SCC0607
Algoritmos e Estruturas de Dados III

Grafos – Caminhos mais Curtos

Prof. Anderson Canale Garcia

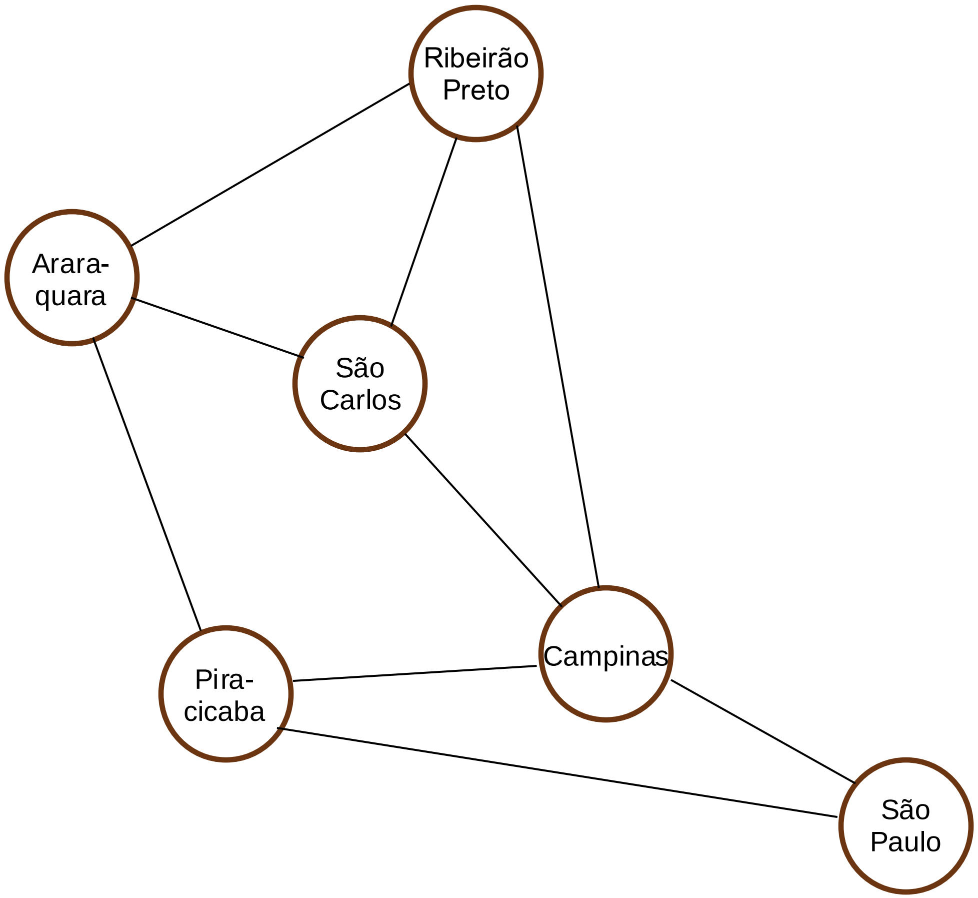
Material de **Profa. Elaine Parros Machado de Sousa**, com adaptações de Cristina Dutra Aguiar e Anderson Canale Garcia.

Baseado em aulas dos professores:
Gustavo Batista, Robson Cordeiro, Moacir Ponti Jr. e Maria Cristina Oliveira e Thiago A.S. Pardo

Sumário

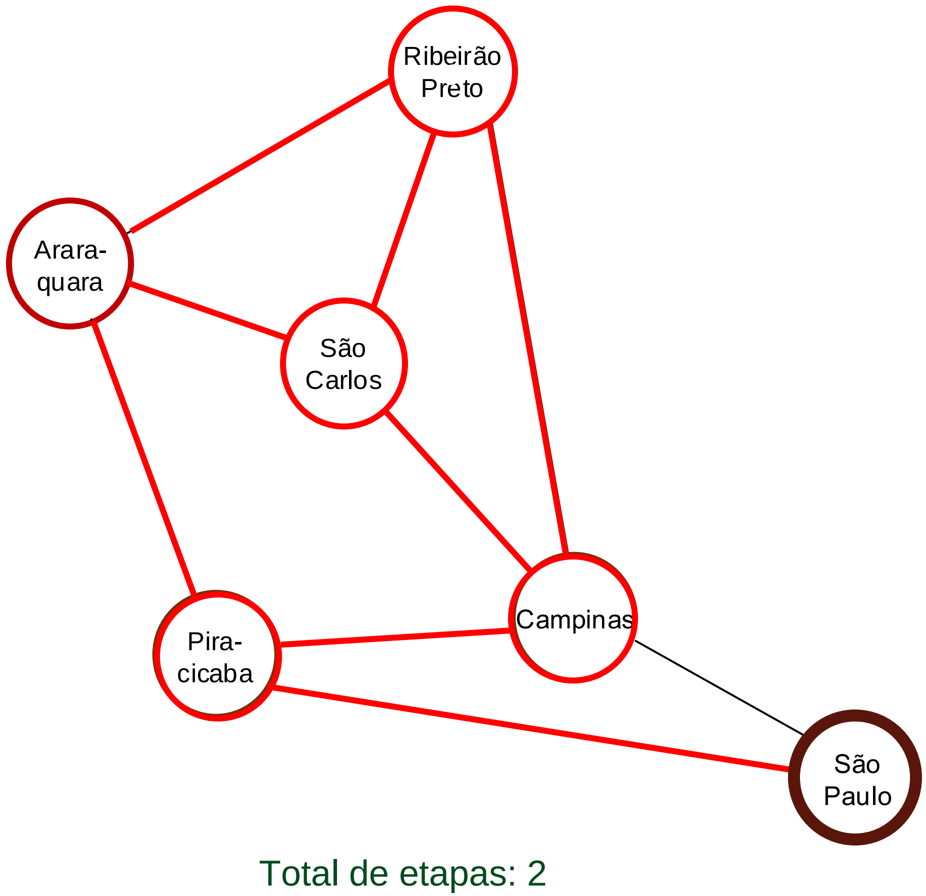
- Caminho mais curto por Busca em Largura
- Caminho mais curto com Algoritmo de Dijkstra
- Algoritmos especializados

Exemplo: Cidades de São Paulo



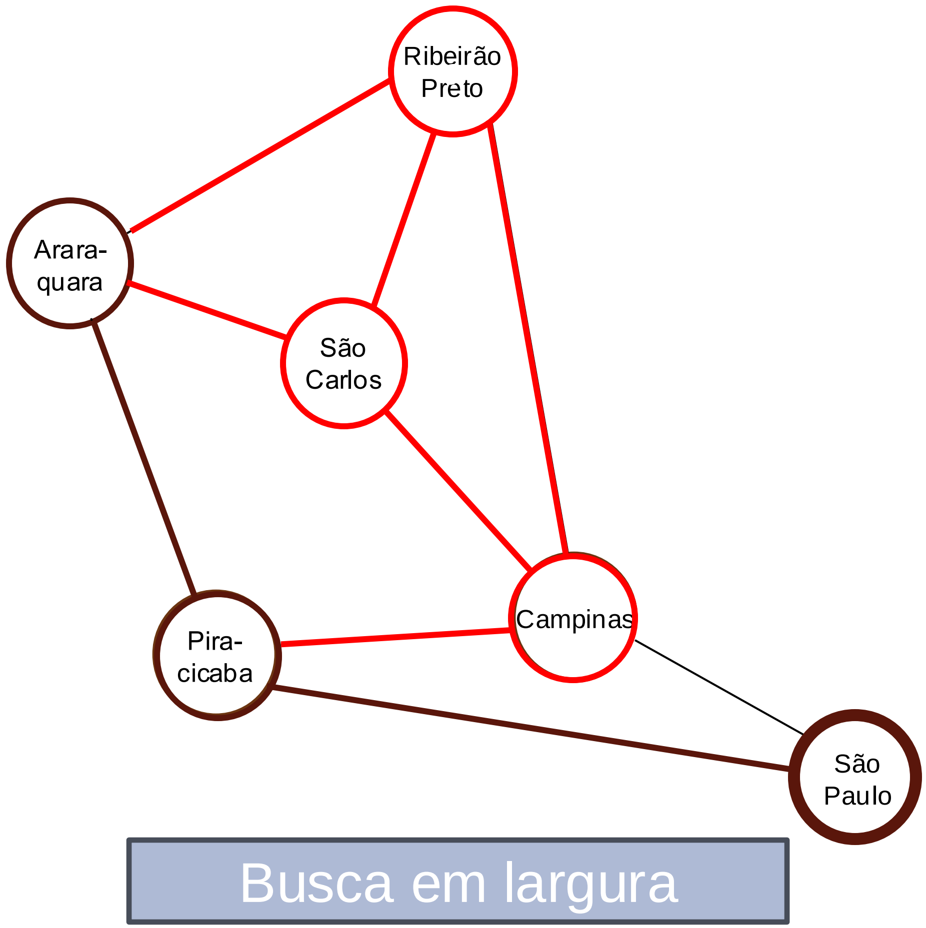
EXEMPLO: CIDADES DE SÃO PAULO

- Origem: Araraquara
- Destino: São Paulo
- Você consegue chegar ao seu destino com uma etapa?
  - Todos os lugares para os quais é possívem chegar com uma etapa



PROBLEMA DO CAMINHO MÍNIMO

- Achar o caminho mínimo
  - Rota mais curta
  - Número mínimo movimentos até um xeque-mate
- Existem outros caminhos
  - Mais longos



CAMINHOS MAIS CURTOS: BUSCA EM LARGURA

- Em grafos não ponderados (ou com arestas de mesmo peso)
  - a busca em largura permite encontrar o caminho mais curto (menor número de arestas) entre o vértice de origem da busca e qualquer outro vértice alcançável a partir da origem
- Execução do algoritmo
  - gera uma árvore de busca em largura

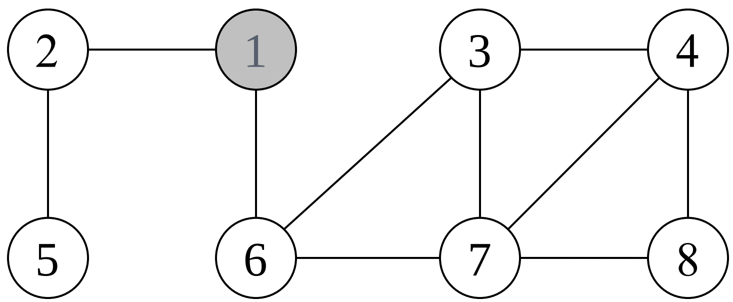
Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura

- Árvore de busca em largura
  - representa os caminhos mais curtos entre o vértice de origem e os demais vértices quando todas as arestas possuem o mesmo peso
  - pode ser representada por um vetor de antecessores

Busca em Largura: Algoritmo

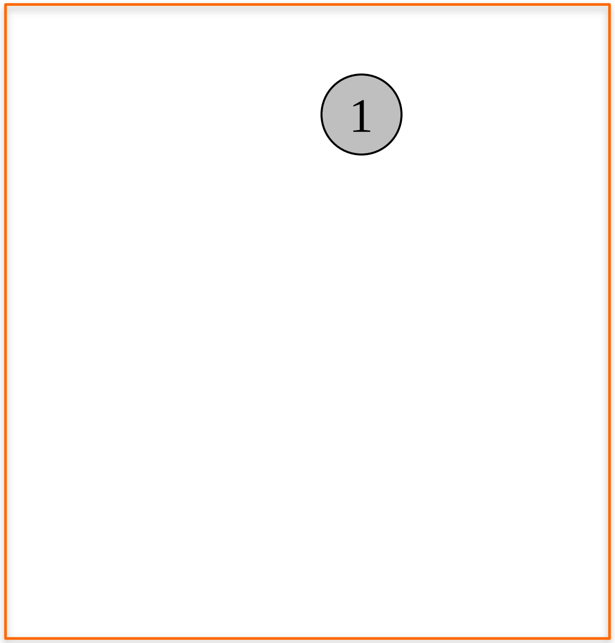
```
BFS(Grafo, início):
    Crie uma Fila vazia
    Marque o vértice "início" como visitado
    Enfileire o vértice "início"

    Enquanto a Fila não estiver vazia:
        Remova o vértice atual da Fila
        Para cada vizinho do vértice atual:
            Se o vizinho não foi visitado:
                Marque o vizinho como visitado
                Enfileire o vizinho
```

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	1				
k	0				

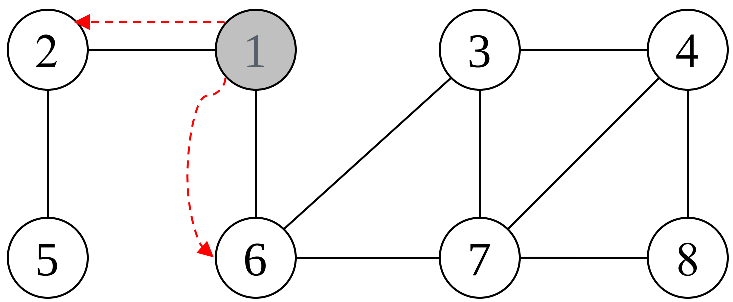
Antecessor	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	1	2	3	4	5	6	7	8

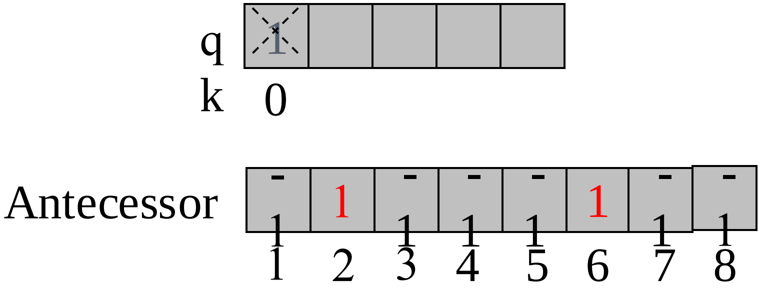


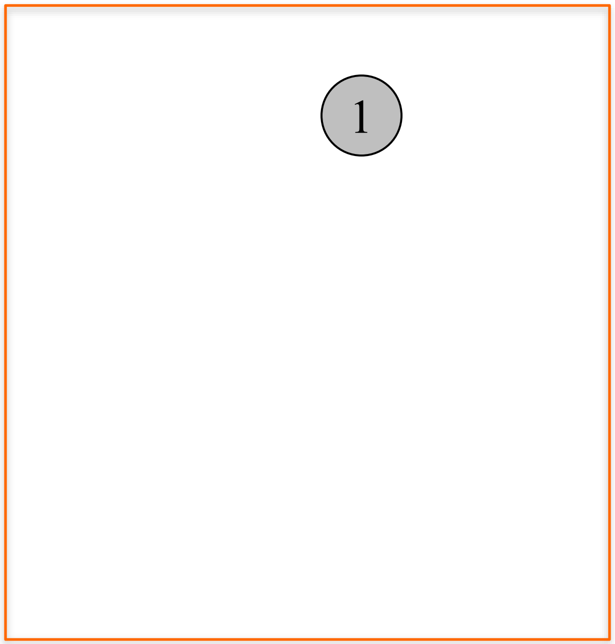
árvore de busca
em largura

Vértice origem: 1
Distância k do vértice origem: 0
Ação: vértice 1 torna-se cinza

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



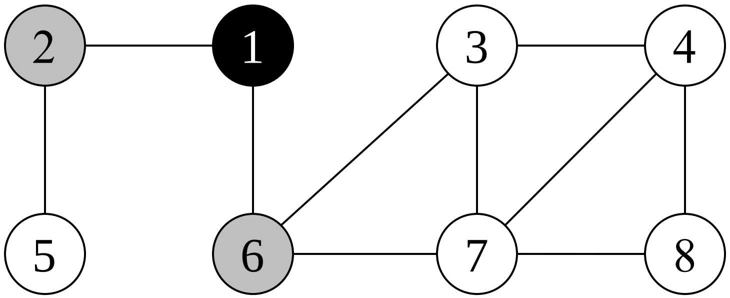




árvore de busca
em largura

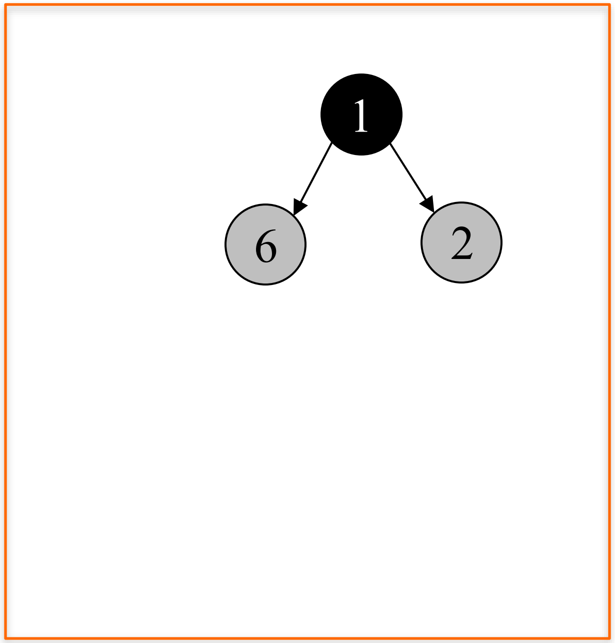
Vértices não descobertos adjacentes a 1: 2, 6
Distância k do vértice origem: 1

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	6	2			
k	1	1			

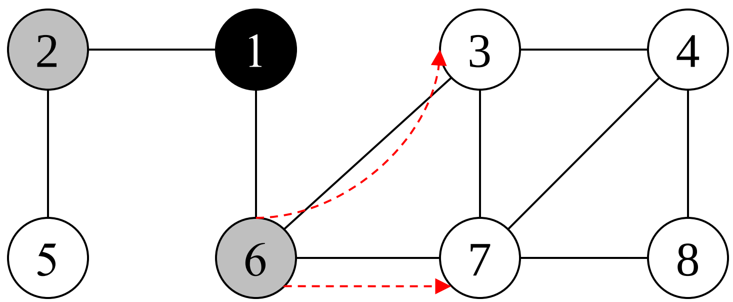
Antecessor	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

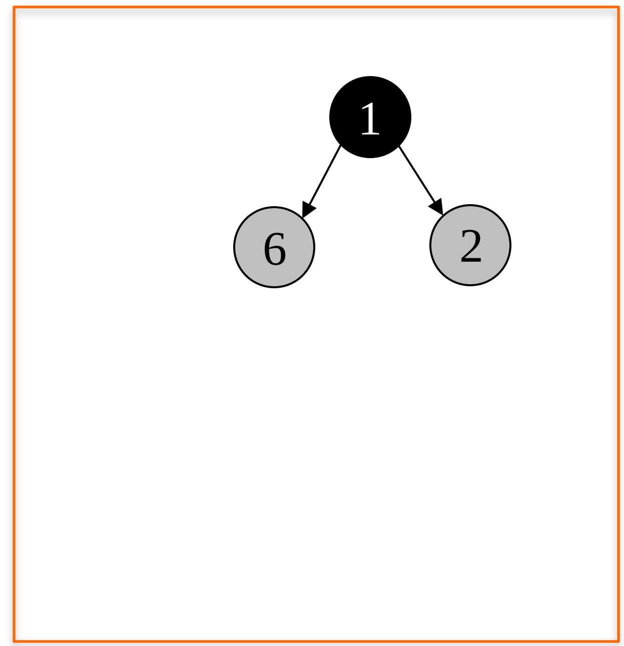
Vértices não descobertos adjacentes a 1: 2, 6
Distância k do vértice origem: 1
Ação: vértice 1 torna-se preto e vértices 2 e 6 tornam-se cinza

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	~~6~~	2			
k	1	1			

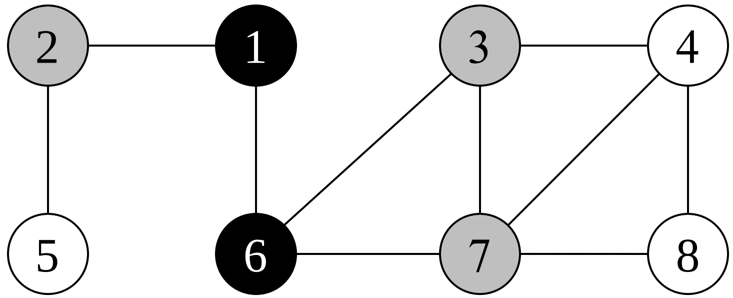
Antecessor	-1	1	6	-1	-1	1	6	-1
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

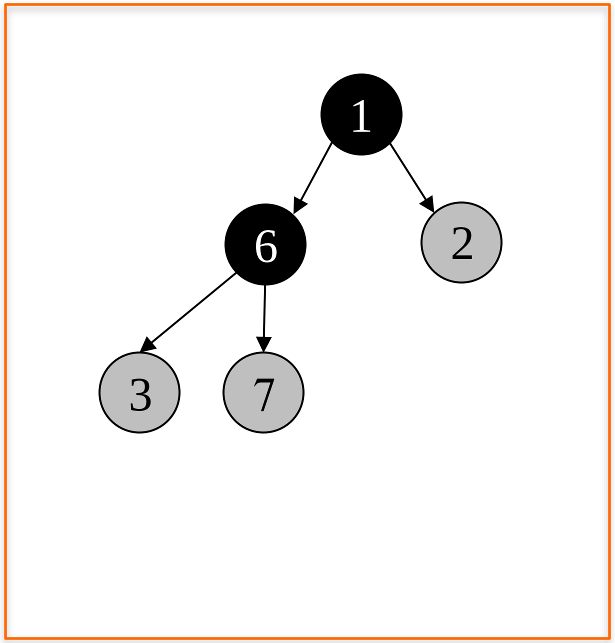
Vértices não descobertos adjacentes a 6: 3, 7
Distância k do vértice origem: 2

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	2	3	7		
k	1	2	2		

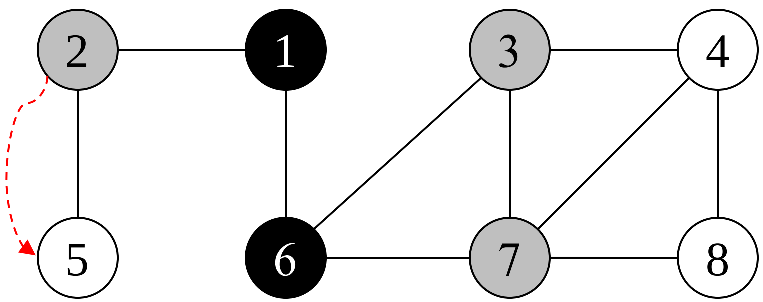
Antecessor	-1	1	6	-1	-1	1	6	-1
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca em largura

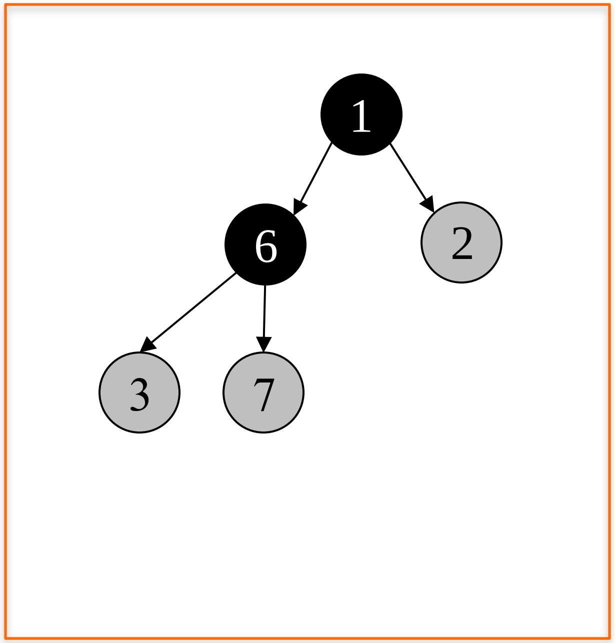
Vértices não descobertos adjacentes a 6: 3, 7
Distância k do vértice origem: 2
Ação: vértice 6 torna-se preto e vértices 3 e 7 tornam-se cinza

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	~~2~~	3	7		
k	1	2	2		

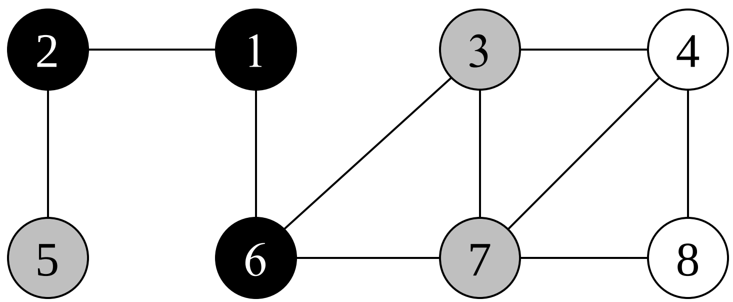
Antecessor	-1	1	6	-1	2	1	6	-1
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

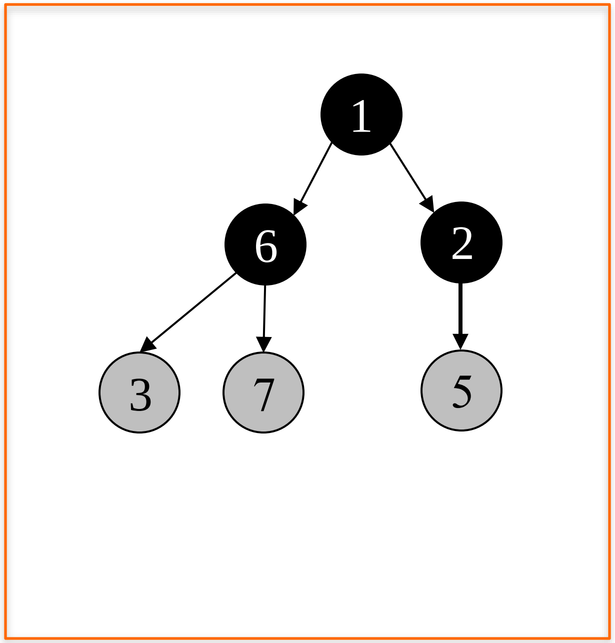
Vértices não descobertos adjacentes a 2: 5
Distância k do vértice origem: 2

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	3	7	5		
k	2	2	2		

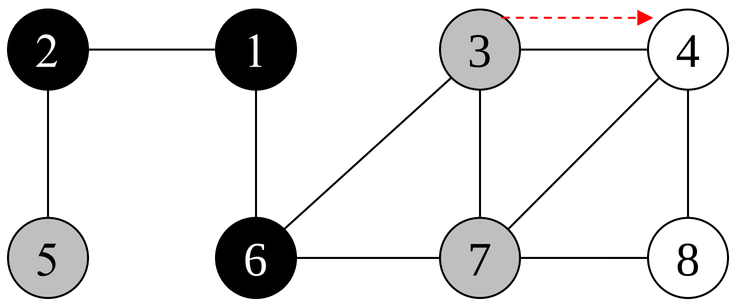
Antecessor	-1	1	6	-1	2	1	6	-1
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

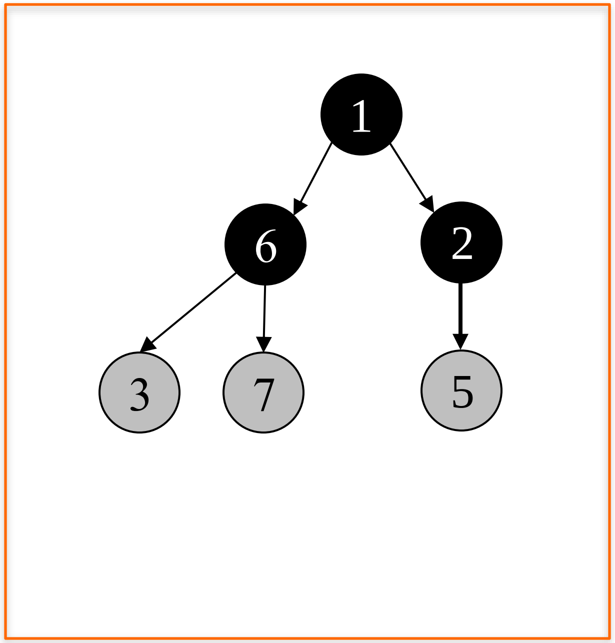
Vértices não descobertos adjacentes a 2: 5
Distância k do vértice origem: 2
Ação: vértice 2 torna-se preto e vértice 5 torna-se cinza

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	~~3~~	7	5		
k	2	2	2		

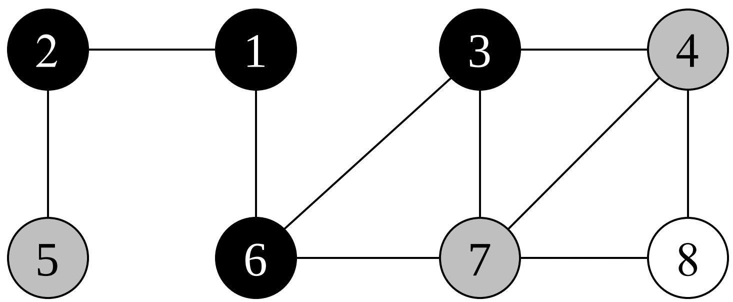
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	-1
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

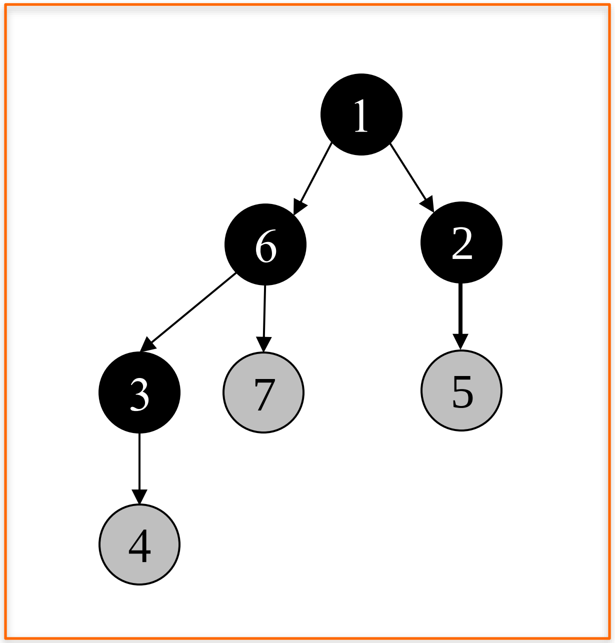
Vértices não descobertos adjacentes a 3: 4
Distância k do vértice origem: 3

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	7	5	4		
k	2	2	3		

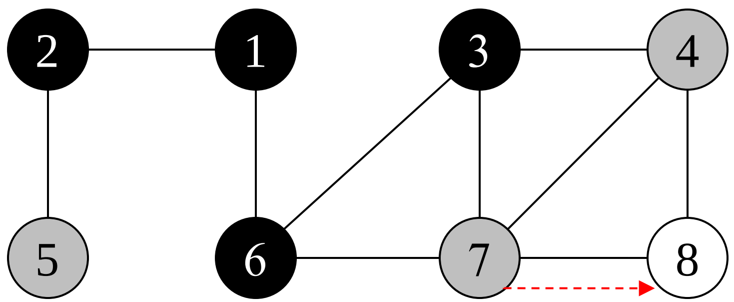
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	-1
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

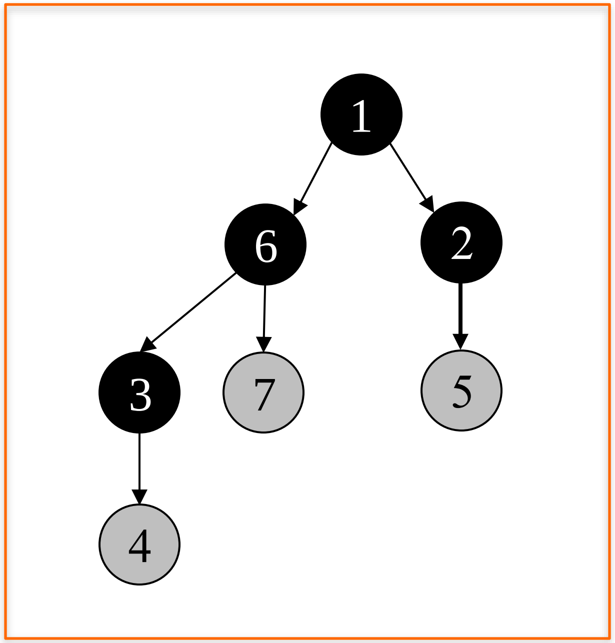
Vértices não descobertos adjacentes a 3: 4
Distância k do vértice origem: 3

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	~~7~~	5	4		
k	2	2	3		

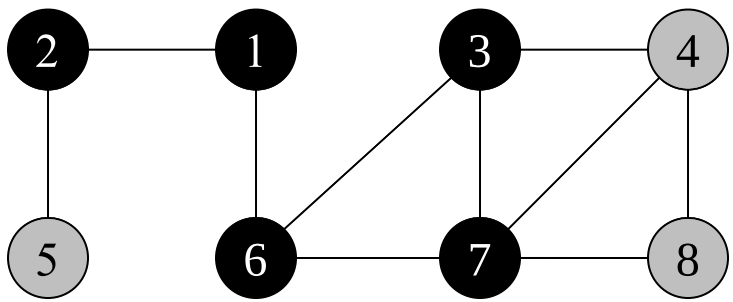
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

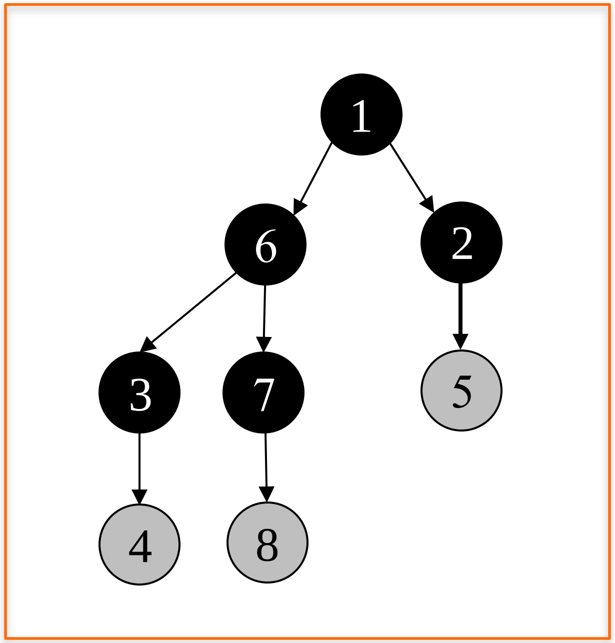
Vértices não descobertos adjacentes a 7: 8
Distância k do vértice origem: 3

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	5	4	8		
k	2	3	3		

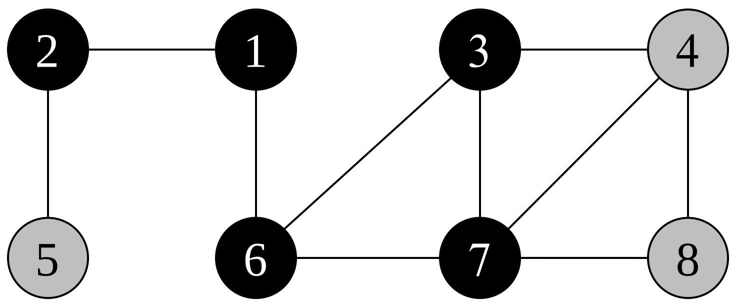
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

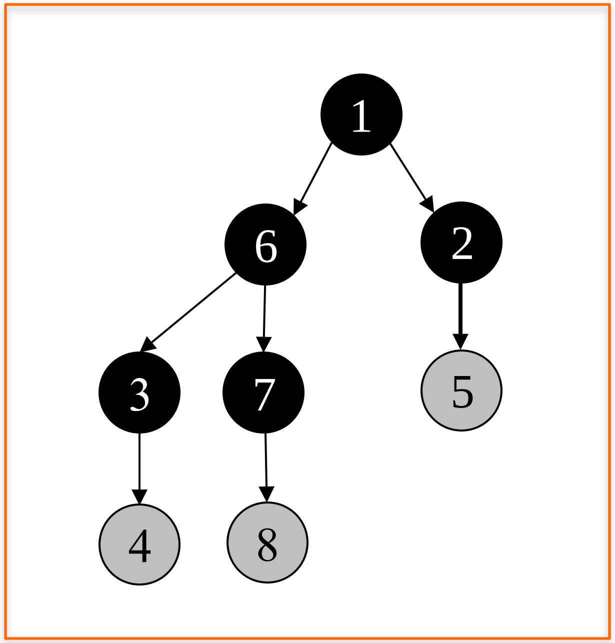
Vértices não descobertos adjacentes a 7: 8
Distância k do vértice origem: 3
Ação: vértice 7 torna-se preto e vértice 8 torna-se cinza

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	~~5~~	4	8		
k	2	3	3		

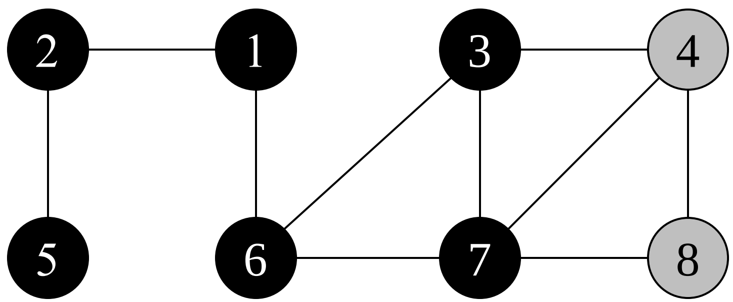
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

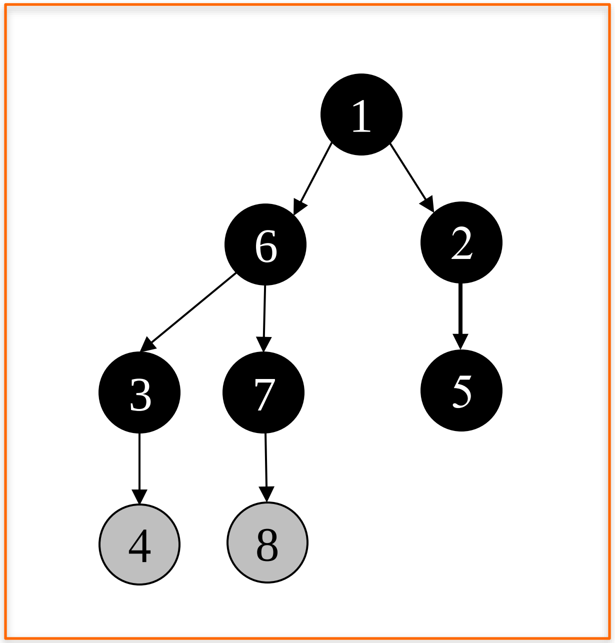
Vértices não descobertos adjacentes a 5: nenhum
Distância k do vértice origem: -

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	4	8			
k	3	3			

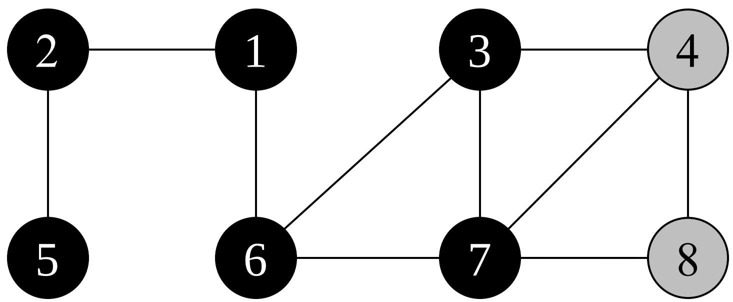
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

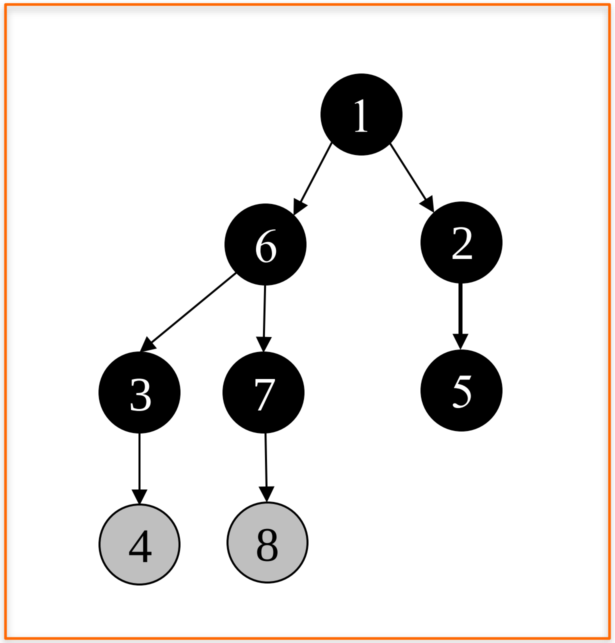
Vértices não descobertos adjacentes a 5: nenhum
Distância k do vértice origem: -
Ação: vértice 5 torna-se preto

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	~~4~~	8			
k	3	3			

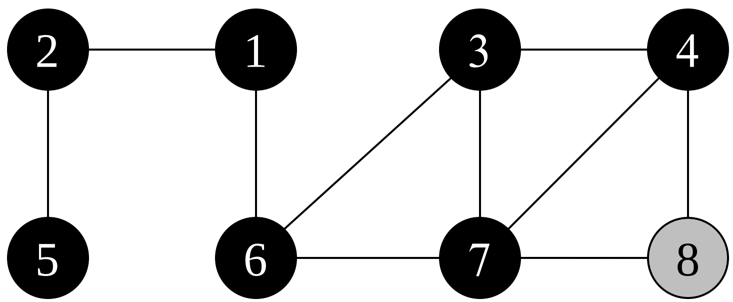
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

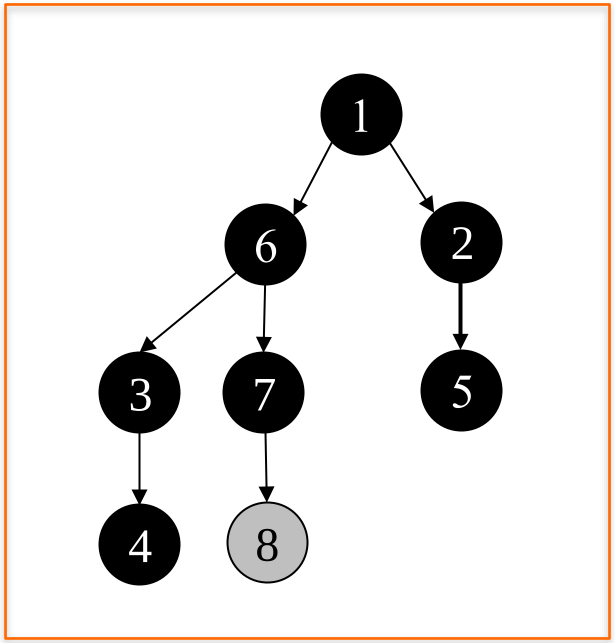
Vértices não descobertos adjacentes a 4: nenhum
Distância k do vértice origem: -

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q	8				
k	3				

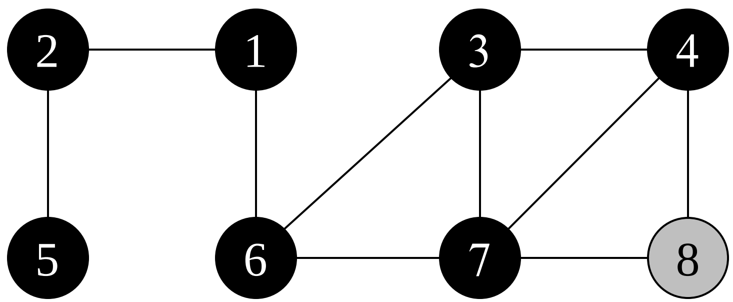
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

Vértices não descobertos adjacentes a 4: nenhum
Distância k do vértice origem: -
Ação: vértice 4 torna-se preto

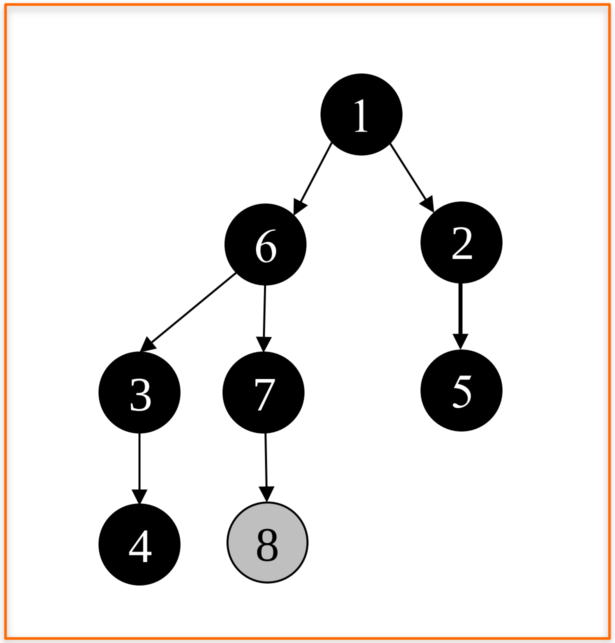
Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q ~~8~~

k 3

	1	2	3	4	5	6	7	8
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7

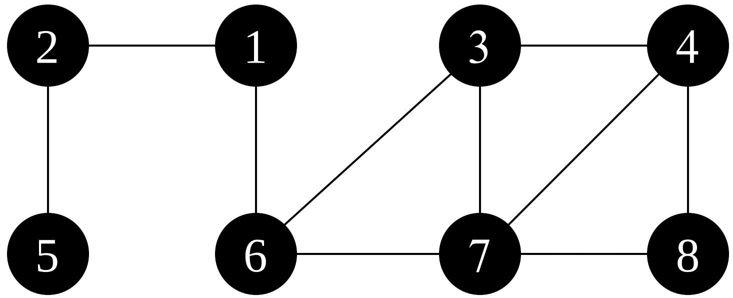


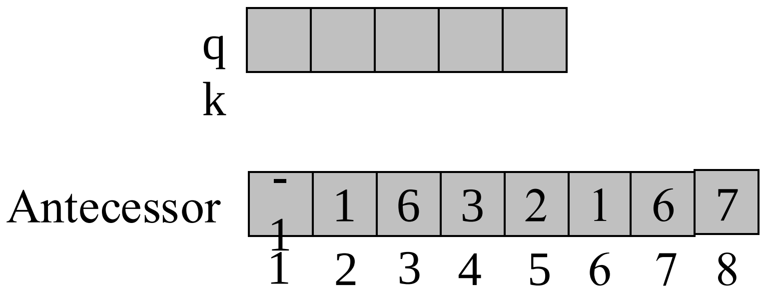
árvore de busca
em largura

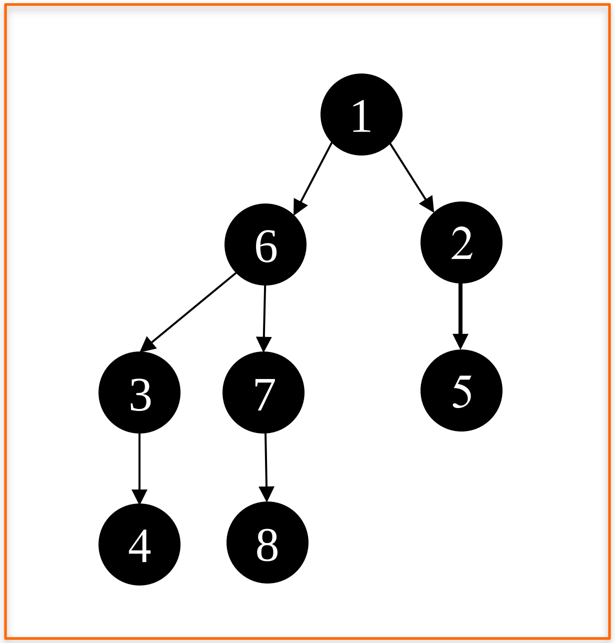
Vértices não descobertos adjacentes a 8: nenhum

Distância k do vértice origem: -

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



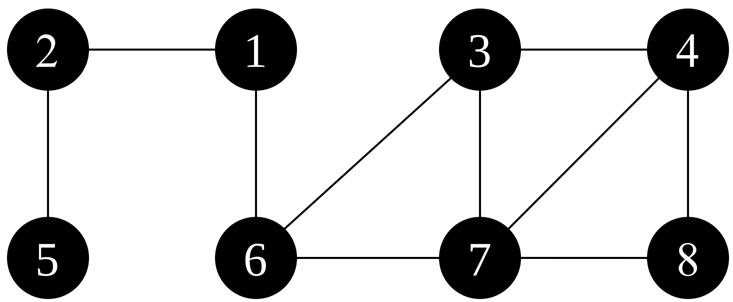


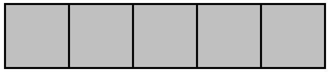


árvore de busca
em largura

Vértices não descobertos adjacentes a 8: nenhum
Distância k do vértice origem: -
Ação: vértice 8 torna-se preto

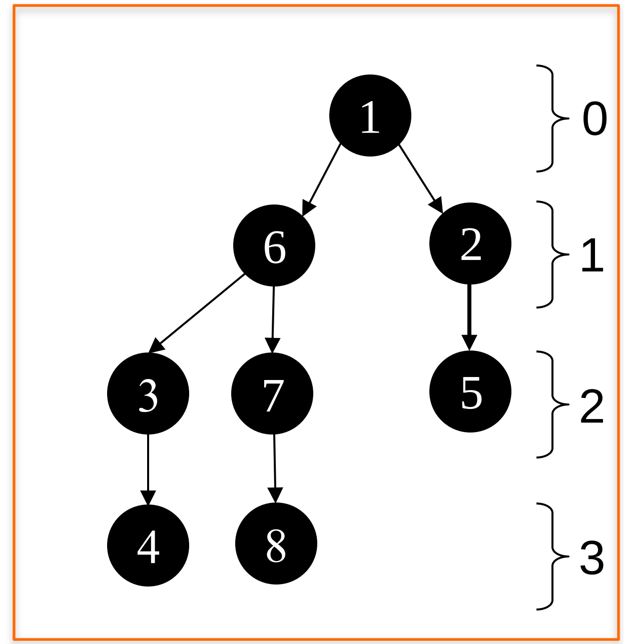
Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura





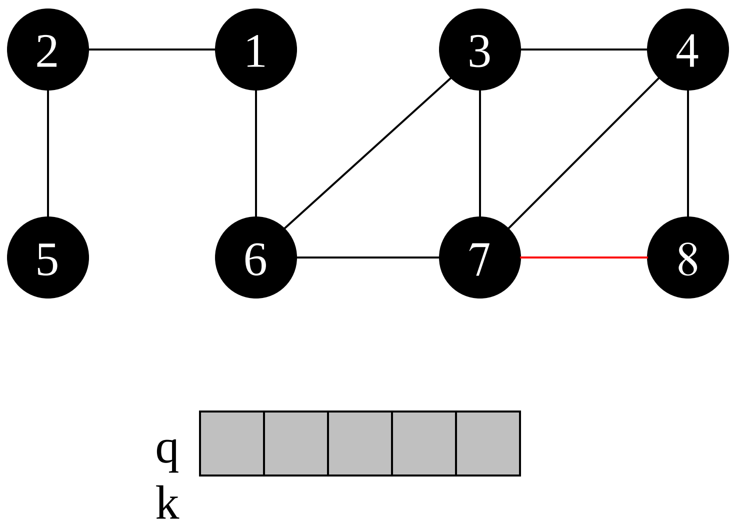
q
k

Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8

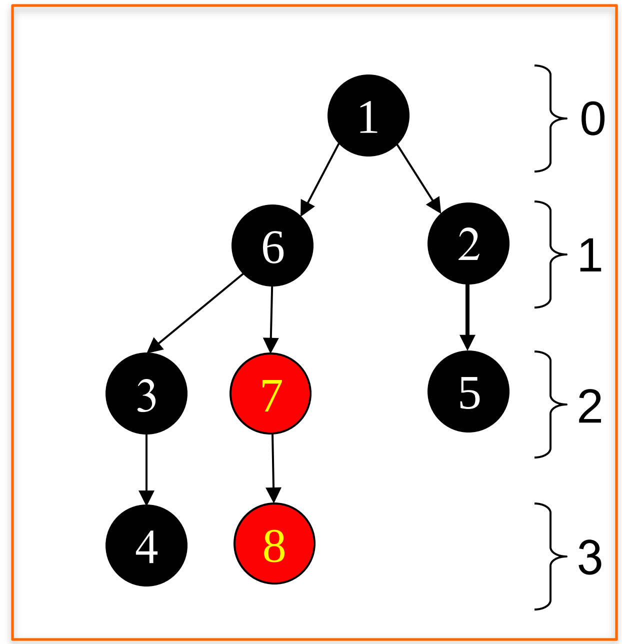


árvore de busca
em largura

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



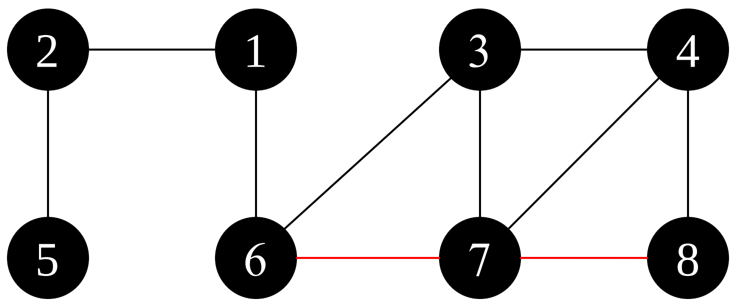
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca em largura

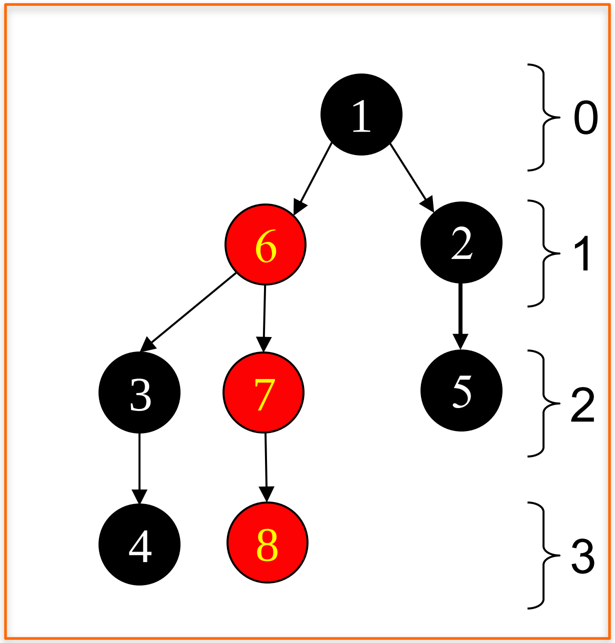
caminho mais curto entre o vértice 1 e o vértice 8

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



qk

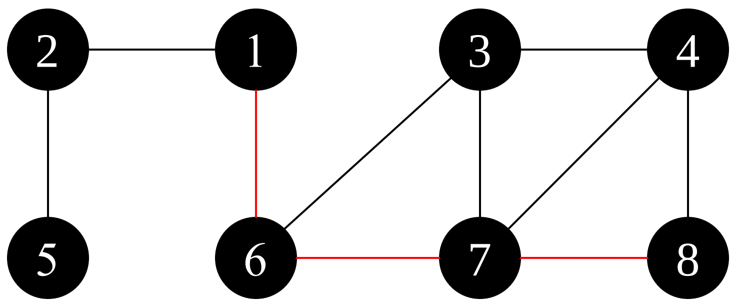
Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca
em largura

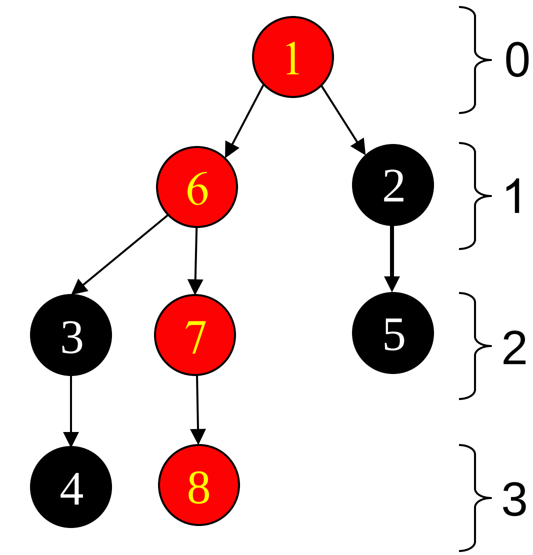
caminho mais curto entre o vértice 1 e o vértice 8

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura



q
k

Antecessor	-1	1	6	3	2	1	6	7
	1	2	3	4	5	6	7	8



árvore de busca em largura

caminho mais curto entre o vértice 1 e o vértice 8

Busca em Largura: Algoritmo para Caminho mais curto (1/2)

```
BFS_CaminhoMaisCurto(Grafo, início, destino):
    Crie uma Fila vazia
    Crie um array Distância, onde Distância[v] armazena a distância
de "início" a "v"
    Crie um array Predecessor, onde Predecessor[v] armazena o vértice
anterior a "v" no caminho
    Marque o vértice "início" como visitado e defina
Distância[início] = 0
    Enfileire o vértice "início"

    Enquanto a Fila não estiver vazia:
        Remova o vértice atual da Fila
        Se o vértice atual é o "destino", então:
            Quebre o loop (o caminho mais curto foi encontrado)
        Para cada vizinho do vértice atual:
            Se o vizinho não foi visitado:
                Marque o vizinho como visitado
                Defina Distância[vizinho] = Distância[atual] + 1
```

Busca em Largura: Algoritmo para Caminho mais curto (2/2)

```
Se Distância[destino] for indefinido, então:
    Retorne "Nenhum caminho encontrado"
Caso contrário:
    Caminho = []
    v = destino
    Enquanto v for diferente de "início":
        Adicione v ao Caminho
        v = Predecessor[v]
    Adicione "início" ao Caminho
    Inverta o Caminho
    Retorne Caminho

// Fim de BFS_CaminhoMaisCurto
```

Caminhos Mais Curtos: Busca em Largura

em grafos não ponderados (ou com arestas de mesmo peso), a busca em largura soluciona o problema de caminhos mais curtos de origem única

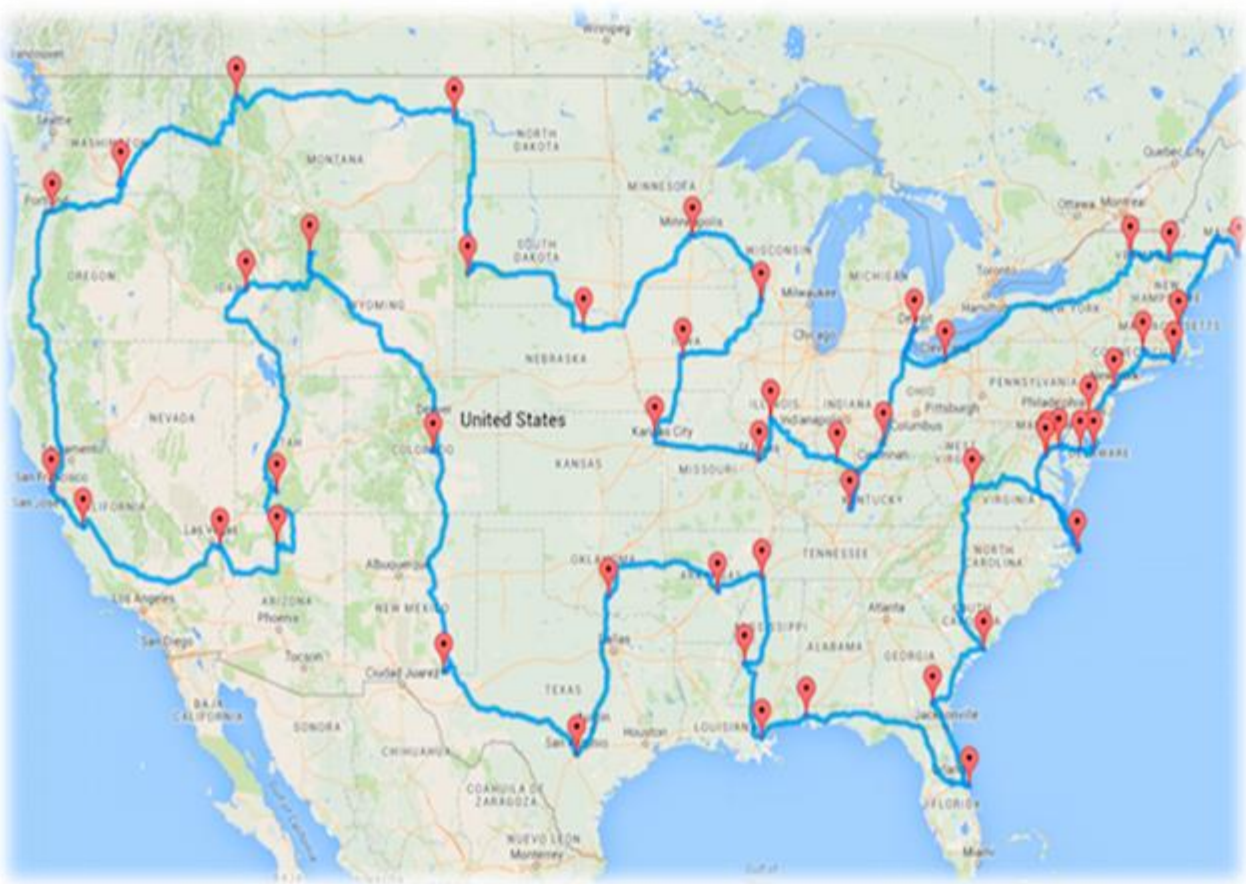
Caminhos Mais Curtos: Exemplos

- Problemas que podem ser resolvidos com algoritmo para encontrar caminho mais curto de origem única
  - Caminhos mais curtos entre um par de vértices
    - algoritmo para problema da origem única é a melhor opção
  - Caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices
    - pode ser resolvido aplicando o algoritmo **|V|** vezes, uma vez para cada vértice origem
  - Caminhos mais curtos com destino único
    - reduzido ao problema de origem única invertendo a direção de cada aresta do grafo, ou seja, calculando o grafo transposto e iniciando a busca do vértice destino

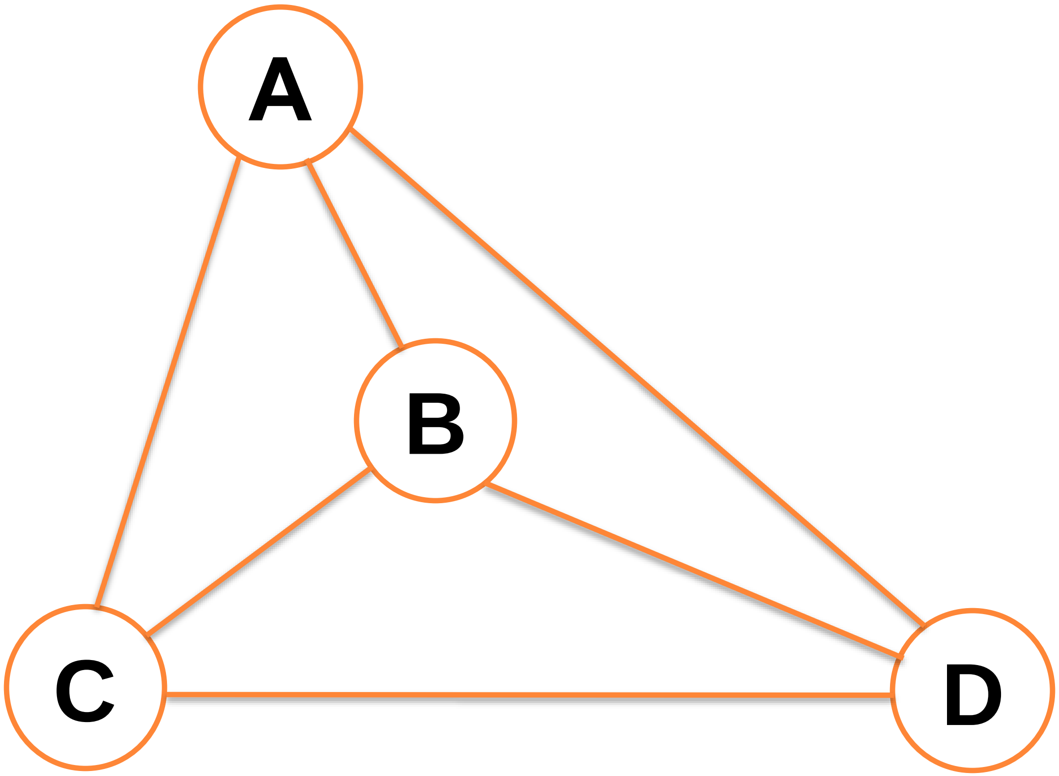
E se o grafo for ponderado?

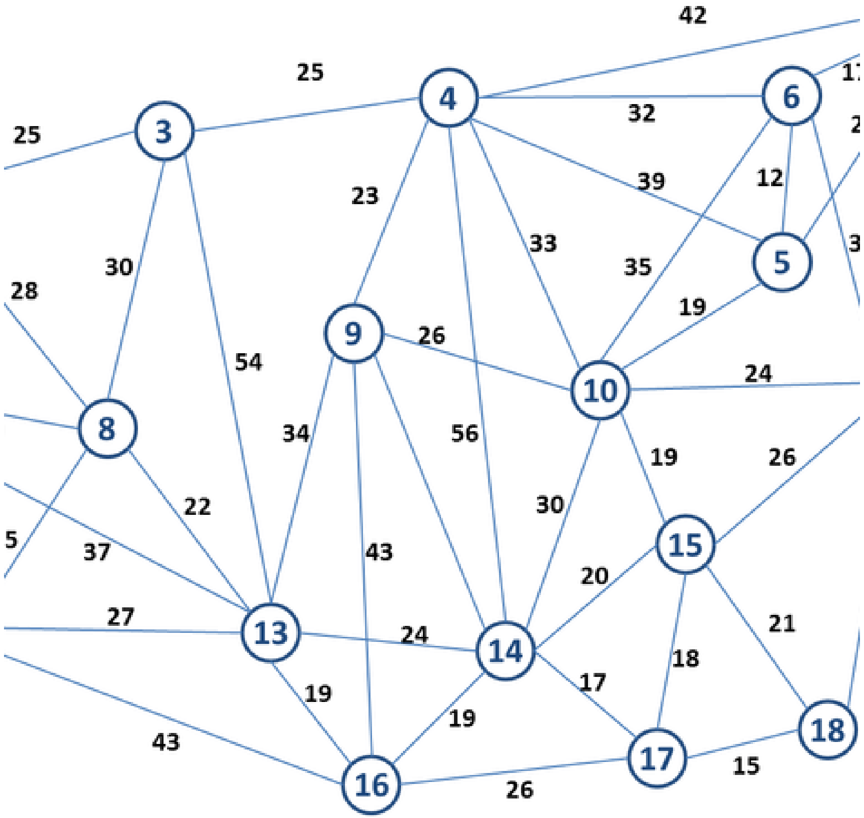
O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE (TSP)

- Consiste em encontrar o menor caminho que visita todas as cidades exatamente uma vez e retorna à cidade de origem
  - Objetivo: minimizar a distância total percorrida



O Problema do Caixeiro Viajante - Exemplo



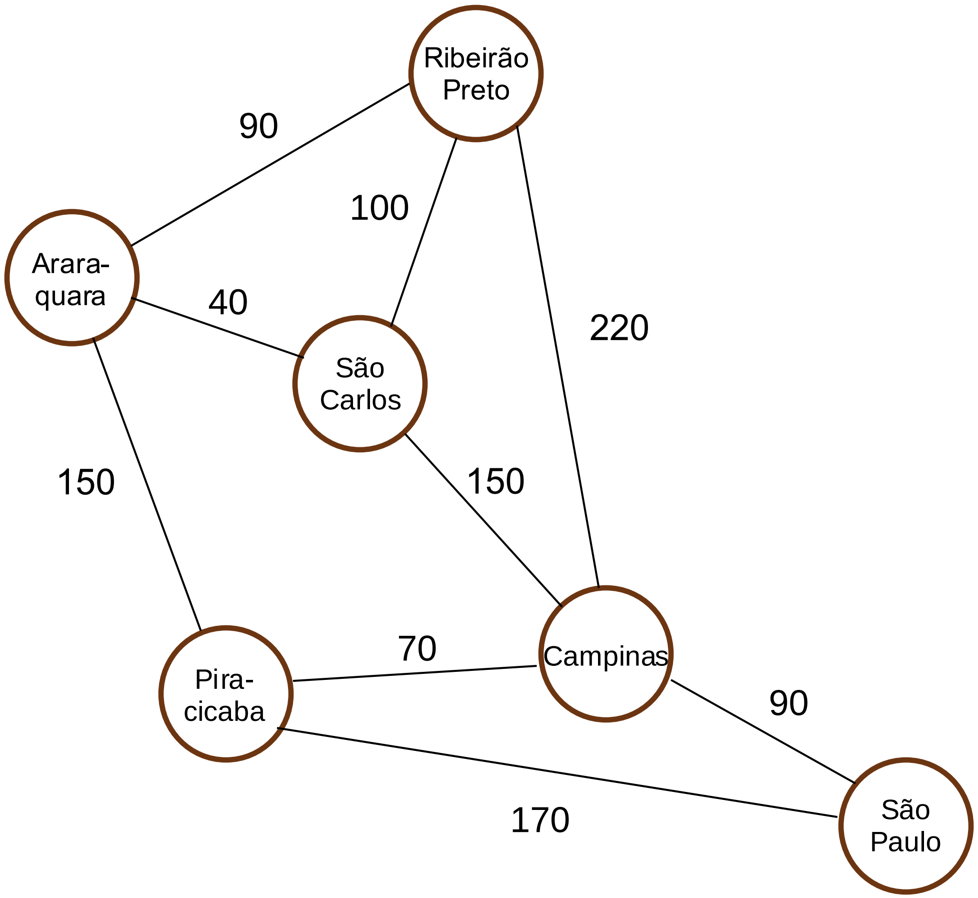


O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE - COMPLEXIDADE

- Para N cidades, existem (N-1)!/2 possíveis rotas.
  - Para poucas cidades, o problema pode ser resolvido rapidamente
  - À medida que o número de cidades aumenta, o número de rotas possíveis cresce exponencialmente
  - Problema intratável para grandes N.

Exemplo: Cidades de São Paulo

Distâncias (simplificadas) em quilômetros (km)



Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra

- Algoritmo de Dijkstra
  - encontra caminhos mais curtos em um grafo ponderado com pesos diferentes entre as arestas

em grafos ponderados (ou com arestas de diferentes pesos), o algoritmo de Dijkstra soluciona o problema de caminhos mais curtos de origem única

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra

- Peso de um caminho $\mathbf{c} = \mathbf{v_0, v_1, \ldots, v_k}$ em um grafo ponderado => soma de todos os pesos das arestas do caminho.
- **Caminho mais curto** do vértice $\mathbf{v_0}$ para o vértice $\mathbf{v_k}$ => caminho de menor peso de $\mathbf{v_0}$ para $\mathbf{v_k}$.
- Um caminho mais curto tem peso infinito se $\mathbf{v_k}$ não é alcançável a partir de $\mathbf{v_0}$.

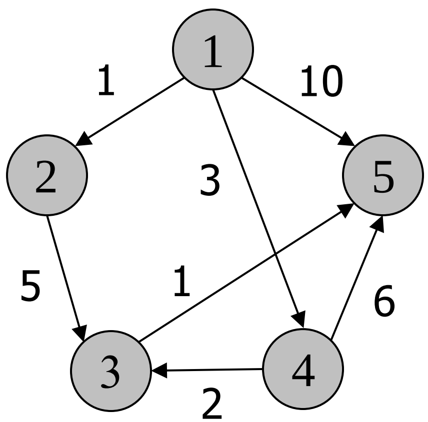
CAMINHOS MAIS CURTOS: ALGORITMO DE DIJKSTRA

- Estratégia:
  - algoritmo mantém um conjunto **S** dos vértices cujos pesos finais dos caminhos mais curtos desde a origem já tenham sido determinados.
    - inicialmente **S** contém somente o vértice origem.
  - algoritmo "guloso" (greedy) **=>** a cada iteração, um vértice **w ∈ (V – S)** , cuja distância ao vértice origem é a menor até o momento , é adicionado a **S**.

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra

- Estratégia:
  - assumindo que todos os vértices possuem custos não negativos, sempre é possível encontrar um caminho mais curto do vértice origem até **w** que passa somente por vértices em S.
  - a cada iteração, um vetor **D** armazena o custo do caminho mais curto conhecido até o momento entre o vértice origem e os demais vértices do grafo.
  - para os vértices em **S**, **D** possui o custo do caminho mais curto final.
  - o algoritmo termina quando todos os vértices estão em **S**.

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



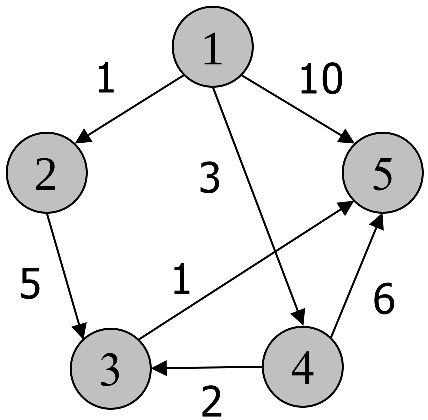
$S = \emptyset$

D =

1	2	3	4	5
0	∞	∞	∞	∞

conjunto S: inicialmente vazio
conjunto D: estimativas pessimistas

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



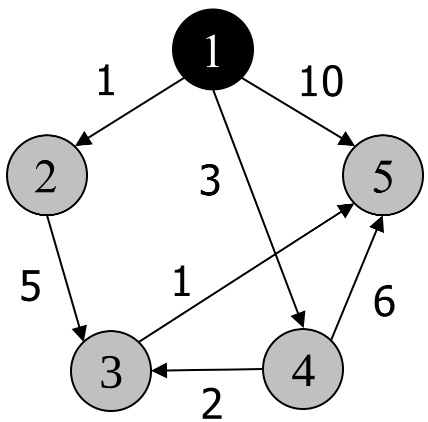
$S = \emptyset$

$D =$

0	∞	∞	∞	∞
1	2	3	4	5

algoritmo: vértice origem é o primeiro vértice analisado

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



S = {1}

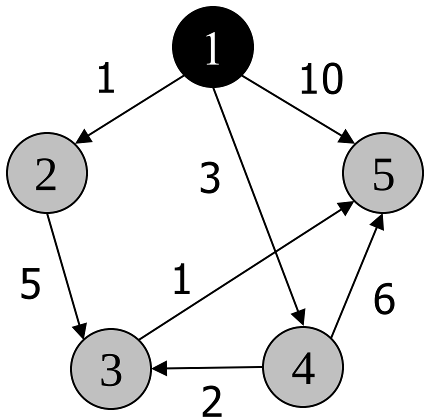
D =

1	2	3	4	5
0	∞	∞	∞	∞

algoritmo: vértice origem é o primeiro vértice analisado

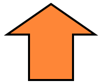
ação: adiciona vértice 1 a S

CAMINHOS MAIS CURTOS: ALGORITMO DE DIJKSTRA



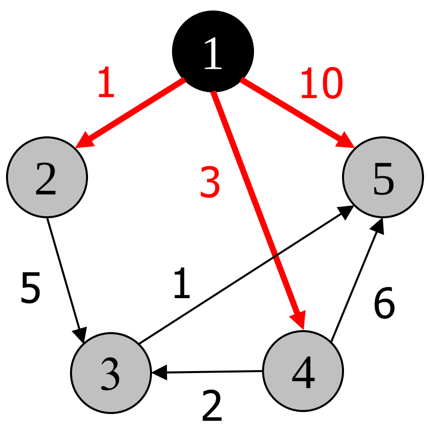
$S = \{1\}$

D =	0	∞	∞	∞	∞
	1	2	3	4	5



algoritmo: para todo vértice v adjacente ao vértice w faça   // w = 1
D[v] := min (D[v], D[w] + peso aresta (w,v))

CAMINHOS MAIS CURTOS: ALGORITMO DE DIJKSTRA



$S = \{1\}$

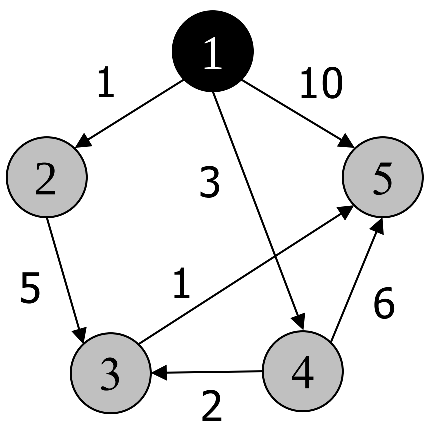
D =

0	1	∞	3	10
1	2	3	4	5

<u>algoritmo</u>: para todo vértice v adjacente ao vértice w faça // w = 1
D[v] := min (D[v], D[w] + peso aresta (w,v))

<u>ação</u>: D[2] = 1, D[4] = 3, D[5] = 10

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



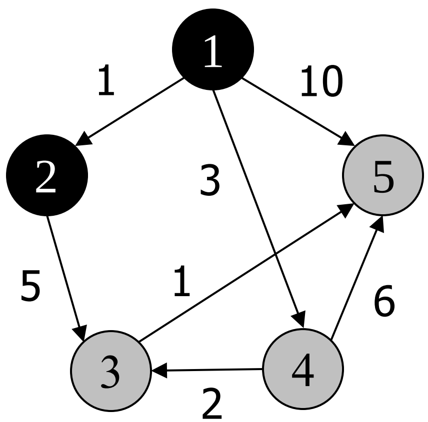
S = {1}

D =

0	1	∞	3	10
1	2	3	4	5

algoritmo: encontre um vértice w ∈ V – S tal que D[w] seja mínimo

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



S = {1,2}

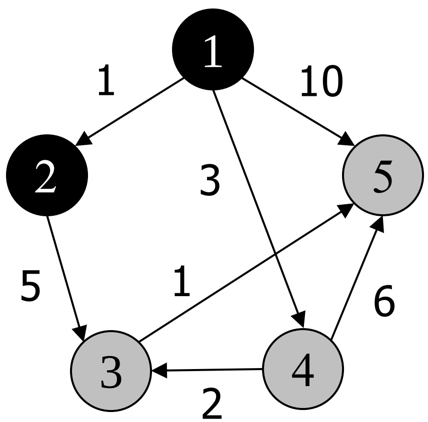
D =

1	2	3	4	5
0	1	∞	3	10

algoritmo: encontre um vértice w ∈ V – S tal que D[w] seja mínimo

ação: adiciona vértice 2 a S

CAMINHOS MAIS CURTOS: ALGORITMO DE DIJKSTRA



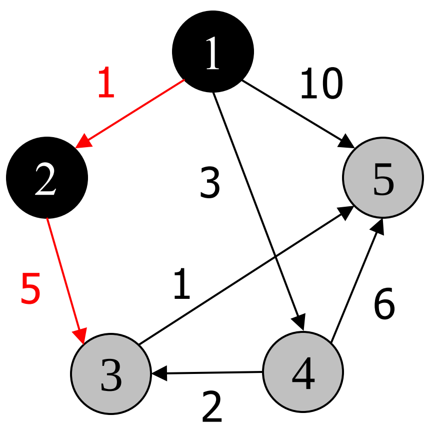
S = {1,2}

D =

0	1	∞	3	10
1	2	3	4	5

algoritmo: para todo vértice v adjacente ao vértice w faça   // w = 2
D[v] := min (D[v], D[w] + peso aresta (w,v))

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



S = {1,2}

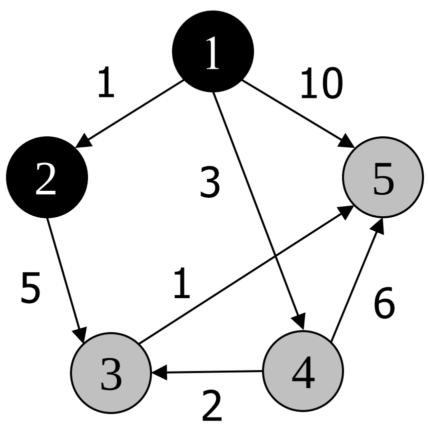
D =

1	2	3	4	5
0	1	6	3	10

algoritmo: para todo vértice v adjacente ao vértice w faça // w = 2
D[v] := min (D[v], D[w] + peso aresta (w,v))

ação: D[3] = 6

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



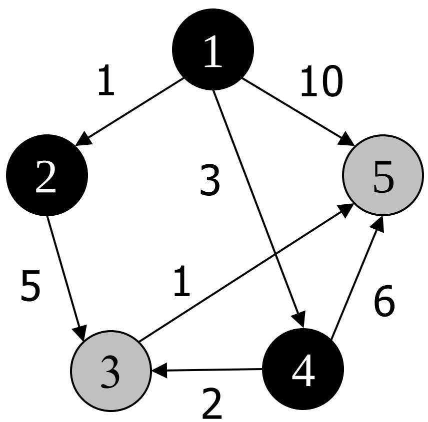
S = {1,2}

D =

1	2	3	4	5
0	1	6	3	10

algoritmo: encontre um vértice w ∈ V – S tal que D[w] seja mínimo

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



S = {1,2,4}

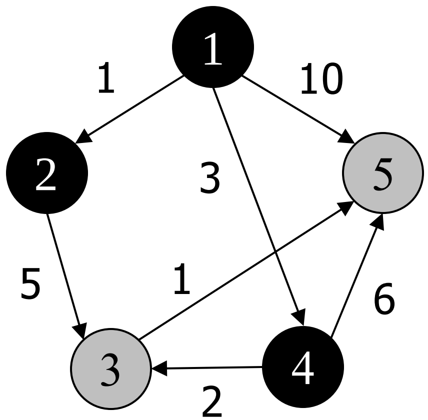
D =

0	1	6	3	10
1	2	3	4	5

algoritmo: encontre um vértice w ∈ V – S tal que D[w] seja mínimo

ação: adiciona vértice 4 a S

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



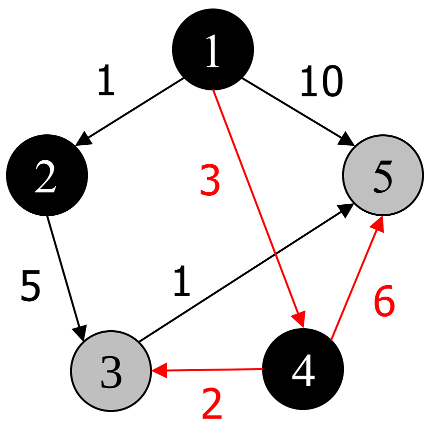
S = {1,2,4}

D =

0	1	6	3	10
1	2	3	4	5

algoritmo: para todo vértice v adjacente ao vértice w faça   // w = 4
D[v] := min (D[v], D[w] + peso aresta (w,v))

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



S = {1,2,4}

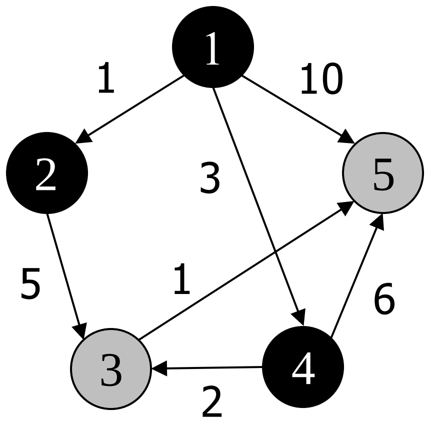
D =

1	2	3	4	5
0	1	5	3	9

<u>algoritmo</u>: para todo vértice v adjacente ao vértice w faça   // w = 4
D[v] := min (D[v], D[w] + peso aresta (w,v))

ação: D[3] = 5, D[5] = 9

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



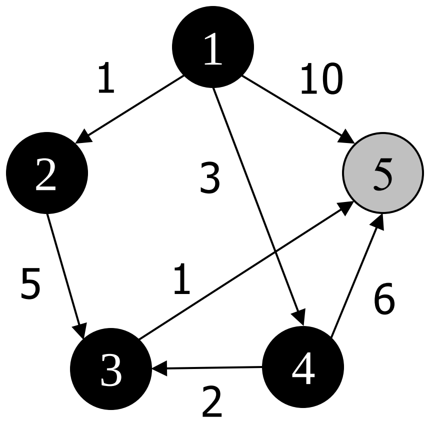
S = {1,2,4}

D =

0	1	5	3	9
1	2	3	4	5

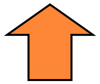
algoritmo: encontre um vértice w ∈ V – S tal que D[w] seja mínimo

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



S = {1,2,4,3}

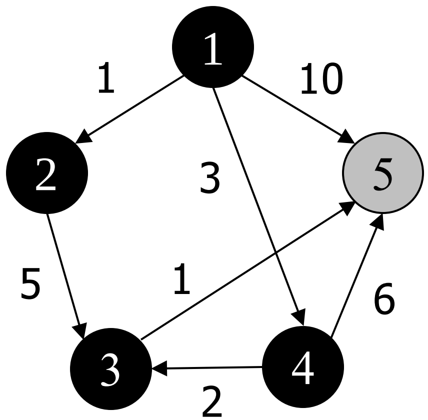
D =	0	1	5	3	9
	1	2	3	4	5



algoritmo: encontre um vértice w ∈ V – S tal que D[w] seja mínimo

ação: adiciona vértice 3 a S

CAMINHOS MAIS CURTOS: ALGORITMO DE DIJKSTRA



S = {1,2,4,3}

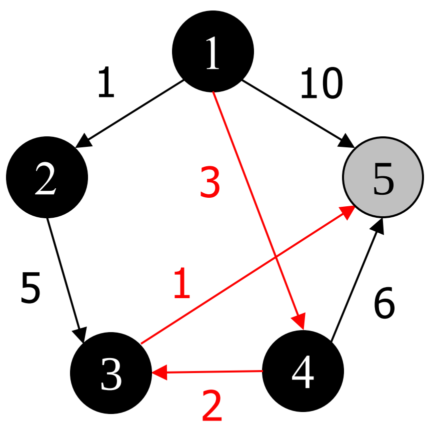
D =

1	2	3	4	5
0	1	5	3	9

<u>algoritmo</u>: para todo vértice v adjacente ao vértice w faça   // w = 3

D[v] := min (D[v], D[w] + peso aresta (w,v))

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



S = {1,2,4,3}

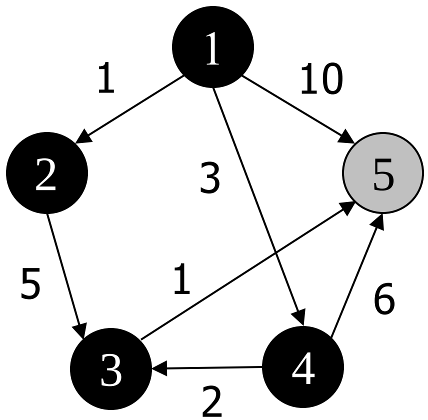
D =

1	2	3	4	5
0	1	5	3	6

<u>algoritmo</u>: para todo vértice v adjacente ao vértice w faça // w = 3
D[v] := min (D[v], D[w] + peso aresta (w,v))

<u>ação</u>: D[5] = 6

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



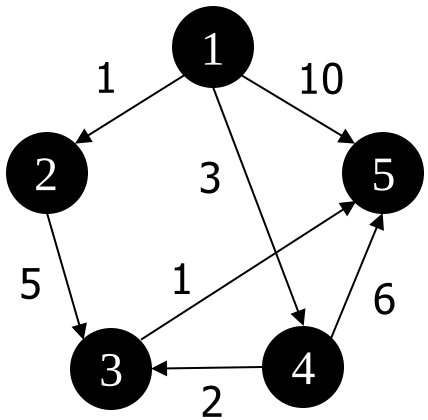
S = {1,2,4,3}

D =

0	1	5	3	6
1	2	3	4	5

algoritmo: encontre um vértice w ∈ V – S tal que D[w] seja mínimo

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



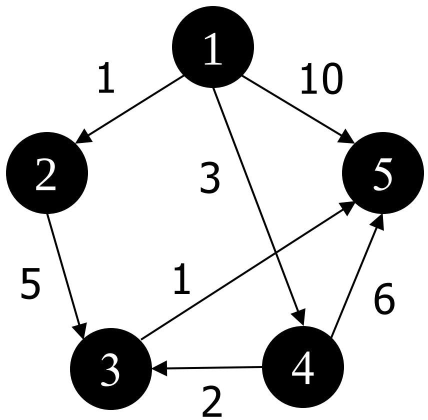
S = {1,2,4,3,5}

D =	0	1	5	3	6
	1	2	3	4	5

algoritmo: encontre um vértice w ∈ V – S tal que D[w] seja mínimo

ação: adiciona vértice 5 a S

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



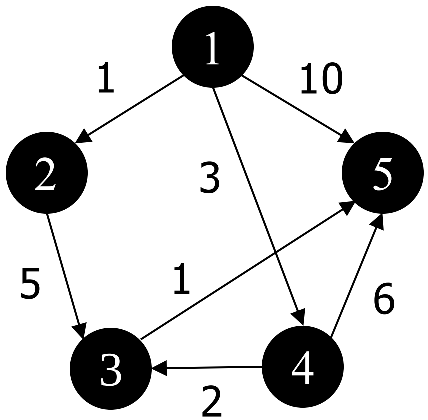
S = {1,2,4,3,5}

D =

0	1	5	3	6
1	2	3	4	5

algoritmo: para todo vértice v adjacente ao vértice w faça   // w = 5
D[v] := min (D[v], D[w] + peso aresta (w,v))

CAMINHOS MAIS CURTOS: ALGORITMO DE DIJKSTRA



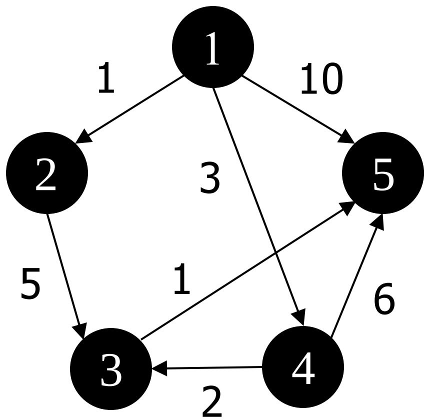
S = {1,2,4,3,5}

D =

0	1	5	3	6
1	2	3	4	5

<u>algoritmo</u>: encontre um vértice w ∈ V – S tal que D[w] seja mínimo

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



S = {1,2,4,3,5}

D =

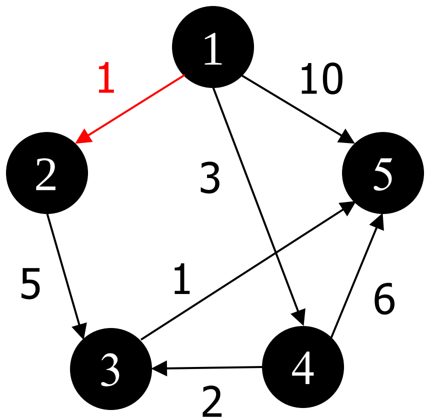
0	1	5	3	6
1	2	3	4	5

FIM DO ALGORITMO

CAMINHOS MAIS CURTOS: ALGORITMO DE DIJKSTRA - EXEMPLO

```
procedimento Dijkstra(origem: TVertice, var G: TGrafo)
variáveis
   D: vetor[TVertice] de TPeso;
   w: TVertice;
   S, V: conjunto de TVertice;
início
   S := {origem};
   V := {todos os vértices de G};
   D[origem] := 0;
   para i:=1 até G.NumVertices faça
   início
        se i != origem e existe a aresta (origem, i) então
                D[i] := Peso da aresta (origem, i)
        senão
                D[i] := ∞;
   fim;
   enquanto S ≠ V faça
   início
        encontre um vértice w ∈ (V - S) tal que D[w] é mínimo;
        S := S ∪ {w};
        para todo v adjacente a w faça
                D[v] := min(D[v],D[w] + Peso da aresta (w,v));
   fim;
fim;
```

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



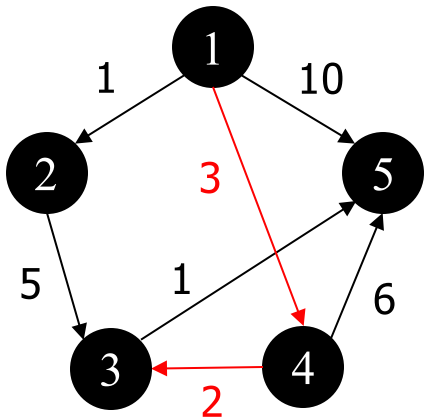
$S = \{1,2,4,3,5\}$

D =

1	2	3	4	5
0	1	5	3	6

caminho mais curto entre 1 e 2: 1

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



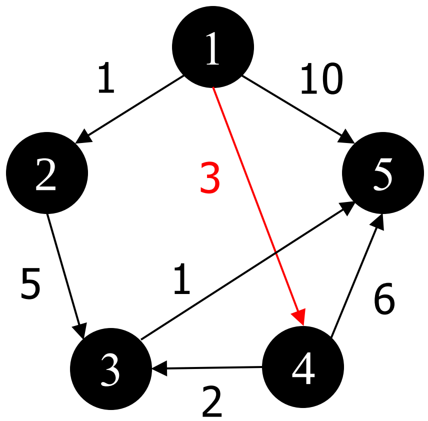
S = {1,2,4,3,5}

D =

0	1	5	3	6
1	2	3	4	5

caminho mais curto entre 1 e 3: 5

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



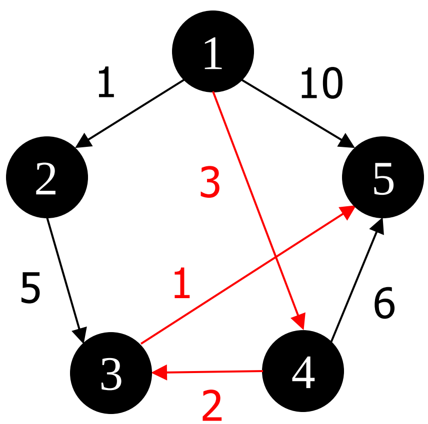
S = {1,2,4,3,5}

D =

0	1	5	3	6
1	2	3	4	5

caminho mais curto entre 1 e 4: 3

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra



$S = \{1,2,4,3,5\}$

D =

0	1	5	3	6
1	2	3	4	5

caminho mais curto entre 1 e 5: 6

Caminhos Mais Curtos: Algoritmo de Dijkstra

- **Vetor de antecessores** pode ser usado para reconstruir o caminho mais curto entre o vértice origem e cada vértice
  - vetor *Antecessor*, tal que *Antecessor[v]* contém o vértice imediatamente anterior ao vértice *v* no caminho mais curto.
  - técnica similar à utilizada na busca em largura.

Algoritmo de Dijkstra: Complexidade Otimizada

O(|A| log |V|)

- Característica
  - boa implementação da fila de prioridade
- Fila de prioridade (*heap*)
  - organiza os vértices em V-S
  - provê custo de busca e atualização/inserção/remoção no heap de (O log |V|)

Caminhos Mais Curtos: Algoritmos Especializados

- **De origem única**
  - arestas podem ter peso negativo
  - podem existir ciclos (inclusive negativos)
    - algoritmo de Bellman-Ford
- **De origem única**
  - arestas podem ter peso negativo
  - não podem existir ciclos
    - algoritmo baseado na ordenação topológica

Caminhos Mais Curtos: Algoritmos Especializados

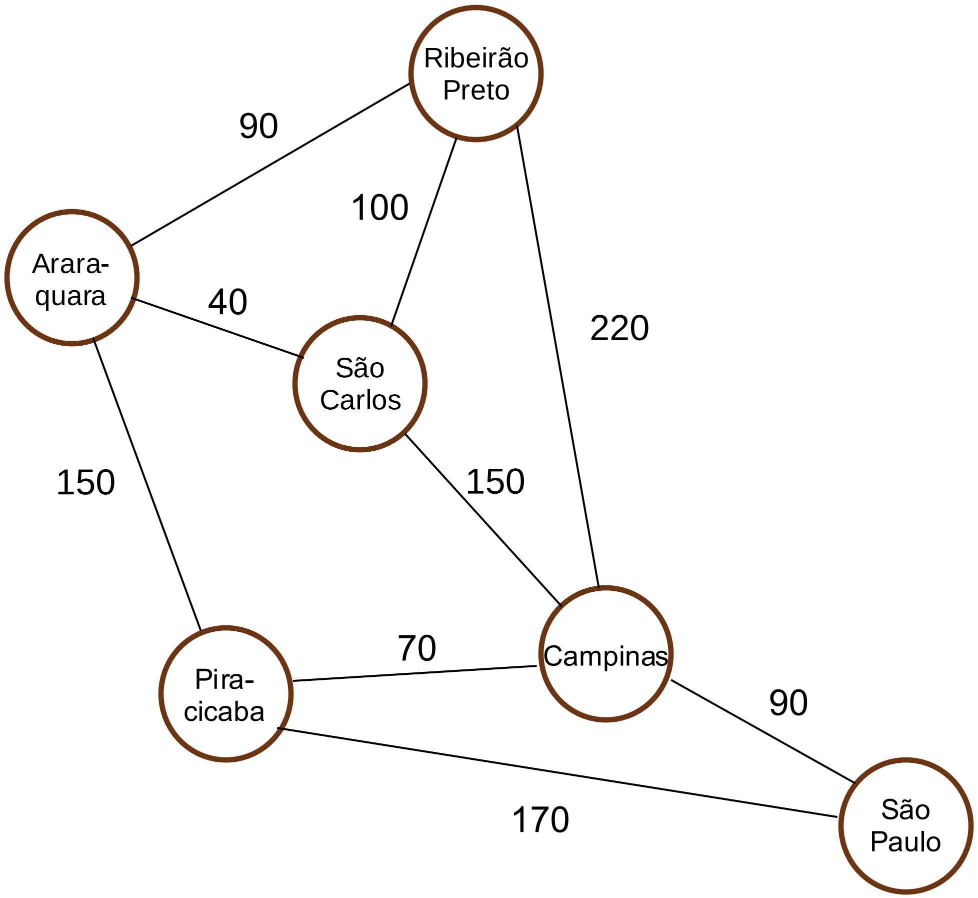
- **Entre todos os pares de vértices**
  - arestas podem ter peso negativo
  - podem existir ciclos (somente positivos)
    - algoritmo de Floyd (ou Floyd-Warshall)
- **Entre todos os pares de vértices**
  - arestas podem ter peso negativo
  - podem existir ciclos (somente positivos)
  - grafos esparsos
    - algoritmo de Johnson

Caminhos Mais Curtos: Algoritmos Especializados

- **Existe um caminho entre dois vértices?**
  - algoritmo de Warshall
- **Algoritmo A***
  - proposto por Peter Hart, Nils Nilsson e Bertram Raphael do Stanford Research Institute em 1968, para determinar o caminho a ser navegado pelo robô Shakey, em uma sala com obstáculos
  - pode ser usado para determinar os caminhos mais curtos entre um par específico de vértices
- ...

EXEMPLO: CIDADES DE SÃO PAULO

Distâncias (simplificadas) em quilômetros (km)



Bibliografia

- N. Ziviani. Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson and R. L. Rivest. Introduction to Algorithms, MIT Press, 2nd Edition, 2001.