EESC • USP

Engenharia Mecatrônica

Problemas Mecatrônicos II - Relatório 3

Sistemas Lineares | Deslocamento

Alexandre Barros,
11802989

São Carlos - SP
2022

1 Introdução

A terceira atividade de Problemas Mecatrônicos trabalha com o tema de Solução de Sistemas Lineares para uma estrutura engastada que é tracionada por uma força F na sua extremidade livre, também é considerado que essa estrutura possui um módulo de elasticidade que varia no comprimento e que será seccionada em dez partes cada uma com um módulo de elasticidade e cada parte possui seu próprio deslocamento u_i, a partir da construção do equilíbrio de forças em cada uma dessas molas será construído um sistema linear não trivial que será resolvido usando os métodos de resolução do Octave, são pedidos três tarefas, uma situação em que é aplicada duas forças na estrutura, a situação de aplicar um deslocamento na última mola e por fim plotar sob um mesmo gráfico os deslocamentos unitários de cada mola para cada uma dessas situações.

2 Métodos e Resultados

O problema em questão é dado pela Figura 1, nela é possível observar a barra engastada na figura e as dez partes seccionadas cada uma com uma mola e com um deslocamento. A constante de cada Mola é definida pela expressão:

$$k_n = 10 + (50 + 0.5N)e^{-0.2n} \ \frac{kN}{m} \tag{1}$$

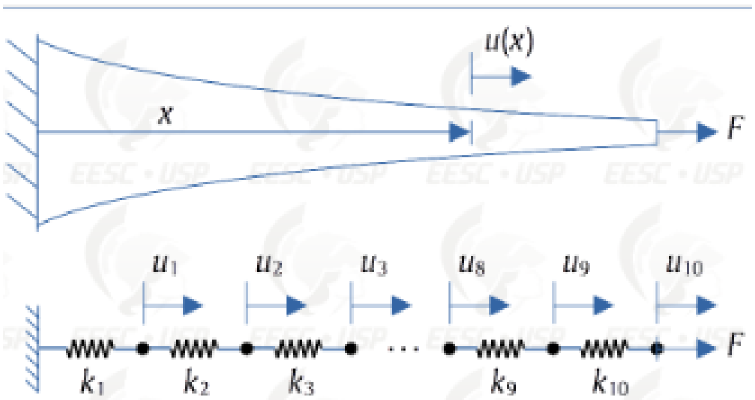


Figura 1: Geometria do Problema

Onde N é os dois últimos números do nUsp do aluno, nesse caso N = 89, portanto para as dez molas se tem os seguintes valores de k_n:

n	k_n ($\frac{kN}{m}$)
1	87.370
2	73.345
3	61.863
4	52.462
5	44.765
6	38.463
7	33.303
8	29.079
9	25.621
10	22.789

Portanto para entender como essas molas se comportam fisicamente é interessante analisar um sistema com duas molas e avaliar o equilíbrio de forças do problema.

Figura 2: Duas Molas em Série

Observe o equilíbrio do ponto no meio das molas:

$$F + f_1 - f_2 = 0$$

$$F = -f_2 + f_1$$

$$F = -k_2(u_2 - u_1) + k_1(u_1 - u_0)$$

$$F = u_0(-k_1) + u_1(k_1 + k_2) + u_2(-k_2)$$

Observe então que para determinar a força num ponto é necessário se conhecer os três deslocamentos próximos a mola e as duas constantes de mola, no caso geral tem-se:

$$F_n = u_{n-1}(-k_n) + u_n(k_n + k_{n+1}) + u_{n+1}(-k_{n+1}) \ (N) \tag{2}$$

Agora a partir da Equação 2 é formar um sistema linear com dez equações que pode ser escrito da forma Ax = b, mas vale observar que no caso de n = 1 não há deslocamento u_0 e que para o n = 10 não mola k_{11} e deslocamento u_{11}.

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5+k_6 & -k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6+k_7 & -k_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_7+k_8 & -k_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8+k_9 & -k_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & k_9+k_{10} & -k_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{10} & k_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{bmatrix}$$

Sendo esse o sistema expresso na forma Ku = F e para a primeira parte do trabalho tem-se que a força $F_5 = -50N$ e que a força $F_{10} = 100N$, e observação que deve ser feita é que as constantes de molas estão em kN enquanto as forças em N, portanto é dividido o vetor de forças por 1000, e o resultado é expressado inicialmente em m, para a solução desse sistema linear é usada a forma K\F e o Octave devolve o vetor u. Dessa forma o vetor u para o primeiro caso em centímetros é:

n	u_n (cm)
1	0.0572
2	0.1254
3	0.2062
4	0.3015
5	0.4132
6	0.6732
7	0.9734
8	1.3174
9	1.7077
10	2.1465

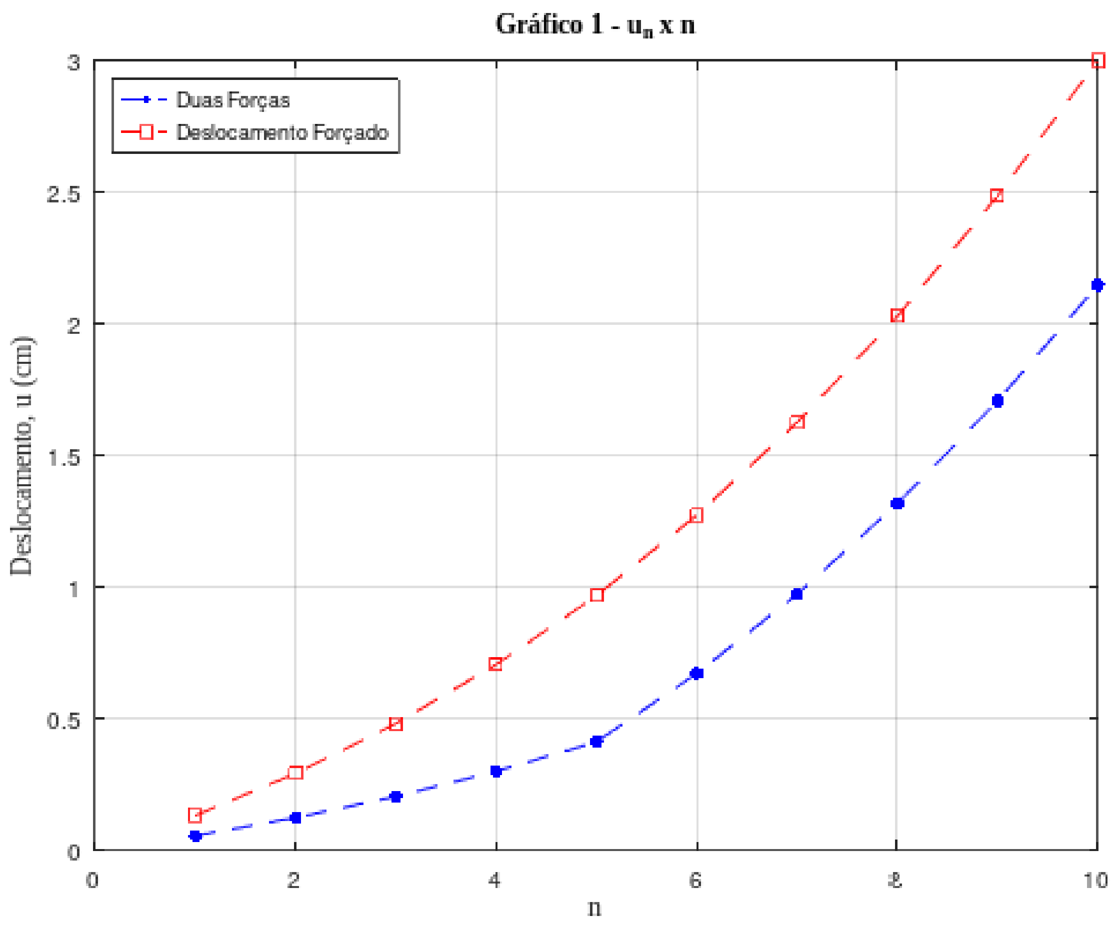
Para a segunda parte do problema tem-se que a última mola tem um deslocamento de 3cm imposto sobre ela, sendo assim o sistema agora conta com uma equação extra, basta pensar que a última linha da matriz K é que resolveria o deslocamento u_{10} sendo assim podemos excluir essa linha e a última coluna pode ser excluída da mesma forma e portanto o vetor de forças ganha um forçamento na última posição de $k_{10} \cdot u_{10}$. O sistema na forma Ku = F que resolve a segunda parte do problema é dada portanto por:

$$
\begin{bmatrix}
k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & -k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5+k_6 & -k_6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6+k_7 & -k_7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_7+k_8 & -k_8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & k_8+k_9 & -k_9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_9 & k_9+k_{10}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{10} \cdot u_{10} \end{bmatrix}
$$

Agora com esse sistema de 9 equações e 9 incógnitas é possível usar novamente o Octave para solucionar o problema. Portanto tem-se o seguinte vetor para a segunda parte:

n	u_n (cm)
1	0.1341
2	0.2939
3	0.4834
4	0.7068
5	0.9686
6	1.2733
7	1.6252
8	2.0283
9	2.4857
10	3.0000

E por fim a terceira parte do problema era plotar os dois vetores de resultados num mesmo gráfico e observar o comportamento deles:



Note que no sistema que foram aplicadas duas forças a uma diferença no comportamento dos deslocamento até a quinta posição os deslocamentos se desenvolvem de uma forma já que estão sob a influência de apenas 50N quando se passa a quinta mola o sistema estão sob a ação de 100N e os deslocamentos se desenvolvem mais rapidamente. Para o caso do deslocamento forçado os deslocamentos se desenvolvem seguindo um padrão uma vez que eles estão apenas sob a influência de uma força.

O Código e as implementação dos sistemas estão descritos a seguir:

```
## Molas no sistema:


n = [1:10];


# Alexandre Barros de Araujo
# nUsp = 11802989
# N = 89


## Primeira Parte: Casos de duas Forcas na quinta e decima mola:
```

```
k = @(n) ((10 + (50 + 0.5*89)*e^(-0.2*n)));

mat_K = zeros(10);

for i = 1:10
  disp(k(i));
endfor

for i = 1:10
  mat_K(i, i) = (k(i) + k(i+1));

  if (i - 1) >= 1
    mat_K(i, i - 1) = -k(i);
  endif

  if (i + 1) <= 10
    mat_K(i, i + 1) = -k(i+1);
  endif

  mat_K(10, 10) = k(10);
endfor

mat_K;

F = zeros(10, 1); F(5, 1) = -50; F(10, 1) = 100;

u_part1 = mat_K\(F./1000)

## Segunda Parte: Deslocamento Forcado na Ultima mola

u_10 = 0.03;

F_2 = zeros(9, 1); F_2(9, 1) = u_10*k(10);

mat_K_2 = mat_K([1:9],[1:9]);

u_part2 = mat_K_2\F_2;
```

```
u_part2(10, 1) = u_10


## Terceira Parte: Plotagem dos Grficos u_n x n


fig = figure(1);


plot(n, u_part1*100, '--b.', 'MarkerSize', 13);
hold on;
title('Grfico 1 - u_n x n', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
xlabel('n', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
ylabel('Deslocamento, u (cm)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
plot(n, u_part2*100, '--rs', 'MarkerSize', 3.9);
legend('Duas Foras', 'Deslocamento Forado', 'Location', 'northwest')
hold off;
grid on;
```

3 Conclusão

A terceira prática tratou da solução dos sistemas lineares, onde foi estudado o caso de várias molas em série e com o uso do Octave para a resolução desses sistemas grandes (10 x 10 e 9 x 9). No primeiro caso havia duas forças sendo aplicadas no sistema em pontos diferentes e foi possível notar a diferença no comportamento do sistema quando se observou o Gráfico 1, e no último caso teve um deslocamento forçado o que fez com que o sistema tivesse mais equações do que incógnitas o que permitiu tirar uma linha e uma coluna da Matriz K e fazer uma nova solução que mais uma vez ao olhar o Gráfico 1 se demonstrou consistente. As práticas no geral tem demonstrado a importância da análise gráfica para a solução dos problemas, mesmo que nesse caso o gráfico não tenha sido usado para a resolução do problema em si ele se demonstrou útil para a interpretação das respostas e notar a consistência das mesmas.