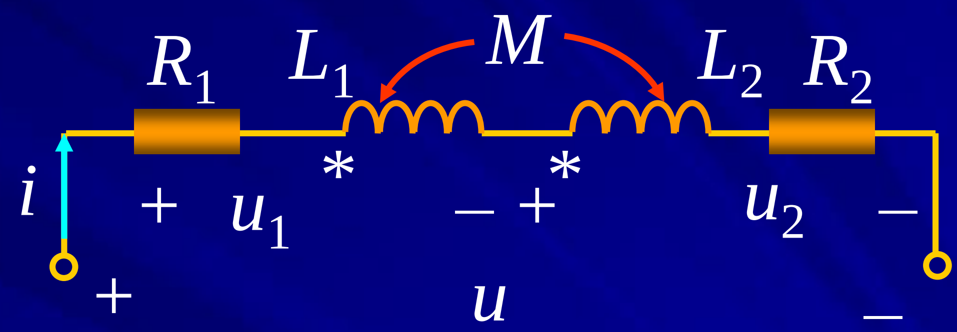
$$i_1=\begin{cases}10t\mathrm{A} & 0<t<1\mathrm{s}\\ (20-10t)\mathrm{A} & 1\mathrm{s}<t<2\mathrm{s}\\ 0\mathrm{A} & 2\mathrm{s}<t\end{cases}$$

$$u(t)=R_1i_1+L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}(100t+50)\mathrm{V} & 0<t<1\mathrm{s}\\ (-100t+150)\mathrm{V} & 1\mathrm{s}<t<2\mathrm{s}\\ 0\ \mathrm{V} & 2\mathrm{s}<t\end{cases}$$

10-2 含有耦合电感电路的计算

1. 耦合电感的串联

①顺接串联

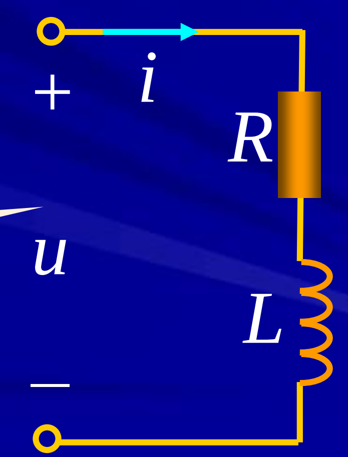


$$u = R_1 i + L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2 i$$

$$= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 + 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

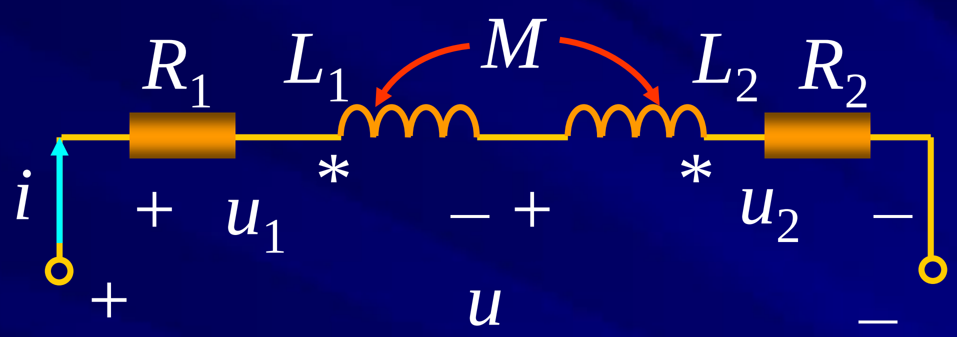
$$= Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

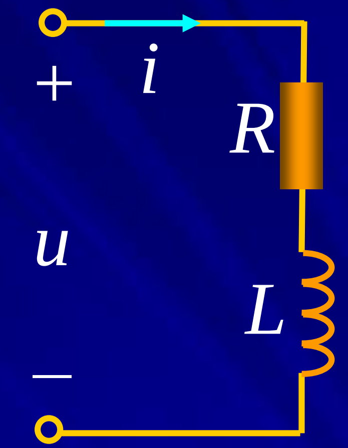
去耦等效电路



$$R = R_1 + R_2 \qquad L = L_1 + L_2 + 2M$$

②反接串联





$$u = R_1 i + L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_2 i$$

$$= (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 - 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{R = R_1 + R_2 \qquad L = L_1 + L_2 - 2M}$$

注意　$L = L_1 + L_2 - 2M \geqslant 0 \rightarrow M \leqslant \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$

互感的测量方法：

顺接一次，反接一次，就可以测出互感：

$$M=\frac{L_{顺}-L_{反}}{4}$$

全耦合时 $M=\sqrt{L_1L_2}$　　**当** $L_1=L_2$ **时**，$M=L$

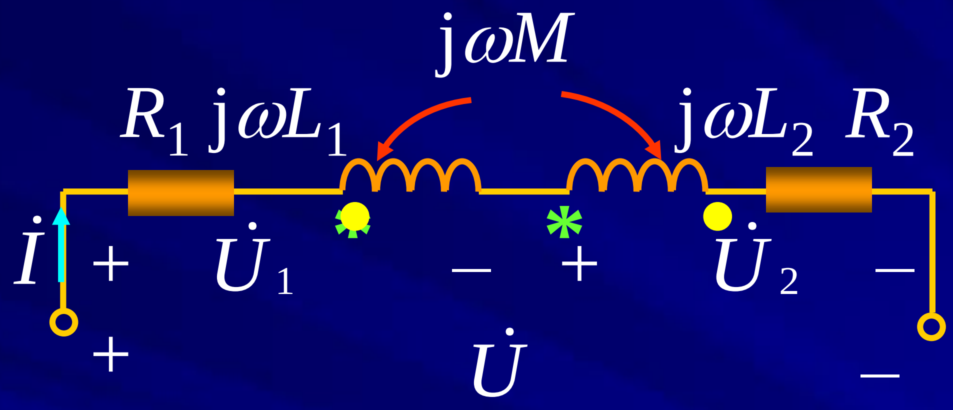
$$L=L_1+L_2\pm 2M$$

$$=L_1+L_2\pm 2\sqrt{L_1L_2}$$

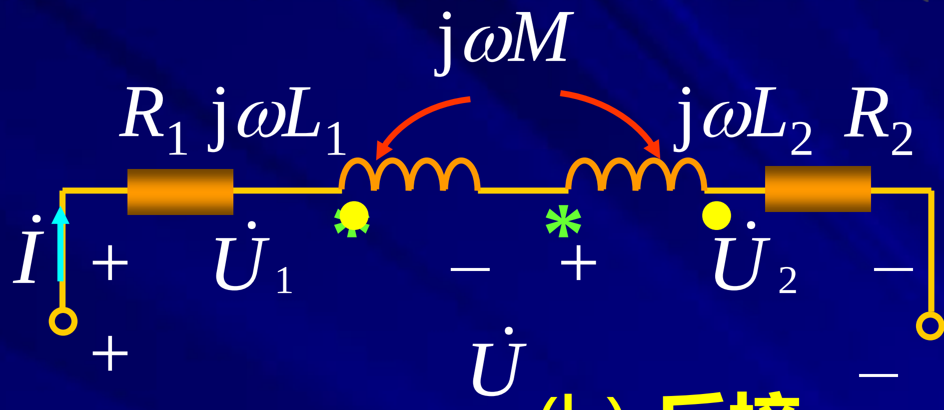
$$=(\sqrt{L_1}\pm\sqrt{L_2})^2$$

$$L=\begin{cases}4M & \text{顺接}\\ 0 & \text{反接}\end{cases}$$

在正弦激励下：



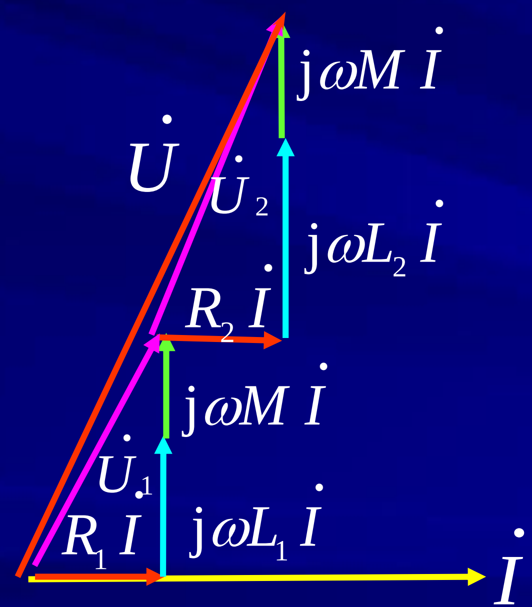
$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + \mathrm{j}\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I}$$



$\mathrm{j}\omega M$
R_1 $\mathrm{j}\omega L_1$
$\mathrm{j}\omega L_2$ R_2
$\dot{I}$
+ $\dot{U}_1$ –
+ $\dot{U}_2$ –
+ $\dot{U}$ –

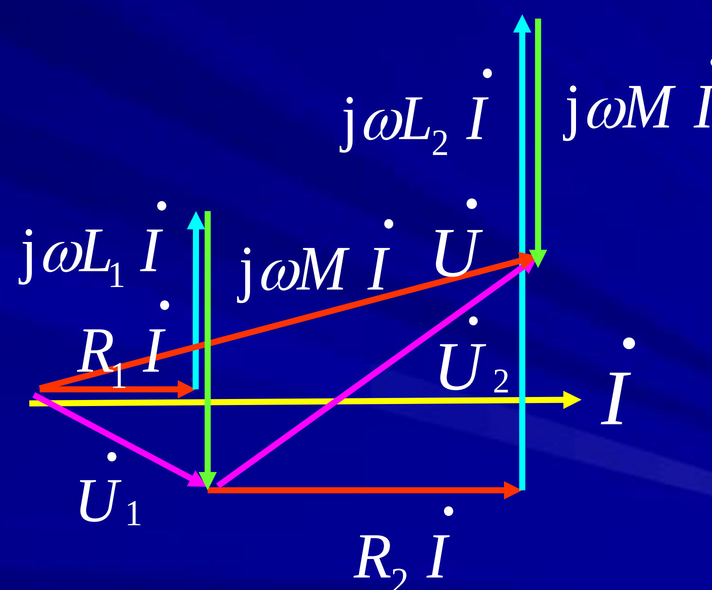
相量图:

(a) 顺接



$\mathrm{j}\omega M\dot{I}$
$\dot{U}$
$\dot{U}_2$
$\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}$
$R_2\dot{I}$
$\mathrm{j}\omega M\dot{I}$
$\dot{U}_1$
$R_1\dot{I}$
$\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}$
$\dot{I}$

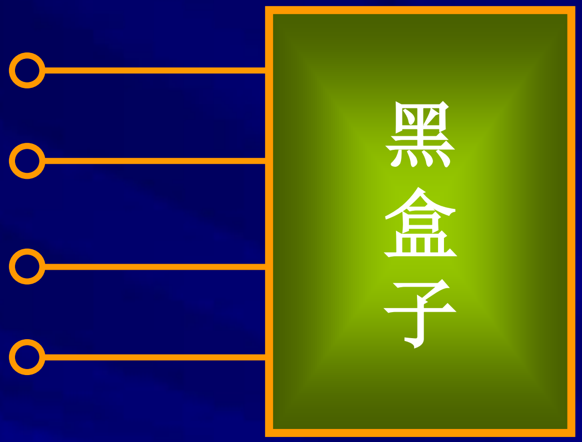
(b) 反接



$\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}$
$\mathrm{j}\omega M\dot{I}$
$\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}$
$\mathrm{j}\omega M\dot{I}$
$\dot{U}$
$R_1\dot{I}$
$\dot{U}_2$
$\dot{I}$
$\dot{U}_1$
$R_2\dot{I}$

思考题

同名端的实验测定：



两互感线圈装在黑盒子里，只引出四个端子，现在手头有一台交流信号源及一只万用表，试用试验的方法判别两互感线圈的同名端。

单选题 1分

设置

两电感线圈同名端顺串连接时电感值为18mH，同名端反串连接时电感值为2mH。则其互感为

A 8 mH

B 2 mH

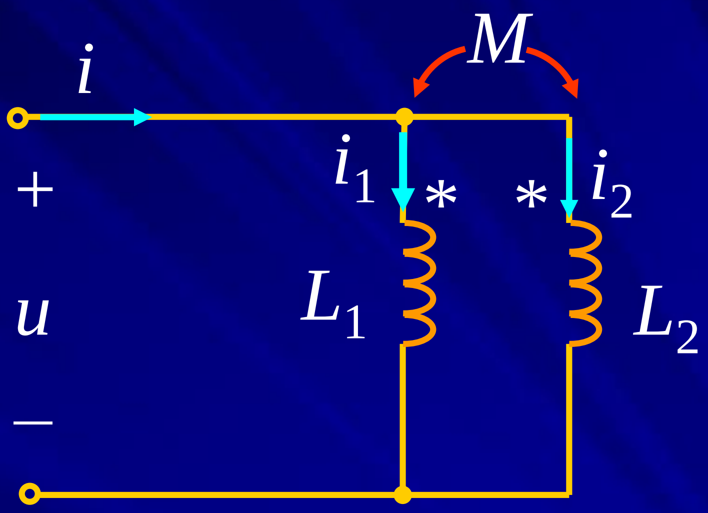
C 4 mH

D 5 mH

提交

2. 耦合电感的并联

①同侧并联



$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

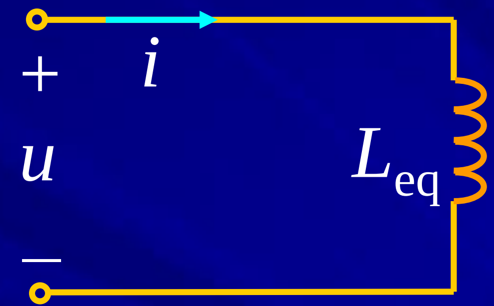
解得u, i 的关系

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

等效电感：

$$L_{eq}=\frac{(L_1L_2-M^2)}{L_1+L_2-2M}\geqslant 0$$

去耦等效电路



如全耦合： $L_1L_2=M^2$

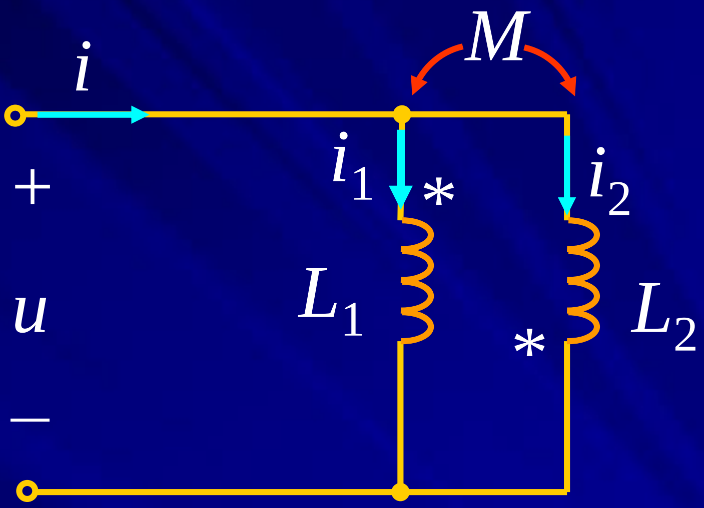
当 $L_1\neq L_2$ ， $L_{eq}=0$ **（短路）**

$$\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}=\frac{L_1L_2-L_1L_2}{L_1+L_2-2\sqrt{L_1L_2}}=\frac{L_1L_2-L_1L_2}{(\sqrt{L_1}-\sqrt{L_2})^2}=0$$

当 $L_1=L_2=L$ ， $L_{eq}=L$ **(相当于导线加粗，电感不变)**

$$\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}=\frac{L^2(1-k^2)}{2L-2kL}=\frac{L^2(1+k)(1-k)}{2L(1-k)}=\frac{L(1+k)}{2}=L$$

② 异侧并联



$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

解得u, i **的关系：**

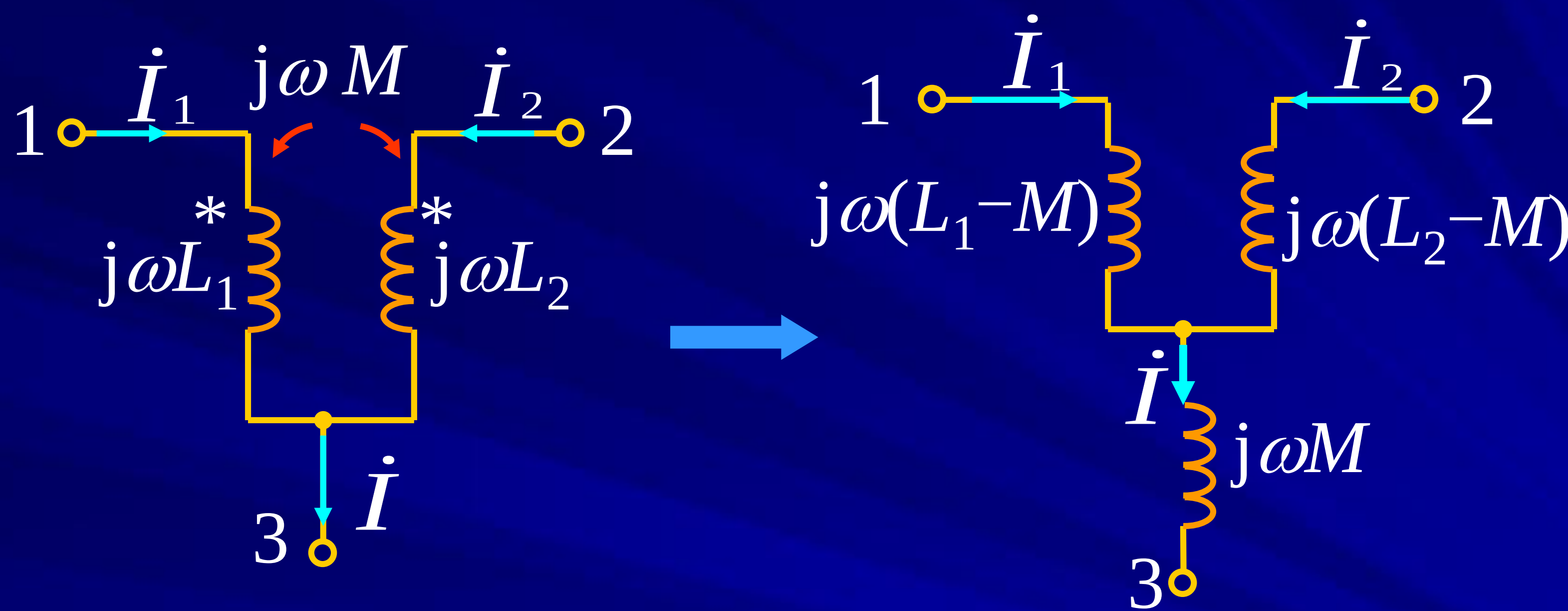
$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

等效电感：

$$L_{\mathrm{eq}} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \geqslant 0$$

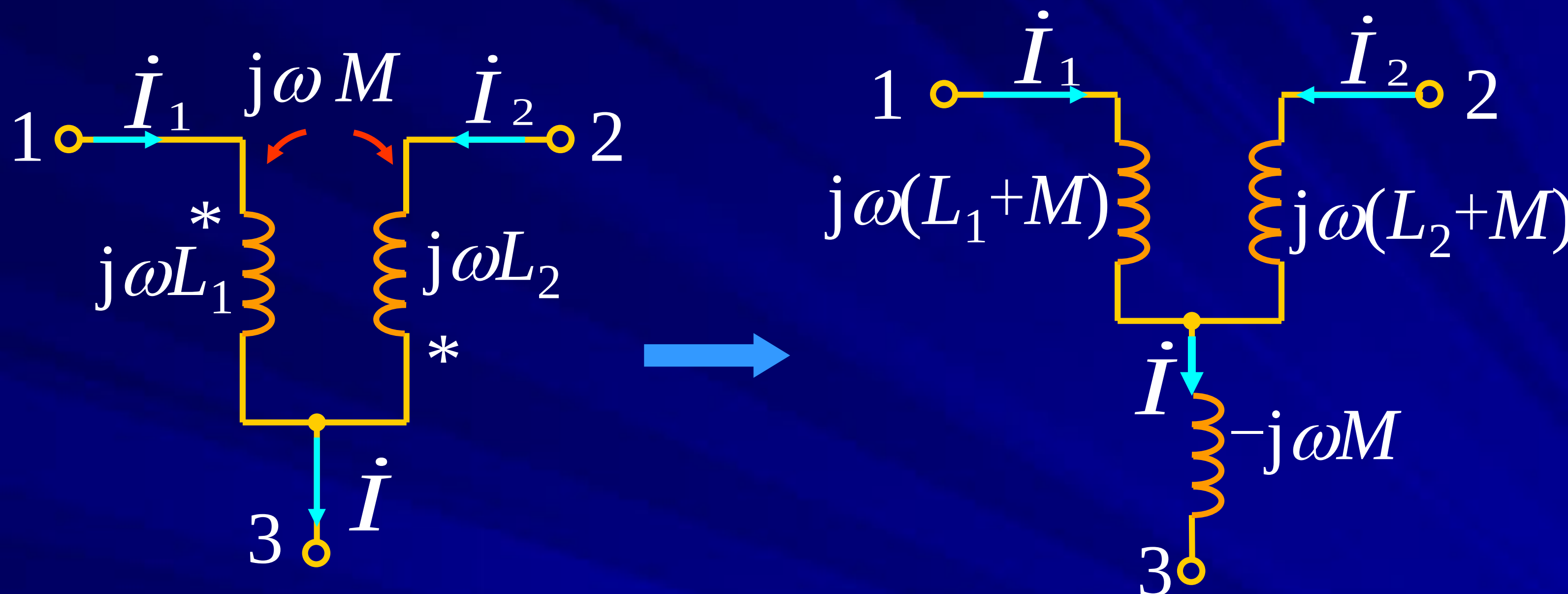
3.耦合电感的T型等效

①同名端为共端的T型去耦等效

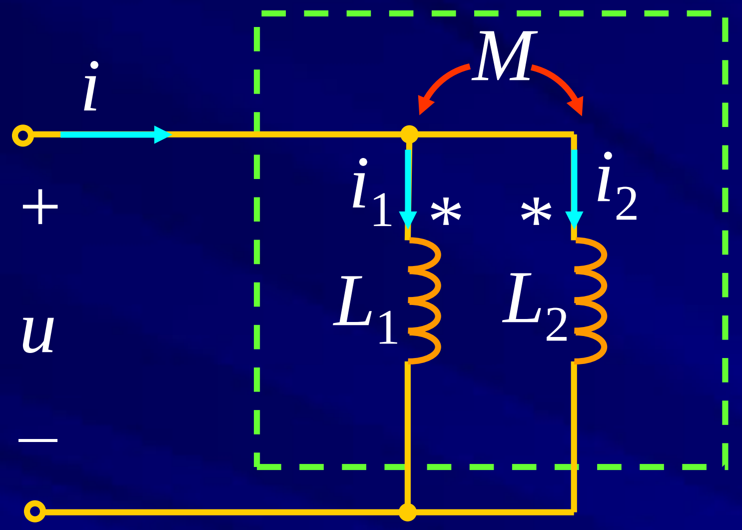


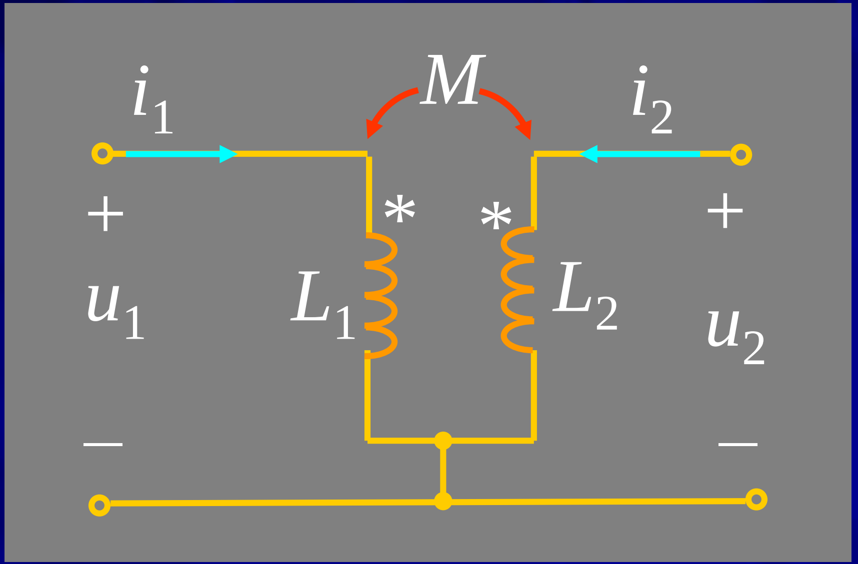
$$
\begin{cases}
\dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I} \\
\dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = j\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + j\omega M \dot{I} \\
\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2
\end{cases}
$$

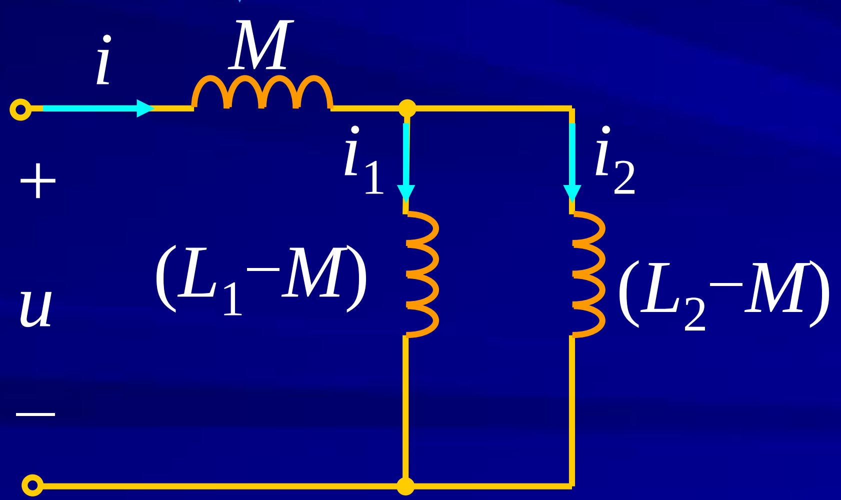
②异名端为共端的T型去耦等效

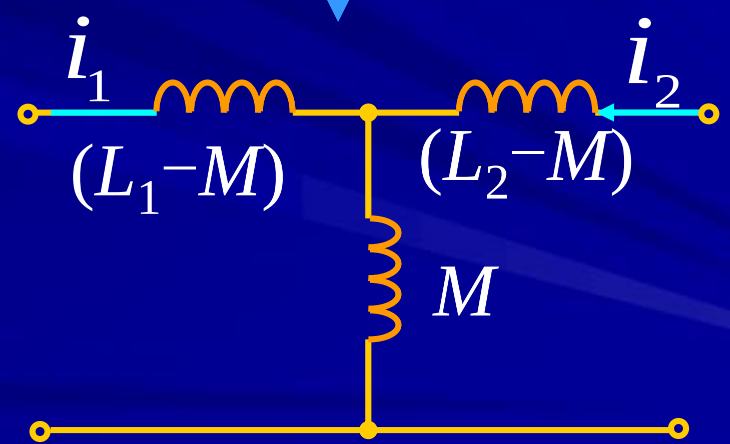


$$\begin{cases} \dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = j\omega(L_1 + M)\dot{I}_1 - j\omega M \dot{I} \\ \dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = j\omega(L_2 + M)\dot{I}_2 - j\omega M \dot{I} \\ \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \end{cases}$$

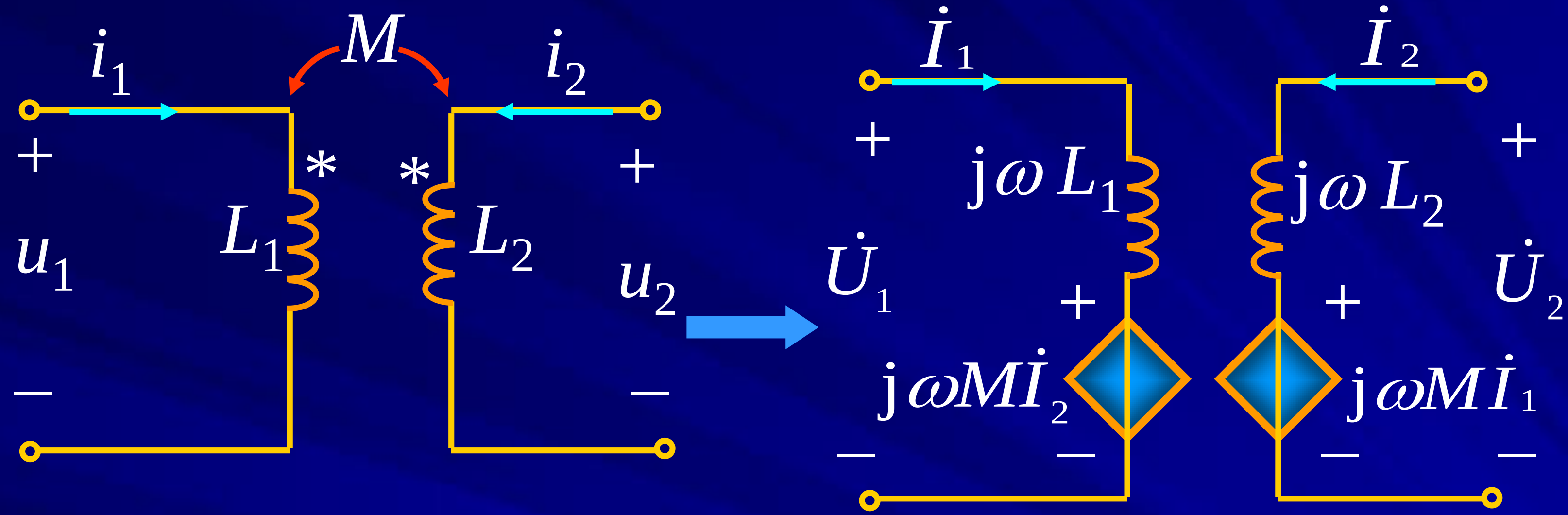

i
M
+
u
—
i_1
i_2
*
*
L_1
L_2


i_1
M
i_2
+
u_1
—
*
*
L_1
L_2
+
u_2
—


i
M
+
u
—
i_1
i_2
(L_1-M)
(L_2-M)

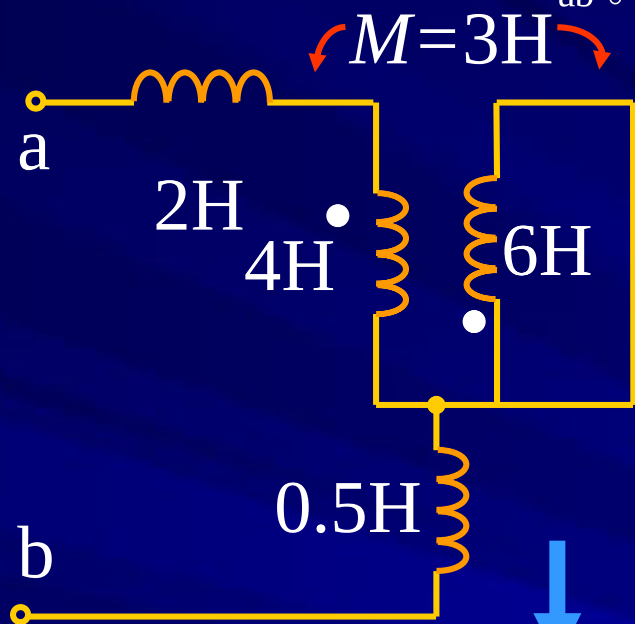

i_1
i_2
(L_1-M)
(L_2-M)
M

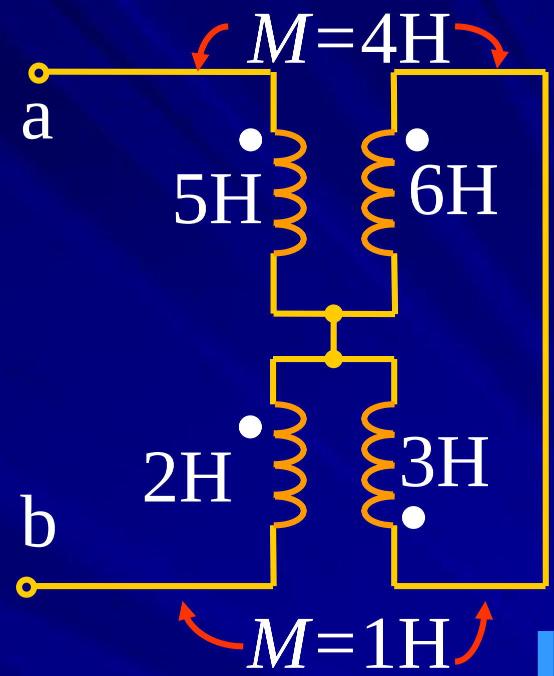
4. 受控源等效电路



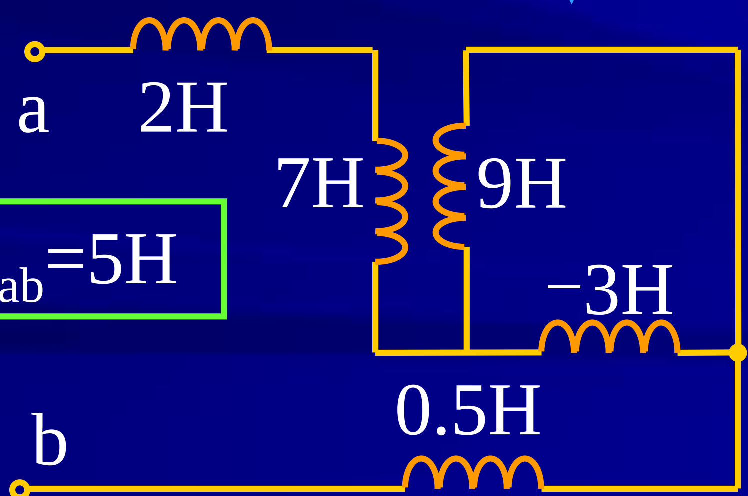
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

例2-1 求等效电感 L_{ab}。

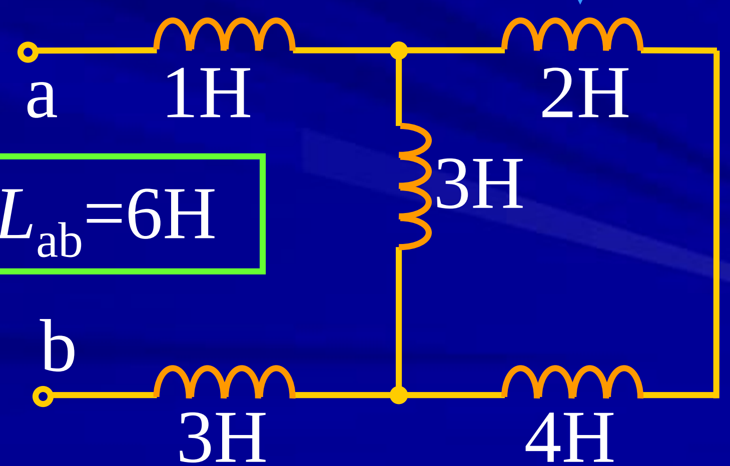




解



$L_{ab}=5H$



$L_{ab}=6H$

单选题 1分

设置

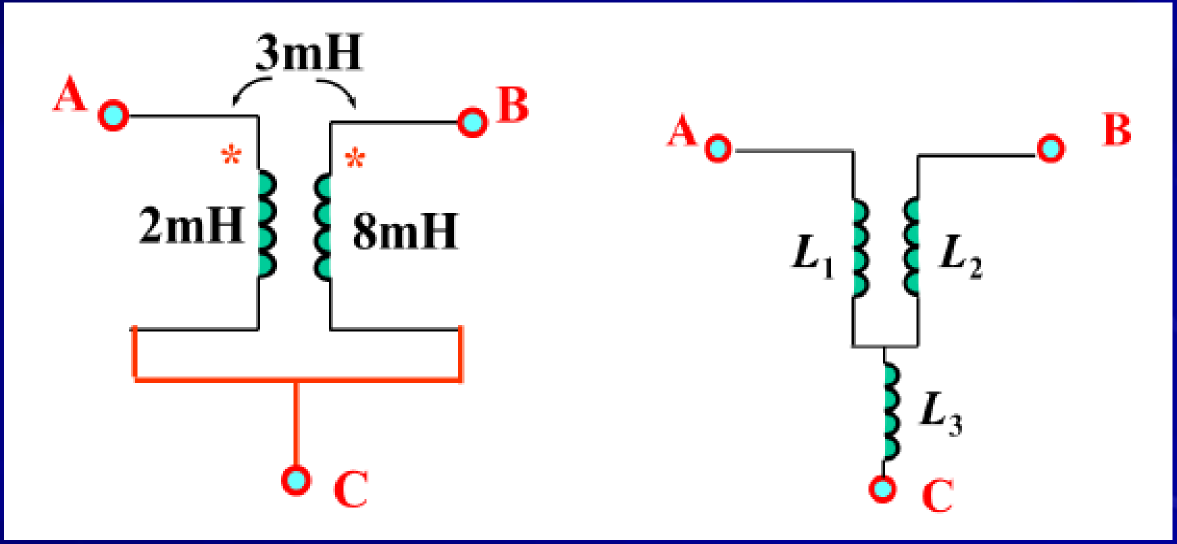
如图所示，去耦等效电路中，L_1的电感值为

A 1mH

B －1mH

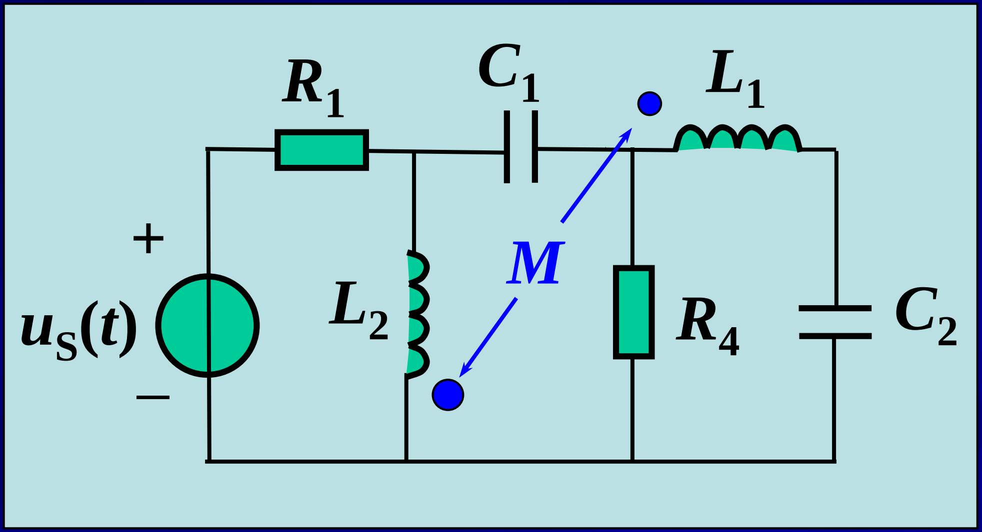
C 5mH

D 3mH



提交

去耦等效是不是万能的？



没有公共点，怎么办？

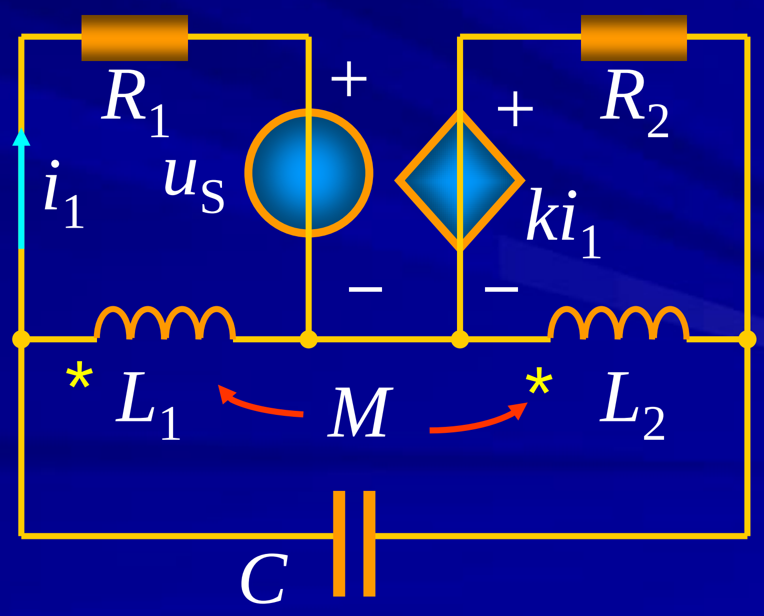
5. 有互感电路的计算

①在正弦稳态情况下，有互感的电路的计算仍应用前面介绍的相量分析方法。

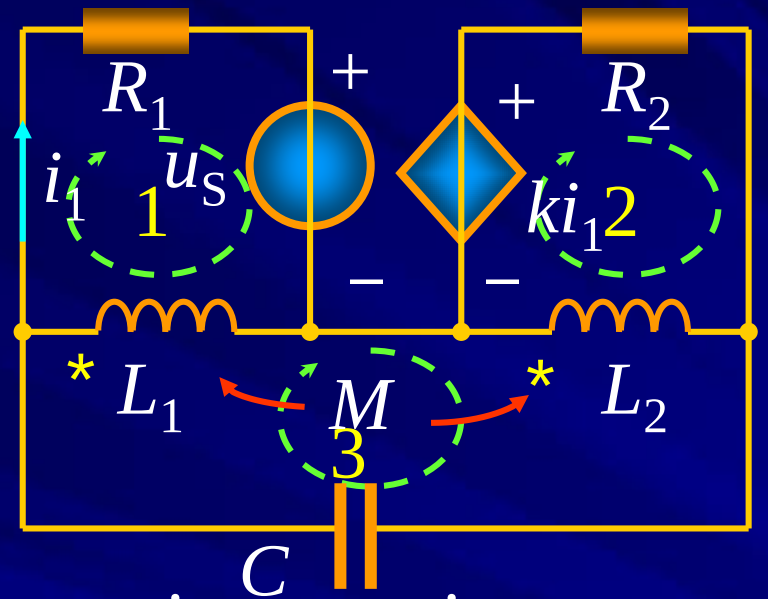
②注意互感线圈上的电压除自感电压外，还应包含互感电压。

③一般采用支路法和回路法计算。

例2-2 列写电路的回路电流方程。

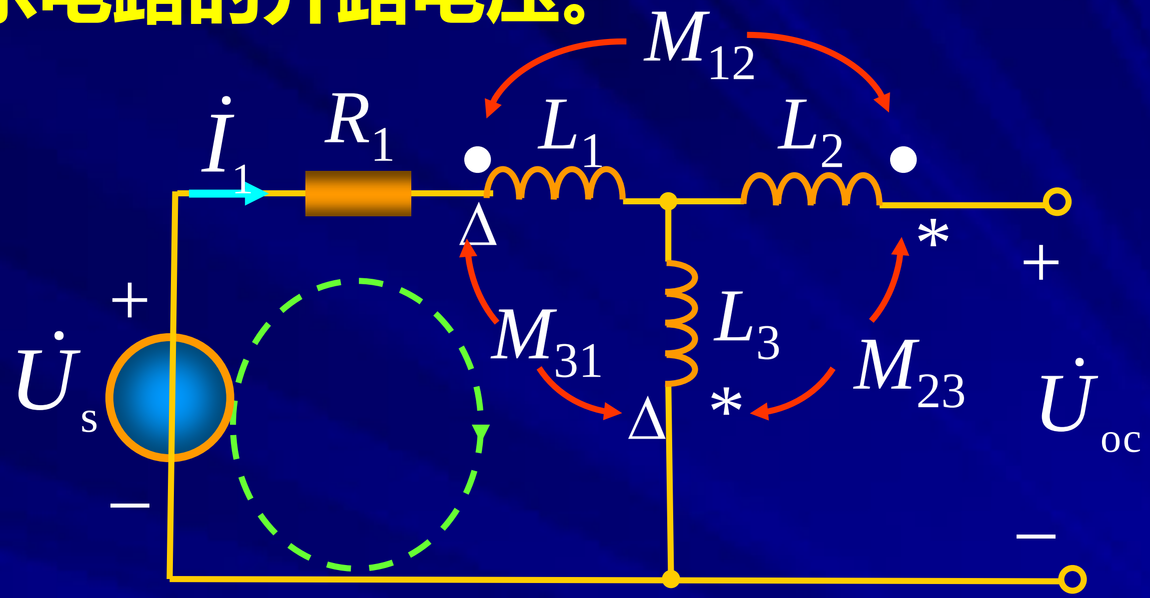


解



$$
\begin{cases}
(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_3 + \mathrm{j}\omega M(\dot{I}_2 - \dot{I}_3) = -\dot{U}_\mathrm{S} \\
(R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2 - \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_3 + \mathrm{j}\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_3) = k\dot{I}_1 \\
(\mathrm{j}\omega L_1 + \mathrm{j}\omega L_2 - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C})\dot{I}_3 - \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2 + \\
\mathrm{j}\omega M(\dot{I}_3 - \dot{I}_1) + \mathrm{j}\omega M(\dot{I}_3 - \dot{I}_2) = 0
\end{cases}
$$

例2-3 求图示电路的开路电压。



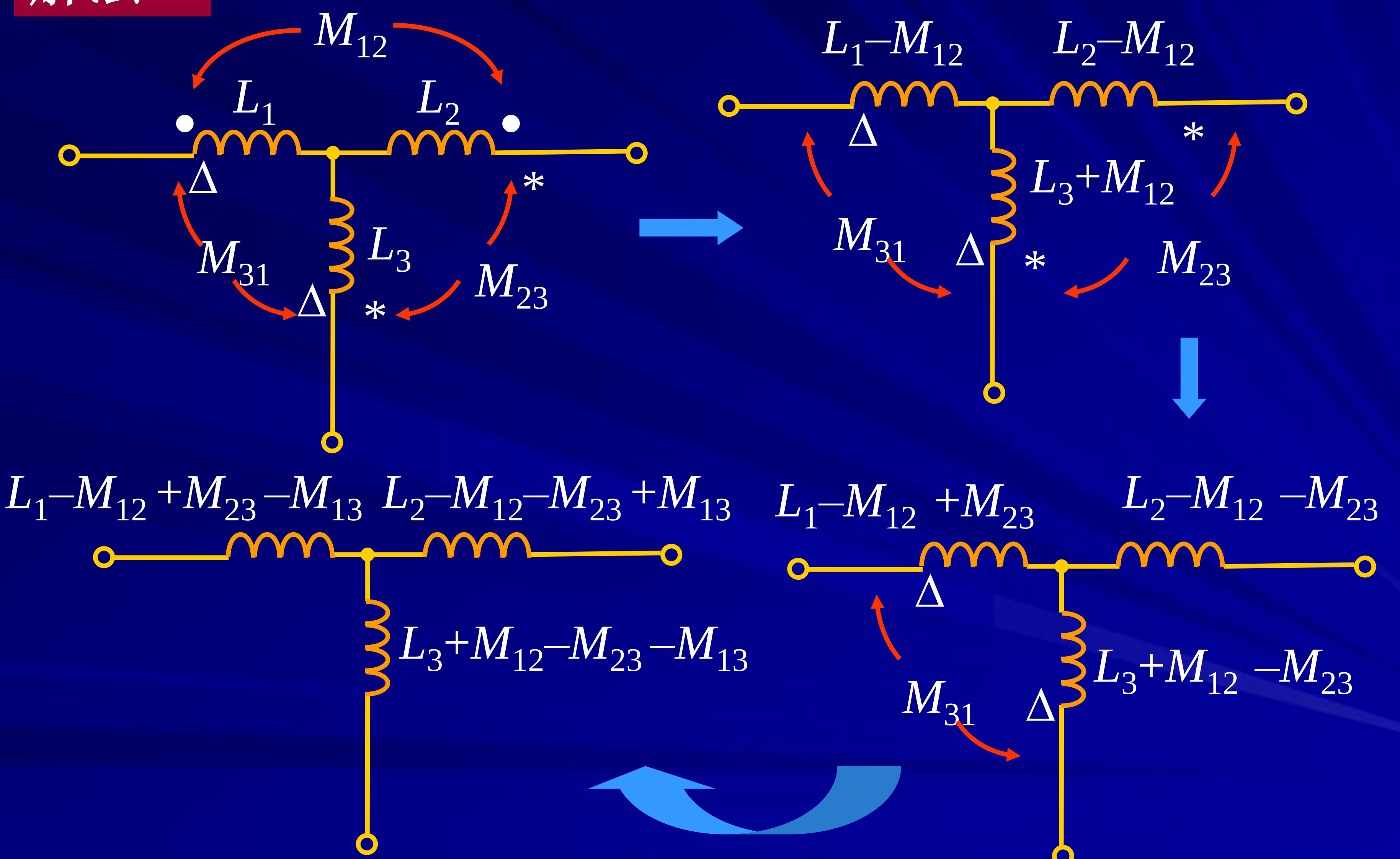
解法1

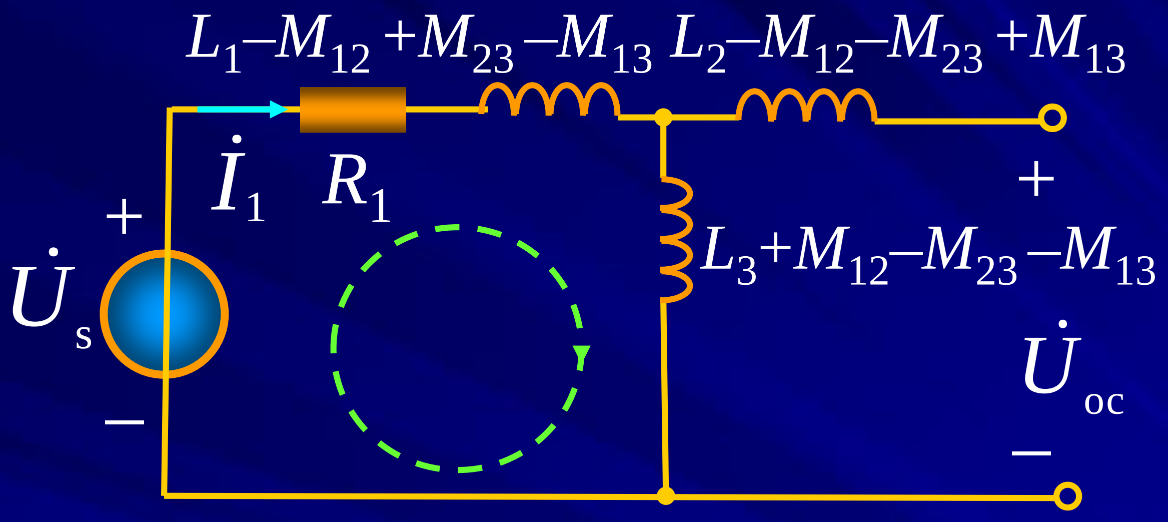
$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_s}{R_1+j\omega(L_1+L_3-2M_{31})}$$

$$\dot{U}_{oc}=j\omega M_{12}\dot{I}_1-j\omega M_{23}\dot{I}_1-j\omega M_{31}\dot{I}_1+j\omega L_3\dot{I}_1$$

$$=\frac{j\omega(L_3+M_{12}-M_{23}-M_{31})\dot{U}_s}{R_1+j\omega(L_1+L_3-2M_{31})}$$

解法2　作出去耦等效电路，(一对一对消):

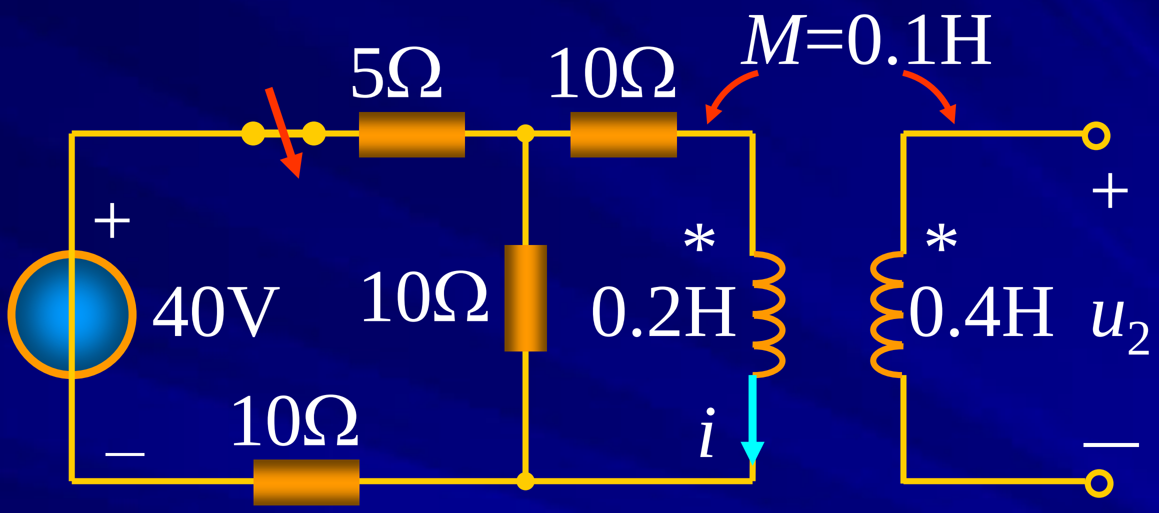




$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_s}{R_1+\mathrm{j}\omega(L_1+L_3-2M_{31})}$$

$$\dot{U}_{oc}=\frac{\mathrm{j}\omega(L_3+M_{12}-M_{23}-M_{31})\dot{U}_s}{R_1+\mathrm{j}\omega(L_1+L_3-2M_{31})}$$

例2-4　**图示互感电路已处于稳态，$t=0$ 时开关打开，求$t>0$时开路电压$u_2(t)$。**

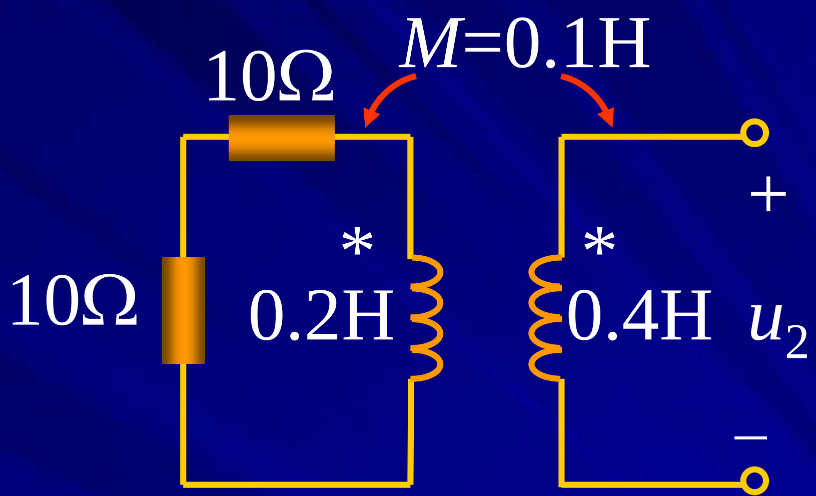


解

二次回路开路，对一次回路无影响，开路电压$u_2(t)$中只有互感电压。先应用三要素法求电流$i(t)$。

$$i(0_+)=i(0_-)=\frac{40}{\dfrac{10\times 10}{10+10}+15}\times\frac{1}{2}\text{A}=1\text{A}$$

$$t > 0 \quad \tau = \frac{0.2}{20}\mathrm{s} = 0.01\mathrm{s}$$



$$t \to \infty \quad i(\infty) = 0$$

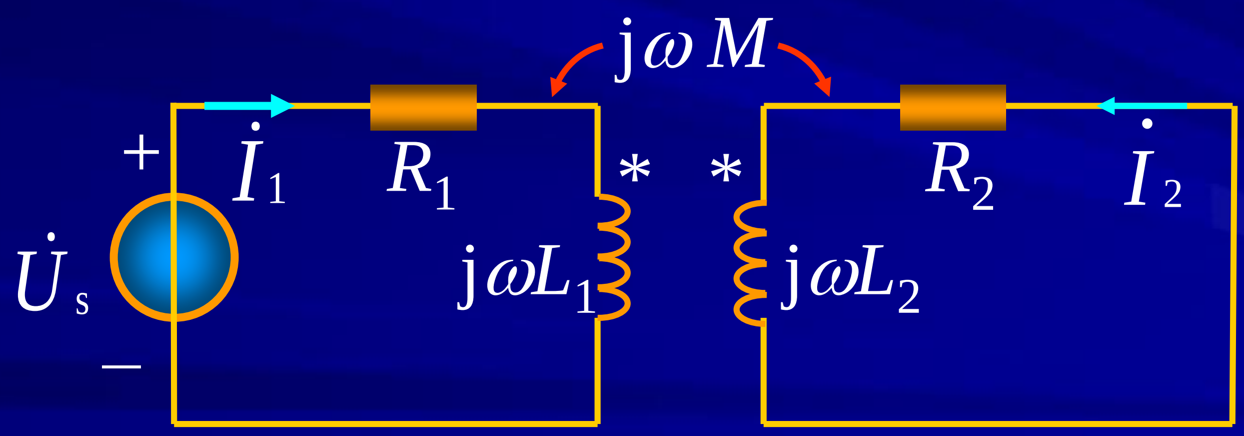
$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}} = \mathrm{e}^{-100t}\,\mathrm{A}$$

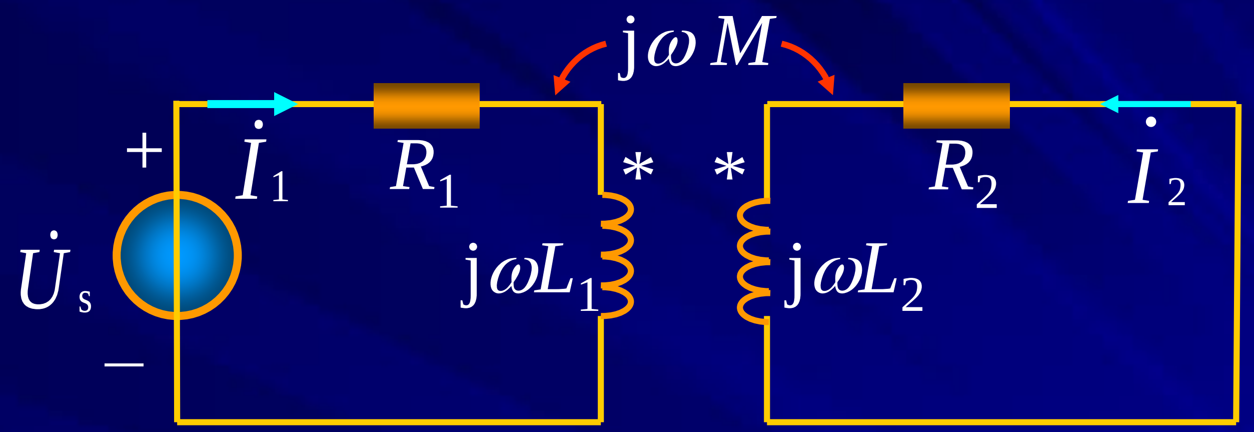
$$u_2(t) = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0.1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-100t})\mathrm{V} = -10\mathrm{e}^{-100t}\mathrm{V}$$

10-3 耦合电感的功率

当耦合电感中的施感电流变化时，将出现变化的磁场，从而产生电场（互感电压），耦合电感通过变化的电磁场进行电磁能的转换和传输，电磁能从耦合电感一边传输到另一边。

例3-1　求图示电路的复功率。





$$\begin{cases} (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_s \\ \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{S}_1 = \dot{U}_s\dot{I}_1^* = (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)I_1^2 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2\dot{I}_1^*$$

$$\overline{S}_2 = 0 = \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1\dot{I}_2^* + (R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)I_2^2$$

$\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2\dot{I}_1^*$ —— 线圈1中互感电压耦合的复功率

$\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1\dot{I}_2^*$ —— 线圈2中互感电压耦合的复功率

注意

①两个互感电压耦合的复功率为虚部同号、实部异号，这一特点是耦合电感本身的电磁特性所决定的。

②耦合功率中的有功功率相互异号，表明有功功率从一个端口进入，必从另一端口输出，这是互感M非耗能特性的体现。

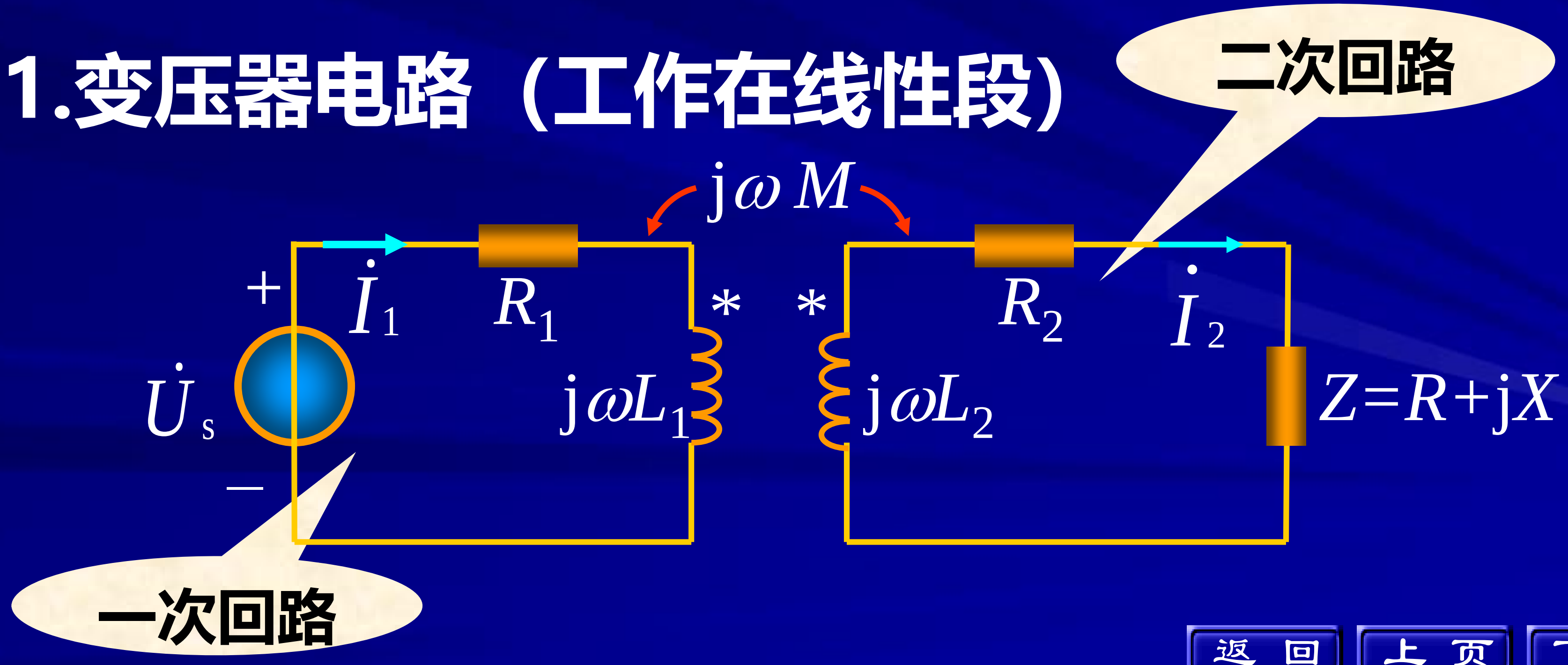
注意

③耦合功率中的无功功率同号，表明两个互感电压耦合功率中的无功功率对两个耦合线圈的影响的性质是相同的，即，当M起同向耦合作用时，它的储能特性与电感相同，将使耦合电感中的磁能增加；当M起反向耦合作用时，它的储能特性与电容相同，将使耦合电感的储能减少。

10-4 变压器原理

变压器由两个具有互感的线圈构成，一个线圈接向电源，另一线圈接向负载，变压器是利用互感来实现从一个电路向另一个电路传输能量或信号的器件。当变压器线圈的心子为非铁磁材料时，称空心变压器。

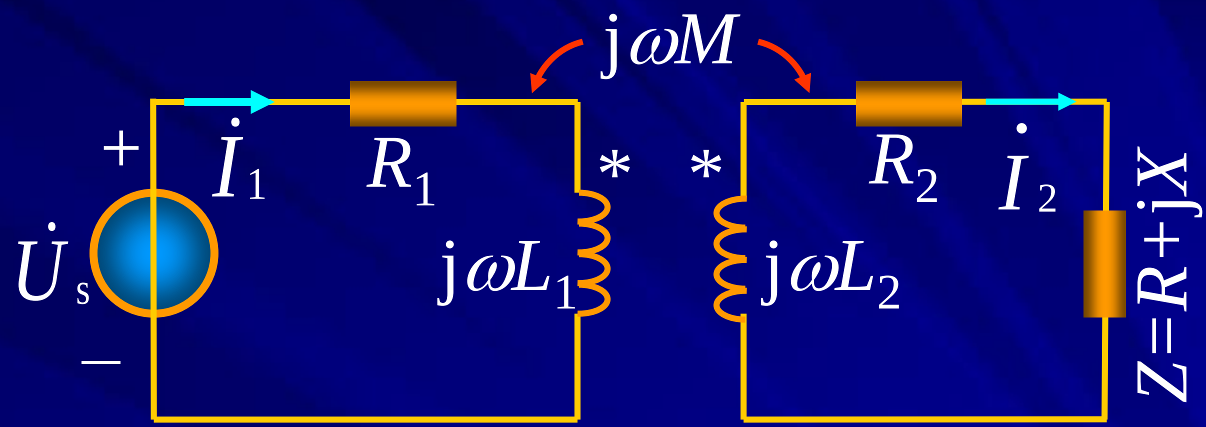
1.变压器电路（工作在线性段）



2. 分析方法

①方程法分析

回路方程:



$$\begin{cases} (R_1+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2=\dot{U}_s \\ -\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+(R_2+\mathrm{j}\omega L_2+Z)\dot{I}_2=0 \end{cases}$$

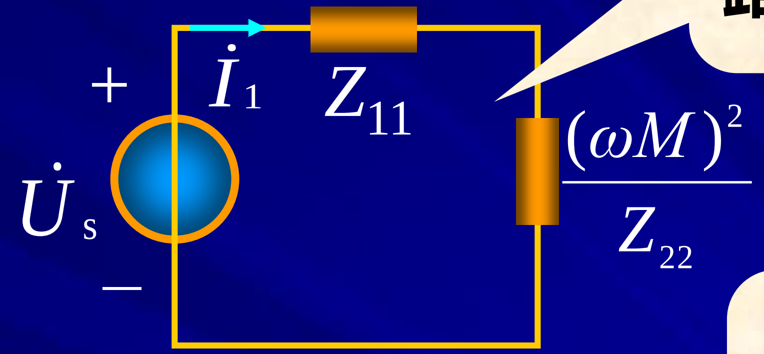
令　$Z_{11}=R_1+\mathrm{j}\omega L_1$，　$Z_{22}=(R_2+R)+\mathrm{j}(\omega L_2+X)$

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2=\dot{U}_s \\ -\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2=0 \end{cases}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

$$Z_i = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

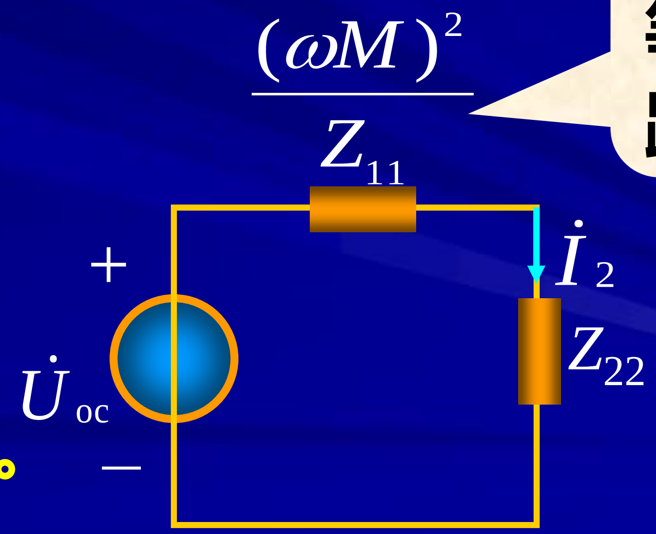
一次侧等效电路



$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{U}_s}{(Z_{11} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}})Z_{22}}$$

$$= \frac{j\omega M \dot{U}_s}{Z_{11}} \cdot \frac{1}{Z_{22} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{11}}}$$

二次侧等效电路

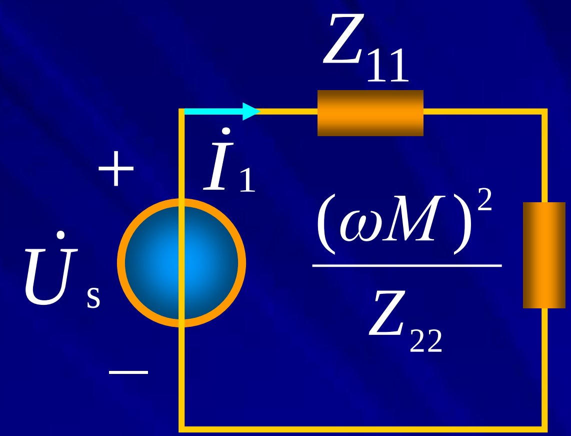


②等效电路法分析

根据以上表示式得等效电路。

$$Z_l=\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}=\frac{\omega^2M^2}{R_{22}+\mathrm{j}X_{22}}$$

$$=\frac{\omega^2M^2R_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}-\mathrm{j}\frac{\omega^2M^2X_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}=R_l+\mathrm{j}X_l$$



一次侧等效电路

Z_l → **二次侧对一次侧的引入阻抗。**

R_l → **引入电阻。恒为正，表示二次回路吸收的功率是靠一次回路供给的。**

X_l → **引入电抗。负号反映了引入电抗与二次回路电抗的性质相反。**

注意 当二次回路侧开路时 $Z_i=Z_{11}$

引入阻抗反映了二次回路对一次回路的影响。

一、二次回路虽然没有电的连接，但互感的作用使二次回路产生电流，这个电流又影响一次回路的电流、电压。

能量分析 电源发出有功功率 $P = I_1^2(R_1+R_l)$

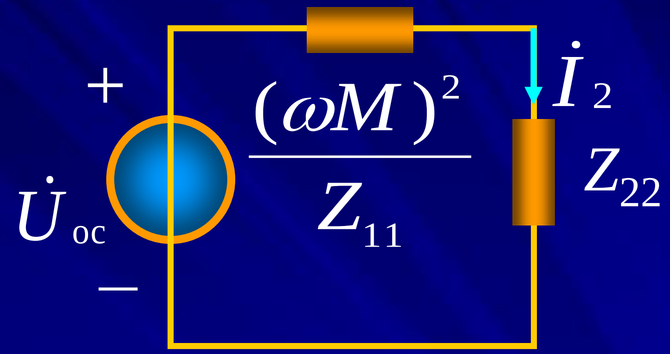
$I_1^2R_1$ 消耗在一次侧； $I_1^2R_l$ 消耗在二次侧

证明

$$\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 = Z_{22}\dot{I}_2 \rightarrow (\omega M)^2 I_1^2 = (R_{22}^2 + X_{22}^2)I_2^2$$

$$\rightarrow \frac{(\omega M)^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} I_1^2 = R_{22}I_2^2 = P_2$$

$$\dot{U}_{oc}=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{U}_s}{Z_{11}}=\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 \rightarrow$$



二次侧等效电路

二次侧开路时，一次电流在二次侧产生的互感电压。

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} \rightarrow$$ **一次侧对二次侧的引入阻抗。**

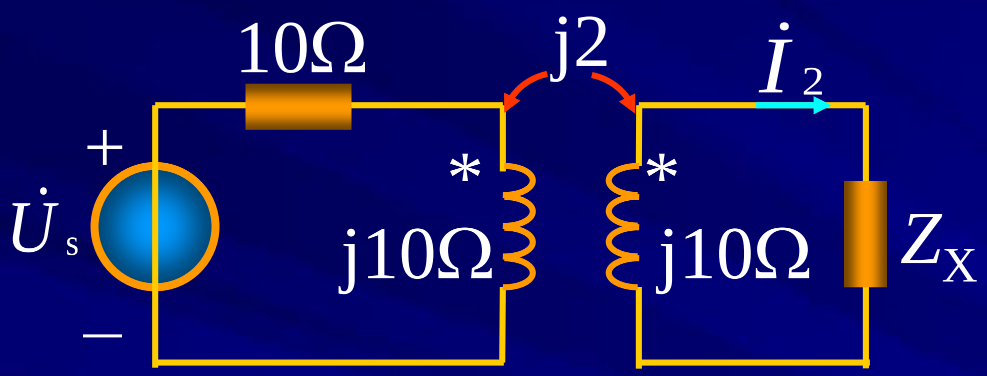
注意 **利用戴维宁定理可以求得变压器的二次侧等效电路 。**

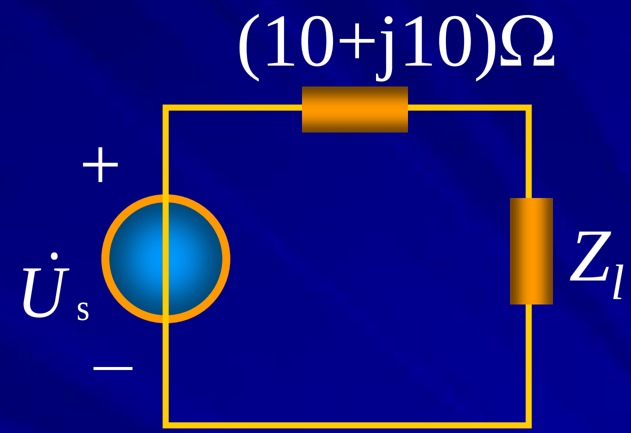
③去耦等效法分析

对含互感的电路进行去耦等效，再进行分析。

例4-1 **已知** U_s=20 V，**一次侧引入阻抗** Z_l=(10–j10)Ω。

求: Z_X **并求负载获得的有功功率。**





解

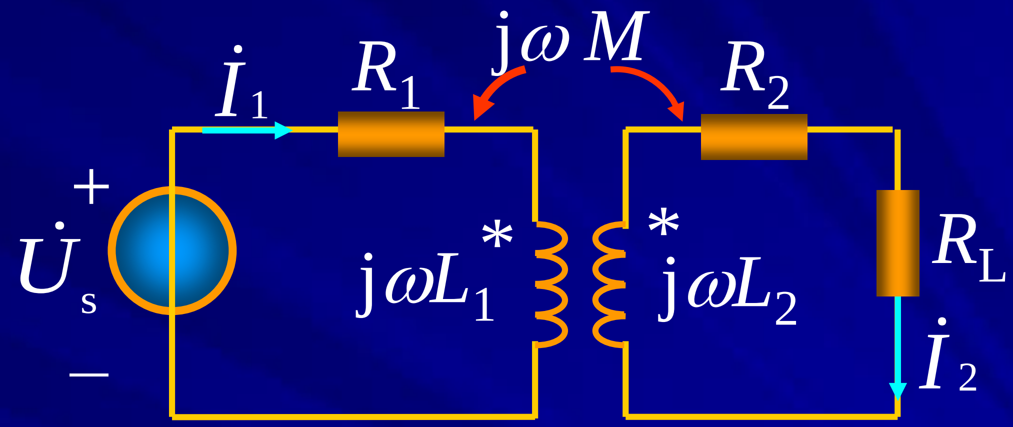
$$Z_l = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{4}{Z_X + j10} = 10 - j10 \rightarrow Z_X = (0.2 - j9.8)\,\Omega$$

负载获得功率： $$P = P_{R引} = \left(\frac{20}{10+10}\right)^2 R_l = 10\ \text{W}$$

实际是最佳匹配： $$Z_l = Z_{11}^*, \qquad P = \frac{U_s^2}{4R} = 10\ \text{W}$$

例4-2 $L_1=3.6\text{H}$, $L_2=0.06\text{H}$, $M=0.465\text{H}$, $R_1=20\Omega$, $R_2=0.08\Omega$, $R_L=42\Omega$, $\omega=314\text{rad/s}$, $\dot{U}_s=115\angle 0^\circ \text{V}$。

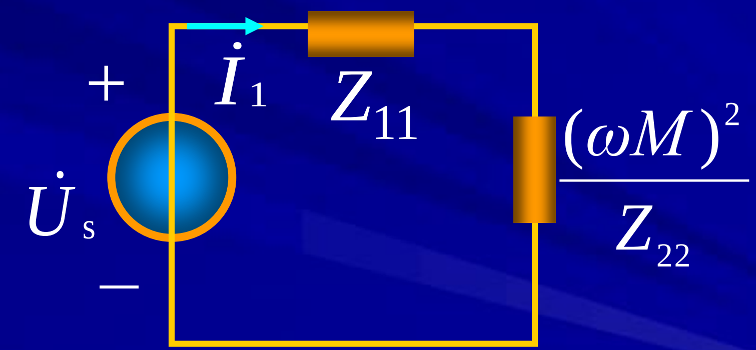
求：$\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$.



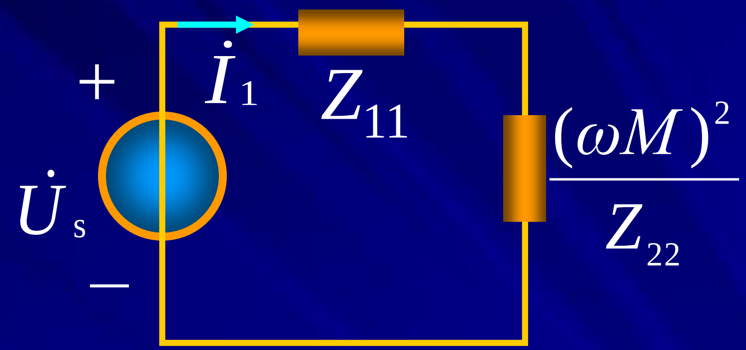
解法1 **应用一次等效电路**

$$Z_{11}=R_1+\text{j}\omega L_1=(20+\text{j}1130.4)\Omega$$

$$Z_{22}=R_2+R_L+\text{j}\omega L_2=(42.08+\text{j}18.85)\,\Omega$$



$$Z_l=\frac{X_M^2}{Z_{22}}=\frac{146^2}{46.11\angle 24.1^\circ}\Omega=(422-\text{j}188.8)\Omega$$



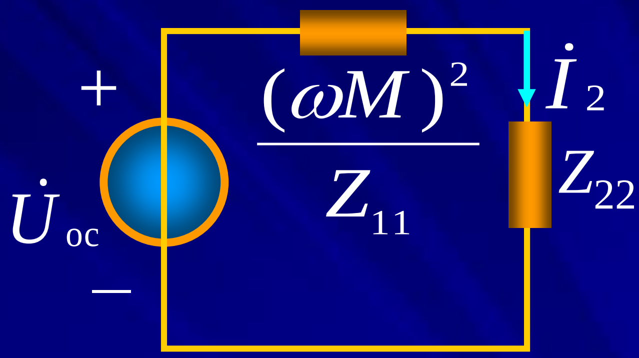
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + Z_l}$$

$$= \frac{115\angle 0^\circ}{20 + \mathrm{j}1130.4 + 422 - \mathrm{j}188.8}\ \mathrm{A} = 0.111\angle -64.9^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} = \frac{\mathrm{j}146 \times 0.111\angle -64.9^\circ}{42.08 + \mathrm{j}18.85}\ \mathrm{A}$$

$$= \frac{16.2\angle 25.1^\circ}{46.11\angle 24.1^\circ}\ \mathrm{A} = 0.351\angle 1^\circ\ \mathrm{A}$$

解法2 应用二次等效电路



$$\dot{U}_{oc} = \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 = \mathrm{j}\omega M \cdot \frac{\dot{U}_s}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}$$

$$= \mathrm{j}146 \times \frac{115\angle 0^\circ}{20 + \mathrm{j}1130.4}\,\mathrm{V} = 14.85\angle 0^\circ\,\mathrm{V}$$

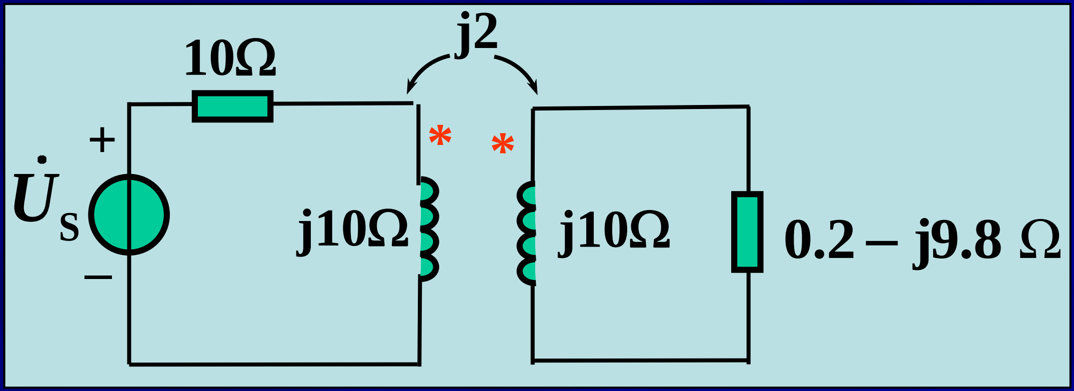
$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = \frac{146^2}{20 + \mathrm{j}1130.4}\,\Omega = -\mathrm{j}18.85\,\Omega$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{oc}}{-\mathrm{j}18.5 + 42.08 + \mathrm{j}18.85} = 0.353\,\mathrm{A}$$

单选题 1分

设置

副边反映在原边回路中的引入阻抗为



A $10 + j10\ \Omega$

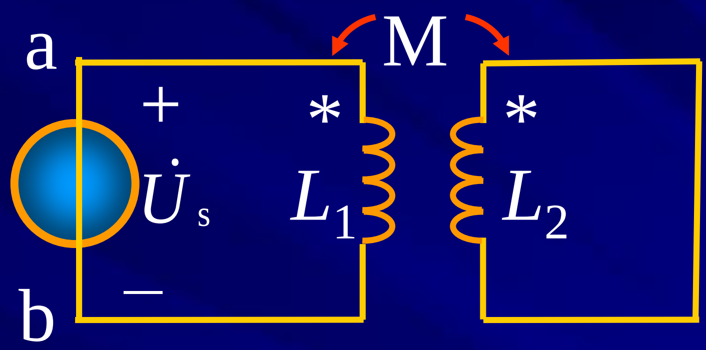
B $8.32 + j0.41\ \Omega$

C $-\ j0.4\ \Omega$

D $10 - j10\ \Omega$

提交

例4-3 **全耦合电路如图，求ab端的等效阻抗。**



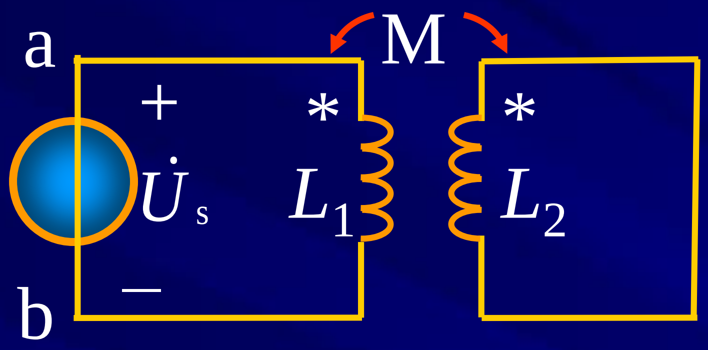
解法1

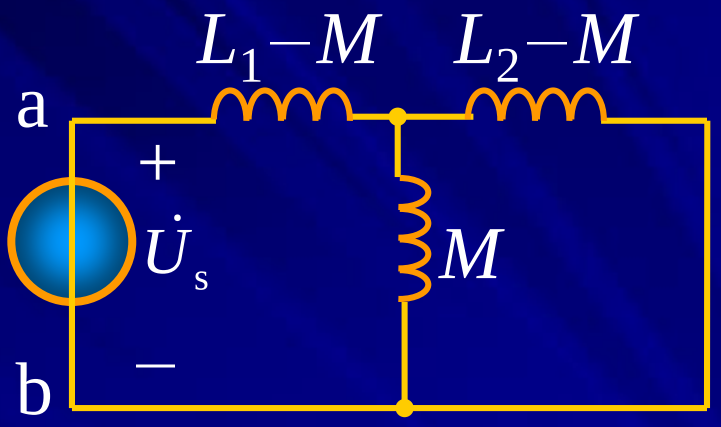
$$Z_{11}=\mathrm{j}\omega L_1 \qquad Z_{22}=\mathrm{j}\omega L_2$$

$$Z_l=\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}=-\mathrm{j}\omega\frac{M^2}{L_2}$$

$$Z_{ab}=Z_{11}+Z_l=\mathrm{j}\omega L_1-\mathrm{j}\omega\frac{M^2}{L_2}$$

$$=\mathrm{j}\omega L_1(1-\frac{M^2}{L_1L_2})=\mathrm{j}\omega L_1(1-k^2)$$





解法2 **画出去耦等效电路**

$$L_{ab}=L_1-M+\frac{M(L_2-M)}{L_2}$$

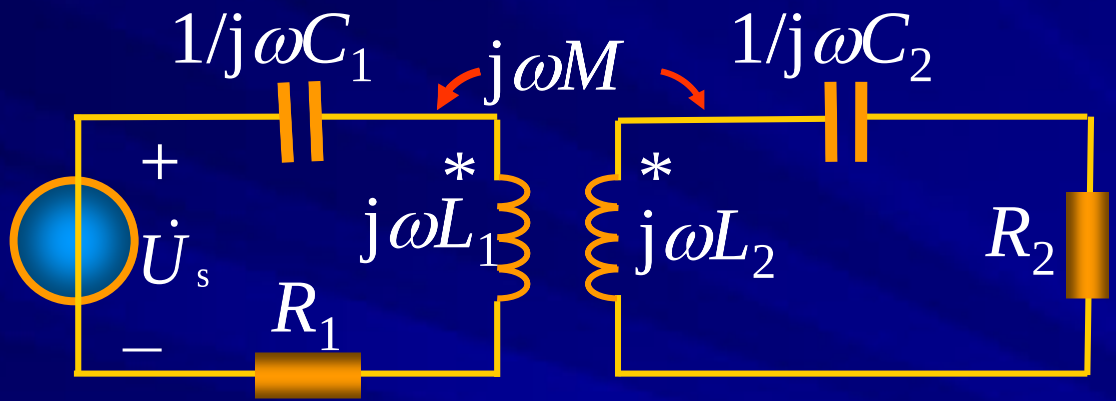
$$=\frac{L_1L_2-M^2}{L_2}=L_1\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)=L_1(1-k^2)$$

$$Z_{ab}=\mathrm{j}\omega L_1(1-k^2)$$

例4-4 $\omega = 10^6 \mathrm{rad/s}$, $\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ$ V

$L_1 = L_2 = 0.1\mathrm{mH}$, $M = 0.02\mathrm{mH}$, $R_1 = 10\Omega$, $C_1 = C_2 = 0.01\mu\mathrm{F}$

问：$R_2 = ?$ 能吸收最大功率, 求最大功率。



解法1

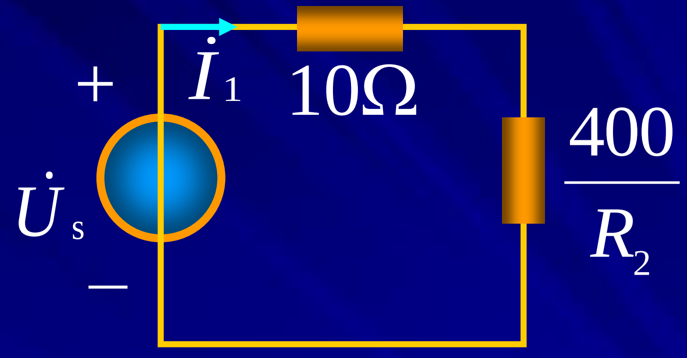
$$\omega L_1 = \omega L_2 = 100\Omega \qquad \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = 100\Omega$$

$$\omega M = 20\Omega \qquad Z_{11} = R_1 + \mathrm{j}(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}) = 10\Omega$$

$$Z_{22} = R_2 + \mathrm{j}(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}) = R_2$$

应用一次等效电路

$$Z_l = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}} = \frac{400}{R_2}$$



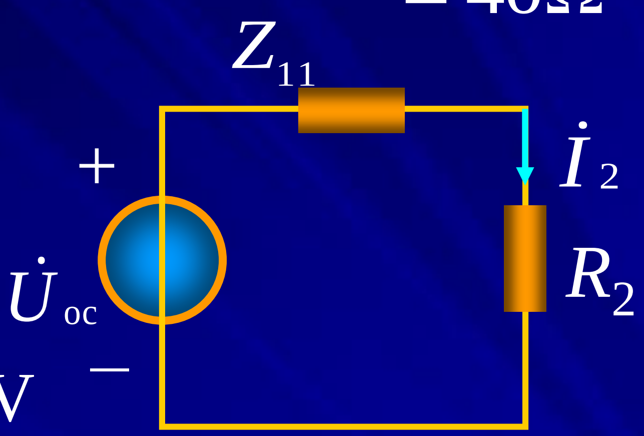
当 $Z_l = Z_{11} = 10 = \dfrac{400}{R_2}$

→ R_2=40Ω **时吸收最大功率**

$$P_{\max} = \frac{10^2}{4\times 10}\text{W} = 2.5\text{W}$$

解法2 应用二次等效电路

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = 40\Omega$$



$$Z_l = \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}} = \frac{400}{10}\Omega = 40\Omega$$

$$\dot{U}_{oc} = \mathrm{j}\omega M \cdot \frac{\dot{U}_s}{Z_{11}} = \frac{\mathrm{j}20 \times 10}{10}\mathrm{V} = \mathrm{j}20\,\mathrm{V}$$

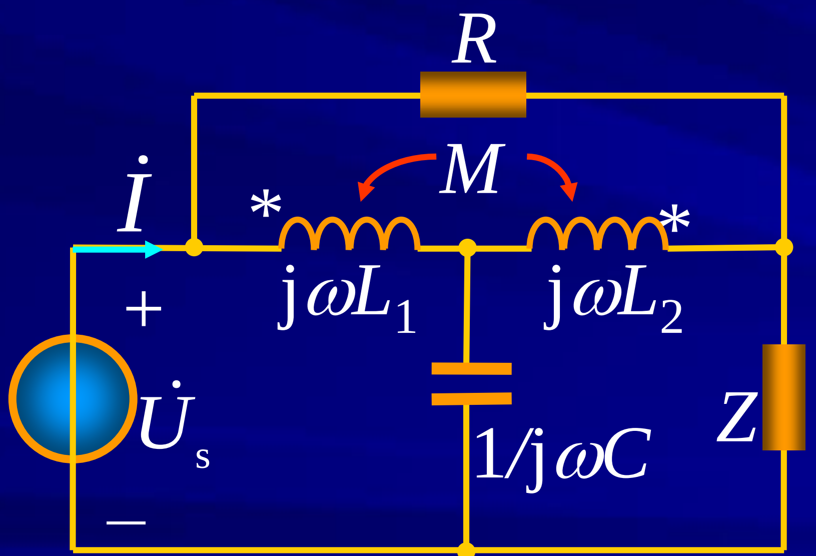
当 $Z_l = R_2 = 40\Omega$ 时吸收最大功率

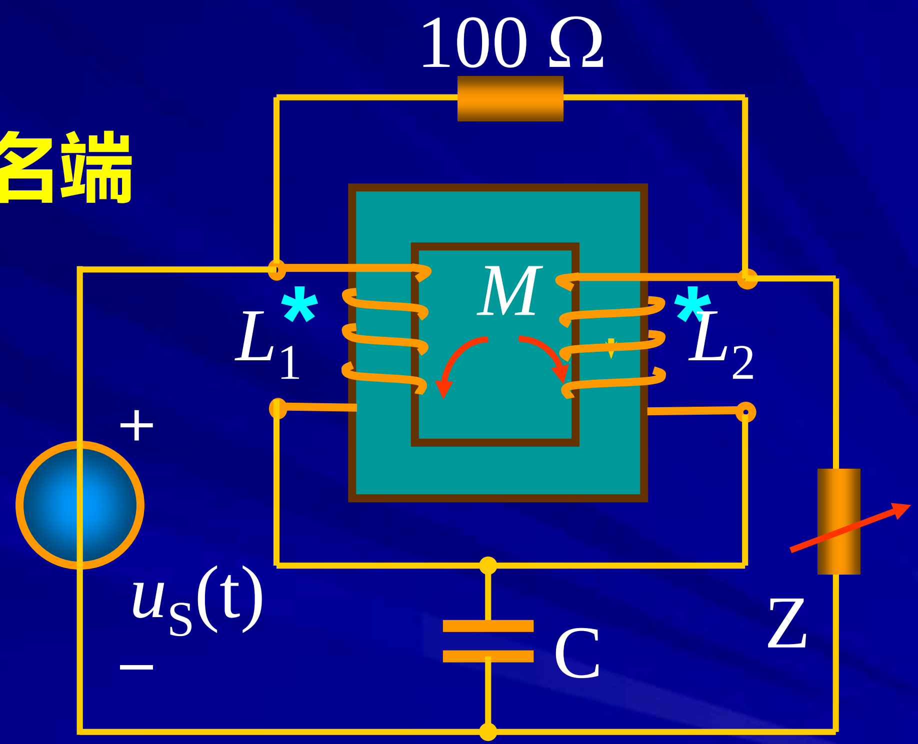
$$P_{max} = \frac{20^2}{4 \times 40}\mathrm{W} = 2.5\mathrm{W}$$

例4-5 已知$\omega L_2=120\Omega, \omega M=\frac{1}{\omega C}=20\Omega$，

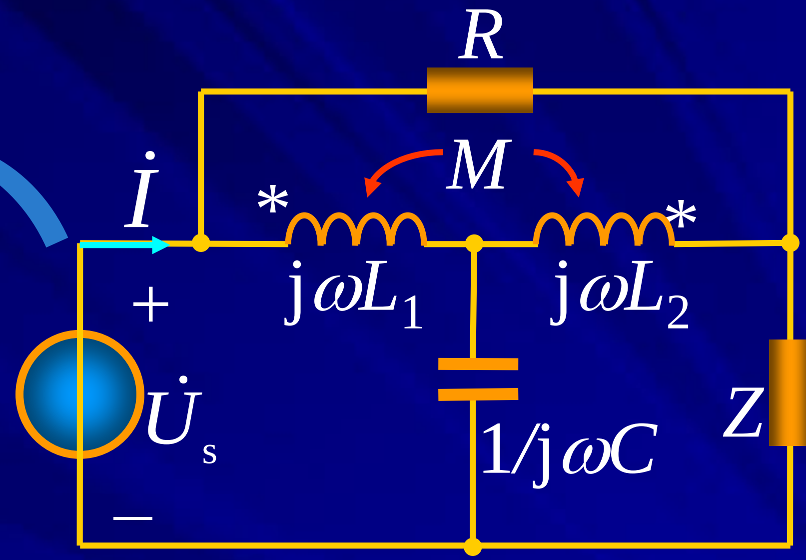
$u_S(t)=100\sqrt{2}\cos\omega t$ 问Z为何值时其上获得最大功率，求出最大功率。

解 ①判定互感线圈的同名端

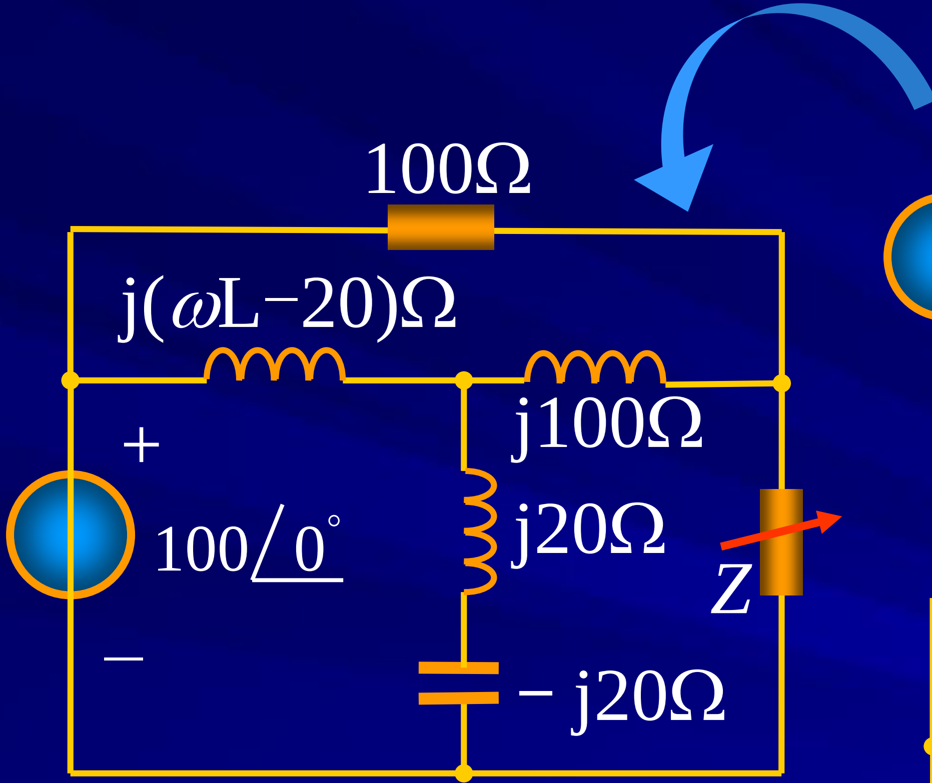




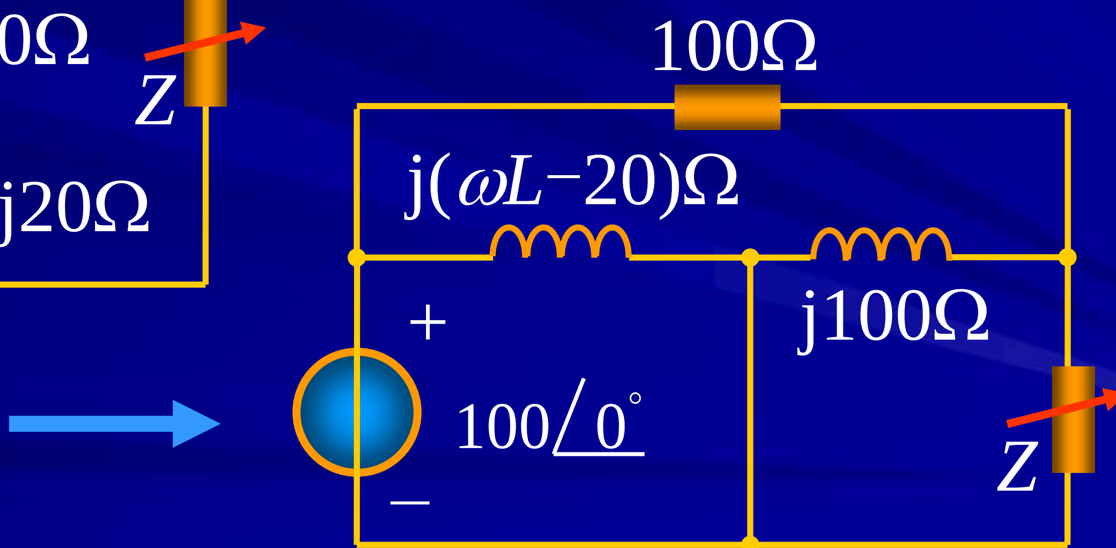
②作去耦等效电路



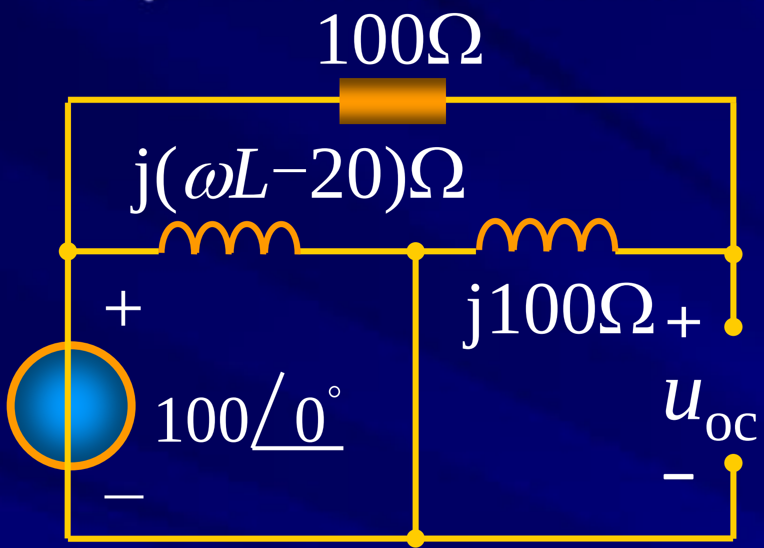
R
M
İ
*
*
jωL1
jωL2
+
U̇s
1/jωC
Z
–

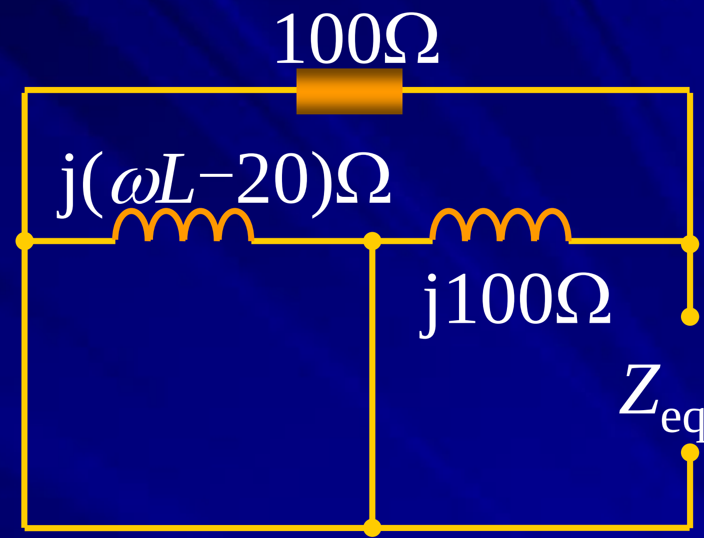


100Ω
j(ωL−20)Ω
j100Ω
+
100/0°
j20Ω
Z
–
− j20Ω



100Ω
j(ωL−20)Ω
j100Ω
+
100/0°
Z
–





$$\dot{U}_{oc} = \frac{j100\dot{U}_s}{100 + j100} = \frac{j100 \times 100}{100 + j100}\,\text{V} = 50\sqrt{2}\angle 45^\circ\,\text{V}$$

$$Z_{eq} = \frac{100 \times j100}{100 + j100}\,\Omega = (50 + j50)\,\Omega$$

$$\Rightarrow \quad Z = Z_{eq}^{*} = (50 - j50)\Omega \qquad P_{max} = \frac{U_{oc}}{4R_{eq}}\,\text{W} = 25\text{W}$$

10-5 理想变压器

理想变压器是实际变压器的理想化模型，是对互感元件的理想科学抽象，是极限情况下的耦合电感。

1.理想变压器的三个理想化条件

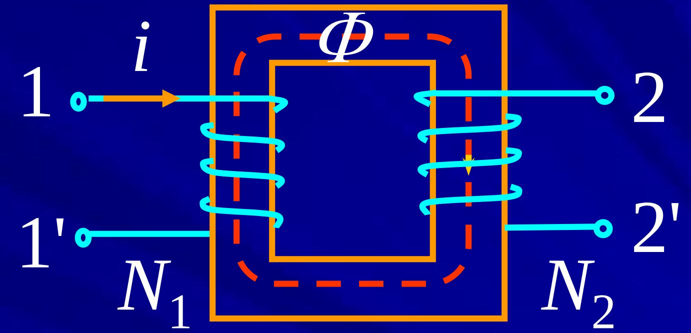
①无损耗 → 线圈导线无电阻，做心子的铁磁材料的磁导率无限大。

②全耦合 → $k=1 \Rightarrow M=\sqrt{L_1 L_2}$

③参数无限大 → $L_1, L_2, M \Rightarrow \infty$，但 $\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}=\dfrac{N_1}{N_2}=n$

注意 以上三个条件在工程实际中不可能满足，但在一些实际工程概算中，在误差允许的范围内，把实际变压器当作理想变压器对待，可使计算过程简化。

2.理想变压器的主要性能

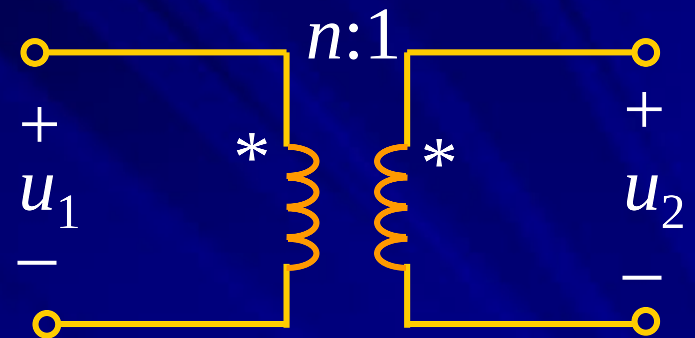


①变压关系

$$k=1 \;\longrightarrow\; \Phi_1=\Phi_2=\Phi_{11}+\Phi_{22}=\Phi$$

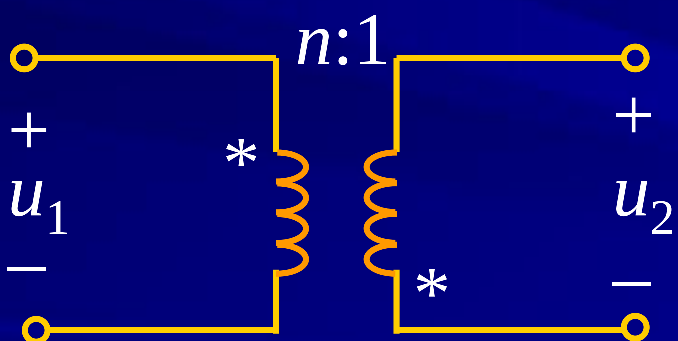
$$u_1=\frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t}=N_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad u_2=\frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t}=N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$



理想变压器模型

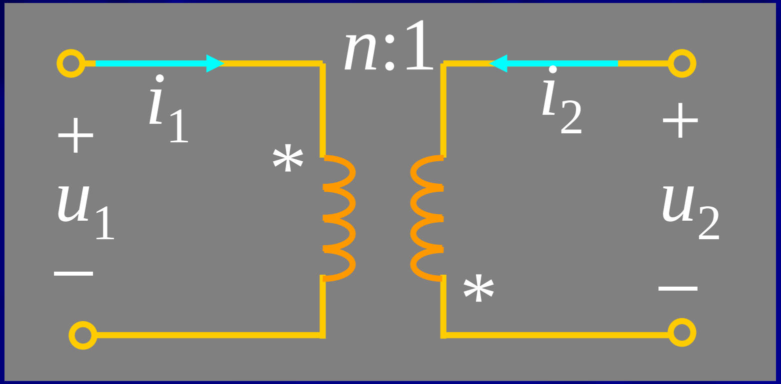
注意 若



$$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -n$$

②变流关系

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$



理想变压器模型

$$i_1(t) = \cancelto{0}{\frac{1}{L_1}\int_0^t u_1(\xi)\mathrm{d}\xi} - \frac{M}{L_1} i_2(t)$$

考虑理想化条件：

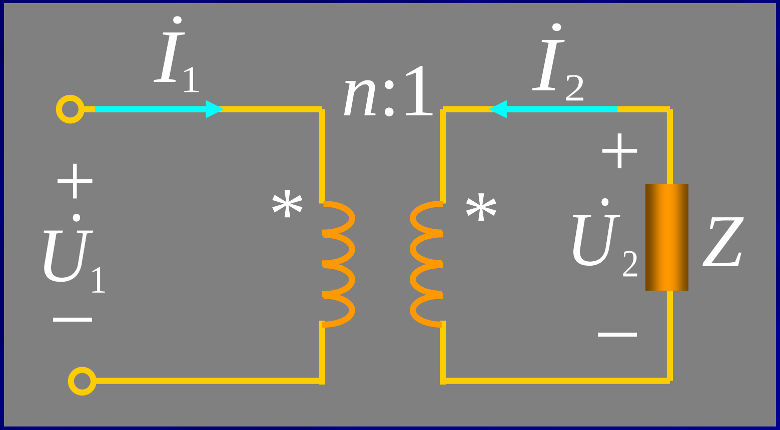
$$k = 1 \Rightarrow M = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$L_1 \Rightarrow \infty, \sqrt{L_1/L_2} = \mathrm{N}_1/\mathrm{N}_2 = n$$

$$\frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{1}{n} \rightarrow \boxed{i_1(t) = -\frac{1}{n} i_2(t)}$$

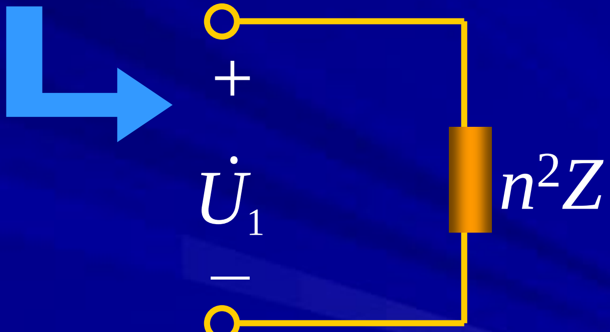
注意 若i_1、i_2一个从同名端流入，一个从同名端流出，则有

$$i_1(t)=\frac{1}{n}i_2(t)$$



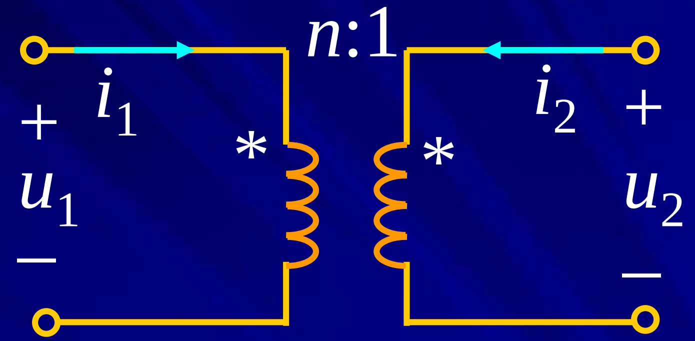
③变阻抗关系

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{n\dot{U}_2}{-1/n\dot{I}_2}=n^2(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2})=n^2Z$$



注意 理想变压器的阻抗变换只改变阻抗的大小，不改变阻抗的性质。

④功率性质



$$\begin{cases} u_1 = n u_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

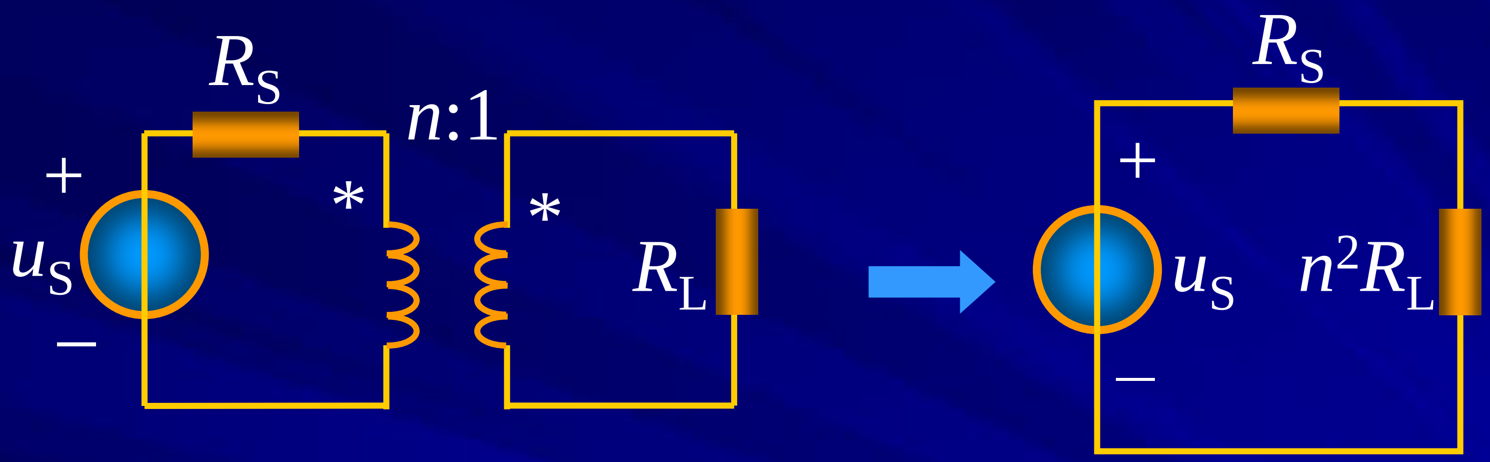
$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 i_1 + \frac{1}{n} u_1 \times (-n i_1) = 0$$

表明

①理想变压器既不储能，也不耗能，在电路中只起传递信号和能量的作用。

②理想变压器的特性方程为代数关系，因此它是无记忆的多端元件。

例5-1 已知电源内阻R_S=1kΩ，负载电阻R_L=10Ω。为使R_L获得最大功率，求理想变压器的变比n。



解　应用变阻抗性质

当 $n^2R_L=R_S$ 时匹配，即　$10n^2=1\ 000$

$\rightarrow$ $n^2=100$，　$n=10$

单选题 1分

设置

全耦合变压器原边线圈5000匝，副边线圈1000匝，原边电压为_____时，副边电压为220V。

A 1100V

B 5500V

C 220V

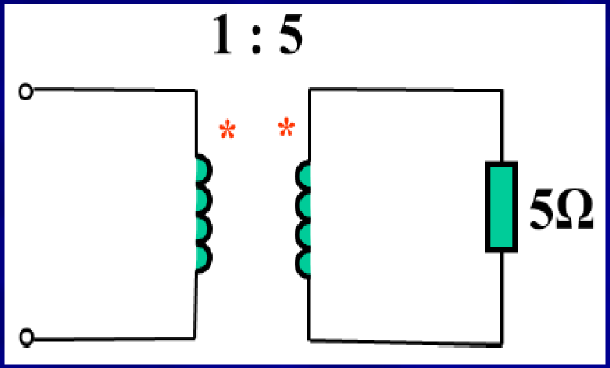
D 条件不足，无法计算

提交

单选题 1分

设置

从理想变压器原边看进去，等效电阻为



A 0.2 Ω

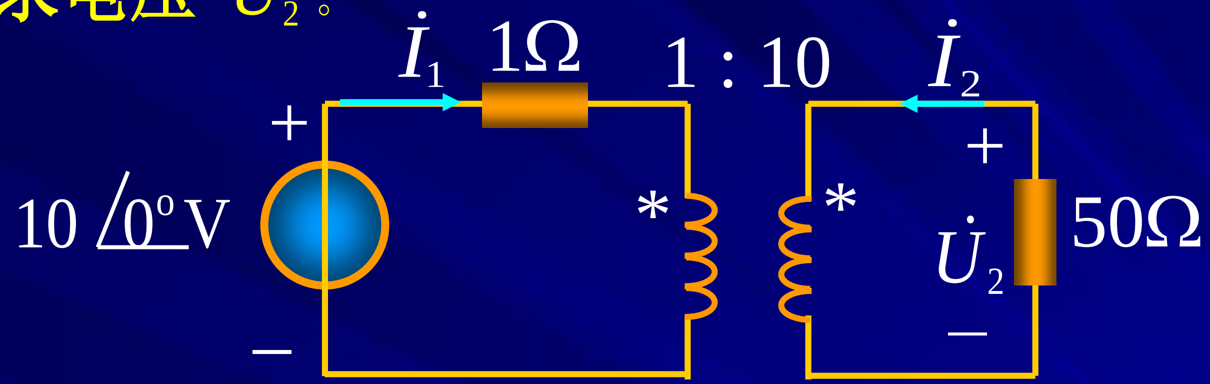
B 1 Ω

C 25 Ω

D 125 Ω

提交

例5-2 求电压 $\dot{U}_2$。

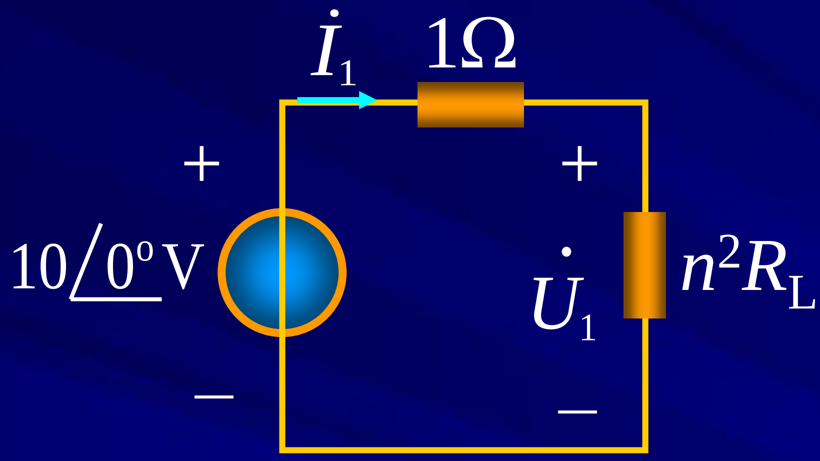


解法1 **列方程**

$$\begin{cases} 1\times \dot{I}_1+\dot{U}_1=10\angle 0^\circ \\ 50\dot{I}_2+\dot{U}_2=0 \\ \dot{U}_1=\dfrac{1}{10}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1=-10\dot{I}_2 \end{cases}$$

解得 ⟹ $\dot{U}_2=33.33\angle 0^\circ$ V

解法2 阻抗变换



$$n^2R_L = (\frac{1}{10})^2 \times 50\Omega = \frac{1}{2}\Omega$$

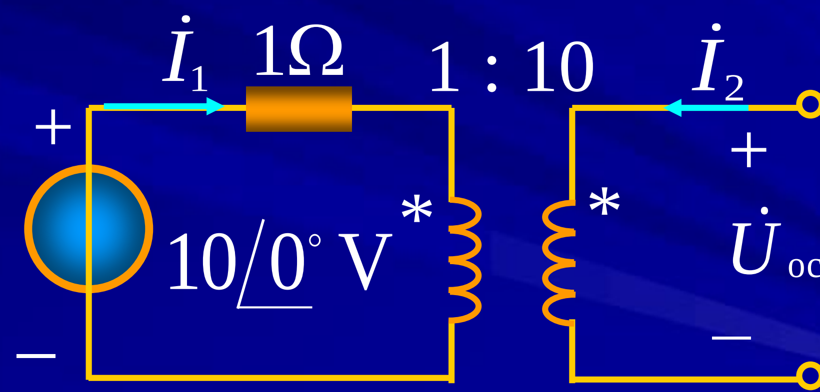
$$\dot{U}_1 = \frac{10\angle 0^{\circ}}{1+1/2} \times \frac{1}{2}\text{V} = \frac{10}{3}\text{V}$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{n}\dot{U}_1 = 10\,\dot{U}_1 = 33.33\text{V}$$

解法3 戴维宁等效

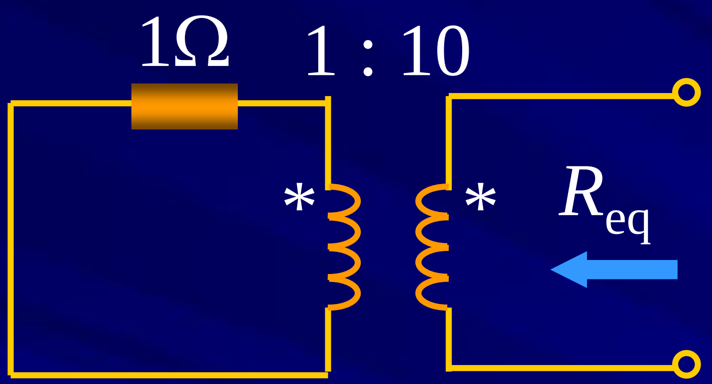
求$\dot{U}_{oc}$：

$$\dot{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \dot{I}_1 = 0$$



$$\dot{U}_{oc} = 10\dot{U}_1 = 10\dot{U}_s = 100\angle 0^{\circ}\ \text{V}$$

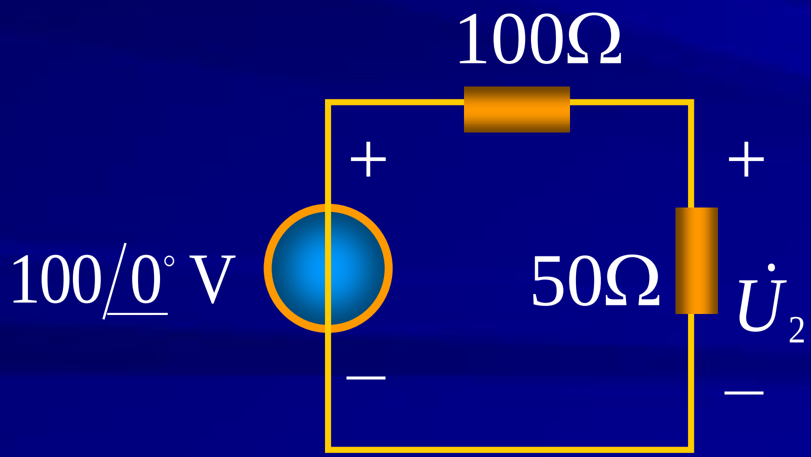
求 R_{eq}：



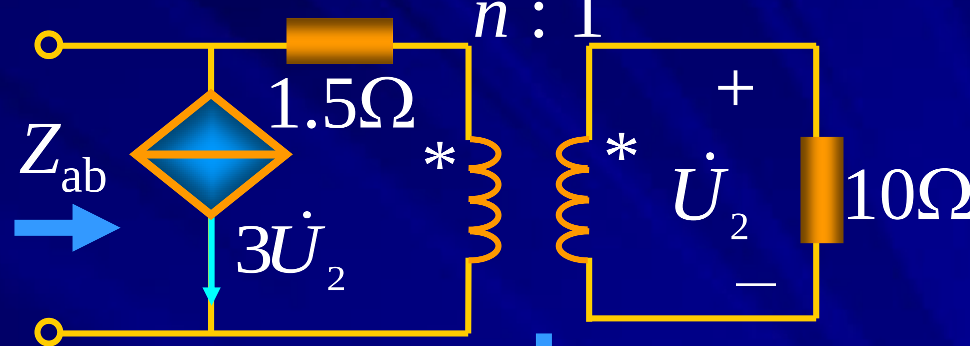
$$R_{eq}=10^2\times1\Omega=100\Omega$$

戴维宁等效电路：

$$\dot{U}_2=\frac{100\angle 0^\circ}{100+50}\times 50\,\text{V}=33.33\angle 0^\circ\ \text{V}$$

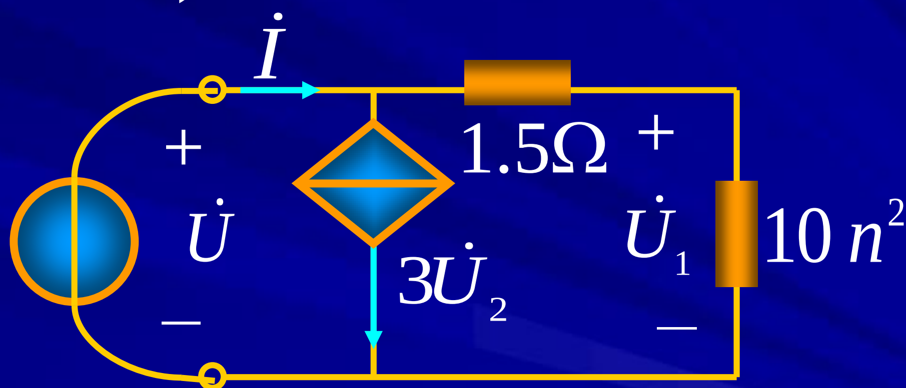


例5-3 已知图示电路的等效阻抗$Z_{ab}=0.25\Omega$，求理想变压器的变比n。



解 应用阻抗变换

外加电源得

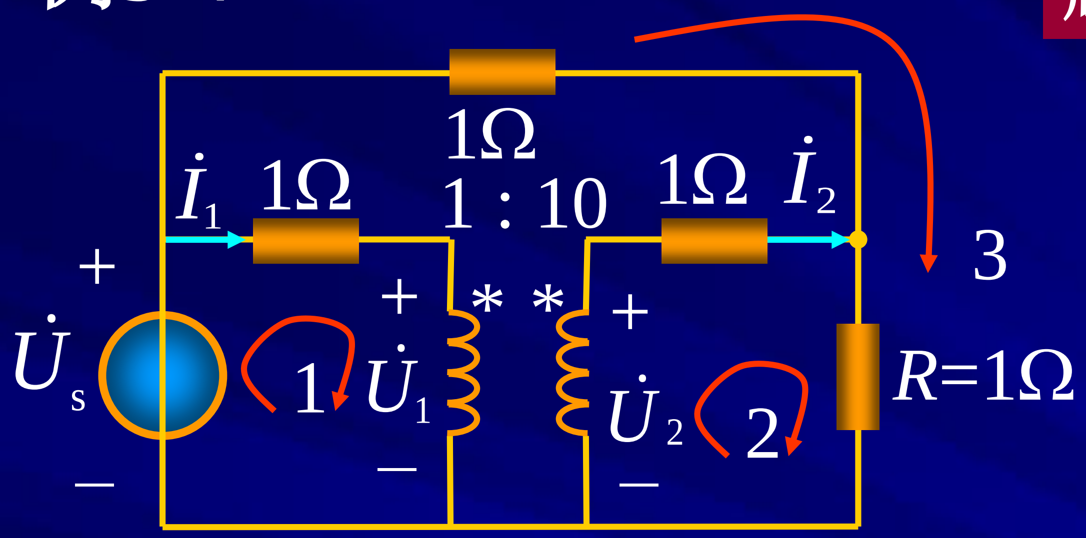


$$\begin{cases}\dot{U}=(\dot{I}-3\dot{U}_2)\times(1.5+10n^2)\\ \dot{U}_1=(\dot{I}-3\dot{U}_2)\times 10n^2\\ \dot{U}_1=n\dot{U}_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_2=\frac{10n\dot{I}}{30n+1}$$

$$Z_{ab}=0.25=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{1.5+10n^2}{30n+1} \Rightarrow \begin{cases}n=0.5\\ n=0.25\end{cases}$$

例5-4 **求电阻R吸收的功率。**



解 **应用回路法**

$$\begin{cases} \dot I_1 = \dot U_s - \dot U_1 \\ 2\dot I_2 + \dot I_3 = \dot U_2 \\ \dot I_2 + 2\dot I_3 = \dot U_s \\ \dot U_1 = n\dot U_2 \\ \dot I_1 = \dfrac{1}{n}\dot I_2 \end{cases}$$

解得

$$\dot I_3 = \frac{\dot U_s(1/n + 2n - 1)}{3n + 2/n}$$

$$\dot I_2 = \frac{\dot U_s(1 - n/2)}{3n/2 + 1/n}$$

$$\dot I = \dot I_2 + \dot I_3$$

$$P = RI^2$$

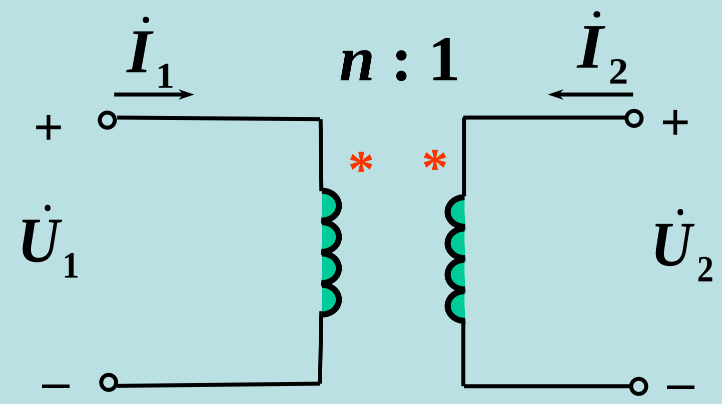
单选题 1分

设置

理想变压器可以对直流变压吗

A 可以

B 不可以



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

提交