

Relatório 3º projeto ASA 2024/2025

Grupo: AL077

Aluno(s): Alexandre Delgado (109441) e Madalena Yang (110206)

Descrição da Solução

Neste relatório é considerado o problema da maximização do número de crianças que poderão ver os seus pedidos satisfeitos respeitando as restrições do problema.

➤ Identificar as variáveis do problema

Para cada criança $C_k |_{k=1}^t$ criamos x_{ki} se $F_i \in \text{desejos}(C_k)$, sendo $\text{desejos}(C_k)$ o conjunto de brinquedos que a criança k pede ao Pai Natal.

$x_{ki} = 1$ se e só se C_k receber o brinquedo da fábrica F_i

Por exemplo, x_{24} é a variável binária que indica se o pedido da criança 2 foi atendido pela fábrica 4.

➤ Modelar o objetivo

Função objetivo: maximizar a soma das variáveis associadas aos pedidos de todas as crianças, ou seja, maximizar o nº total de pedidos atendidos.

$$\max \sum_{k=1}^t \sum_{F_i \in \text{desejos}(C_k)} x_{ki}$$

➤ Modelar as restrições

1. Restrição do stock máximo para cada fábrica F_i

Cada fábrica F_i tem um stock máximo de brinquedos disponíveis para a distribuição no Natal. Ou seja, a soma de todos os pedidos atendidos pela fábrica F_i não pode ser superior a $fmax[i]$.

$$\sum_{F_i \in \text{desejos}(C_k)} x_{ki} \leq fmax[i], \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

2. Restrição da exportação para cada país P_j

Cada país P_j é limitado por um $pmax[j]$ de brinquedos que pode exportar. Isto é, a soma dos pedidos enviados do país P_j para crianças fora do país P_j não pode ser superior a $pmax[j]$.

$$\sum_{\substack{C_k \in \{k \in \{c_1, \dots, c_t\}: \\ \text{pais_crianca}[k] \neq j\}}} \sum_{\substack{F_i \in \{i \in \text{desejos}(C_k): \\ \text{pais_fabrica}[i] = j\}}} x_{ki} \leq pmax[j], \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

• $\text{pais_crianca}[k]$
representa o país j que a criança k pertence.
• $\text{pais_fabrica}[i]$
representa o país j que a fábrica i pertence.

3. Restrição da entrega mínima para cada país P_j

Cada país P_j tem um nº mínimo $pmin[j]$ de brinquedos que deve distribuir. Isto é, o nº de crianças do país P_j que recebem brinquedos deve ser superior a $pmin[j]$.

$$\sum_{\substack{C_k \in \{k \in \{c_1, \dots, c_t\}: \\ \text{pais_crianca}[k] = j\}}} \sum_{i=1}^n x_{ki} \geq pmin[j], \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Relatório 3º projeto ASA 2024/2025

Grupo: AL077

Aluno(s): Alexandre Delgado (109441) e Madalena Yang (110206)

4. Restrição do nº de pedidos atendidos para cada criança C_k

Cada criança C_k recebe, dos pedidos que fez, no máximo, um.

$$\sum_{F_i \in \text{desejos}(C_k)} x_{ki} \leq 1, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, t\}$$

Programação Linear $\max \sum_{k=1}^t \sum_{F_i \in \text{desejos}(C_k)} x_{ki}$

Inicialmente, recebemos o input e organizamos as variáveis em 4 dicionários, um para cada restrição, de forma que mais tarde possamos percorrer só os dicionários para verificar cada restrição. Depois temos um for loop que itera até o $\max(n, m, t)$ para percorrer esses 4 dicionários de uma só vez e verificar cada restrição.

for z in range(1, max+1):

if $z \leq n$:

$$\sum_{\text{pedidos_por_fabrica}[z]} x_{ki} \leq fmax[z]$$

pedidos_por_fabrica é um dicionário com i: [pedidos feitos à fábrica i]

if $z \leq m$:

$$\sum_{\text{pedidos_por_exportacao}[z]} x_{ki} \leq pmax[z]$$

pedidos_por_exportacao é j: [pedidos feitos a fábricas do país j por crianças fora do país j]

$$\sum_{\text{pedidos_por_entrega}[z]} x_{ki} \leq pmin[z]$$

pedidos_por_entrega é j: [pedidos feitos pelas crianças do país j]

if $z \leq t$:

$$\sum_{\text{pedidos_por_crianca}[z]} x_{ki} \leq 1$$

pedidos_por_crianca é k: [pedidos feitos pela criança k]

Um “pedido” representa um par criança-brinquedo $[k, i]$, uma variável do problema.

Complexidade do modelo

- **Nº de restrições:** $O(n) + O(m) + O(m) + O(t) = O(n + m + t)$ mas devido a uma otimização, fica $O(\max(n, m, t))$
- **Nº de variáveis:** $O(tn)$ (no pior caso, cada criança pede brinquedos de todas as fábricas)

Avaliação Experimental dos Resultados

Após ter gerado várias instâncias de tamanho incremental, obteve-se o seguinte gráfico: no eixo das abcissas, está o nº de variáveis; no eixo das ordenadas, o tempo em segundos.

Deste modo, observa-se um gráfico aproximadamente logarítmico, ao contrário de um gráfico exponencial que era esperado. Este facto deve-se a otimizações realizadas no código e também ao facto da biblioteca PULP incluir várias heurísticas.

