Sistemas lineares

Aula 4 – Convolução

Convolução

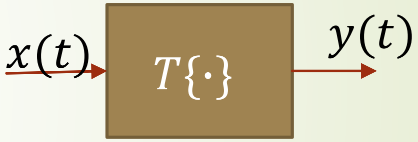
- Introdução
- Propriedades
- Cálculo Passo a Passo
- Exemplos
- Tabela de Convolução

Introdução – Resposta ao Impulso

- Decomposição em impulsos unitários:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Aplicando um sinal $x(t)$ a um sistema $T\{\cdot\}$:



$$y(t) = T\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Introdução

- A convolução entre dois sinais de tempo contínuo $\boldsymbol{x(t)}$ e $\boldsymbol{h(t)}$ é dada pela integral:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

A saída de qualquer SLIT é a convolução da entrada $\boldsymbol{x(t)}$ com a sua Resposta ao Impulso Unitário $\boldsymbol{h(t)}$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{SLIT} \xrightarrow{y(t) = x(t) * h(t)}$$

Propriedades

- Comutativa:

$$h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$$

- Associativa:

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$$

- Distributiva:

$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

- Deslocamento:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$x(t) * h(t - T) = y(t - T)$$

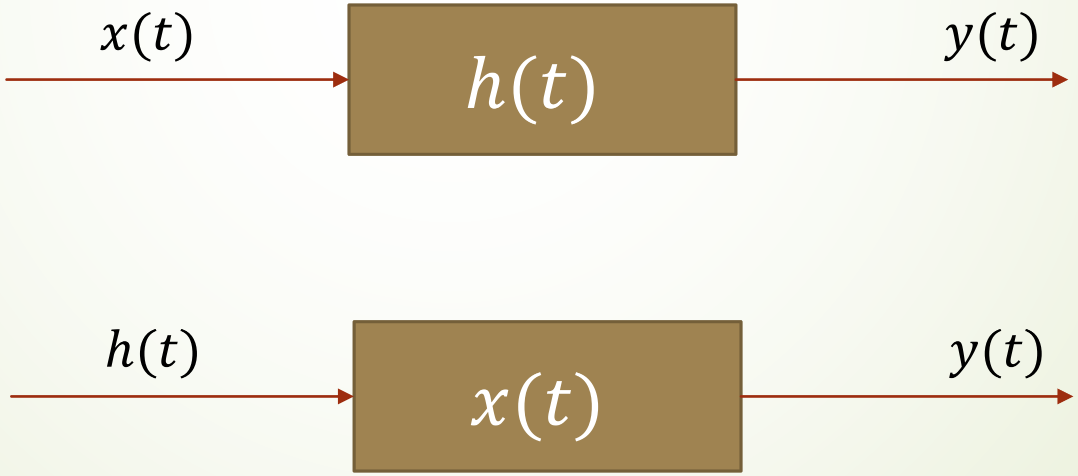
- Elemento Neutro:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Propriedades

- Comutativa:

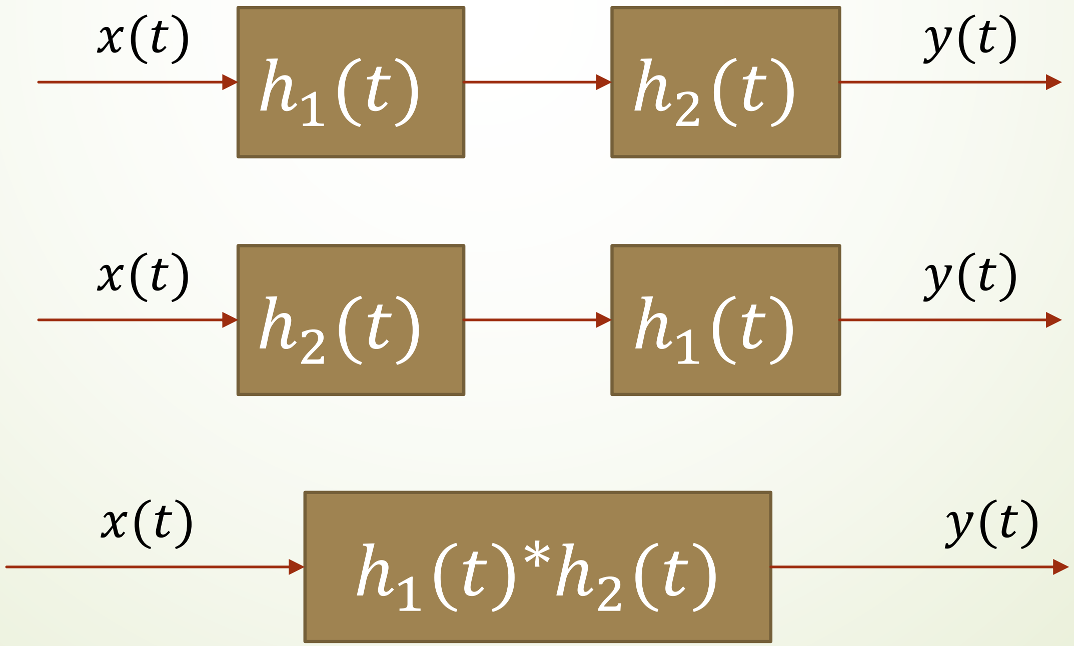
$$h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$$



Propriedades

- Associativa (série ou cascata):

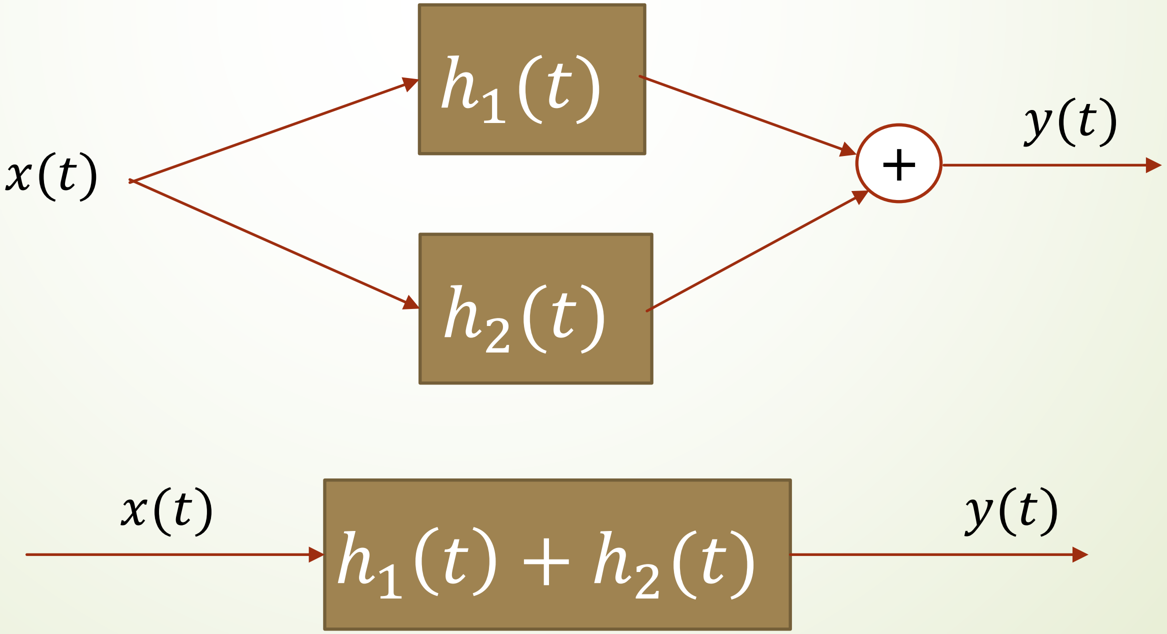
$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_2(t) * h_1(t)\}$$



Propriedades

- Distributiva (paralelo):

$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



Propriedades

- Deslocamento:

Se: $y(t) = x(t) * h(t)$

então: $x(t) * h(t - T) = y(t - T)$

e: $x(t - T_1) * h(t - T_2) = y(t - T_1 - T_2)$

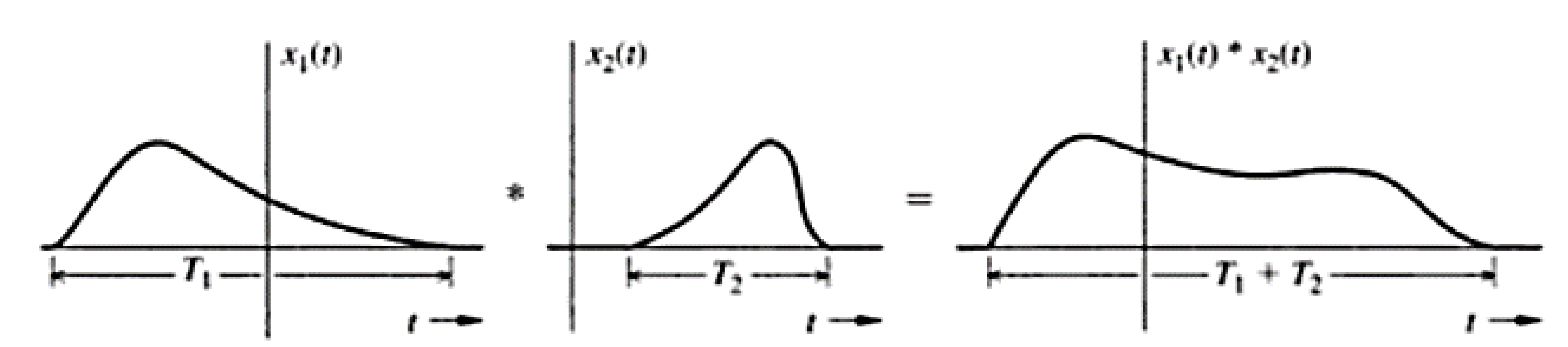
- Elemento Neutro: Impulso Unitário

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Propriedades

- Causalidade:
  - Se $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$ são sinais causais, então $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) * \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$ também será causal

- Largura:



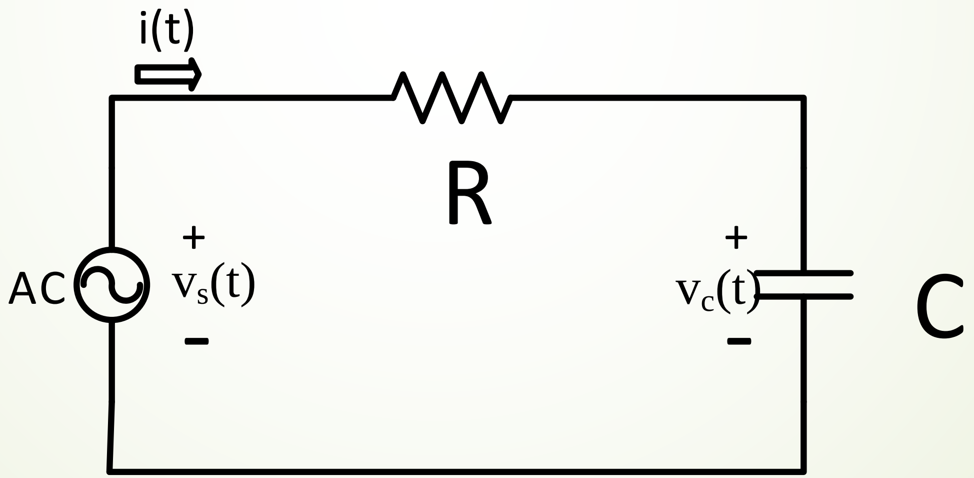
Cálculo Passo a Passo

- Cálculo:

1. Reversão temporal (rebatimento em relação ao eixo vertical) da resposta impulsiva $\boldsymbol{h(\tau)}$ para se obter $\boldsymbol{h(-\tau)}$
2. Multiplicação dos sinais $\boldsymbol{x(\tau)}$ e $\boldsymbol{h(t_0 - \tau)}$ para todos os valores de $\boldsymbol{\tau}$, com $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0}$
3. Integração do produto $\boldsymbol{x(\tau).\, h(t-\tau)}$ para todos os valores de τ, obtendo-se um valor único para $\boldsymbol{y(t_0)}$
4. Repetição dos passos anteriores para $-\infty < \boldsymbol{t} < \infty$ para produzir a saída para todos os instantes de tempo, $\boldsymbol{y(t)}$

Convolução

- Exemplo 1:
  - Sabendo que um circuito RC, como o mostrado abaixo, tem a resposta impulsiva $\boldsymbol{h(t)} = \boldsymbol{e^{-t}u(t)}$, determine a tensão no capacitor $\boldsymbol{y(t)}$, resultante de uma tensão de entrada $\boldsymbol{x(t) = e^{-3t}[u(t) - u(t-2)]}$.



Convolução

- Exemplo 1:
  - Por se tratar de um SLIT, podemos fazer:
  $$y(t) = h(t) * x(t) = \{e^{-t}.u(t)\} * \{e^{-3t}.[u(t) - u(t-2)]\}$$
  - Traçar $\boldsymbol{x(\tau)}$ e $\boldsymbol{h(t-\tau)}$ em função da variável dependente $\boldsymbol{\tau}$

  - Inicie a constante $\boldsymbol{t}$ muito grande negativamente, e faça-a crescer até valores muito grandes positivamente, identificando os intervalos nos quais a multiplicação dos sinais seja nula, e os intervalos nos quais o produto não se anule

Convolução

- Exemplo 1:
  - Para $\boldsymbol{t < 0}$: os sinais não se sobrepõem, resultando em produto nulo, e consequentemente a integral de convolução também se anulará.

$$y(t) = 0$$

  - Para $\boldsymbol{t > 0}$: os sinais $\boldsymbol{x(\tau)}$ e $\boldsymbol{h(t-\tau)}$ sobrepõem-se para $\boldsymbol{0 < t < 2:}$

$$x(\tau).h(t-\tau) = e^{-t-2\tau}$$

  - Para $\boldsymbol{0 \leq t < 2}$: os sinais $\boldsymbol{x(\tau)}$ e $\boldsymbol{h(t-\tau)}$ sobrepõem-se, de forma a ter um produto resultante crescente, dado por:

$$y(t) = \int_0^t e^{-t-2\tau} d\tau = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$$

Convolução

- Exemplo 1:
  - Para $\boldsymbol{t} \geq \mathbf{2}$: os sinais $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\tau})$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\tau})$ continuam sobrepondo-se, mas agora de forma a ter um produto resultante decrescente, dado por:

$$y(t) = \int_0^2 e^{-t-2\tau} d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-4})e^{-t}$$

  - Daí temos o resultado da convolução através da junção de todos os intervalos:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}), & 0 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-4})e^{-t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

Convolução

- Exemplo 2:

$$x(t) = u(t)$$

$$h(t) = e^{-at}u(t), \qquad com\ a > 0$$

Convolução

- Exemplo 2: resolução analítica

$$y(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} d\tau = e^{-at} . \frac{1}{a} (e^{at} - 1)$$

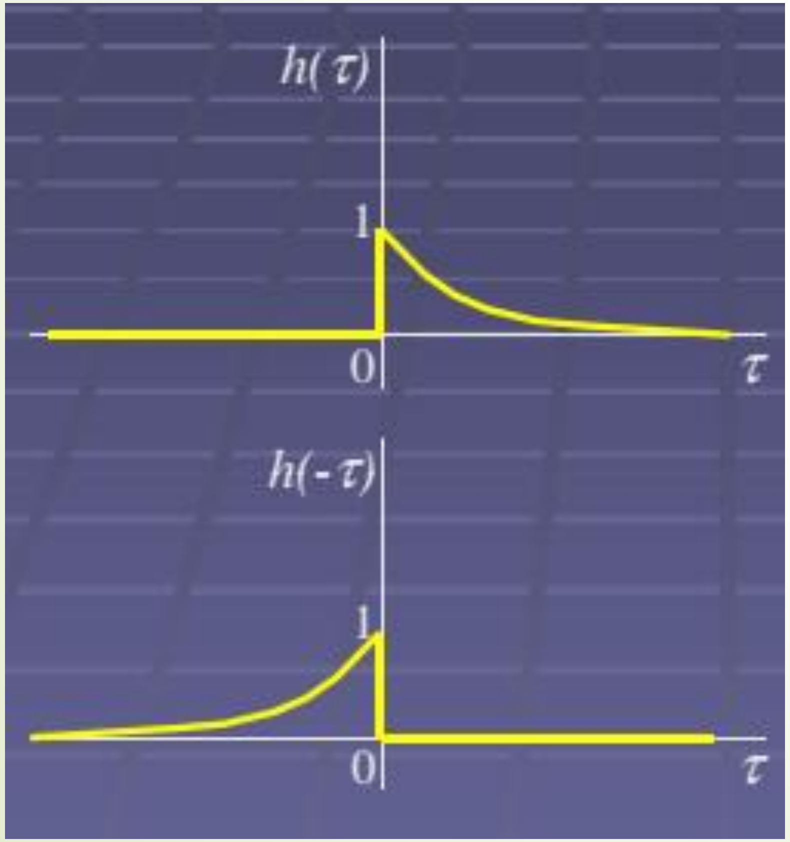
$$y(t) = \frac{1 - e^{-at}}{a} , para\ t \geq 0$$

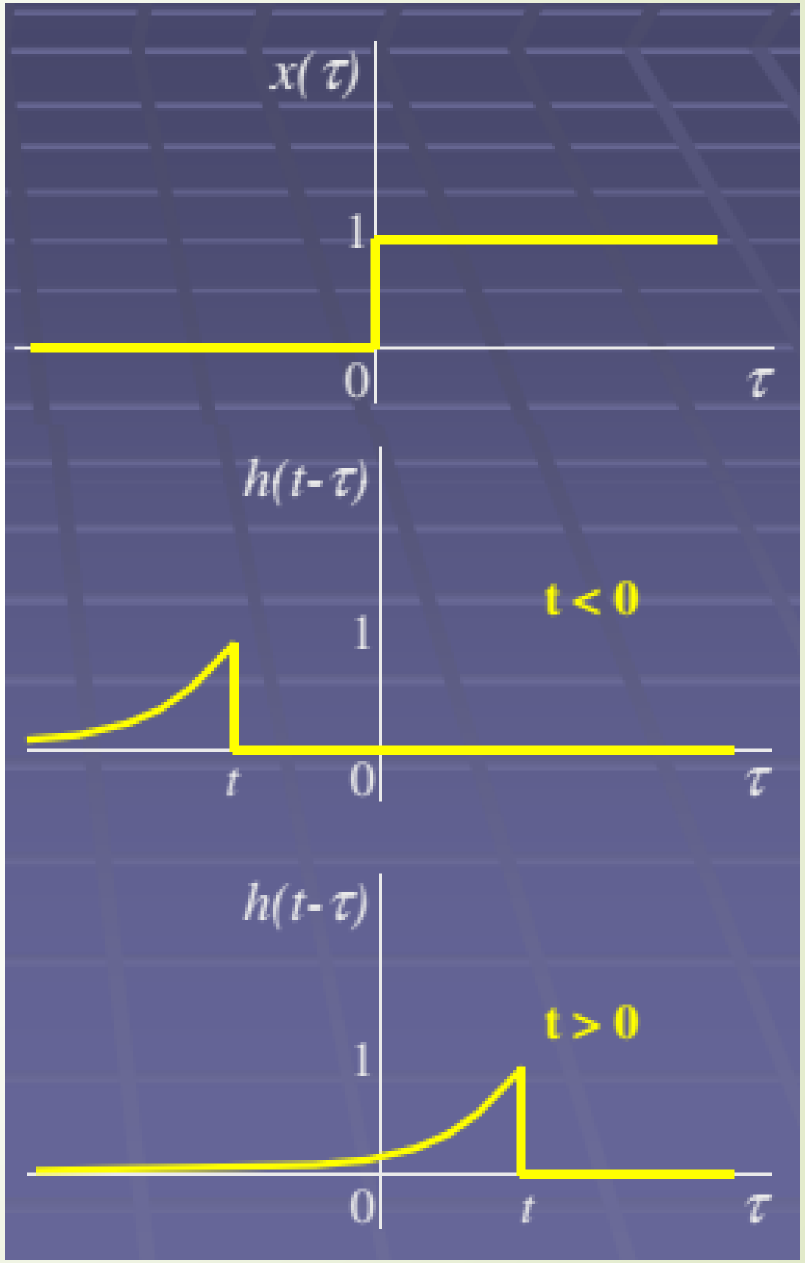
$$ou$$

$$y(t) = \frac{1 - e^{-at}}{a} u(t)$$

Convolução

- Exemplo 2: resolução gráfica





Convolução

- Exemplo 3:

$$x(t) = e^{at}.u(-t)$$

$$h(t) = e^{-at}.u(t), \qquad com\ a > 0$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

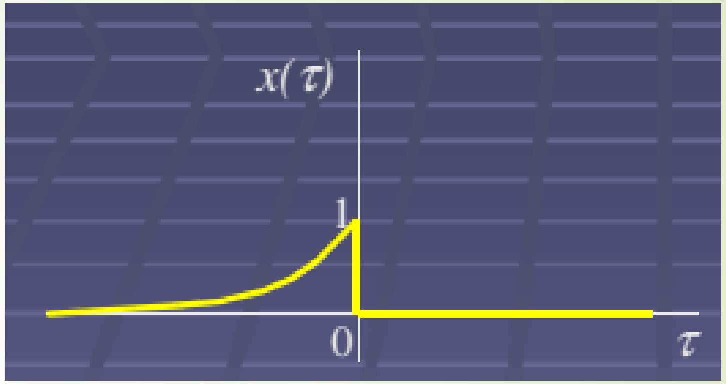
$$\text{Para } t < 0: \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{a\tau} e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at} \int_{-\infty}^{t} e^{2a\tau} d\tau = \frac{1}{2a} e^{at}$$

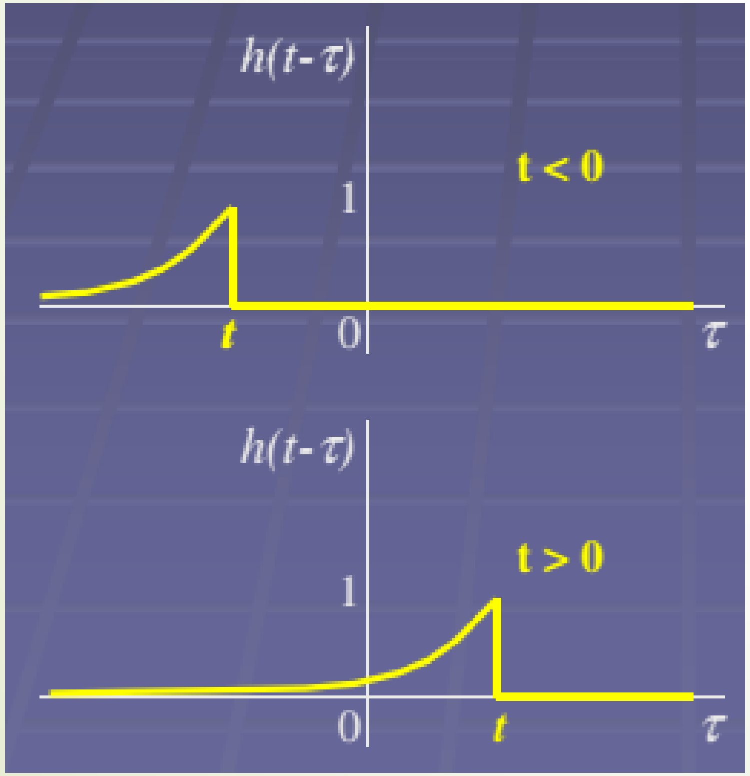
$$\text{Para } t > 0: \quad y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{a\tau} e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at} \int_{-\infty}^{0} e^{2a\tau} d\tau = \frac{1}{2a} e^{-at}$$

$$y(t) = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

Convolução

- Exemplo 3: resolução gráfica





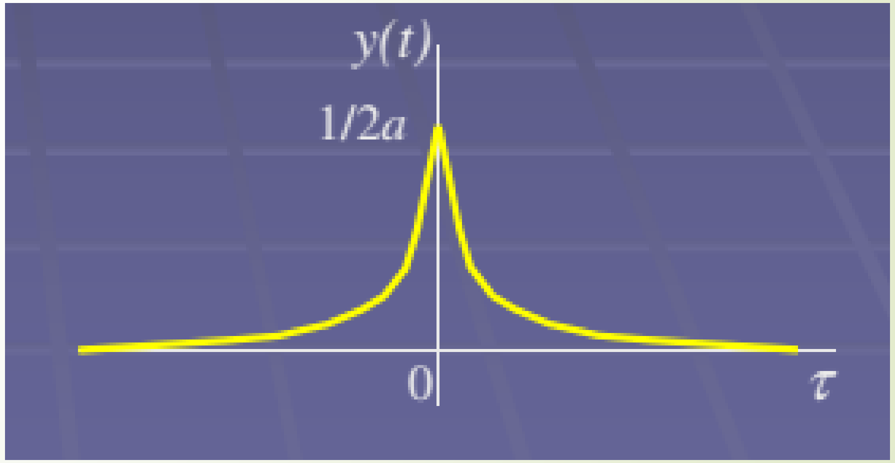


Tabela de Convolução (Haykin)

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
$x(t)$	$\delta(t-T)$	$x(t-T)$
$e^{\lambda t}u(t)$	$u(t)$	$\dfrac{1-e^{\lambda t}}{-\lambda}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\dfrac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}u(t) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$
$e^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$te^{\lambda t}u(t)$
$te^{\lambda t}u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{\lambda t}u(t)$
$t^N u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\dfrac{N!e^{\lambda t}}{\lambda^{N+1}}u(t) - \sum_{k=0}^{N}\dfrac{N!t^{N-k}}{\lambda^{k+1}(N-k)!}u(t)$
$t^M u(t)$	$t^N u(t)$	$\dfrac{M!N!}{(M+N+1)!}t^{M+N+1}u(t)$

Tabela de Convolução (Haykin) - cont.

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
$te^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\dfrac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 - \lambda_2)te^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}u(t)$
$t^M e^{\lambda t}u(t)$	$t^N e^{\lambda t}u(t)$	$\dfrac{M!\,N!}{(N + M + 1)!}t^{M+N+1}e^{\lambda t}u(t)$
$t^M e^{\lambda_1 t}u(t)$	$t^N e^{\lambda_2 t}u(t)$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{M} \frac{(-1)^k M!(N+k)!\,t^{M-k}e^{\lambda_1 t}}{k!(M-k)!(\lambda_1 - \lambda_2)^{N+k+1}}u(t)$
$\lambda_1 \neq \lambda_2$		$\displaystyle+\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k N!(M+k)!\,t^{N-k}e^{\lambda_2 t}}{k!(N-k)!(\lambda_2 - \lambda_1)^{M+k+1}}u(t)$
$e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\dfrac{\cos(\theta - \phi)e^{\lambda t} - e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta - \phi)}{\sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + \beta^2}}u(t)$
		$\phi = \tan^{-1}[-\beta/(\alpha + \lambda)]$
$e^{\lambda_1 t}u(t)$	$e^{\lambda_2 t}u(-t)$	$\dfrac{e^{\lambda_1 t}u(t) + e^{\lambda_2 t}u(-t)}{\lambda_2 - \lambda_1}$ $\quad \mathrm{Re}\,\lambda_2 > \mathrm{Re}\,\lambda_1$
$e^{\lambda_1 t}u(-t)$	$e^{\lambda_2 t}u(-t)$	$\dfrac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}u(-t)$

Exercícios para estudo

- Livro Haykin – Cap. 2:
  - 2.5
  - 2.6
  - 2.12
  - 2.14
  - 2.16
- Livro Lathi – Cap. 2 (Problemas):
  - 2.2-1
  - 2.2-2
  - 2.2-3
  - 2.2-4
  - 2.2-5
  - 2.2-6
  - 2.2-7
  - 2.4-4
  - 2.4-5
  - 2.4-6
  - 2.4-7
  - 2.4-25