矩阵的转置　行变列　以主对角线为轴顺时针旋转

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

若n阶方阵A中元素有$a_{ji}=a_{ij}$

即$A=A^T$，则称之对称矩阵

它的元素以对角线为轴对应相等

a	1	2	4
1	b	3	5
2	3	c	6
4	5	6	d

方阵的行列式　转置行列式

i) $|A^T| = |A|$ （行列式性质1）

ii) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

iii) $|AB| = |A|\cdot|B|$

伴随矩阵：行列式|A|各个元素的代数余子式A_{ij}构成

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

一阶行列式的代数余子式是1

有 $A\cdot A^* = |A|\cdot E$

$\hookrightarrow \left(A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}\right)$

设$A=(a_{ij})$，$AA^*=(b_{ij})$

$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots a_{in}A_{jn}$

$= \begin{cases} |A|, & i=j \\ 0, & i\neq 0 \end{cases}$

故 $AA^* = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & |A| & \\ & & \ddots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$

矩阵分块法

纵横线将矩阵分为子块的合体 —分块矩阵

加、乘规则都与矩阵运算同

转置：$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$　则 $A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{bmatrix}$

(子块)整体和单个矩阵都转置

分块对角矩阵：$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$

有：$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_n|$

且若$|A_i|\neq 0$，$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$

按行分块和按列分块：

A：按行：$A=(a_1, a_2, \cdots a_n)$　且 $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$　列向量

按列：$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$　且 $a_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots a_{in})$　行向量（加T表示）

逆矩阵

有 $AB=BE=E$　则说A可逆，且称B为A的逆矩阵

定理 A、B都是n阶矩阵　可逆矩阵一定是方阵　唯一性

A的逆矩阵记为A^{-1}，则有 $B=A^{-1}$

→ A是可逆矩阵的充要条件是$|A|\neq 0$

① 若矩阵A可逆，则 $|A|\neq 0$　（反过来也成立）

$AA^{-1}=E$，$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1 \neq 0$

$|A|=0$时称A为奇异矩阵．可逆矩阵是非奇异矩阵

② 若$AB=E$（$BA=E$）则 $B=A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

1> $(A^{-1})^{-1} = A$

2> $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

3> $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$　} A、B都可逆

4> $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

5> 令$A^0 = E$，$A^{-k} = (A^{-1})^k$

n阶方阵：$|A^*| = |A|$

若A可逆则A的转置矩阵、伴随矩阵都可逆（不为0）

例

由$AP=P\Lambda$，求A^n

$A = P\Lambda P^{-1}$，$A^2 = P\Lambda \underbrace{P^{-1}P}_{E}\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}$

故 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$

设$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ 为x的m次多项式

则有 $\varphi(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m$

$\varphi(A)$ 称为矩阵A的m次多项式

若 $A = P\Lambda P^{-1}$，则 $\varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1}$

有对角矩阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$

$\varphi(\Lambda) = a_0 E + a_1 \Lambda + \cdots + a_m \Lambda^m$

$= a_0 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix} + \cdots + a_m \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \ddots & \lambda_n^m \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \varphi(\lambda_1) & & \\ & \varphi(\lambda_2) & \\ & & \ddots & \varphi(\lambda_n) \end{bmatrix}$