Варианты (по одному из 2х) с контрольных работ Шапошниковой Т. А. за 2010–2011 год, проведённых в 301 группе механико-математического факультета в рамках курса УрЧП. Ниже предлагаются, кроме того, решения этих задач. Надеюсь, сей конспект будет кому-либо будет полезен.
Романов Е. Д., 2010–2011 (`romanoved@yandex.ru`).

Последняя компиляция: 30 мая 2020 г. г.
Обновления документа на сайтах `http://dmvn.mexmat.net`, `http://dmvn.mexmat.ru`.
LaTeX исходники
`https://bitbucket.org/dmvn/mexmat.lectures`
Об опечатках и неточностях пишите на `dmvn@mccme.ru`.

Контрольная работа №1. Вариант 1.

Задача 1. *Найти решение уравнения* $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0$,
удовлетворяющее начальным условиям: $u|_{y=0} = \sin x, \quad u_y|_{y=0} = e^x$.

Решение. Уравнение сводится к виду $v_{\alpha\beta} + \frac{1}{6}v_\alpha = 0$ заменой: $\begin{cases} \alpha = y - 5x \\ \beta = y + x \end{cases}$

Общее решение: $f(\beta) + g(\alpha)e^{-\frac{\beta}{6}} = f(y + x) + g(y - 5x)e^{-\frac{y+x}{6}}$. Используя начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} f(x) + g(-5x)e^{-\frac{x}{6}} = \sin x \\ -\dfrac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}g(-5x) + e^{-\frac{x}{6}}g'(-5x) + f'(x) = e^x \end{cases} ,\, ,\, :$$

$$f(x) = -Ce^{-x/6} + \frac{5e^x}{7} - \frac{5\cos x}{37} + \frac{7\sin x}{37}, \quad g(x) = C - \frac{5}{7}e^{-7x/30} + \frac{5}{37}e^{-x/30}\left(\cos\left(\frac{x}{5}\right) - 6\sin\left(\frac{x}{5}\right)\right),$$

$$v(x, y) = -\frac{5}{7}e^{x-\frac{2y}{5}} + \frac{5e^{x+y}}{7} + \frac{5}{37}e^{-y/5}\left(\cos\left(x - \frac{y}{5}\right) + 6\sin\left(x - \frac{y}{5}\right)\right) + \frac{1}{37}(-5\cos(x + y) + 7\sin(x + y)).$$

■

Задача 2. *Приведите к каноническому виду и определите тип уравнения:*

$$2u_{xx} + 5u_{yy} + 2u_{zz} - 6u_{xy} - 4u_{xz} + 6u_{yz} - 3u + y - 2z = 0$$

.

Решение. Приведя форму к каноническому виду, имеем:

$$f(x, y, z) = 2\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{y}^2 + 2\mathrm{z}^2 - 6\mathrm{xy} - 4\mathrm{xz} + 6\mathrm{yz} = \left(\frac{\mathrm{x} - \mathrm{z}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{5} * \mathrm{y} - \frac{3}{\sqrt{5}} * (\mathrm{x} - \mathrm{z})\right)^2$$

$$f(x + z, y, z) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 = 2\left(x^2 - 3xy + \frac{9}{4}y^2\right) + \frac{y^2}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{y^2}{2}$$

Откуда получаем, что замена $\begin{cases} \alpha = x + z \\ \beta = 2y - 3z \\ \gamma = z \end{cases}$ приводит уравнение к каноническому виду. Проводя её, получаем $2u_{\gamma\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) + 2u_{\beta\beta}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Следовательно, уравнение имеет параболический тип. ■

Задача 3. *Найти все характеристики уравнения при каждом* $\alpha \in \mathbb{R}$*:* $u_{xx} + 2u_{yy} + 2\alpha u_{yz} + \alpha^2 u_{zz} + u_z + u = 1$.

Решение. Запишем уравнение характеристик в общем виде:

$$\phi_x{}^2 + 2\phi_y{}^2 + 2\alpha\phi_y\phi_z + \alpha^2\phi_z{}^2 = \phi_x{}^2 + \phi_y{}^2 + (\phi_y + \alpha\phi_z)^2 = 0$$

При $\alpha = 0$ $\phi(x, y, z) = f(z)$, иначе $\phi(x, y, z) = c$. Характеристики в первом случае - плоскости z=c. Во втором отсутствуют. ■

Задача 4. *Решите задачу Коши (*$x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$*):* $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u \\ u|_{t=0} = x_1 + x_2x_3 \\ u_t|_{t=0} = x_2 + x_1x_3 \end{cases}$

Решение. Ищем решения в виде, обнуляющем начальные условия:

$u(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2, x_3, t) + (x_1 + x_2x_3) + t(x_2 + x_1x_3)$. Задача Коши для v имеет вид: $\begin{cases} v_{tt} = \Delta v \\ v|_{t=0} = 0 \\ v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

Откуда $v(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, $u(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1 + x_2x_3) + t(x_2 + x_1x_3)$. ■

Контрольная работа №2. Вариант 2.

Задача 1. *При каких* $A \in \mathbb{R}$ $\exists$ *решение* $u(x,t) \in C^2(x \geq 0,\ y \geq 0)$ *задачи:* $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + A, & x > 0,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ (u_x + 2u_t)|_{x=0} = \sin 2t \end{cases}$

Решение. Замена $u = v + \frac{At^2}{2}$ приводит нас к системе: $\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, & x > 0,\ t > 0 \\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0 \\ (v_x + 2v_t)|_{x=0} = -2At + \sin 2t \end{cases}$

1° В области x>t имеем: v=f(x-t)+g(x+t). Учитывая $v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0$ имеем f=-c, g=c, u=f+g=0.
2° В области x<t g определена, по-этому остаётся найти только f. u=f(x-t)+c. Воспользовавшись $(v_x+2v_t)|_{x=0} = -2At + \sin 2t$ находим $v = -\frac{\cos(2(x-t))}{2} - A(x-t)^2 + C + C'$. Для непрерывности вдоль характеристики x=t положим $C + C' = \frac{1}{2}$. Вспоминая что $u = v + \frac{At^2}{2}$ имеем:

$$u = \begin{cases} \dfrac{At^2}{2},\ x \geq t \\ -\dfrac{\cos(2(x-t))}{2} - A(x-t)^2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{At^2}{2},\ x \leq t \end{cases}$$

3° Разрывы 2х производных, если они есть, обязаны лежать на характеристике. Имеем:

$$u_{xx} = \begin{cases} 0,\ x \geq t \\ -2A + 2\cos(2(x-t)),\ x > t \end{cases} \quad u_{tt} = \begin{cases} A,\ x > t \\ -A + 2\cos(2(x-t)),\ x \leq t \end{cases}$$

Таким образом получаем, что при A=1 $u(x,t) \in C^2(x \geq 0,\ y \geq 0)$. ■

Задача 2. *Найти все* $\alpha \in \mathbb{R}$*, что решение задачи удовлетворяет условию* $u = O(e^{-300t})$ *при* $t \to \infty$*:*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \alpha u, & x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin x \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$$

Решение. Сведём задачу к задаче Штурма-Лиувилля.

1° Избавимся от αu: $u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t)$.Тогда для v имеем: $\begin{cases} v_t = u_{xx}, & x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ v|_{t=0} = \sin x \\ v|_{x=0} = v|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$

2° Решаем задачу методом Фурье: ищем решение v(x,t)=X(x)T(t). Имеем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X_k'' - \lambda_k X_k = 0 \\ X_k(0) = X_k(\pi) = 0 \end{cases}, \text{ откуда } X_k = \sin kx,\ \lambda_k = -k^2.$$

4° Задача для T_k: $T_k' - \lambda_k T_k = 0$. Решение $T_k = C_k e^{-k^2 t}$.
5° Имеем $v(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin kx$. Используя $v|_{t=0} = \sin x$ получаем $v(x,t) = e^{-t} \sin x$.
6° $u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t) = e^{\alpha t} e^{-t} \sin x$. Тогда $u = O(e^{-300t}) \Leftrightarrow \alpha \leq -299$. ■

Задача 3. *Решить задачу:* $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + e^{-t} \sin x \sin 2x, & 0 < x, y < \pi,\ t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

Решение. Пусть P - прямоугольник, на котором задана задача. Чтобы решить исходную задачу, решим методом Фурье такую задачу: $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u|_{\partial P} = 0 \end{cases}$

1° Решение, как обычно, ищем в виде $u = \sum T(t) X(x) Y(y)$. Стандартным образом разделяя переменные имеем:

$$\begin{cases} X_k'' - \mu_k X_k = 0 \\ X_k(0) = X_k(\pi) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y_m'' - \nu_m Y_m = 0 \\ Y_m(0) = Y_m(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \mu_k = -k^2 \\ X_k = \sin kx \end{cases} \quad \begin{cases} \nu_m = -m^2 \\ Y_m = \sin ky \end{cases}$$

2° Имеем $\lambda_{k,m} = -k^2 - m^2$, $u_{k,m} = \sin kx \sin my$. Тогда $u = \sum\limits_{k,m=1}^{\infty} T_{k,m}(t) \sin kx \sin my$ и удовлетворяет нашей системе. Тогда $T_{k,m} = 0$ при $(k,m) \neq (1,2)$, то есть $u = T_{1,2}(t) \sin x \sin 2y$. Подставляя в исходную систему, получаем уравнение: $T''_{1,2} + 5T_{1,2} = e^{-t}$. Решая, получаем $T_{1,2} = C_1 \cos(\sqrt{5}t) + C_2 \sin(\sqrt{5}t) + \frac{e^{-t}}{6}$. Используя $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ получаем $C_1 = -\frac{1}{6}$, $C_2 = \frac{1}{5\sqrt{5}}$. Итого $u = (-\frac{1}{6}\cos(\sqrt{5}t) + \frac{1}{5\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t) + \frac{e^{-t}}{6}) \sin x \sin 2y$. ■

Задача 4. *Найти решение краевой задачи:* $\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = -4r^3 \cos 6\varphi, \quad 1 < r < 3, \ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{3} \\ u_\varphi|_{\varphi=0} = u_\varphi|_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = 0 \\ u|_{r=3} = \cos 3\varphi, \ u|_{r=1} = 1 \end{cases}$

Решение. Избавимся от неоднородности в уравнении: $u = v + Cr^3 \cos 6\varphi$. Подставляя, находим $C = \frac{4}{27}$.
1° После замены $u = v + \frac{4}{27} r^3 \cos 6\varphi$ получаем задачу:

$$\begin{cases} (*) \begin{cases} r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\varphi\varphi} = 0 \\ v_\varphi|_{\varphi=0} = v_\varphi|_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = 0 \end{cases} \\ (**) \begin{cases} v|_{r=3} = \cos 3\varphi - 4\cos 6\varphi \\ v|_{r=1} = 1 - \dfrac{4}{27}\cos 6\varphi \end{cases} \end{cases}$$

2° из $(*)$: $\begin{cases} \Phi''_k + \lambda \Phi = 0 \\ \Phi'(0) = \Phi'(\dfrac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$ Решение здесь константа для $\lambda_0 = 0$ и $\Phi_k(\varphi) = \cos 3k\varphi$, $\lambda_k = (3k)^2$.
3° Решая задачу Штурма-Лиувилля для R(r) $(r^2 R''_k + r R'_k - \lambda_k R_k = 0)$, получаем, что $v(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (A_k r^{3k} + B_k r^{-3k}) \cos 3k\varphi$.
4° Из $(**)$ получаем:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln 3 = 0 \\ A_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 3^3 + B_1 3^{-3} = 1 \\ A_1 + B_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 3^6 + B_2 3^{-6} = -4 \\ A_2 + B_2 = -\dfrac{4}{27} \end{cases} \quad \begin{cases} A_k = 0, \ k > 2 \\ B_k = 0, \ k > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ B_0 = -\dfrac{1}{\ln 3} \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{3^3 - 3^{-3}} \\ B_1 = -\dfrac{1}{3^3 - 3^{-3}} \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = -4\dfrac{3^6 - 3^{-3}}{3^{12} - 1} \\ B_2 = -4\dfrac{3^{-3} - 3^{-6}}{1 - 3^{-12}} \end{cases} \quad \begin{cases} A_k = 0, \ k > 2 \\ B_k = 0, \ k > 2 \end{cases}$$

Откуда, учитывая $u = v + \frac{4}{27} r^3 \cos 6\varphi$ имеем $u = 1 - \frac{\ln r}{\ln 3} + \frac{r^3 - r^{-3}}{3^3 - 3^{-3}} \cos 3\varphi - 4(\frac{3^6 - 3^{-3}}{3^{12} - 1} r^6 + \frac{3^{-3} - 3^{-6}}{1 - 3^{-12}} r^{-6} - \frac{1}{27} r^3) \cos 6\varphi$.
■

Задача 5. *Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике:* $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_x|_{x=0} = \sin y, \quad u_x|_{x=2\pi} = \sin 3y \\ u|_{y=0} = \cos 2x, \quad u|_{y=\pi} = \cos 6x \end{cases}$

Решение. Разобьём систему на 2 по противоположным сторонам прямоугольника (u=v+w):
1° $\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v_x|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=2\pi} = 0 \\ v|_{y=0} = \cos 2x, \quad v|_{y=\pi} = \cos 6x \end{cases}$ $v_k = X_k(x) Y_k(y)$, тогда $-\frac{X''_k}{X_k} = \frac{Y''_k}{Y_k} = \lambda_k$, $\begin{cases} X''_k + \lambda X_k = 0 \\ X'(0) = X'(2\pi) = 0 \end{cases}$ Откуда $v(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Y_k(y) \cos \frac{kx}{2}$. Для $k > 0$ $Y_k(y) = C_k e^{\frac{ky}{2}} + D_k e^{-\frac{ky}{2}}$. Из $v|_{y=0} = \cos 2x$, $v|_{y=\pi} = \cos 6x$ получаем:
$\begin{cases} C_4 = \dfrac{1}{1 - e^{4\pi}} \\ D_4 = \dfrac{1}{1 - e^{-4\pi}} \end{cases}$ $\begin{cases} C_{12} = \dfrac{1}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}} \\ D_{12} = -\dfrac{1}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}} \end{cases}$ Окончательно $v = (\frac{e^{2y}}{1 - e^{4\pi}} + \frac{e^{-2y}}{1 - e^{-4\pi}}) \cos 2x + \frac{e^{6y} - e^{-6y}}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}} \cos 6x$.

2° Аналогично для 2ой системы: $\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w_x|_{x=0} = \sin y, \quad w_x|_{x=2\pi} = \sin 3y \\ w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$
$w = \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(x) \sin ky$. Коэффициенты находятся из краевых условий. Итого $w = (\frac{e^x}{1 - e^{4\pi}} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-4\pi}}) \sin y + \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{3(e^{6\pi} - e^{-6\pi})} \sin 3y$.
3° $u = v + w = (\frac{e^{2y}}{1 - e^{4\pi}} + \frac{e^{-2y}}{1 - e^{-4\pi}}) \cos 2x + \frac{e^{6y} - e^{-6y}}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}} \cos 6x + (\frac{e^x}{1 - e^{4\pi}} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-4\pi}}) \sin y + \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{3(e^{6\pi} - e^{-6\pi})} \sin 3y$. ■

Проверочная работа от Т.А. (одна задача на 30 минут, здесь оба варианта).

Задача 1. *(Владимиров 19.35) Доказать, что для всех функций $u \in C_0^1(|x| < 1)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 + u\,dx \geq -\frac{\pi}{45}$$

. Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

Решение. Рассмотрим функционал $E(u) = \int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 + u\,dx$.

$I(t) = E(u+tg) = \int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 + 2t(\nabla u, \nabla g) + t^2|\nabla g|^2 + u + tg\,dx$. $\left(\frac{d}{dt}I(t)\right)|_{t=0} = \int\limits_{|x|<1} +2(\nabla u, \nabla g) + g\,dx = \int\limits_{|x|<1} (-2\Delta u + 1)g\,dx$. Получаем вариационную задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{1}{2} \\ u|_{|x|=1} = 0 \end{cases}$$

Ищем решение как функцию от радиуса: $u = R(r)$. Тогда

$$\begin{cases} \Delta u = R''(r) + \dfrac{1}{r}R'(r) = \dfrac{1}{2} \\ u|_{|x|=1} = R(1) = 0 \end{cases}$$

Общее решение первого уравнения: $\frac{C}{r} + d + \frac{r^2}{12}$. u - гармоническая в шаре с центром в нуле, откуда $C = 0$; $u(1) = 0$, откуда $d = -\frac{1}{12}$. Имеем $u = \frac{r^2-1}{12}$, на ней достигается минимум функционала. Теперь проверим неравенство: $\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 + u\,dx = \int\limits_{|x|<1} \frac{r^2}{36} + \frac{r^2-1}{12}\,dx = \frac{1}{9}\int\limits_{|x|<1} r^2\,dx - \frac{4\pi}{3*12} = \frac{1}{9}\int\limits_0^1 4\pi r^4 - \frac{5\pi}{45} = \frac{4\pi}{45} - \frac{5\pi}{45} = -\frac{\pi}{45}$, откуда неравенство верно, причём равенство достигается на найденной функции u. ∎

Задача 2. *(Владимиров 19.29) Пусть Q - куб $\{0<x_1<1; 0<x_2<1; 0<x_3<1\}$. Доказать, что для любой функции $f \in H_0^1(Q)$ справедливо неравенство:*

$$\|f\|^2_{L_2} \leq \frac{1}{3\pi^2}\,\|\nabla f\|^2_{L_2}$$

Решение. Рассмотрим функционал $E(f) = \int\limits_Q f^2 - \frac{1}{3\pi^2}|\nabla f|^2\,dx$.

$I(t) = E(f+tg) = \int\limits_Q f^2 + 2tfg + t^2g^2 - \frac{1}{3\pi^2}\left(|\nabla f|^2 + 2t(\nabla f, \nabla g) + t^2|\nabla g|^2\right)\,dx$. $\left(\frac{d}{dt}I(t)\right)|_{t=0} = \int\limits_Q 2fg - \frac{2}{3\pi^2}(\nabla f, \nabla g)\,dx = \int\limits_Q 2(f + \frac{1}{3\pi^2}\Delta f)g\,dx$. Получаем вариационную задачу:

$$\begin{cases} -\Delta f = 3\pi^2 f \\ f|_{\partial Q} = 0 \end{cases}$$

Ищем решение в виде разложения по собственным функциям: $f = \sum\limits_{k,l,m=1}^{\infty} A_{ijk}\sin\pi kx_1 \sin\pi lx_2 \sin\pi mx_3$. Легко видеть, что решением является $f = a\sin\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3$. На таких функция достигается минимум нашего функционала. Проверим выполнение неравенства $\int\limits_Q f^2 - \frac{1}{3\pi^2}|\nabla f|^2\,dx \leq 0$:

$\int\limits_Q f^2\,dx = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (\sin\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3)^2\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \frac{1}{8}$,

$\int\limits_Q \frac{1}{3\pi^2}|\nabla f|^2\,dx = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \pi^2\left(\cos\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3 + \ldots\right)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 3\pi^2\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \cos\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \frac{3\pi^2}{8}$,

$\frac{1}{8} - \frac{1}{3\pi^2}\frac{3\pi^2}{8} = 0$, откуда неравенство верно и достигается на функциях вида $a\sin\pi x_1 \sin\pi x_2 \sin\pi x_3$. ∎

Контрольная работа №3. Вариант 1.

Задача 1. *На плоскости задан квадрат с вершинами в точках A(0,1), B(1,0), C(0,-1), D(-1,0). Пусть $\chi(x,y)$ - характеристическая функция этого квадрата. Найти $\chi_{xx} - \chi_{yy}$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$.*

Решение. $(\chi_{xx} - \chi_{yy}, \varphi) = (\chi, \varphi_{xx} - \varphi_{yy}) = \int\limits_{ABCD} \varphi_{xx} - \varphi_{yy}\, dS$. Сделаем замену: $\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} \varphi_{xx} = \psi_{\xi\xi} + 2\psi_{\xi\eta} + \psi_{\eta\eta} \\ \varphi_{yy} = \psi_{\xi\xi} - 2\psi_{\xi\eta} + \psi_{\eta\eta} \end{cases}$. Кроме того, когда сделаем замену в интеграле, появится якобиан, равный $\frac{1}{2}$.
Квадрат ABCD перейдёт в квадрат A'B'C'D' с вершинами в точках $(\pm 1, \pm 1)$.
Имеем $\int\limits_{ABCD} \varphi_{xx} - \varphi_{yy}\, dS = \int\limits_{A'B'C'D'} 4\psi_{\xi\eta}\frac{1}{2}\, dS = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} 2\psi_{\xi\eta}(\xi,\eta)\, d\xi\, db = 2\int\limits_{-1}^{1} \psi_{\xi\eta}(\xi,1) - \psi_{\xi\eta}(\xi,-1)\, d\xi = 2\psi(1,1) - 2\psi(-1,1) - 2\psi(1,-1) + 2\psi(-1,-1) = 2\varphi(1,0) - 2\varphi(0,-1) - 2\varphi(0,1) + 2\varphi(-1,0)$, откуда окончательно получаем: $\chi_{xx} - \chi_{yy} = 2\delta(x-1,y) - 2\delta(x,y+1) - 2\delta(x,y-1) + 2\delta(x+1,y)$. ■

Задача 2. *Докажите, что $E(r) = -\frac{\cos kr}{4\pi r}$, $r = |x - x_0|$, является фундаментальным решением оператора $\Delta + k^2$ $(x \in \mathbb{R}^3)$.*

Решение. $\Delta\mathscr{E} = e^{\pm ikr}\Delta\frac{1}{4\pi r} + 2\nabla(e^{\pm ikr})\nabla(-\frac{1}{4\pi r}) + (-\frac{1}{4\pi r})\Delta e^{\pm ikr}$. Первое слагаемое $e^{\pm ikr}\Delta\frac{1}{4\pi r}$ даёт δ-функцию, так как $-\frac{1}{4\pi r}$ фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Остаётся проверить, что
$2\nabla(e^{\pm ikr})\nabla(-\frac{1}{4\pi r}) - \frac{1}{4\pi r}\Delta e^{\pm ikr} - k^2\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} = 0$ (используя, например, $\Delta V(r) = V_{rr} + \frac{2}{r}V_r$). ■

Задача 3. *Дана гармоническая в кольце $Q = 1 < x^2 + y^2 < 2$ функция u(x,y), удовлетворяющая условиям: u(x,y)=x при $x^2 + y^2 = 2$, $\partial_\nu u + (1 - y^2)u = 0$ при $x^2 + y^2 = 1$. (ν - внешняя нормаль). Не находя решения, найдите $\max\limits_{\overline{Q}} |u(x,y)|$.*

Решение. Гармоническая функция u, очевидно, не константа, следовательно, по принципу экстремума её модуль не может принимать максимальное значение внутри области. Исследуем её на границе. Условие переписывается так: $\partial_\nu u + x^2 u = 0$. По лемме о нормальной производной $\partial_\nu u > 0$ в точке максимума и $\partial_\nu u < 0$ в точке минимума; экстремум не может достигаться при x=0. Таким образом, из $\partial_\nu u = -x^2 u$ заключаем, что в точке максимума $u < 0$, а в точке минимума $u > 0$, а такой функции не существует. Противоречие означает, что u принимает максимум на $x^2 + y^2 = 2$ равный, очевидно $\sqrt{2}$ (так как там u(x,y)=x). ■

Задача 4. *Пусть u(x,t) - решение задачи Коши:* $\begin{cases} u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin(x_1)\sin(x_2)\sin(x_3)I_\Pi = \varphi,\ \Pi = [0,\pi]^3 \end{cases}$
(под I_Π понимается индикатор Π). Найти $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\, dx$.

Решение. Решение задачи Коши уравнения теплопроводности представимо в виде:
$u(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy$. Тогда $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\, dx = \lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3}\varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy\, dx$. Решение от Т.А.:
$\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3}\varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy\, dx = \lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dx\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\eta^2}}{\pi^{3/2}}\, d\eta\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(y)\, dy = 8$.
(другое решение) Замена: $\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta$, имеем $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\, dx = \lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(x + 2\eta\sqrt{t})e^{-|\eta|}\, d\eta\, dx \xrightarrow{?} \int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(x)\, dx = 8$.
Про последний предельный переход: Сведём к одномерной задаче (впрочем, дальнейшие рассуждения можно провести и сразу для исходной задачи): ищем решение в виде $u(\overline{x},t) = u_1(x_1,t)u_2(x_2,t)u_3(x_3,t)$. Подставляя, получаем 3 задачи : $\begin{cases} (u_i)_t = \Delta u_i, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ (u_i)|_{t=0} = \sin(x_i)I_{[0,\pi]} \end{cases}$ Для любой их них получаем по аналогичным соображениям $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x + 2\eta\sqrt{t})e^{-|\eta|}\, d\eta\, dx$. Тогда понятно, что чем больше t, тем меньше отрезок интегрирования по η $x + 2\eta\sqrt{t} \notin [0,\pi] \Rightarrow \varphi(x + 2\eta\sqrt{t}) = 0)$, тем ближе $e^{|\eta|}$ к 1, а соответствующий интеграл - к интегралу от синуса. ■

Задача 5. *Постройте функцию Грина задачи Дирихле для полукруга $K = \{x : |x| < 1,\ x_2 > 0\}$ на плоскости $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.*

Решение. Введём естественным образом комплексные координаты: $(x_1, x_2) \to x_1 + ix_2 = z$. Конформное отображение $w(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ переводит K на полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. На ней функция Грина известна: $G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z - \overline{z_0}|}{|z - z_0|}$, тогда функция Грина для полукруга имеет вид $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|w(z) - \overline{w(z_0)}|}{|w(z) - w(z_0)|}$, который элементарными преобразованиями приводится к виду $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z - \overline{z_0}||1 - z\overline{z_0}|}{|z - z_0||1 - zz_0|}$. ■