EESC • USP

Engenharia Mecatrônica

Problemas Mecatrônicos II - Relatório 5

EDO 2ª Ordem | Dinâmica

Alexandre Barros,
11802989

São Carlos - SP
2022

1 Introdução

A quinta atividade de Problemas Mecatrônicos continua trabalhando o tema de Aproximação Numérica de EDO's para EDO's de 2ª ordem para um sistema dinâmico de um pêndulo que possui velocidade inicial o suficiente para realizar algumas voltas antes de desenvolver o movimento pendular, esse pêndulo também possui um amortecimento. Para resolver esse problema se tem uma EDO de segunda ordem formada que não possui solução trivial, sendo assim é necessário tranformar o problema em um sistema de EDO's de 1ª ordem e como no Relatório 4 é usado o Octave para a aproximação numérica desse sistema, a função 'ode45' será usada na resolução do problema assim como na última vez.

2 Métodos e Resultados

O problema em questão é dado pela Figura 1, sendo assim é possível observar a dinâmica do sistema e notar que para esse caso o uso de coordenada normal-tangente facilita a definição das equações em função de θ.

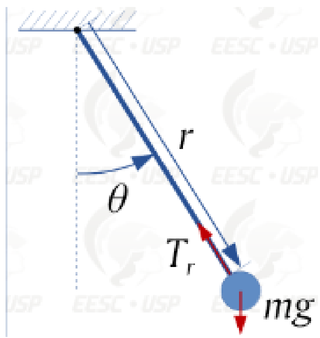


Figura 1: Geometria do Problema

Portanto, trabalhando no sentido Normal se tem:

$$\sum F_n = ma_n$$

$$T - mgcos\theta = m\dot{\theta}r$$

Dessa forma a Tração é dada por:

$$T = m(\dot{\theta}r + gcos\theta) \tag{1}$$

Fazendo a Somatória dos Momentos:

$$\sum M_o = I_o\ddot{\theta}$$

$$-M - mgsen\theta r = I_o\ddot{\theta}$$

Onde M é o amortecimento do pêndulo que é dado por $M = cr^2\dot{\theta}$ e I_o é o Momento de Inércia do Pêndulo, como o cabo possui uma massa desprezível o Momento de Inércia depende apenas da massa na ponta do cabo e vale $I_o = mr^2$. Sendo assim a EDO de segundo ordem que rege o sistema é dada por:

$$\ddot{\theta} = -\frac{M}{mr^2} - \frac{mgsen\theta r}{mr^2}$$

Simplificando:

$$\ddot{\theta} = -\frac{c\dot{\theta}}{m} - \frac{gsen\theta}{r} \tag{2}$$

Onde r é o raio do pêndulo e é dado por:

$$r = (1 + \frac{N}{100})m \tag{3}$$

E N é os dois últimos números do nUsp.

Porém como dito na introdução para a resoluçao desse problema é necessário primeiro fazer dessa EDO um sistema de EDO's de ordem inferior e tal sistema pode ser obtido através da substituição $\omega = \dot{\theta}$:

Portanto das duas EDO's que resolvem o problema são:

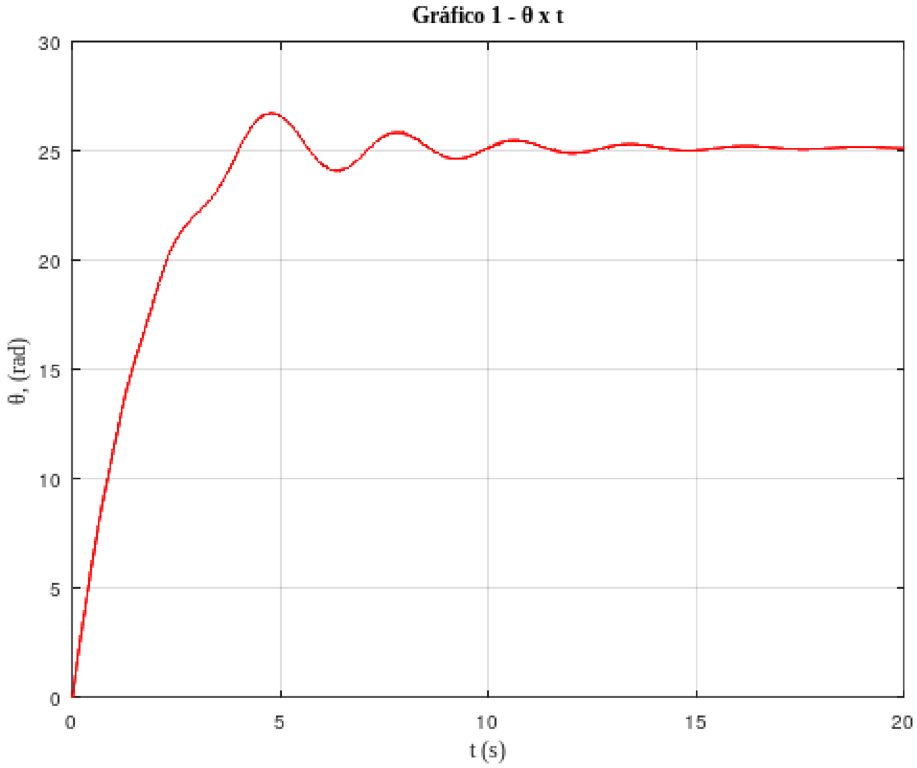
$$\omega = \dot{\theta} \tag{4}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{c\omega}{m} - \frac{gsen\theta}{r} \tag{5}$$

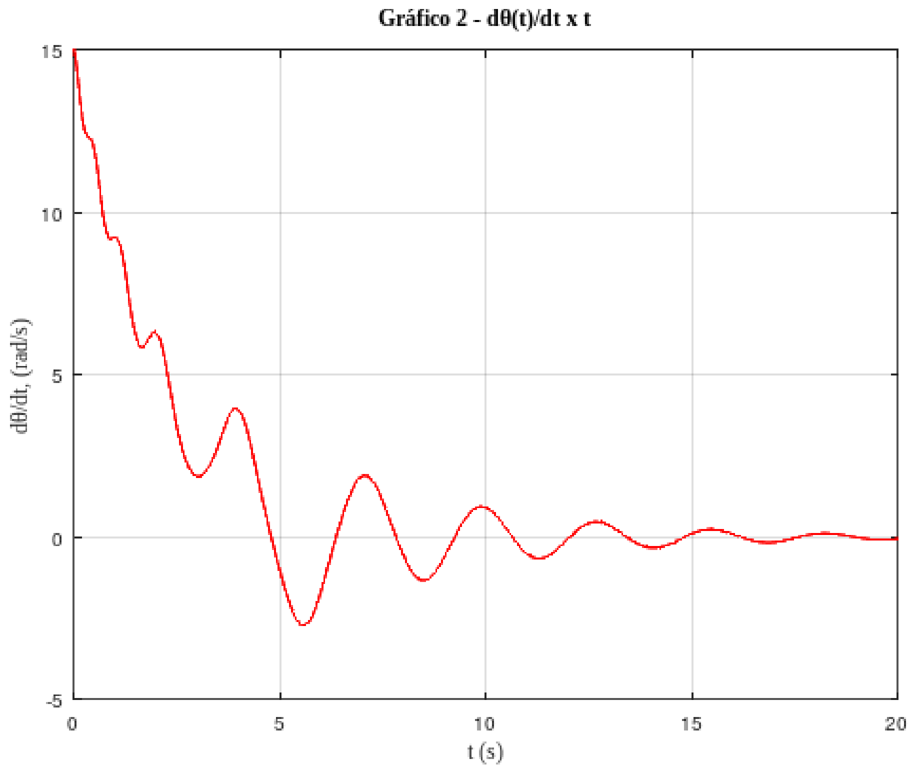
Para a solução desse sistema no Octave é necessário fazer com que essas EDO's sejam resolvidas de forma simultâneas, para isso na criação da função que define elas devem ser passadas num vetor.

Assim o método da 'ode45' usa um resultado anterior para o cálculos dos seguintes, e como se tem as condições iniciais esse problema é facilmente resolvido pelo Octave.

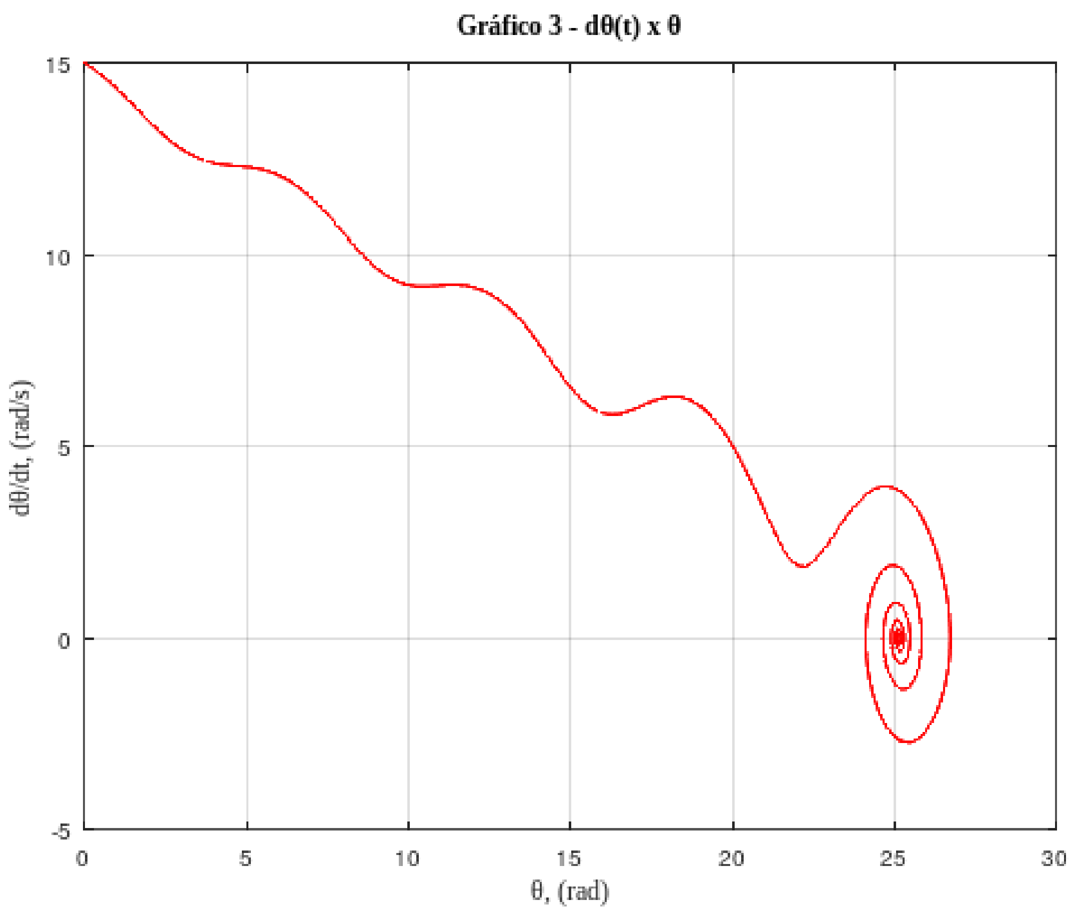
O primeiro gráfico solicitado é da evolução de θ no tempo.



o Gráfico 2 é a descrição de $\dot{\theta}$ ou ω no tempo.



O Gráfico 3 é ω *vs* θ.



Por fim a última questão é quantas voltas o sistema da antes de parar de girar, e isso pode ser obtido através do vetor ω em que ponto a velocidade muda de sinal e nesse ponto do vetor para o vetor θ é o ponto de θ no sistema antes dele oscilar, e basta dividir esse valor máximo por 2π e arredondar para baixo. Nesse caso o esse ponto é o 47824 de 200000 posições no vetor, e θ nesse ponto vale, 26.714 dividindo e arredondando $\lfloor \frac{26.714}{2\pi} \rfloor = 4$ voltas.

A tração e a Frequência no cabo podem ser extraídos também, a tração através da Equação (1) e a Frequência a partir da relação a seguir:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{6}$$

Os Gráficos a seguir representam esses dados:

Gráfico 4 - Tração x t

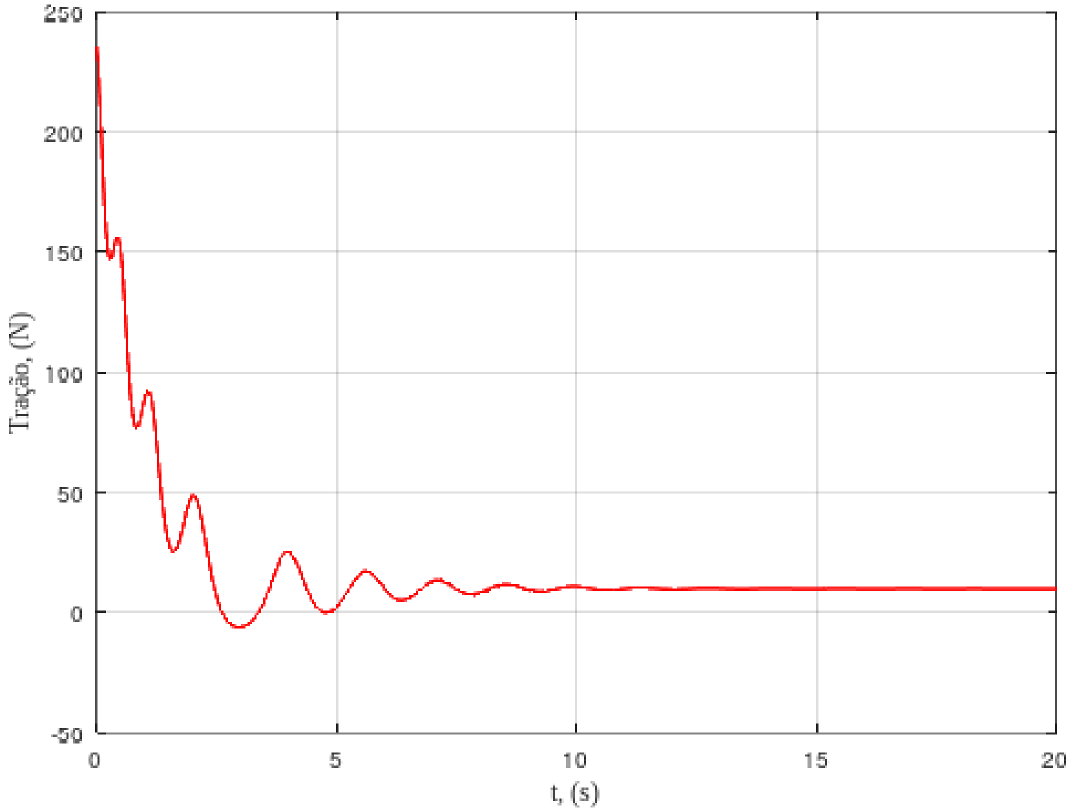
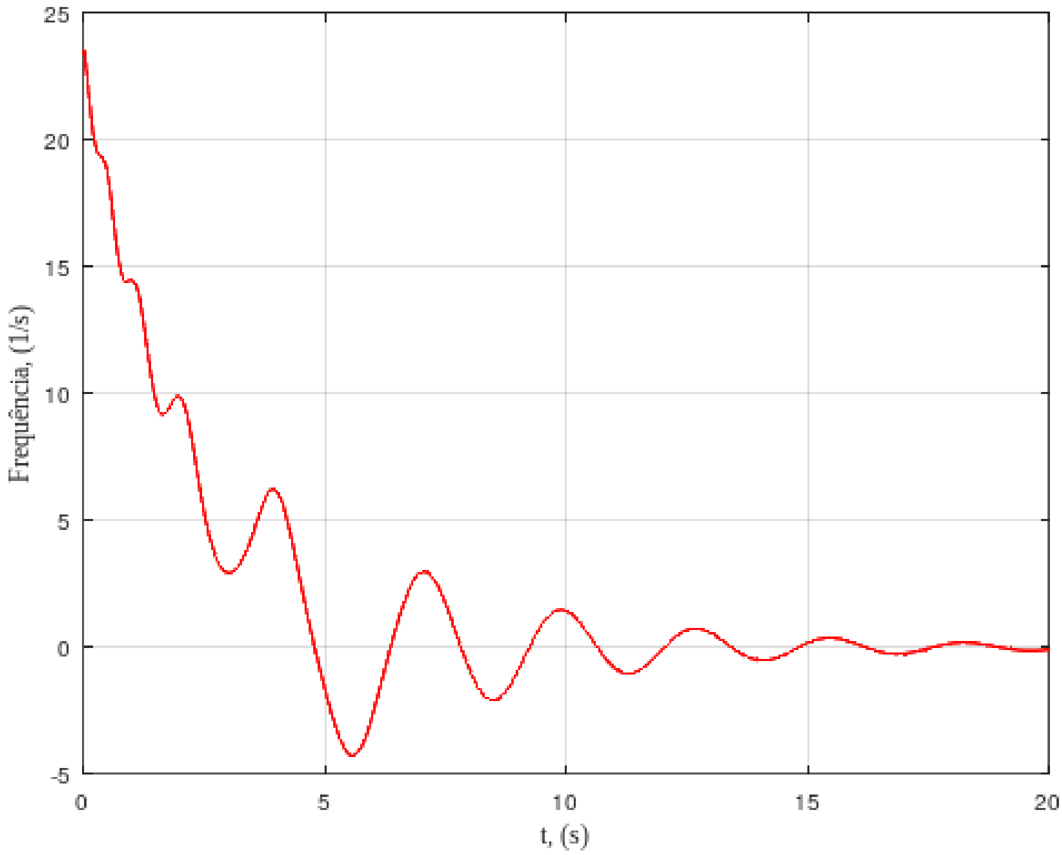


Gráfico 5 - Frequência x t



```
set(0, 'defaultTextInterpreter', 'tex');
# Alexandre Barros de Araujo
# nUsp = 11802989

#Funcoes Iniciais do Problema;
ti = 0; dt = 0.0001; tf = 20;

function f = sist_edos(t, theta)
  N = 89;
  r = (1 + N/100);
  m = 1;
  g = 9.81;
  c = 0.5;

  f = [theta(2); -(c*theta(2)/m)-(g/r)*sin(theta(1))];
endfunction

[t, theta] = ode45(@(t, theta) sist_edos(t, theta), [ti:dt:tf], [0, 15])

o = theta(:, 1);
w = theta(:, 2);

## Numero de Voltas

for i=[1:1:length([ti:dt:tf])]
  if(w(i) < 0)
    arr = i - 1;
    break;
  endif
endfor

disp('Voltas do Pendulo: ');
floor(o(arr)/(2*pi))
## Calculo da Tracao

m = 1;
```

```
g = 9.81;

T = m*(w.^2 + g*cos(o));

## Calculo da Frequencia

freq = w./2*pi;

## Grafico 1 - talvez
figure(1);
plot(t, o, 'r-', 'LineWidth', 1.3);
title('Grfico 1 - \theta x t', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
xlabel('t (s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
ylabel('\theta, (rad)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
grid on;

## Grafico 2 - dtheta/dt x dt
figure(2);
plot(t, w, 'r-', 'LineWidth', 1.3);
title('Grfico 2 - d\theta(t)/dt x t', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
xlabel('t (s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
ylabel('d\theta/dt, (rad/s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
grid on;

## Grafico 3 - dtheta/dt x talvez
figure(3);
plot(o, w, 'r-', 'LineWidth', 1.3);
title('Grfico 3 - d\theta(t) x \theta', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
xlabel('\theta, (rad)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
ylabel('d\theta/dt, (rad/s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
grid on;

## Grafico 4 - Tracao x t
figure(4);
plot(t, T, 'r-', 'LineWidth', 1.3);
title('Grfico 4 -  Trao  x t', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
xlabel('t, (s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
```

```
ylabel(' Trao , (N)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
grid on;

## Grafico 5 - Evolucao da Frequencia
figure(5);
plot(t, freq, 'r-', 'LineWidth', 1.3);
title('Grfico 5 - Frequncia x t', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
xlabel('t, (s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
ylabel('Frequncia, (1/s)', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
grid on;
```

3 Conclusão

A quinta prática trouxe a aplicação das aulas de cálculo numérico e EDO com a aproximação numérica de EDO's e a transformação de uma EDO de 2ª ordem em um sistema de EDO's de 1ª ordem. Também teve aplicações das aulas de Dinâmica com as coordenadas Normal-Tangente para se determinar a EDO que regia o sistema. Com as ferramentas do Octave foi possível plotar os Gráficos solicitados e determinação de quantas voltas o sistema dava antes de parar.