Grafos

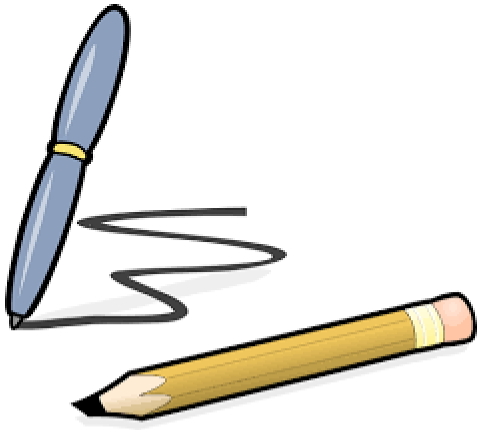
SCC0607 – Aula 14

Profº Ms. Anderson Canale Garcia

Baseado no material de:
Cristina D. Aguiar
Moacir Ponti Jr.

Sumário

- Introdução aos Grafos
- Aplicações
- Tipos de Grafos
- Grau dos Vértices
- Caminhos e Conectividade
- Ciclos
- Árvores e Floresta

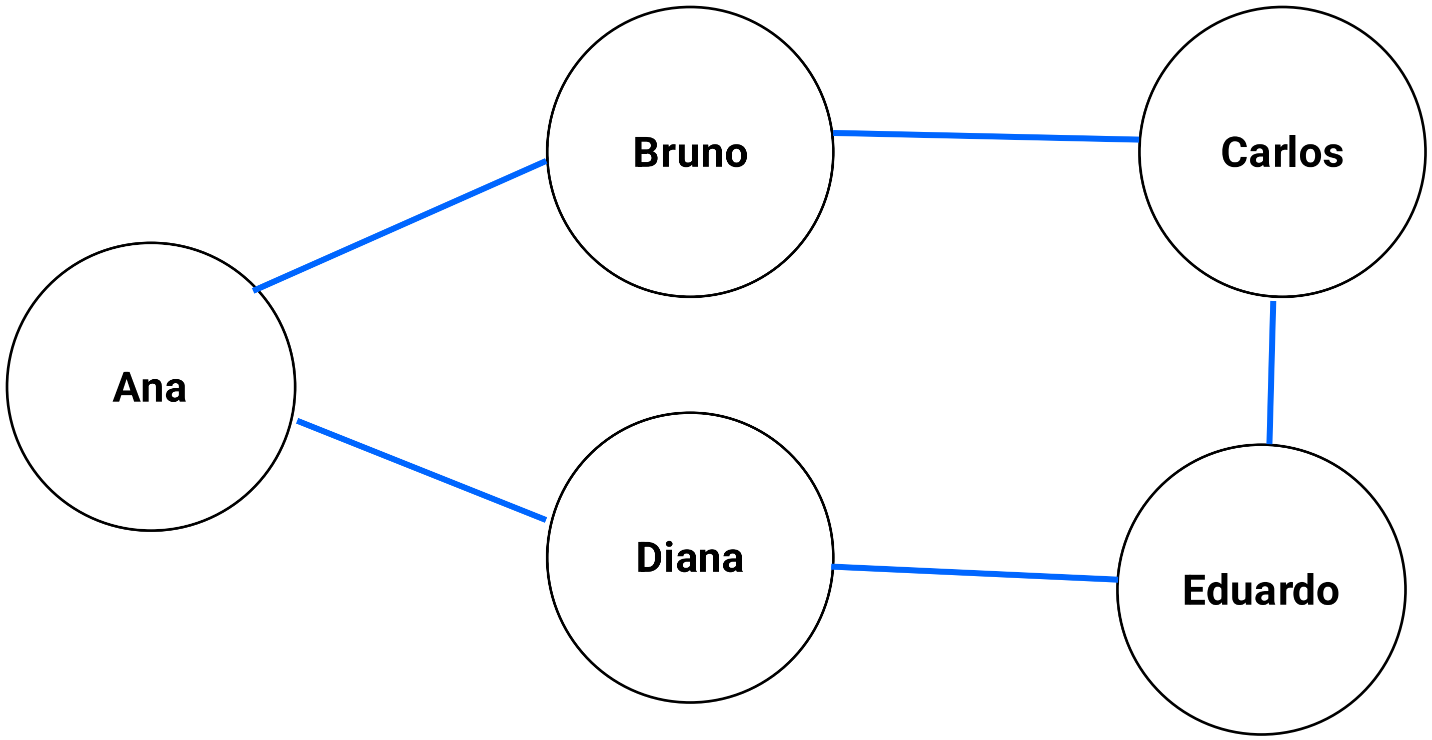


Motivação

- Imagine um grupo de 5 pessoas. Elas tem relações de amizades entre si, mas nem todos são amigos de todos
    - **Ana** é amiga de **Bruno** e **Diana**
    - **Bruno** é amigo de **Carlos**
    - **Carlos** é amigo de **Eduardo**
    - **Diana** é amiga de **Eduardo**

- Como podemos representar essas relações de amizade?

Rede de amizades



Grafos

- Estruturas abstratas que modelam objetos e a relação (conexão) entre eles

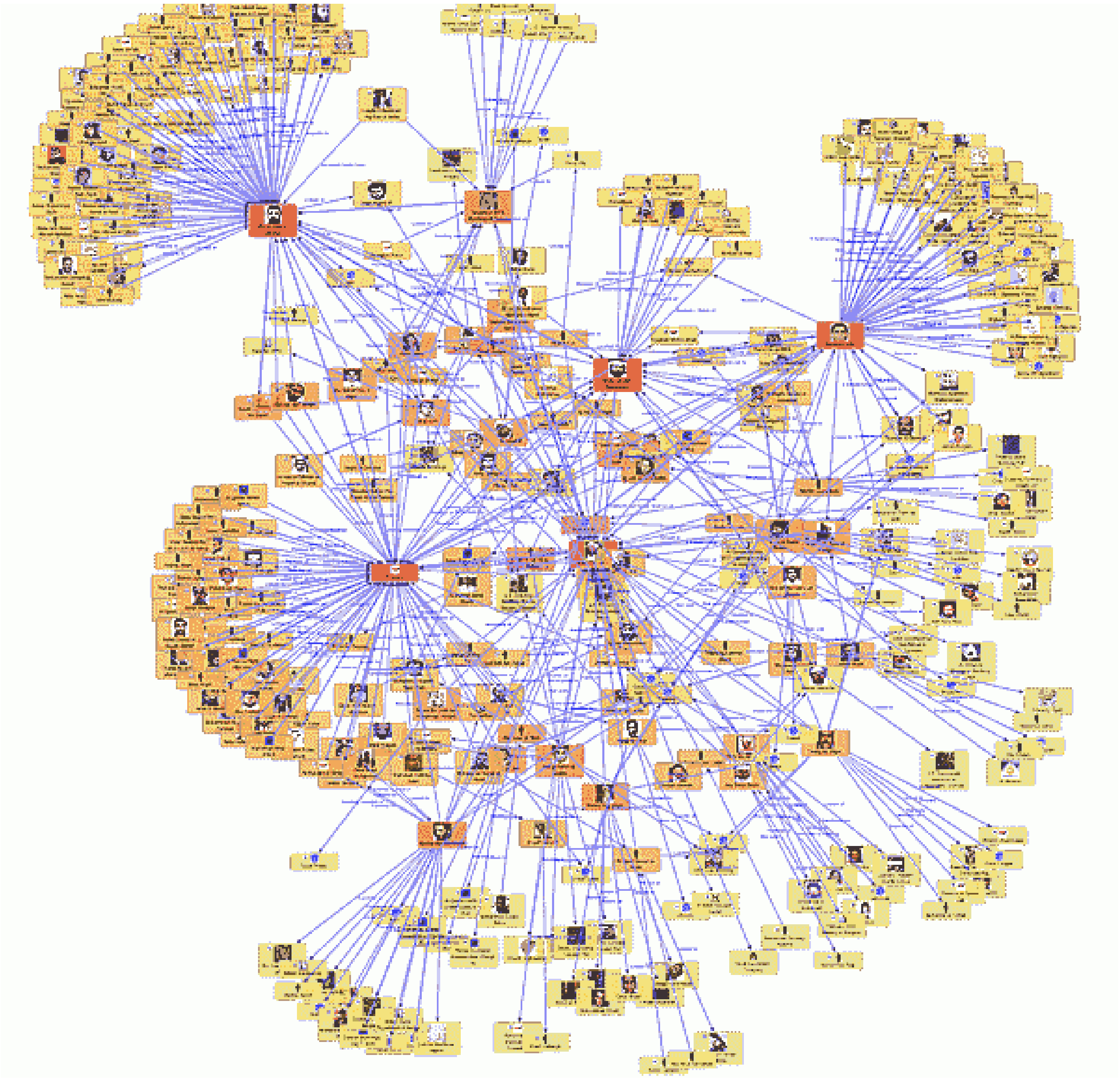
- Um grafo é uma estrutura composta por **vértices** e **arestas**
  - **Vértices**: os objetos (no exemplo, as pessoas)
  - **Arestas**: as conexões (no exemplo, as amizades entre pessoas)

Grafos – Aplicações

- Esse conceito pode ser aplicado em diversas áreas
  - Redes sociais
  - Roteiros de viagens
  - Modelagem de circuitos eletrônicos
  - Redes de transporte
  - Redes de energia
  - Redes de computadores
  - Árvores genealógicas
  - ...

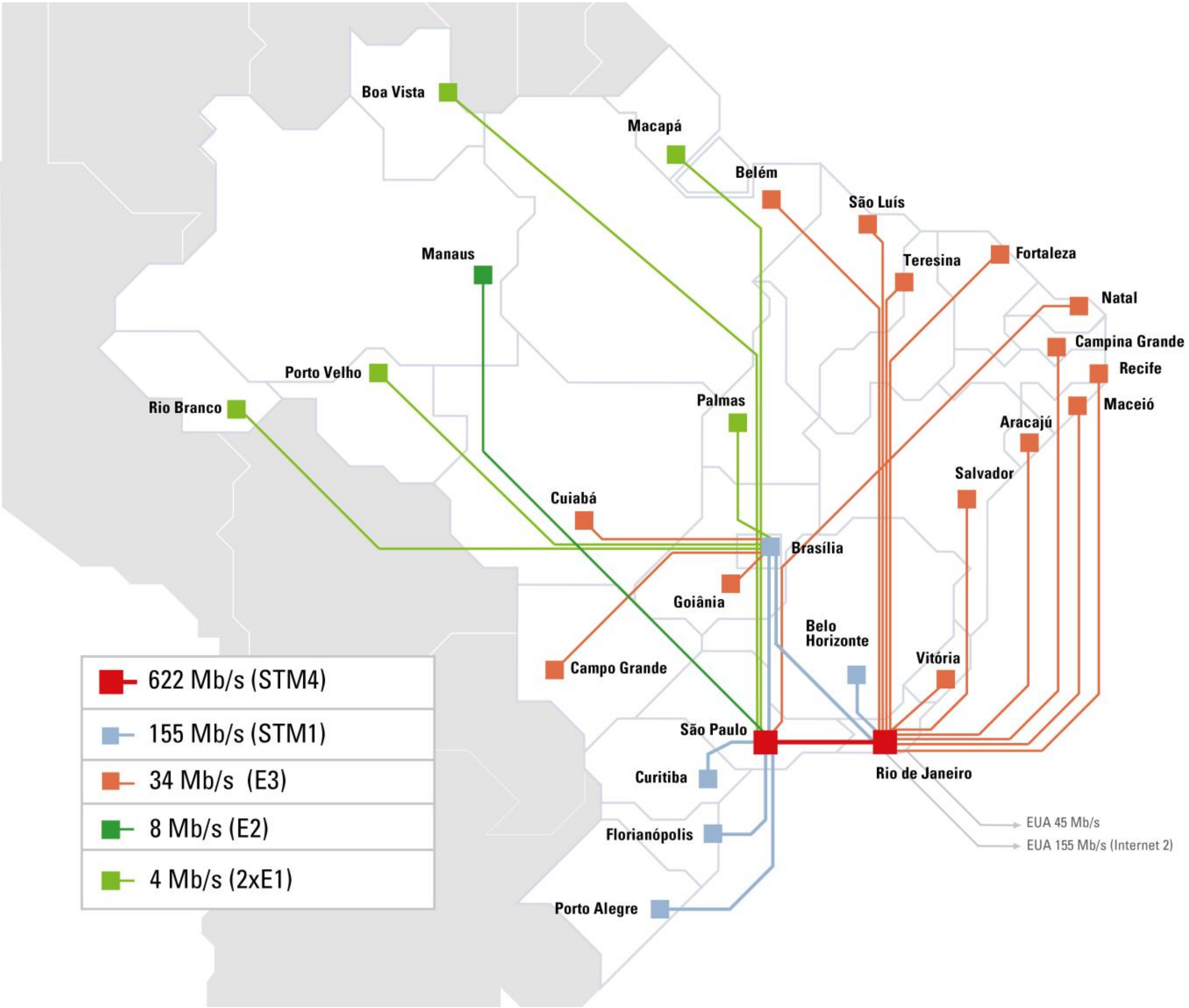
Exemplo: rede social

Exemplo: Redes sociais

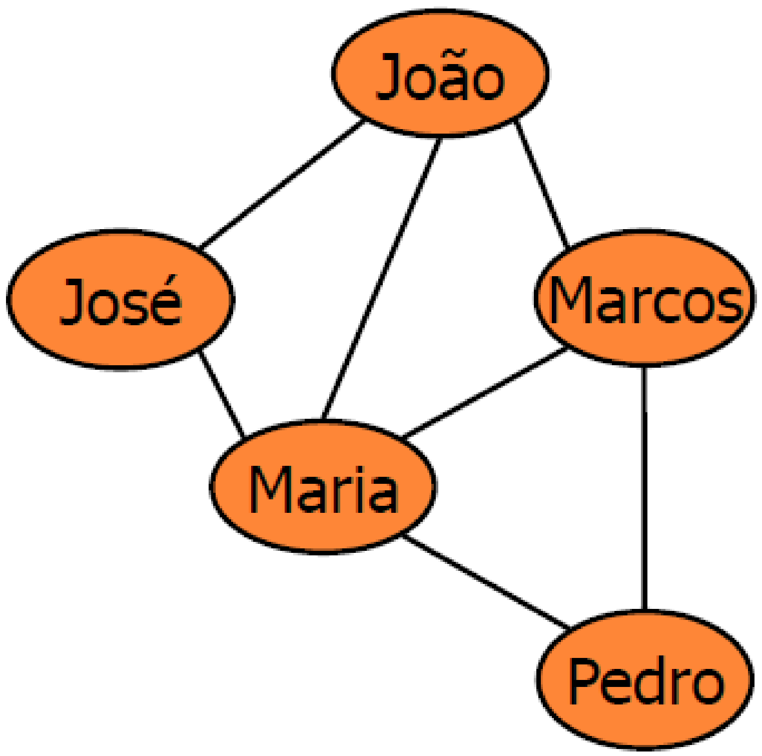


Exemplo: Rotas aéreas

Exemplo: Conexões da RNP



Fonte: https://memoria.pop-sc.rnp.br/2004/01/ampliada-capacidade-da-conexao-do-pop-sc-com-a-rnp-usando-tecnologia-sdh-stm-1/



Grafo: Definição

- Um Grafo *G* é definido como um par (*V*, *A*)
  - ***V***: conjunto de nós chamados vértices (ou nós)
  - ***A***: conjunto de pares de vértices chamados arestas (ou arcos)

- Exemplo: rede social de amizades
  - Cada vértice é uma pessoa
  - Existe uma aresta entre duas pessoas se e somente se essas pessoas são amigas

Grafo sobre amizade

- Se sou seu amigo, isso significa que você é meu amigo?
  - Se aresta (x,y) sempre implica em (y,x) => grafo não-direcionado
  - Caso contrário => grafo direcionado (ou dígrafo)

- Eu sou amigo de mim mesmo?
  - Aresta (x,x) => laço ou self-loop

- Eu posso ser meu amigo diversas vezes?
  - Relação modelada com arestas múltiplas ou paralelas

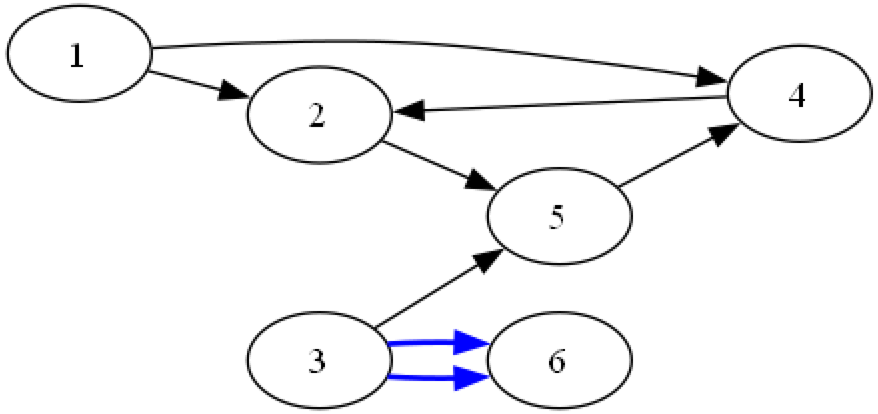
Dígrafos (grafos direcionados)

- Um grafo direcionado (ou dígrafo) *G* é definido como um par (*V*, *A*)
    - ***V***: conjunto finito de vértices
    - ***A***: conjunto de arestas
        - Relação binária ordenada em V
- Uma aresta (*u*,*v*) sai do vértice ***u*** (origem) e chega no vértice ***v*** (destino)

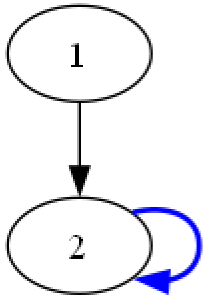
- Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo (*self-loops*)
- Podem existir arestas com a mesma origem e mesmo destino (arestas múltiplas)

Grafos direcionados (dígrafos)

- G = (V,A)
  - V = {1,2,3,4,5,6} e
  - A = {(1,2),(1,4),(2,5),(4,2),(5,4),(3,5),(3,6),(3,6)}

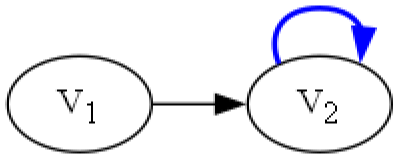


- G = (V,A)
  - V = (1,2) e
  - A = {(1,2),(2,2)}



Grafos direcionados | Vértices adjacentes

- Em um grafo direcionado, se existe uma aresta (*u*,*v*)
  - O vértice *v* é adjacente ao vértice *u*
  - A aresta sai do vértice *u* (origem)
  - A aresta chega no vértice *v* (destino)
  - A existência de (*u*,*v*) não implica na existência de (v,u), ou seja, o vértice u não é adjacente ao vértice v
  - Os vértices u e v são vizinhos

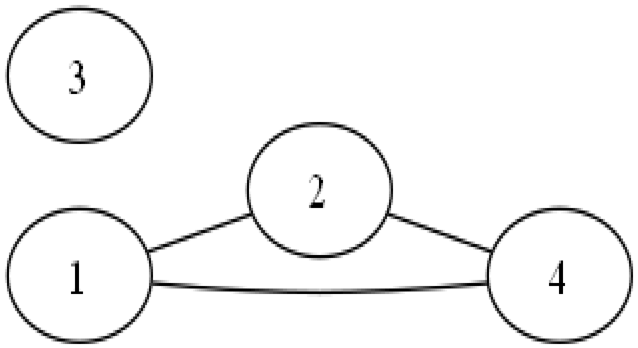


$\mathbf{V_1}$ é adjacente a $\mathbf{V_2}$? NÃO
$\mathbf{V_2}$ é adjacente a $\mathbf{V_1}$? SIM
$\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$ são vizinhos? SIM

Grafo não-direcionado

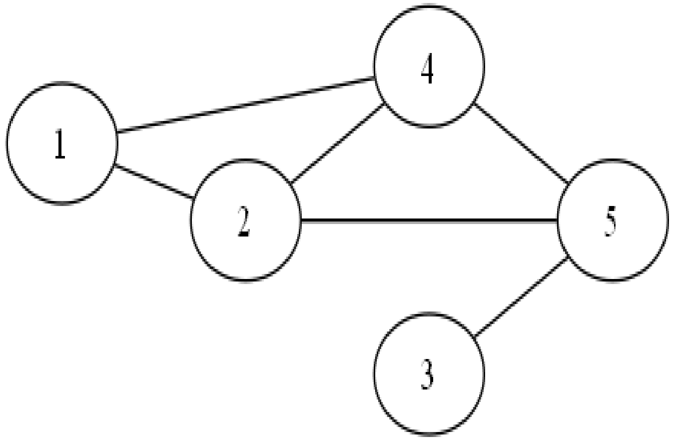
- Um grafo não-direcionado *G* é definido como um par (*V*, *A*), em que o conjunto de arestas *A* é constituído de pares de vértices não ordenados
  - (*u*,*v*) e (*v*,*u*) são considerados como uma única aresta
  - A relação de adjacência é simétrica

- G = (V,A)
  - V = {1,2,3,4}
  - A = {(1,2),(1,4),(2,4)}

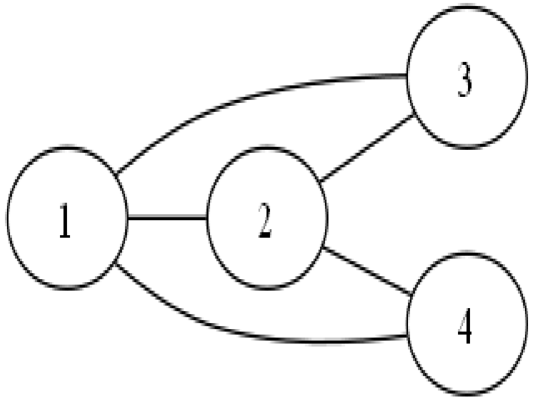


Grafos não-direcionados

- G = (V,A)
  - V = {1,2,3,4,5}
  - A = {(1,2),(1,4),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)}



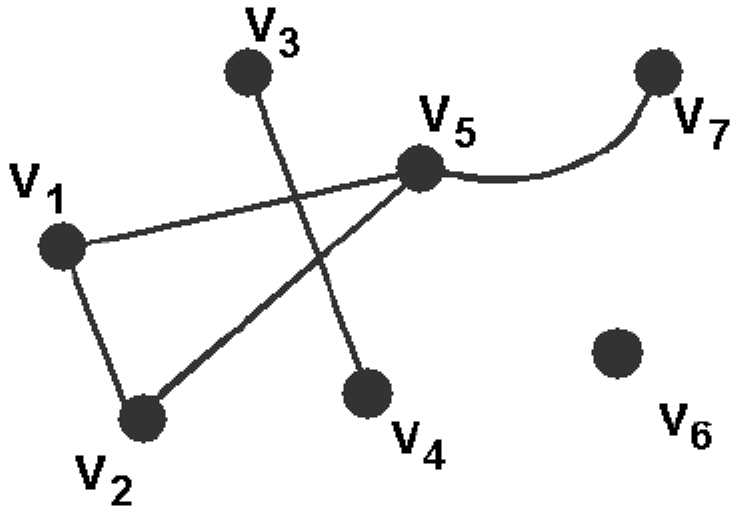
- G = (V,A)
  - V = {1,2,3,4}
  - A = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)}



Grafos não-direcionados | Vértices adjacentes

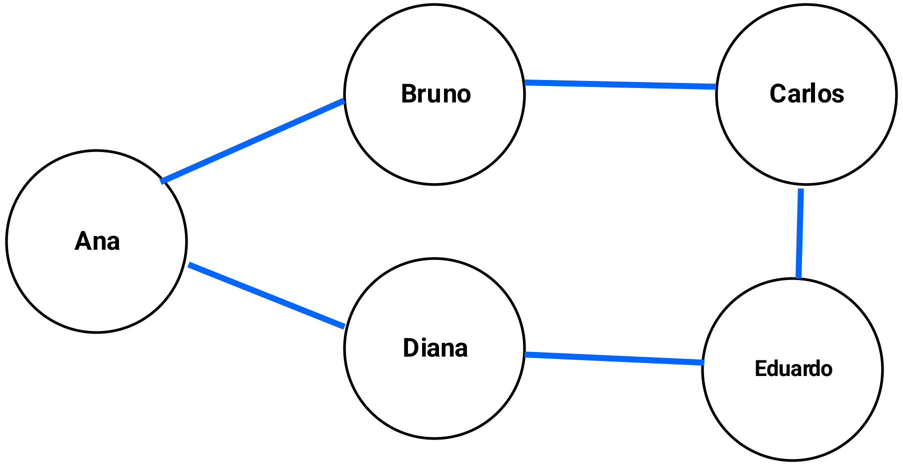
- Dois vértices *u* e *v* de um grafo não direcionado são adjacentes (ou vizinhos) quando eles forem os extremos de uma mesma aresta (*u*,*v*).

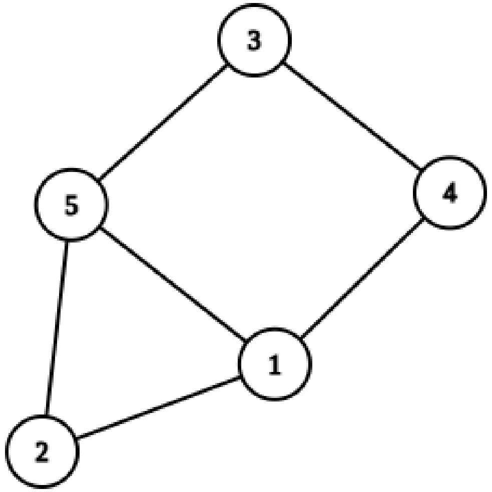
V_3 é adjacente a **V_4**? SIM
V_4 é adjacente a **V_3**? SIM
V_5 é adjacente a **V_4**? NÃO



Grafos simples

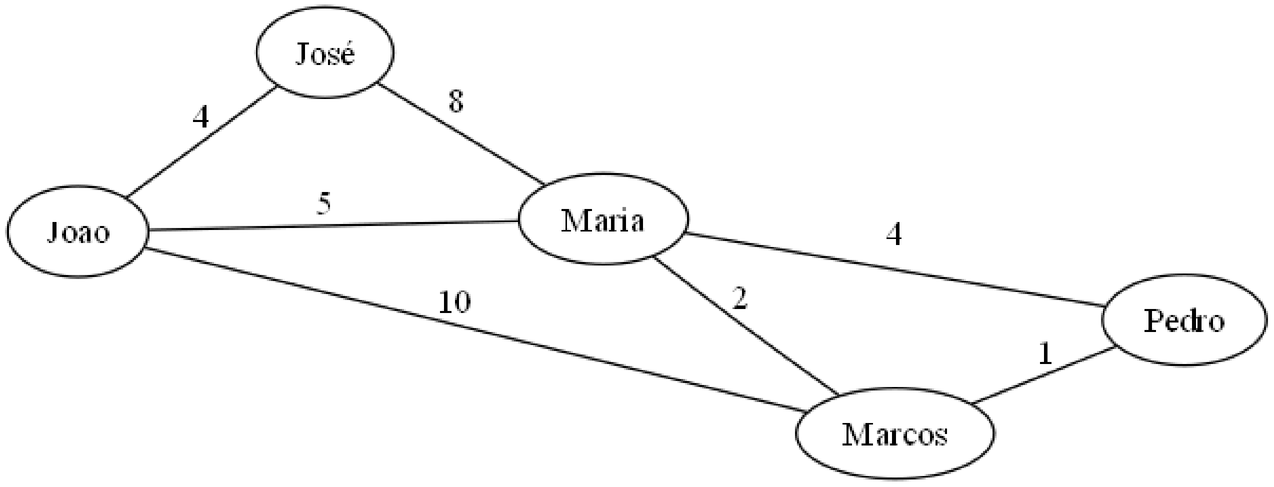
- Não-direcionado
- Não-ponderado*
- Sem laços
- Sem paralelas



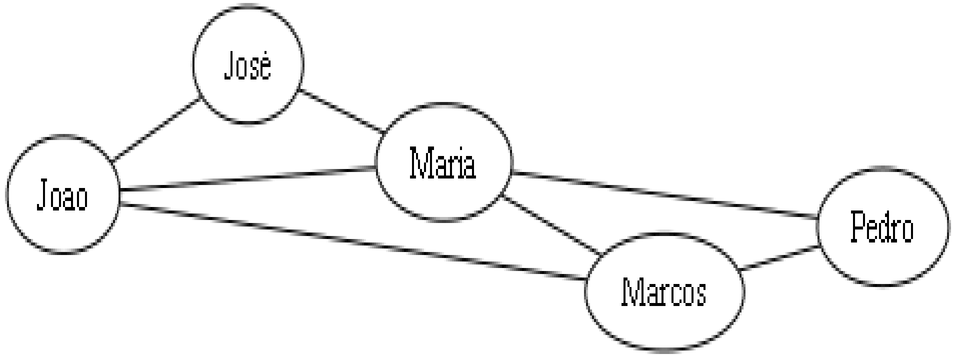


Grafo ponderado e não ponderado

- O quanto você é meu amigo?
  - Grafo ponderado => as arestas possuem um peso associado
    - Arestas: triplas (*u, v, valor*)



  - Grafo não ponderado => todas as arestas possuem o mesmo peso
    - Arestas: duplas (*u, v*)



Grau dos vértices

- Quem possui mais (ou menos) amigos?
  - Quantidade de relacionamentos (conexões)
- Grau do vértice => número de vértices adjacentes a ele
  - Pessoa mais popular tem o vértice de maior grau
  - "Ermitões" são vértices de grau zero.

Vértice isolado: vértice de grau 0
Vértice final: vértice de grau 1
Vértice par: vértice com grau par
Vértice ímpar: vértice com grau ímpa

Grau dos vértices | Definição

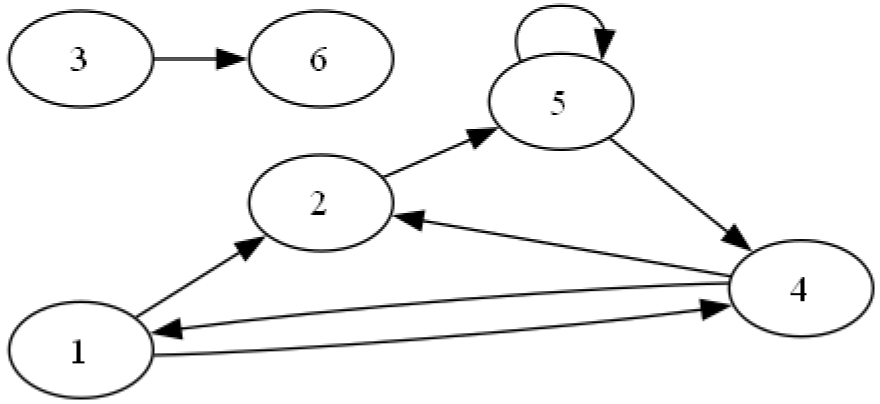
- O **grau** de um vértice em **grafos direcionados** é dado por:

Nº de arestas que saem (grau de saída ou *out-degree*)

+

Nº de arestas que chegam (grau de entrada ou *in-degree*)

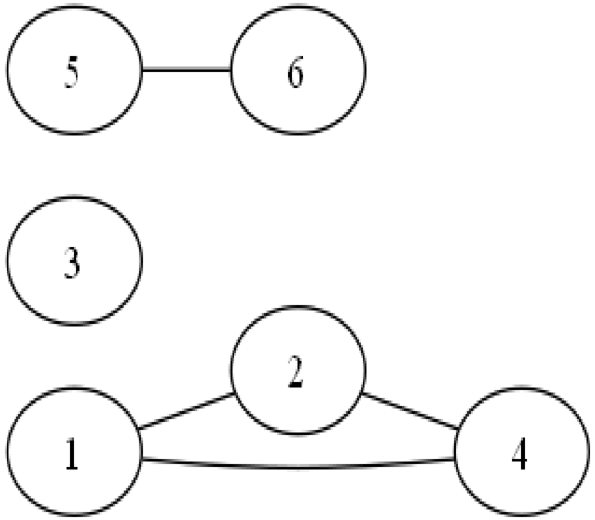
- Exemplo: vértice 5 em:
  - Grau de entrada = 2
  - Grau de saída = 2
  - Grau = 4



Graus dos vértices | Definição

- O **grau** de um vértice em **grafos não direcionados** é dado pelo número de arestas que incidem nele
  - Um vértice de grau zero é dito **isolado** ou não **conectado**

- Exemplo
  - Grau do vértice 1 = 2
  - Grau do vértice 3 = 0 (isolado)



Caminho

- Eu estou ligado a uma celebridade por alguma cadeia de amigos?
  - Existe um caminho entre mim e uma celebridade?
  - Caminho => sequência de arestas que conectam dois vértices

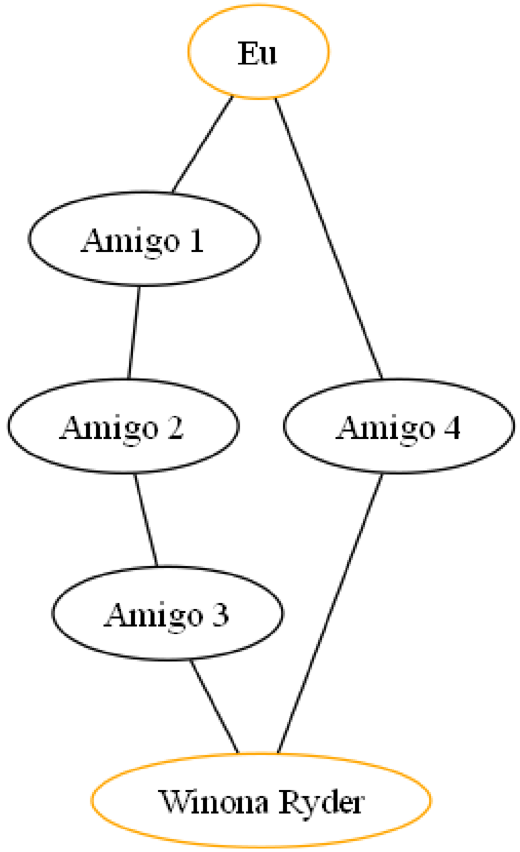
Caminho | Definição

- Um caminho de comprimento k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V,A)$ é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2,\ldots,v_k)$ *tal que:*
  - $x = v_0$, $y = v_k$ e (v_{i-1},v_i) está em A para $i = 1,2,\ldots,k$

- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém:
  - Os vértices $v_0, v_1, v_2,\ldots,v_k$
  - As arestas $(v_0,v_1),(v_1,v_2),\ldots,(v_{k-1},v_k)$

Caminho

- Quão próxima é a minha ligação com essa celebridade?
  - Diversos caminhos que ligam dois vértices
  - Caminho mais curto (menor caminho)
    - Aquele com menor soma de pesos das arestas (ponderado)
    - Ou com menor número de arestas (não ponderado)
  - Caminho mais longo
    - Aquele com maior soma de peso das arestas (ponderado)
    - Ou com maior número de arestas (não ponderado)

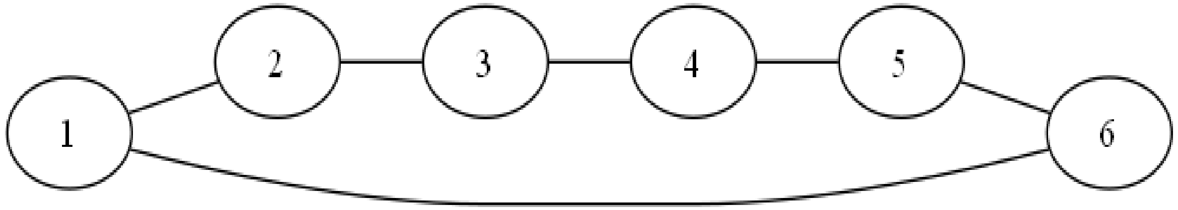


Conexão

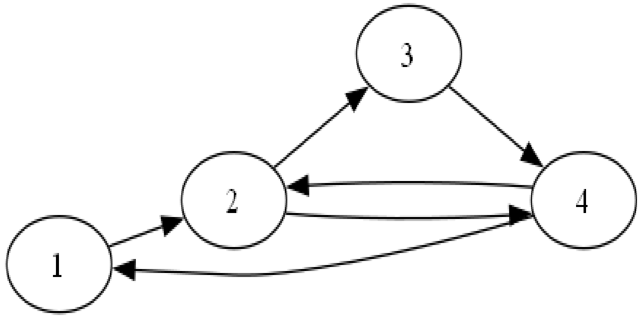
- Existe um caminho de amigos entre quaisquer duas pessoas no mundo?
  - Teoria da separação por até "seis graus"
  - Grafo conexo ou conectado => existe um caminho entre quaisquer dois vértices
  - Componente conexo => parte conectada de um grafo não conexo
  - Grafo completo => grafo simples em que cada vértice está conectado a todos os outros

Grafo conexo | Definição

- Um grafo ***G*** é conexo se para quaisquer dois vértices distintos de ***u*** e ***v*** existe um caminho de ***u*** a ***v***

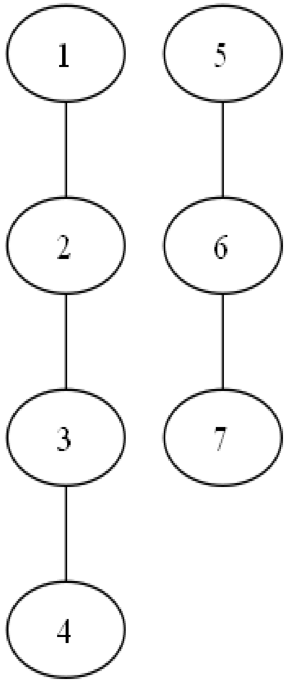


- Um dígrafo ***G*** é fortemente conexo se para quaisquer dois vértices distintos ***u*** e ***v***, ***v*** é alcançável a partir de ***u*** e vice-versa



Componente conexo | Definição

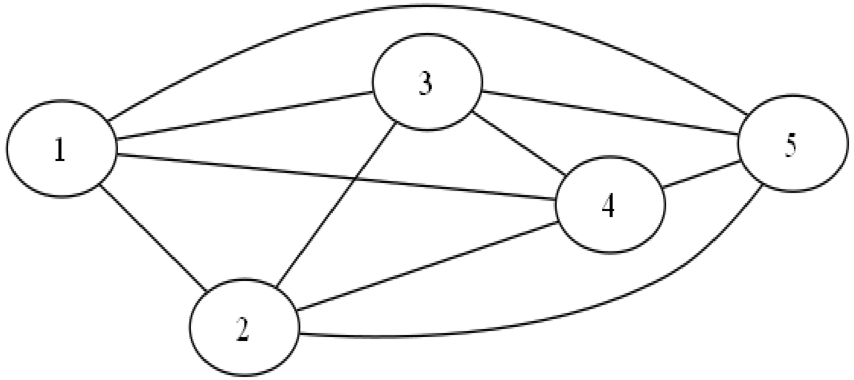
- Um componente conexo de um grafo G é um subgrafo conexo de G



Grafo não conexo com
2 componentes conexos

Grafo completo | Definição

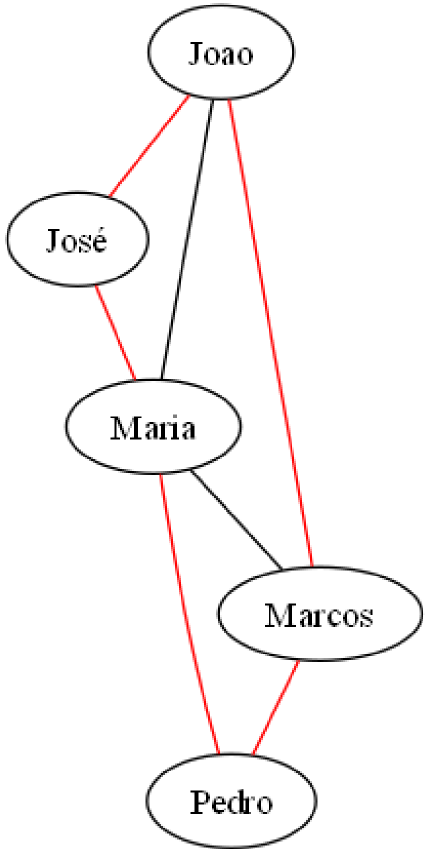
- Um grafo completo é um grafo onde todos os vértices estão conectados diretamente por uma aresta.
- Para um grafo completo com ***n*** vértices, cada vértice tem uma aresta para os ***n*−1** outros vértices.
- Existe um único grafo completo com n vértices, denotado K_n



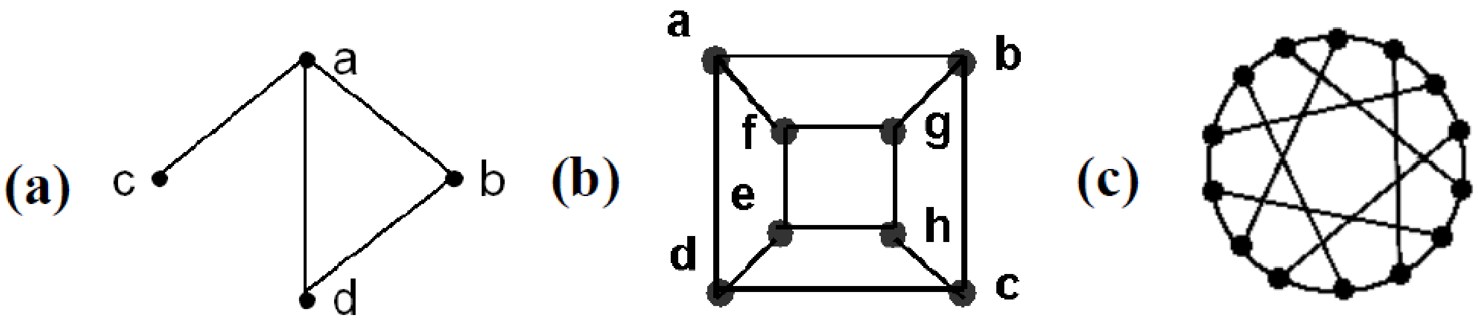
Ciclos

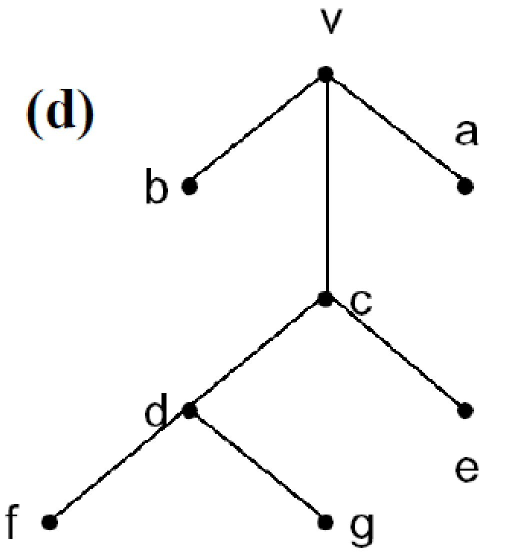
- Quanto tempo demora para que eu ouça uma fofoca que contei?

- Ciclo => caminho no qual o primeiro e o último vértices são iguais
- Ciclo simples => ciclo em que nenhum vértice se repete (exceto o primeiro e último)
- Grafo cíclico => possui pelo menos um ciclo
- Grafo acíclico => grafos sem ciclos



Ciclos | Exemplos

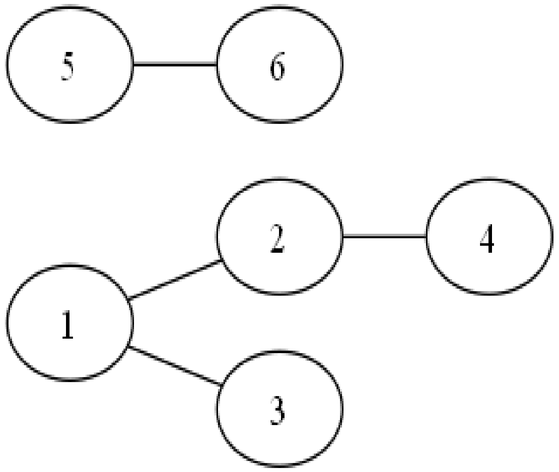




a) É cíclico? Sim
b) É cíclico? Sim
c) É cíclico? Sim
d) É cíclico? Não

Grafos acíclicos

Grafo acíclico

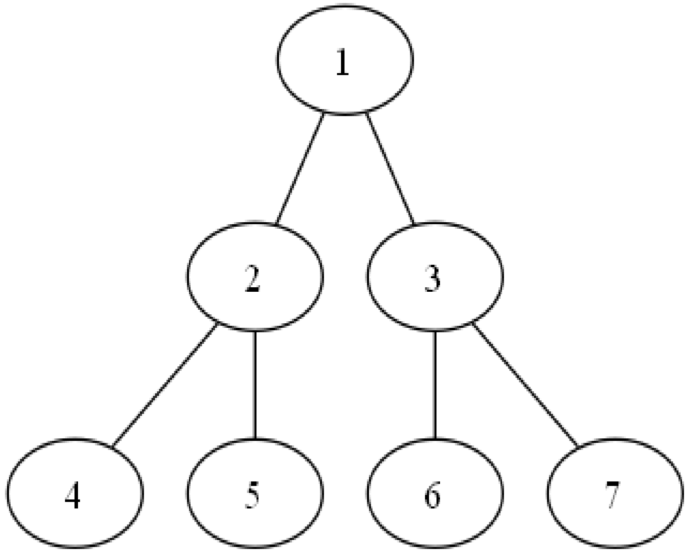


Seja ***m*** o número de **vértices** e ***n*** o número de **arestas**

Se ***m* < *n*-1**, então ***G*** é um grafo não conexo

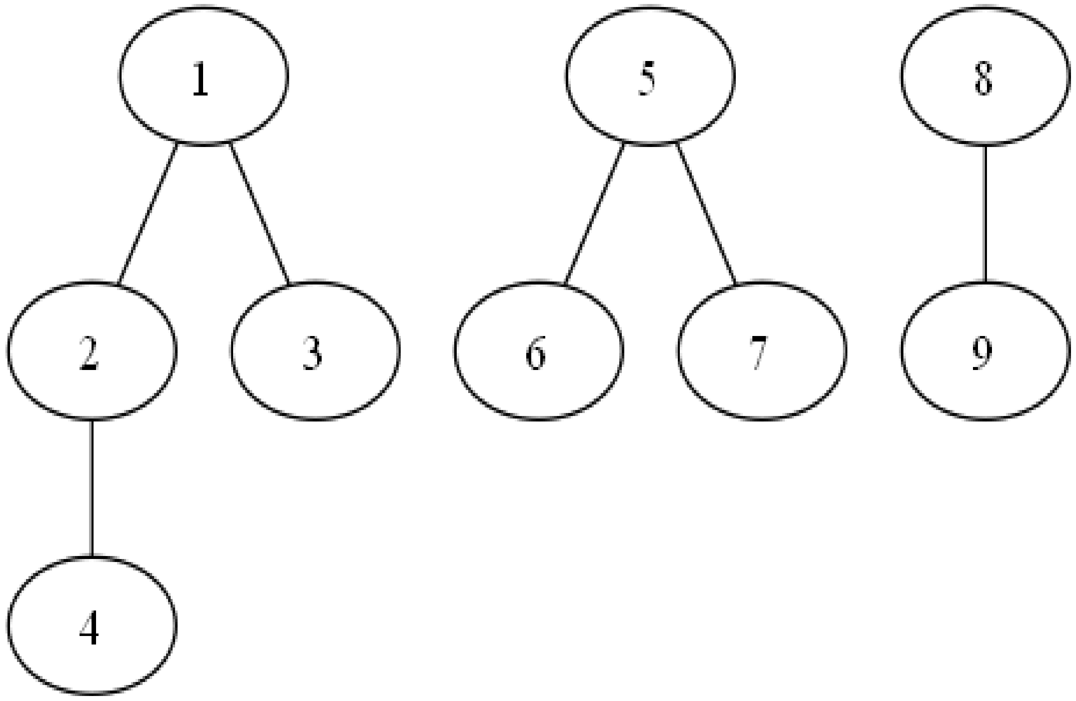
Árvore

- Em uma árvore, ***m* = *n* – 1**
- Todo vértice tem grau 2



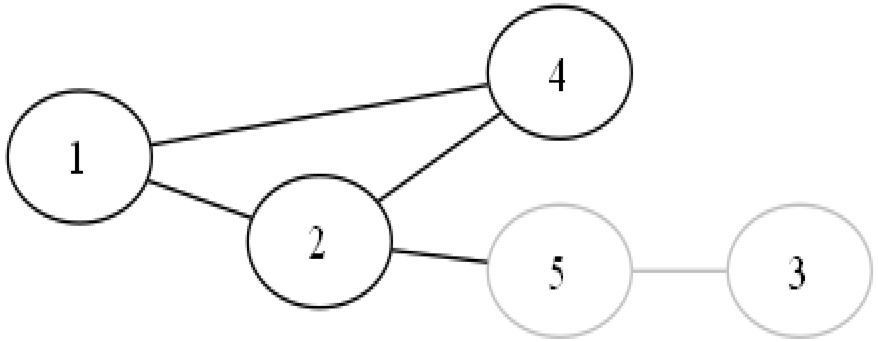
Floresta

- Conjunto de árvores disjuntas
  - Grafo **acíclico não conectado**
  - Os componentes conexos de uma floresta são árvores



Subgrafos | Definição

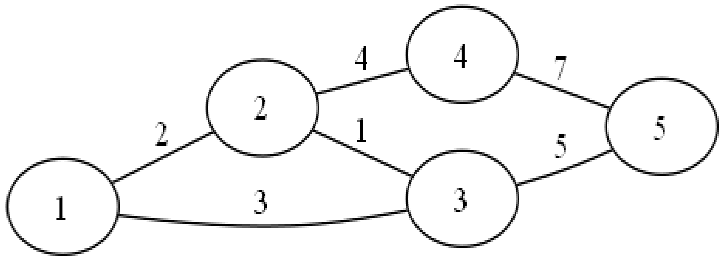
- Um subgrafo *S* de um grafo *G* é um grafo tal que:
  - Os vértices de *S* são um subconjunto dos vértices de *G*
  - As arestas de *S* são um subconjunto das arestas de *G*

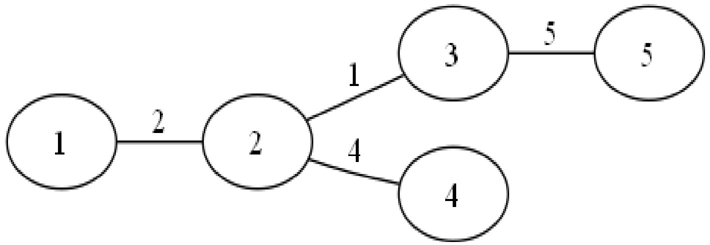


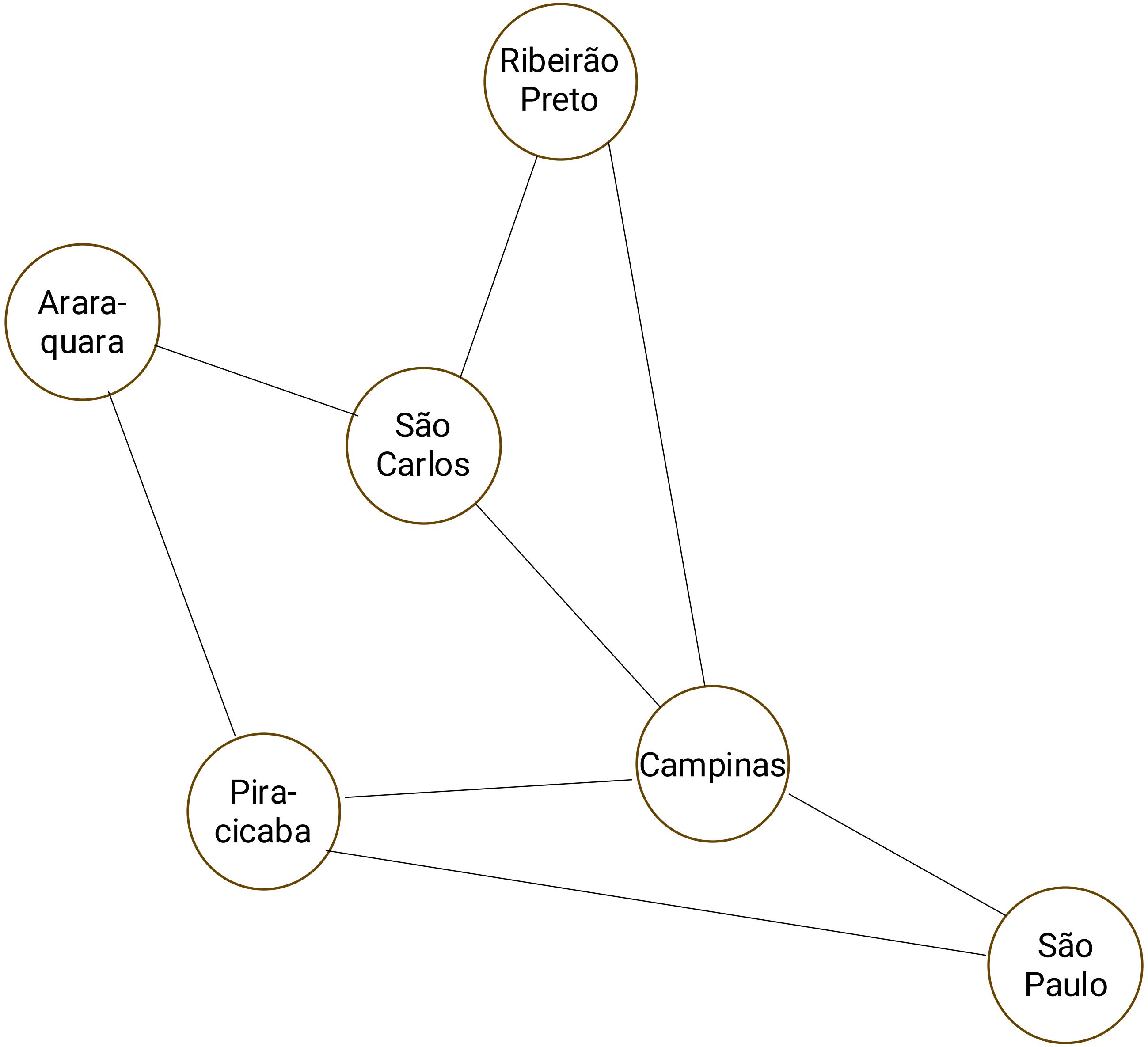
- Um subgrafo gerador (*spanning subgraph*) de *G* é um subgrafo que contém todos os vértices de *G*

Árvore Geradora

- Uma árvore geradora (*spanning tree*) de um grafo é um subgrafo gerador que é uma árvore
  - Pode haver mais de uma árvore geradora
  - A árvore geradora mínima (*minimum spanning tree*) é a árvore geradora com menor soma de pesos de arestas






Ribeirão Preto
Arara-quara
São Carlos
Campinas
Pira-cicaba
São Paulo

Referências

CORMEN, T.H.; LEISERSON, C.E.; RIVEST, R.L.; STEIN, C. **Algoritmos: Teoria e Prática**. Campus. 2002.

ZIVIANI, N.; **Projeto de Algoritmos com Implementações em Pascal e C**, 2 edição, Pioneira Thonsom Learning, 2004.

BHARGAVA, Aditya Y. **Entendendo algoritmos: um guia ilustrado para programadores e outros curiosos**. 1. ed. São Paulo: Novatec Editora LTDA, 2017. ISBN 978-85-7522-563-9.