МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико математический факультет

Курс лекций по уравнения с частными производными

Лектор — Шапошникова Татьяна Ардолионовна

III курс, 6 семестр, поток математиков

Москва, 2020 г.

Содержание

1 Гармонические функции, их свойства **4**
- 1.1 Формулы Грина . . . 4
- 1.2 Фундаментальное решение оператора Лапласа . . . 4
- 1.3 Представление в виде суммы трёх потенциалов . . . 5
- 1.4 Теоремы о среднем для гармонических функций . . . 6
- 1.5 Принцип максимума . . . 7

2 Лекция 16. **9**
- 2.1 Лемма о знаке нормальной производной гармонической функции в точке максимума. . . . 9
- 2.2 Основные краевые задачи для уравнения Лапласа и единственность решения этих задач. . . . 9
  - 2.2.1 Задача Дирихле. . . . 9
  - 2.2.2 Задача Неймана. . . . 9
- 2.3 Оценки производных гармонической функции. . . . 9
- 2.4 Аналитичность гармонических функций. . . . 10

3 Лекция 17. **11**
- 3.1 Функция Грина. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. . . . 11

4 Лекция 18. **13**
- 4.1 Интеграл Пуассона. . . . 13
- 4.2 Неравенство Харнака. . . . 14
- 4.3 Обратная теорема о среднем. . . . 14
- 4.4 Теорема об устранимой особенности. . . . 14

5 Лекция 19 **15**
- 5.1 Теория потенциала. . . . 15

6 Лекция 20. **18**
- 6.1 Обьемный потенциал. . . . 18
- 6.2 Потенциал двойного слоя. . . . 19

7 Лекция 21 **21**
- 7.1 Теорема о скачке потенциала двойного слоя. . . . 23

8 Лекция 22. **24**
- 8.1 Потенциал простого слоя . . . 24

9 Лекция 23. **26**
- 9.1 Постановка краевых задач . . . 27

10 Лекция 24. **28**
- 10.1 Решение внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана в виде потенциала. . . . 28
  - 10.1.1 Теоремы Фредгольма. . . . 28
- 10.2 Решение внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана в виде потенциала. . . . 29

11 Лекция 25. **32**
- 11.1 Вариационный метод решения задачи Дирихле. . . . 33

12 Лекция 26 **34**
- 12.1 Метод Ритца . . . 34
- 12.2 Уравнение теплопроводности . . . 35

13 Лекция 27. **37**
- 13.1 Принципы максимума . . . 37
- 13.2 Начально-краевые задачи . . . 38
- 13.3 Теоремы единственности . . . 39

Предисловие

Документ перерабатывается В. В. Харламовым под курс лекций 2020 года. **Важно**, что дальнейший текст не является в полной мере конспектом, но в то же время есть хорошее приближение материала лекций.

Так как DMVN не подаёт признаков жизни, то огромная просьба писать на моюпочту при обнаружении ошибок. Самая актуальная версия конспекта находится на Github. В 2020 году Bitbucket прекращает поддержку репозиториев с системой контроля версий Mercurial, поэтому я скопировал репозиторий на Github.

В.Х.

Последняя компиляция: `30 мая 2020 г. г.`
Обновления документа на сайтах `http://dmvn.mexmat.net`,
`http://dmvn.mexmat.ru`.
LaTeX исходники
`https://bitbucket.org/dmvn/mexmat.lectures`
Об опечатках и неточностях пишите на `dmvn@mccme.ru`.

1 Гармонические функции, их свойства

Определение. Пусть $u \in C^2(\Omega),\ \Omega \subset (R)^n$ - область. Функция u называется *гармонической* в Ω, если $\forall x \in \Omega\ \Delta u = 0$.

Примеры

1. $u = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$ - гармоническая в $\mathbb{R}^n$.
2. $n = 3:\ u = \frac{1}{r},\ r = |x - x_0|$ - гармоническая при $x \neq x_0$.
3. $n = 2:\ \ln r,\ r^{\pm m}\cos m\varphi,\ r^{\pm m}\sin m\varphi$ - гармонические.

Пусть теперь $u, v \in C^2(\overline{\Omega}),\ \Omega$ ограниченная область в $\mathbb{R}^n,\ \partial\Omega \in C^1$ тогда вспомним, что

$$\int\limits_\Omega u v_{x_j x_j} dx = \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j}\nu_j dS$$

$$\int\limits_\Omega div A dx = \int\limits_{\partial\Omega} (A, \nu) dS:\ A = (0, \ldots, u\frac{\partial v}{\partial x_j}, \ldots, 0)$$

1.1 Формулы Грина

Утверждение 1.1 (Первая формула Грина).

$$\int\limits_\Omega u\Delta v dx = -\int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v) dx + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} dS, \tag{1}$$

где ν — единичная внешняя нормаль к границе.

Утверждение 1.2 (Вторая формула Грина).

$$\int\limits_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS. \tag{2}$$

1.2 Фундаментальное решение оператора Лапласа

Рассмотрим гармонические функции, зависящие только от расстояния до точки, т.е гармонические функции вида:

$$v(x) = v(|x - x_0|),\ x \neq x_0,\ \Delta v = 0.$$

Найдём такие гармонические функции v, что для любых финитных функций ϕ в области Ω имеет есто тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(|x - x_0|)\Delta\varphi(x) dx = \varphi(x_0). \tag{3}$$

Положим $r := |x - x_0|$. Тогда оператор Лапласа переписывается как

$$\Delta v(r) = v'' + \frac{n-1}{2}v'.$$

Учитывая гармоничность функции v, получаем

$$v(|x - x_0|) = C_1|x - x_0|^{2-n} + C_2,\ n \geq 3, \qquad v(|x - x_0|) = C_1 \ln|x - x_0| + C_2,\ n = 2. \tag{4}$$

Рассмотрим левую часть равенства (3). Для $n \geq 3$ в силу гармоничности v она равна

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{T}_\varepsilon^{x_0}} v(|x - x_0|)\Delta\varphi dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{T}_\varepsilon^{x_0}} (v(|x - x_0|)\Delta\varphi - \varphi\Delta v(|x - x_0|)) dx. \tag{5}$$

К правой части выражения (5) применим вторую формулу Грина (2), тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{T}_\varepsilon^{x_0}} v(|x - x_0|)\Delta\varphi dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial\Omega \cup S_\varepsilon^{x_0}} (v(|x - x_0|)\partial_\nu\varphi - \varphi(x)\partial_\nu v(|x - x_0|))\, dS. \tag{6}$$

В силу финитности φ интеграл по $\partial\Omega$ равен нулю. Положим $K := \max_\Omega \partial_\nu\varphi$, ω_n — площадь поверхности n-мерного шара. Заметим, что имеет место оценка

$$\left|\int_{S_\varepsilon^{x_0}} |x-x_0|^{2-n}\partial_\nu\varphi dS\right| \le \varepsilon^{2-n}\omega_n K\varepsilon^{n-1} = \omega_n K\varepsilon.$$

Следовательно, в силу представления (4) для v получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}} v(|x-x_0|)\partial_\nu\varphi dS = 0.$$

Далее заметим, что

$$C_1\frac{\partial}{\partial\nu}r^{2-n} = -C_1\frac{\partial}{\partial r}r^{2-n} = -(2-n)C_1 r^{1-n}.$$

Подставляя в выражение (6) полученные результаты, приходим к

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{T}_\varepsilon^{x_0}} v(|x-x_0|)\Delta\varphi dx = -C_1(n-2)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon^{x_0}}\varphi(x)dS = -C_1(n-2)\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(x_\epsilon)\omega_n\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{1-n} =$$
$$= -C_1(n-2)\omega_n\varphi(x_0).$$

Учитывая представление (4), получаем

$$C_1 = \frac{-1}{\omega_n(n-2)},\ n\geqslant 3, \qquad C_1 = \frac{1}{2\pi},\ n=2.$$

Определение. *Фундаментальное решение оператора Лапласа.*

$$E(x,x_0) = \begin{cases} -\frac{|x-x_0|^{2-n}}{\omega_n(n-2)},\ n\geqslant 3\\ \frac{1}{2\pi}\ln(x-x_0),\ n=2\end{cases}$$

Основное характерное свойство фундаментального решения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(x,x_0)\Delta\varphi(x)dx = \varphi(x_0),\ \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

На языке обобщенных функций это выглядит так

$$(\Delta E(x,x_0),\varphi(x)) = \varphi(x_0) = (\delta(x-x_0),\varphi), \qquad \Delta E(x,x_0) = \delta(x-x_0).$$

1.3 Представление в виде суммы трёх потенциалов

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ – липшецева, $u\in C^2(\overline{\Omega})$, $x_0\in\Omega$. Положим $\Omega_\varepsilon := \Omega\setminus\overline{T}_\varepsilon^{x_0}$. В силу соотношения (4) справедливо равенство

$$\Delta_x E(x,x_0) = 0,\ x\in\Omega_\varepsilon. \tag{7}$$

По второй формуле Грина 1.2

$$\int_{\Omega_\varepsilon}(u\Delta E - \Delta u E)\,dx = \int_{\partial\Omega}(u\partial_\nu E - \partial_\nu u E)\,dS + \int_{\partial T_\varepsilon^{x_0}}(u\partial_\nu E - \partial_\nu u E)\,dS. \tag{8}$$

В равенстве (8) устремим ε к нулю, в силу тождества (7) получим

$$-\int_\Omega \Delta u E dx = \int_{\partial\Omega}(u\partial_\nu E - \partial_\nu u E)dS + \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_{\partial T_\varepsilon^{x_0}} u\partial_\nu E dS = \int_{\partial\Omega}(u\partial_\nu E - \partial_\nu u E)dS - u(x_0).$$

Таким образом, получаем, что

$$u(x_0) = \int\limits_\Omega E(x,x_0)\Delta u dx + \int\limits_{\partial\Omega} u\partial_\nu E(x,x_0)dS - \int\limits_{\partial\Omega} E(x,x_0)\partial_\nu u dS. \tag{9}$$

Каждое слагаемое в полученном представлении имеет своё название.

Определение. Выражение

$$P_1(x_0) := \int_\Omega E(x, x_0)\Delta u dx$$

называется *объёмным потенциалом.*

Выражение

$$P_2(x_0) := \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu E(x, x_0) dS$$

называется *потенциалом двойного слоя.*

Выражение

$$P_3(x_0) := \int_{\partial\Omega} E(x, x_0)\partial_\nu u dS$$

называется *потенциалом простого слоя.*

1.4 Теоремы о среднем для гармонических функций

Теорема 1.3 (О среднем по сфере). *Пусть $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T}_R^{x_0})$, предположим, что $\Delta u = 0$ в $T_R^{x_0}$ тогда*

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R^{x_0}|}\int_{S_R^{x_0}} u(x) dS$$

□ Рассмотрим $T_\rho^{x_0}$, $\rho < R$. Тогда в силу представления в виде суммы трёх потенциалов (9), где один из них равен нулю в силу гармоничности, имеем

$$u(x_0) = \int_{S_\rho^{x_0}} u\partial_\nu E(x, x_0)dS - \int_{S_\rho^{x_0}} E(x, x_0)\partial_\nu u dS. = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(x) dS$$

Заметим, что по формуле Гаусса - Остроградского

$$\int_{S_\rho^{x_0}} E(x, x_0)\partial_\nu u dS = \int_{S_\rho^{x_0}} \frac{\rho^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\partial_\nu u dS = \frac{\rho^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\int_{T_\rho^{x_0}} \operatorname{div} \nabla u dx = 0.$$

Из того, что

$$\partial_\nu E(x, x_0) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} = \frac{1}{|S_\rho^{x_0}|},$$

следует

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_\rho^{x_0}|}\int_{S_\rho^{x_0}} u dS.$$

Переходя к пределу при $\rho \to R$, получаем искомое. ■

Теорема 1.4 (О среднем по шару). *Пусть $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T}_R^{x_0})$. Предположим, что $\Delta u = 0$ в $T_R^{x_0}$. Тогда*

$$u(x_0) = \frac{1}{|T_R^{x_0}|}\int_{T_R^{x_0}} u(x) dS.$$

□ Из теоремы о среднем по сфере 1.3 следует, что для $\rho < R$

$$\omega_n \rho^{n-1} u(x_0) = \int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(x) dS. \tag{10}$$

В силу теоремы Фубини получаем

$$|T_R^{x_0}| u(x_0) = \frac{\omega_n}{n} R^n u(x_0) = \int_0^R \omega_n \rho^{n-1} u(x_0) u(x_0) d\rho = \int_0^R \int\limits_{S_\rho^{x_0}} u(x) dS d\rho = \int_{T_R^{x_0}} u(x) dS.$$

■

Теорема 1.5. *Пусть $\varphi \in C[0, R]$. Положим*

$$A_\varphi := \int_0^R \varphi(|x - x_0|) dx.$$

Прдположим, что A_φ отлично от нуля. Пусть $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T}_R^{x_0})$. Тогда

$$u(x_0) = \frac{1}{A_\varphi} \int_{T_R^{x_0}} u(x)\varphi(|x - x_0|)dx.$$

□ Умножим тождество (10) обоих сторон на $\varphi(\rho) = \varphi(|x - x_0|)$ и проинтегрируем по ρ.

$$u(x_0) \int_0^R \omega_n \rho^{n-1} \varphi(\rho) d\rho = \int_0^R \int_{S_\rho^{x_0}} \varphi(|x - x_0|) dS dx = \int_{T_R^{x_0}} \varphi(|x - x_0|) dS dx.$$

■

Теорема 1.6 (О бесконечной дифференцируемости). *Пусть Ω область в $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ гармоническая в Ω. Тогда $u \in C^\infty(\Omega)$.*

□ Пусть $x \in \Omega$, $h > 0$, $\overline{T}_h^x \subset \Omega$, ω_h – ядро усреднения. Рассмотрим

$$u_h(x) = \int_{\mathbb{R}_y^n} \omega_h(|x - y|) u(y) dy = \int_{|x-y|<h} \omega_h(|x - y|) u(y) dy = \int_0^h \omega_h(\rho) \int_{S_\rho^x} u(y) dS d\rho.$$

В силу теоремы о среднем $\int_{S_\rho^x} u(y) dS = u(x)|S_\rho^x|$, поэтому

$$u_h(x) = u(x) \int_0^h \omega_h(\rho)|S_\rho^x| d\rho = u(x) \int_0^h \int_{S_\rho^x} \omega_h(|x - y|) dS_y d\rho$$

В силу свойств ядра усреднения $\int_0^h \int_{S_\rho^x} \omega_h(|x - y|) dS_y d\rho = 1$, откуда для достаточно малых h имеет место тождество $u_h(x) = u(x)$. Так как функция $u_h(x)$ является бесконечно дифференцируемой. ■

1.5 Принцип максимума

Теорема 1.7 (Слабый принцип максимума). *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u \geq 0$ в Ω. Тогда справедливо тождество*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

□ Предположим сначала, что $\Delta u > 0$ в Ω. Так как функция u непрерывна в $\overline{\Omega}$, то её максимум достигается в какой-то точке x_0.

Пусть $x_0 \in \Omega$. Тогда матрица Якоби J_u является нулевой в этой точке, и квадратичная форма матрицы вторых частных производных неположительна, то есть

$$\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i x_j} u(x_0) \xi_i \xi_j \leq 0.$$

В частности, $\partial_{x_i x_i} u(x_0) \leq 0$, откуда $\Delta u(x_0) \leq 0$. Противоречие с предположением, что $\Delta u > 0$ в Ω. Поэтому в этом случае максимум достигается в точке x_0, лежащей на $\partial\Omega$.

Рассмотрим общий случай, когда $\Delta u \geq 0$. Введём новую функцию

$$v_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon l(x) = u(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Тогда

$$\Delta v_\varepsilon = \Delta u + n\varepsilon \Delta x_i^2 = \Delta u + 2n\varepsilon > 0.$$

Так как l является непрерывной функцией на компакте $\overline{\Omega}$, то её значения ограничены по модулю какой-то константой K. Тогда

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} v_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + nK\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем искомое. ■

Теорема 1.8 (Строгий принцип максимума). *Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω – ограниченная область с гладкой границей. Предположим, что $\Delta u = 0$ в Ω. Положим*

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) := M, \qquad \min_{\overline{\Omega}} u(x) := m.$$

Тогда, если для $x_0 \in \Omega$ справедливо тождество $u(x_0) = M$ $(u(x_0) = m)$, то $u(x) \equiv \text{const}$.

$\square$ Рассмотрим случай, когда в некоторой точке $x_0 \in \Omega$ достигается значение M функции u. Положим

$$L := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}.$$

Докажем, что множество L является открыто-замкнутым подмножеством Ω. Оно непусто, потому что $x_0 \in L$. Замкнутость следует из непрерывности u.

Докажем открытость. От противного, пусть существует $x_1 \in L$ такой, что любая его окрестность в Ω содержит точку не из L. Выберем такую окрестность $T_{\varepsilon_1}^{x_1}$, что $\overline{T}_{\varepsilon_1}^{x_1} \subset \Omega$. Тогда существует $x_2 \in T_{\varepsilon_1}^{x_1}$ такой, что $u(x_2) < M$. В силу непрерывности функции u существует окрестность $T_{\varepsilon_2}^{x_2}$, $\overline{T}_{\varepsilon_2}^{x_2} \subset T_{\varepsilon_1}^{x_1}$ точки x_2 такая, что для любого $x \in T_{\varepsilon_2}^{x_2}$ справедливо неравенство $u(x) < M - \delta$. Тогда в силу теоремы о среднем по шару 1.4 имеет место оценка

$$u(x_1) = \frac{1}{|T_{\varepsilon_1}^{x_1}|}\int_{T_{\varepsilon_1}^{x_1}} u(x)dx = \frac{1}{|T_{\varepsilon_1}^{x_1}|}\left(\int_{T_{\varepsilon_1}^{x_1}\setminus \overline{T}_{\varepsilon_2}^{x_2}} u(x)dx + \int_{T_{\varepsilon_2}^{x_2}} u(x)dx\right) \leq$$
$$\leq \frac{M(|T_{\varepsilon_1}^{x_1}| - |T_{\varepsilon_2}^{x_2}|) + (M-\delta)|T_{\varepsilon_2}^{x_2}|}{|T_{\varepsilon_1}^{x_1}|} = M - \delta\frac{|T_{\varepsilon_2}^{x_2}|}{|T_{\varepsilon_1}^{x_1}|} < M.$$

Но так как $x_1 \in L$, то $u(x_1) = M$. Противоречие с не открытостью L. По теореме об открыто-замкнутом подмножестве области $L = \Omega$, то есть $u \equiv M$. Для рассмотрения минимума достаточно рассмотреть $v := -u$. $\blacksquare$

Следствие 1.1. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u \leq 0$ в Ω. Тогда справедливо тождество*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

$\square$ Применяем слабый принцип максимума 1.3 для $v := -u$. $\blacksquare$

Следствие 1.2. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u \equiv 0$ в Ω. Тогда справедливы тождества*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \qquad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u, \qquad \max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

$\square$ Применяем слабый принцип максимума 1.3 и следствие 1.1. $\blacksquare$

Теорема 1.9 (лемма Вейля). *Пусть $u \in L^p(\Omega)$, где $p \geq 1$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, и для любой финитной φ на Ω справедливо тождество*

$$\int_\Omega u\Delta\varphi dx = 0.$$

Тогда функция u является гармонической.

Теорема 5 (О знаке нормальной производной гармонической функции в точке минимума(максимума)).
Пусть $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T}_R^{x_0})$, предположим, что $\Delta u = 0$ в $T_R^{x_0}$ $u \neq const$ в $T_R^{x_0}$
Также предположим, что в точке $x' \in S_R^{x_0}$, $\min\limits_{\overline{T}_R^{x_0}} u(x) = u(x')$

Тогда, если существует нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x')$, ν - внешняя единичная нормаль к границе в точке x', то

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') < 0$$

2 Лекция 16.

2.1 Лемма о знаке нормальной производной гармонической функции в точке максимума.

Пусть $u(x) \neq const$ - гармоническая в Ω, $x_0 \in \partial\Omega$ - точка максимума $u(x)$, $\exists B_\rho^{x'} \subset \Omega : S_\rho^{x'} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$, $\exists \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = lim_{s \longrightarrow +0} \frac{u(x_0) - u(x_0 - s\nu)}{s}$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$.
Доказательство.
Можно считать, что $u(x_0) = 0, u(x) < 0$ в Ω. Вспомним следствие принципа максимума: если $\Delta u = \Delta v = 0$ в Ω, $u(x) \leq v(x)$ на $\partial\Omega$, то $u(x) \leq v(x)$ в Ω.
Рассмотрим $w(x) = -(|x - x'|^{2-n} - \rho^{2-n})$. При $n \geq 3$ $w(x)$ будет гармонической в $\mathbb{R}^n \setminus \{x'\}$. Рассмотрим шаровой слой $K = B_\rho^{x'} \setminus \overline{B}_{\rho/2}^{x'}$ и функции $u(x), \varepsilon w(x)$ на K.
Внешняя граница: $|x - x'| = \rho$, и на ней $w(x) = 0, u(x) \leq 0$.
Внутренняя граница: $|x - x'| = \rho/2$, и на ней $u(x) < -c < 0, w(x) = -(\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2-n} - \rho^{2-n}) = -\frac{2^{n-2}-1}{\rho^{n-2}}$.
$\exists \varepsilon > 0 : \varepsilon w(x) \geq u(x)$ на ∂K, $\varepsilon = c\frac{\rho^{n-2}}{2^{n-2}-1}$. Значит, $\varepsilon w(x) \geq u(x)$в K.
$\varepsilon w(x_0) - \varepsilon w(x_0 - s\nu) \leq u(x_0) - u(x_0 - s\nu) \Rightarrow 0 < \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \leq \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$
Ч.т.д.
Примечание. В случае $n = 2$ достаточно рассмотреть функцию $w(x) = \ln|x - x_0| - \ln\rho$.

2.2 Основные краевые задачи для уравнения Лапласа и единственность решения этих задач.

2.2.1 Задача Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в ограниченной области } \Omega, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ \hfill u|_{\partial\Omega} = \varphi \quad \varphi \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Решение задачи Дирихле единственно. Если мы рассмотрим $w(x)$ - разность двух решений, то имеем $\Delta w = 0, w|_{\partial\Omega} = 0$, тогда по принципу максимума/минимума $w \equiv 0$.

2.2.2 Задача Неймана.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в ограниченной области } \Omega, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \\ \hfill \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \psi \quad \psi \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Условие разрешимости: $\int_{\partial\Omega} \psi ds = 0$.
Решение задачи Неймана определено с точностью до константы. Если мы рассмотрим $w(x)$ - разность двух решений, то имеем $\Delta w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$, тогда по лемме о нормальной производной $w = const$.

2.3 Оценки производных гармонической функции.

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x-x_0| \leq R} u(x) dx$$

$u(x)$ - гармоническая $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k}$ - гармоническая.

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0)\right| = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x-x_0| \leq R} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x-x_0| \leq R} u \cos(\nu, x) ds$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0)\right| \leq \frac{\sigma_n R^{n-1}}{\omega_n R^n} max_{|x-x_0=R|}|u|$$

,где σ_n - площадь единичной сферы, ω_n - объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0)\right| \leq \frac{n}{R} max_{|x-x_0=R|}|u|$$

Пусть $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_0$ - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $dist(\partial\Omega_1, \partial\Omega_0) \geq d > 0$. Пусть u - гармоническая в Ω_0, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Тогда

$$\forall x \in \Omega_1 \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0)\right| \leq \frac{n}{d} max_{\overline{\Omega}_0}|u|$$

Аналогично (методом математической индукции) доказывается неравенство

$$|\mathcal{D}^\alpha u(x)| \leq \left(\frac{nm}{\sigma}\right)^m max_{\overline{\Omega}_0}|u|$$

, где $x \in \Omega_0$, $dist(x, \partial\Omega_0) = \sigma > 0$. Действительно, пусть оценка доказана для всех $\alpha : |\alpha| \leq k-1$. Возьмем два шара $B^x_{\sigma'}$ и $B^x_{\sigma'/k}$, где σ' - любое положительное число, меньшее σ. По предположению индукции для любой точки ξ из шара $B^x_{\sigma'/k}$ и любого β, $|\beta| = k-1$, имеет место неравенство

$$|\mathcal{D}^\beta u(\xi)| \leq \left(\frac{n(k-1)}{\sigma' - \sigma'/k}\right)^{k-1} max_{\overline{\Omega}_0}|u| = \left(\frac{nk}{\sigma'}\right)^{k-1} max_{\overline{\Omega}_0}|u|$$

Таким образом, для любого β, $|\beta| = k-1$, гармоническая функция $|\mathcal{D}^\beta u(\xi)|$ ограничена в шаре $B^x_{\sigma'/k}$ постоянной $\left(\frac{nk}{\sigma'}\right)^{k-1} max_{\overline{\Omega}_0}|u|$. Тогда для первых производных этой функции по уже доказанному имеем

$$|\mathcal{D}^\beta u(\xi)_{\xi_l}| \leq \left(\frac{nk}{\sigma'}\right)^k max_{\overline{\Omega}_0}|u|$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\sigma' \to \sigma - 0$, получаем требуемое неравенство.
Ч.т.д.

2.4 Аналитичность гармонических функций.

Теорема. Гармоническая в области Ω функция $u(x)$ является аналитической в Ω.

$$u(x) = \sum_{|\alpha|<m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\tilde{x})}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

, где $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $(x-x_0)^\alpha = (x_1 - x_{01})^{\alpha_1} \dots (x_n - x_{0n})^{\alpha_n}$.
Обозначим

$$\gamma_m(x_0, x, \tilde{x}) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\tilde{x})}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$$

Пусть $|x - x_0| < \varepsilon$, $x, \tilde{x} \in B^{x_0}_\rho$, u - гармоническая в $B^{x_0}_{2\rho}$. Тогда

$$|\gamma_m(x_0, x, \tilde{x})| \leq \varepsilon^m \left(\frac{nm}{\rho}\right)^m max_{B^{x_0}_{2\rho}}|u| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}$$

Но

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} = \frac{n^m}{m!}$$

Получаем

$$|\gamma_m(x_0, x, \tilde{x})| \leq \left(\frac{\varepsilon n^2 m}{\rho}\right)^m \frac{1}{m!} max_{B^{x_0}_{2\rho}}|u|$$

Согласно формуле Стирлинга, $m! \sim \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$,тогда $|\gamma_m(x_0, x, \tilde{x})|$ оценивается сверху величиной, эквивалентной

$$\frac{c}{\sqrt{m}} \left(\frac{\varepsilon e n^2}{\rho}\right)^m \to 0 \text{ при } m \to \infty, \varepsilon \ll 1$$

3 Лекция 17.

3.1 Функция Грина. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Теорема 3.1 (Лиувилль). *Пусть $u(x)$ - гармоническая в $\mathbb{R}^n$, неотрицательная функция. Тогда $u = const$.*

Доказательство: Зафиксируем точку x_0 и шар $Q_R^{x_0}$ радиуса R с центром в нашей точке.Поскольку производная гармонической функции – также функция гармоническая, по теореме о среднем имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{|Q_R^{x_0}|}\int_{Q_R^{x_0}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\,dx = \frac{1}{|Q_R^{x_0}|}\int_{S_R^{x_0}} u(x)\nu_j(x)dS$$

Мы использовали формулу Стокса, чтобы перейти к интегрированию по границе шара. А теперь используем еще одну теорему о среднем, на этот раз из курса математического анализа:

$$= \frac{1}{|_R^{x_0}|}\nu_j(\tilde{x})\int_{S_R^{x_0}} u(x)dS = \frac{|S_R^{x_0}|}{|Q_R^{x_0}|}\nu_j(\tilde{x})|u(x_0)|$$

Здесь $|S_R^{x_0}| = w_n R^{n-1}$,а $|Q_R^{x_0}| = \frac{w_n}{n}R^n$. Таким образом,

$$|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)| \le \frac{n}{R}|u(x_0)| \to 0 \quad R \to \infty$$

Ничего не мешает нам выбрать радиус шара сколь угодно большим, а значит, $|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)| = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$. Следовательно, $u = const$, что и требовалось.

Задача: Пусть $u(x)$ - гармоническая в $\mathbb{R}^n$ и $u(x) \ge -C(1+|x|^m)$, где $c, m > 0$ $u(x)$. Показать, что в этом случае $u(x)$ есть полином степени не выше $[m]$.

Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 \quad x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x) \quad x \in \partial\Omega,\, f \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Под классическим решением понимается решение из класса $C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$.

Для такого решения ранее была получена формула

$$u(x_0) = \int_\Omega E(|x-x_0|)\Delta u(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial E(|x-x_0|)}{\partial\nu}\,dS - \int_{\partial\Omega} E(|x-x_0|)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS$$

Пусть существует функция $g(x,x_0)$ со следующими свойствами:
$g(x,x_0) \in C_x^2(\overline{\Omega})$, $\Delta_x g(x,x_0) = 0\,\forall x_0 \in \Omega$ и при этом $g(x,x_0)|_{x\in\partial\Omega} = -E(|x-x_0|)|_{x\in\partial\Omega}$, $\forall x_0 \in \Omega$

Запишем вторую формулу Грина для $u(x), g(x,x_0)$:

$$\int_\Omega (u\Delta g - g\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial g}{\partial\nu} - g\frac{\partial u}{\partial\nu}$$

Поскольку функции u и g – гармонические в области, то левая часть формулы обращается в ноль. Теперь прибавим к левой и правой частям уже упоминавшееся соотношение:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial E(|x-x_0|)}{\partial\nu}\,dS - \int_{\partial\Omega} E(|x-x_0|)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,dS$$

И поскольку $g(x,x_0) + E(|x-x_0|) = 0$ на $\partial\Omega$, получаем:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial(E(|x-x_0|) + g(x,x_0))}{\partial\nu}\,dS$$

Определение: *Функцией Грина* называется функция $G(x,x_0) = E(|x-x_0|) + g(x,x_0)$, где функция $g(x,x_0)$ введена ранее. Точка x_0 называется *полюсом.*

Итак, если $u \in C^2(\overline{\Omega})$ – решение задачи Дирихле, то:

$$u(x_0) = u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial\nu}\,dS$$

Лемма 3.2. $\forall x_1, x_0 \in \Omega \quad G(x_1, x_0) = G(x_0, x_1)$

Доказательство: Исходя из определения функции Грина, $\Delta_x G(x, x_0) = 0$ при $\neq x_0$. Вырежем вокруг точек x и x_0 шарики маленького радиуса ε, и то что осталось обозначим за Ω_ε:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega(\overline{Q_\varepsilon^{x_0} \cup Q_\varepsilon^{x_1}})$$

Введем функции $u(x) = G(x, x_0)$, и $v(x) = G(x, x_1)$. В области Ω_ε они гармонические, поэтому по второй формуле Грина:

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS$$

Поскольку $G(x, x_0)|_{\partial\Omega} = 0$ (вспомним, что функция g определялась условием $g(x, x_0)|_{x\in\partial\Omega} = -E(|x-x_0|)|_{x\in\partial\Omega}$, $\forall x_0 \in \Omega$), то $u(x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = 0$. Поэтому

$$0 = \int_{S_\varepsilon^{x_0}} G(x, x_0)\frac{\partial G(x, x_1)}{\partial \nu}\, dS + \int_{S_\varepsilon^{x_1}} G(x, x_0)\frac{\partial G(x, x_1)}{\partial \nu}\, dS$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial E(|x - x_1|)}{\partial \nu} = -\frac{\partial E}{\partial r}(r) = -\frac{1}{w_n r^{n-1}}$$

Получаем,что

$$\int_{S_\varepsilon^{x_1}} G(x, x_0)\frac{\partial G(x, x_1)}{\partial \nu}\, dS = -\frac{1}{w_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon^{x_1}} G(x, x_0)\, dS \to -G(x_1, x_0)$$

Аналогично переходя к пределу в другом слагаемом, имеем

$$0 = -G(x_1, x_0) + G(x_0, x_1)$$

что и требовалось доказать.

4 Лекция 18.

4.1 Интеграл Пуассона.

$u(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \Omega$ - ограниченная область в $\mathbb{R}^n, \quad \partial\Omega \in C^1$.
Будем решать следующую задачу (1):

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) \quad \text{в } \Omega \\ \qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x_0) = \int_\Omega f(x)G(x,x_0)dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,x_0)ds$$

$G(x,x_0)$ - функция Грина, G не более чем единственна.
$\Omega = Q^0_R \subset \mathbb{R}^n, \quad G(x,x_0) = E(|x-x_0|) - E\left(\frac{\rho}{R}|x-x_*|\right)$
Если

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), x \in \Omega, \quad u \in C^2(\overline{Q^0_R}) \\ \qquad\qquad\qquad\quad u|_{S^0_R} = \varphi(x) \end{cases}$$

,то $u(x_0) = \int_{S^0_R} \varphi(x)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial \nu_x}ds_x$.

$$\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial \nu}|_{x\in S^0_R, x_0 \in Q^0_R} = E'(r)\frac{\partial|x-x_0|}{\partial \nu} - \frac{\rho}{R}E'(\frac{\rho}{R}r_1)\frac{\partial|x-x_*|}{\partial\nu}$$

, где $r = |x-x_0|, r_1 = |x-x_*|$.
$\frac{\partial|x-x_0|}{\partial\nu} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_{0j}}{|x-x_0|} = \cos\gamma$, где γ - угол между ν и $x - x_0$. Аналогично $\frac{\partial|x-x_*|}{\partial\nu} = \cos\beta$.
По теореме косинусов $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr}$.
Аналогично

$$\cos\beta = \frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2Rr_1} = \frac{R^2 + \frac{R^2r^2}{\rho^2} - \frac{r^4}{\rho^2}}{2R\frac{rR}{\rho}} = \frac{1}{\rho}\frac{\rho^2+r^2-R^2}{2r}$$

Т.к. $E(r) = -\frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}$, то $E'(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}$.
Тогда

$$\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial\nu}|_{x\in S^0_R, x_0\in Q^0_R} = E'(r)(\cos\gamma - \frac{\rho}{R}\cos\beta) = E'(r)\frac{R^2-\rho^2}{Rr} = \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\frac{1}{|x-x_0|^n}$$

Следовательно,

$$u(x_0) = \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{S^0_R}\frac{\varphi(x)}{|x-x_0|^n}ds_x \quad \text{- интеграл Пуассона}$$

$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha$, тогда

$$u(x_0) = \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{S^0_R}\frac{\varphi(x)ds_x}{(R^2+|x_0|^2-2R|x_0|\cos\alpha)^{n/2}}$$

Пусть $\varphi \in C(S^0_R)$. Тогда функция $u(x)$, задаваемая интегралом Пуассона, есть решение задачи (1). Необходимо проверить 2 условия:
1) $u(x_0) = \int_{\partial\Omega}\varphi(x)\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial\nu_x}ds_x$- гармоническая по $x_0, \quad x_0 \in Q^0_R$.
2) $\forall \hat{x} \in S^0_R \quad \exists \lim_{x_0\longrightarrow\hat{x}} u(x_0) = \varphi(\hat{x})$
Докажем это.
1) При $x \neq x_0$ $\Delta_x G(x,x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{x_0}G(x_0,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{x_0}G(x,x_0) = 0$ в силу симметричности G.
$x_0 \in \Omega \subset\subset Q^0_R \quad \Rightarrow \quad \Delta_{x_0}u(x_0) = \int_{\partial\Omega}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\Delta_{x_0}G(x,x_0)ds_x = 0$
2) В силу решения задачи Дирихле задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in Q^0_R \\ \qquad u|_{S^0_R} = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение $u \equiv 1$, тогда

$$1 = \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{S^0_R}\frac{ds_x}{r^n}$$

$$\varphi(\hat{x}) = \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{S^0_R}\frac{\varphi(\hat{x})}{r^n}ds_x$$

$$|u(x_0)-\varphi(\hat{x})| = \left|\frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{S_R^0}\frac{\varphi(x)-\varphi(\hat{x})}{r^n}ds_x\right| \le \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{S_R^0}\frac{|\varphi(x)-\varphi(\hat{x})|}{r^n}ds_x =$$
$$= \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{\sigma_{\delta(\varepsilon)}}\frac{|\varphi(x)-\varphi(\hat{x})|}{r^n}ds_x + \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{S_R^0\setminus\sigma_{\delta(\varepsilon)}}\frac{|\varphi(x)-\varphi(\hat{x})|}{r^n}ds_x$$

Первое слагаемое обозначим за I_1, второе за I_2.
Здесь мы пользовались тем, что $\forall\varepsilon \quad \exists\delta>0: \quad x\in\sigma_\delta = Q_\delta^{\hat{x}}\cap S_R^0 \Rightarrow |\varphi(x)-\varphi(\hat{x})|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{S_R^0}\frac{ds_x}{r^n} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Что можно сказать об I_2? При $x\in S_R^0\setminus\sigma_\varepsilon$ имеем $|x-x_0|\ge a>0$, как только $|x_0-x|<\delta_1$. Тогда

$$I_2 \le 2max_{S_R^0}|\varphi(x)|a^{-n}\frac{\omega_n R^{n-1}}{\omega_n R}(R^2-|x_0|^2) = c_1(R^2-|x_0|^2)$$

С другой стороны, $\exists\tilde{\delta}>0: |x_0-\hat{x}|<\tilde{\delta}\Rightarrow R^2-|x_0|^2<\frac{\varepsilon}{c_1}$. Тогда $I_2<\frac{\varepsilon}{2}$.
Ч.т.д.

4.2 Неравенство Харнака.

Пусть $u(x)$ - гармоническая в Q_R^0 функция, непрерывная вплоть до границы; $u(x)\ge 0$. Тогда $\forall x\in Q_R^0$

$$\frac{R^{n-2}(R-\rho)}{(R+\rho)^{n-1})} \le u(x_0) \le \frac{R^{n-2}(R+\rho)}{(R-\rho)^{n-1})}$$

,где $\rho=|x_0|$.
Доказательство.

$$u(x_0) = \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\int_{S_R^0}\frac{u(x)}{r^n}ds_x; \quad R-\rho\le r\le R+\rho$$
$$\frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\frac{1}{(R+\rho)^n}\int_{S_R^0}u(x)ds_x \le u(x_0) \le \frac{R^2-|x_0|^2}{\omega_n R}\frac{1}{(R-\rho)^n}\int_{S_R^0}u(x)ds_x$$

Но $\int_{S_R^0}u(x)ds_x = u(0)\omega_n R^{n-1}$, откуда и получаем нужное нам утверждение.
Ч.т.д.

4.3 Обратная теорема о среднем.

Пусть $u\in C(\Omega)$ и для любого шара $\overline{Q_r^{x_0}}\subset\Omega$ для u справедлива теорема о среднем по сфере. Тогда $u(x)$ - гармоническая в Ω функция.
Доказательство.
Задача

$$\begin{cases}\Delta v = 0, x\in Q_R^{x_0}, \overline{Q_r^{x_0}}\subset\Omega \\ v|_{S_R^{x_0}} = u|_{S_R^{x_0}}\end{cases}$$

имеет единственное решение, которое задается интегралом Пуассона.
Тогда имеем $v(x)\equiv u(x)$ в $Q_R^{x_0}$, что следует из равенства $u(x)$ и $v(x)$ на $\partial Q_R^{x_0}$, выполнения теоремы о среднем и принципа максимума.

4.4 Теорема об устранимой особенности.

Пусть $u(x)$ - гармоническая в $\Omega\setminus\{x_0\}$ функция, $m(\rho) = sup_{\Omega\setminus Q_\rho^{x_0}}|u(x)|$.
Пусть $m(\rho)\le a(\rho)E(\rho)$, где $a(\rho)\longrightarrow 0$ при $\rho\longrightarrow 0$.
Тогда $u(x)$ можно доопределить в x_0 таким образом, что полученная функция будет гармонична в Ω.

5 Лекция 19

Доказательство теоремы об устранимой особенности
Рассмотрим $Q_{\rho_1}^{x_0}: \ \overline{Q_{\rho_1}^{x_0}} \in \Omega$
Найдем:

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, \ x \in Q_{\rho_1}^{x_0} \\ v(x) = u(x), \ x \in Q_{\rho_1}^{x_0} \end{cases}$$

Наша цель показать, что $u(x) = v(x)$ в шаре всюду, кроме его центра x_0. Рассмотрим $\omega(x) = v(x) - u(x), x \in Q_{\rho_1}^{x_0}/\overline{Q_{\rho_1}^{x_0}}$. $\Delta\omega = 0, \ x \in Q_{\rho_1}^{x_0}/\overline{Q_{\rho_1}^{x_0}}$ $\omega = 0$ на $S_{\rho_1}^{x_0}$

$$\max_{\overline{Q_{\rho_1}^{x_0}}} |v(x)| \leqslant \max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |u(x)| = M$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0, \ Q_{\rho_1}^{x_0}/\left\{x_0\right\}, \ |\omega(x)| \leqslant \varepsilon E(|x - x_0|)$

$$\max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |\omega(x)| \leqslant \max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |u(x)| + \max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |v(x)| \leqslant \tag{19.1}$$

$\forall\varepsilon > 0 \exists\rho \leqslant \rho_0 : \ M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|E(\rho)|$
С другой стороны по условию теоремы

$$\max_{S_\rho^{x_0}} |u(x)| \leqslant a(\rho)|E(\rho)| \ \forall\varepsilon > 0 \exists\widetilde{\rho}_0 : \forall\rho \leqslant \widetilde{\rho}_0, \ a(\rho) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \max_{S_\rho^{x_0}} |u(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|E(\rho)|$$

Тогда (19.1) можно продолжить

$$\leqslant \varepsilon|E(\rho)|, \ \forall\rho \leqslant \widehat{\rho}$$

По принципу максимума:

$$|\omega(x)| \leqslant \varepsilon|E(|x - x_0|)|, \ \forall x \in Q_{\rho_1}^{x_0}/\left\{x_0\right\}$$

Следовательно, полагая $u(x_0) := v(x_0)$, получаем гармоническую функцию во всем шаре

5.1 Теория потенциала.

$$u(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \ \partial\Omega \in C^1$$

Вспомним, что

$$u(x_0) = \int\limits_{\Omega} E(x, x_0)\Delta u dx + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial E(x, x_0)}{\partial\nu}dS - \int\limits_{\partial\Omega} E(x, x_0)\frac{\partial u}{\partial\nu}dS$$

- представяется в виде трех потенциалов.

Введем для каждого из потенциалов обозначения:

$$P_0(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi)\frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}d\xi, \ n \geqslant 3 \text{ - обьемный потенциал.}$$

$$P_1(x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}dS_\xi \text{ - потенциал простого слоя.}$$

$$P_2(x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}dS_\xi \text{ - потенциал двойного слоя.}$$

Здесь $E|x - \xi| = c_n\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$.

Теорема 2
Пусть $\mu(x), \ \sigma(x) \in L_1(\Gamma)$. Тогда $P_1(x), \ P_2(x)$ - гармонические функции в R^n/Γ
Доказательство
Можно дифференцировать 2 раза $P_1, \ P_2$ под знаком интеграла.

$$\forall x \in \Omega_1; \ \Omega, \ \partial\Omega = \Gamma, \ \Omega_0 = R^n/\overline{\Omega} \ \Omega_1 \subset\subset \Omega$$

Возьмем $\Omega_1,\ \rho(\Omega_1,\Gamma)\geqslant\alpha>0$. В $P_1(x)$ можно дифференцировать под знаком интеграла. То же самое и для Ω_0

$$\Delta_x P_1(x)=\int\limits_\Gamma \mu(\xi)\Delta_x\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi=0$$

Теперь посмотрим на потенциал двойного слоя

$$\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}=-(n-2)\frac{1}{|x-\xi|^{n-1}}\sum_{k=1}^n\frac{\partial|x-\xi|}{\partial\xi_k}\nu_\xi^k=-(n-2)\frac{1}{|x-\xi|^{n-1}}\sum_{k=1}^n\frac{\xi_k-x_k}{|x-\xi|}\nu_\xi^k=$$

$$=-(n-2)\frac{\cos{(r,\nu_\xi)}}{r^{n-1}}$$

Тогда

$$P_2(x)=\int\limits_\Gamma\sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi=\int\limits_\Gamma\sigma(\xi)\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\nu_k^\xi dS_\xi$$

Теперь по тем же соображениям можно дифференцировать и потенциал двойного слоя.

Посмотрим, как ведут себя $P_1,\ P_2$ на бесконечности. Если $\xi\in\Gamma,\ |x|>>1,\ \Rightarrow|x-\xi|\geqslant|x|-|\xi|\geqslant\frac{|x|}{2}$ Тогда для P_1:

$$|P_1(x)|\leqslant\frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}\int\limits_\Gamma|\mu(\xi)|dS_\xi=\frac{M_0}{|x|^{n-2}}$$

Следовательно для $n\geqslant3,\ P_1(x)\to0,\ x\to\infty$.
По тем же соображениям

$$|P_2(x)|\leqslant\frac{M_1}{|x|^{n-2}}$$

$$|P_0(x)|\leqslant\frac{M_2}{|x|^{n-2}}$$

Теорема 3
Пусть $\rho(x)\in C(\overline{\Omega})$. Тогда $P_0(x)\in C^1(\mathbb{R}^n)$ и $P_0(x)$ гармоническая функция при $x\in\mathbb{R}^n/\overline{\Omega}$
Доказательство.
$x\in\Omega\subset\subset\mathbb{R}^n/\overline{\Omega}\Rightarrow\Delta_xP_0(x)=\int\limits_\Omega\rho(\xi)\Delta_x\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi=0$
$x\in\overline{\Omega},\ Q_\varepsilon^x$ - шар.

$$P_0(x)\leqslant\int\limits_{\overline{\Omega}\cap Q_\varepsilon^x}|\rho(\xi)|\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi+\int\limits_{\overline{\Omega}/\overline{Q}_\varepsilon^x}|\rho(\xi)|\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi$$

$$\int\limits_{\overline{\Omega}\cap Q_\varepsilon^x}|\rho(\xi)|\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi\leqslant\max_{\overline{\Omega}}|\rho(x)|\int\limits_{Q_\varepsilon^x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi$$

$$\int\limits_{\overline{\Omega}/Q_\varepsilon^x}|\rho(\xi)|\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi\leqslant M_{1,\varepsilon}$$

$x\in\mathbb{R}^n/\overline{\Omega}\Rightarrow|P_0(x)|\leqslant M$
$\forall x_0\in\mathbb{R}^n$

$$|P_0(x_0+h)-P_0(x_0)|\leqslant\int\limits_{\overline{\Omega}\cap Q_\delta^x}|\rho(\xi)|\frac{1}{|x_0+h-\xi|^{n-2}}d\xi+\int\limits_{\overline{\Omega}\cap Q_\delta^x}|\rho(\xi)|\frac{1}{|x_0-\xi|^{n-2}}d\xi+$$

$$+\int\limits_{\overline{\Omega}/\overline{Q}_\delta^x}|\rho(\xi)|\left|\frac{1}{|x_0+h-\xi|^{n-2}}-\frac{1}{|x_0-\xi|^{n-2}}\right|d\xi$$

$$\int\limits_{\overline{\Omega}/\overline{Q}_\delta^x}|\rho(\xi)|\frac{1}{|x_0-\xi|^{n-2}}d\xi\text{ гладкая поверхность.}$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists h_0>0,\ \forall|h|<h_0$

$$\int\limits_{\overline{\Omega}/\overline{Q}_\delta^x}|\rho(\xi)|\left|\frac{1}{|x_0+h-\xi|^{n-2}}-\frac{1}{|x_0-\xi|^{n-2}}\right|d\xi\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\int\limits_{\overline{\Omega}\cap Q_\delta^x} |\rho(\xi)|\frac{1}{|x_0-\xi|^{n-2}}d\xi \leqslant \max_{\overline{\Omega}}|\rho(x)|\int\limits_{Q_\delta^{x_0}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi = C_1\int\limits_0^\delta rdr = C_2\delta^2 < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } \delta << 1$$

$$|\int\limits_{\overline{\Omega}\cap Q_\delta^x} |\rho(\xi)|\frac{1}{|x_0+h-\xi|^{n-2}}d\xi|(|h|<\delta/2)(|x_0+h-\xi|\leqslant|x_0-\xi|+|h|<3\delta/2)\leqslant$$

$$\leqslant \max_{\overline{\Omega}}|\rho(x)|C_2\int\limits_0^{3\delta/2} rdr = C_3\delta^2 \leqslant \varepsilon/3 \text{ при } \delta << 1$$

Окончательно получаем, что при малых h

$$|P_0(x_0+h)-P(x_0)|<\varepsilon \to P_0\in C(\mathbb{R}^n)$$

Упражнение.

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_k}\in C(\mathbb{R}^n)$$

$\Delta P_0(x) = 0,\ x\in\mathbb{R}^n/\overline{\Omega}$
$\Delta P_0(x) = -(n-2)\omega_n\rho(x),\ x\in\Omega',\ \omega_n = |S_1^0|$
$(n=2:\ \Delta P_0 = -2\pi\rho(x))$

Теорема 4

Пусть $\rho\in C^1(\bar{(\Omega)})$. Тогда $P_0(x)\in C^2(\Omega)$, при $x\in\Omega$

$$\Delta P_0(x) = \begin{cases} -(n-2)\omega_n\rho(x),\ n\geqslant 3\\ -2\pi\rho(x),\ n=2\end{cases}$$

Доказательство:

$n\geqslant 3$, вычислим

$$\frac{\partial P_0(x)}{\partial x_k} = \int\limits_\Omega \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi = -\int\limits_\Omega \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} - \int\limits_{\Omega/\Omega_\varepsilon^x} \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi$$

И получим то, что требуется доказать в условии.

6 Лекция 20.

Обьемный потенциал: $P_0(x) = \int_\Omega \rho(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi$
Потенциал простого слоя: $P_1(x) = \int_\Omega \mu(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi$
Потенциал двойного слоя: $P_2(x) = \int_\Omega \sigma(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi$
$\Delta P_i(x) = 0,\ x\in\mathbb{R}^n/\Gamma,\ i=1,2;$

6.1 Обьемный потенциал.

$\Delta P_0(x) = 0,\ x\in\mathbb{R}^n/\overline{\Omega},\ P_0(x)\in C^1(\mathbb{R}^n),\ \rho\in C(\overline{\Omega})$

$$\text{Уравнение Пуассона}\ \begin{cases}\Delta P_0 = -(n-2)\omega_n\rho(x),\ x\in\Omega,\ n\geqslant 3;\\ \Delta P_0 = -2\pi\rho(x),\ x\in\Omega,\ n=2\end{cases} \tag{20.1}$$

Теорема 1.
Пусть $\rho\in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда $P_0\in C^2(\Omega),\ P_0$ удовлетворяет уравнению (20.1)

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_k} = \int_\Omega \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi = -\int_\Omega \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega/\overline{Q}^x_\varepsilon}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\Omega/\overline{Q}^x_\varepsilon}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi - \int\limits_{\partial(\Omega/\overline{Q}^x_\varepsilon)}\rho(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\nu^k_\xi dS_x i\right) =$$

$$= \int_\Omega\frac{\partial\rho}{\partial\xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi - \int\limits_{\partial(\Omega)}\rho(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\nu^k_\xi dS_x i - \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\varepsilon^{2-n}\nu^k_\xi dS_\xi$$

$$|\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\varepsilon^{2-n}\nu^k_\xi dS_\xi| \leqslant M\varepsilon^{2-n}\varepsilon^{n-1} = M\varepsilon$$

$$\Rightarrow -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\varepsilon^{2-n}\nu^k_\xi dS_\xi = 0$$

Т.е получаем что $\frac{\partial P_0}{\partial x_k}\in C^1(\Omega)$, поскольку первое слагаемое есть обьемный потенциал с плотностью $\frac{\partial\rho}{\partial\xi_k}\in C(\Omega)$, а второе - потенциал простого слоя с $\rho(\xi)\nu^k_\xi\in L_1(\Gamma)$

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial x_k^2}(x) = -\int_\Omega\frac{\partial\rho(\xi)}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi - \int_{\partial\Omega}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\nu^k_\xi dS - \xi =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega/\overline{Q}^x_\varepsilon}\frac{\partial\rho(\xi)}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi - \int_{\partial\Omega}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\nu^k_\xi dS_\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\Omega/\overline{Q}^x_\varepsilon}\rho(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi_k^2}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi - \int\limits_{\partial(\Omega/\overline{Q}^x_\varepsilon)}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\nu^k_\xi dS_\xi\right\} -$$

$$-\int_{\partial\Omega}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\nu^k_\xi dS_\xi$$

Записываем эти равенства для всех $k=1,\ldots,n$ и складываем

$$\Delta P_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega/\overline{Q}^x_\varepsilon}\rho(\xi)\Delta_\xi\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi - \sum_{k=1}^n\int\limits_{\partial\Omega}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\nu^k_\xi dS_\xi -$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi-\sum_{k=1}^n\int\limits_{\partial\Omega}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\nu^k_\xi dS_\xi-$$

В $\Omega/\overline{Q}^x_\varepsilon$, $\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$ гармоническая, тогда первое слагаемое равно 0.
Второе и четвертое слагаемое отличаются знаком, т.к $\frac{\partial}{x_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}=-\frac{\partial}{\xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$

$$\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi=-\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}dS_\xi=$$

$$=(n-2)\varepsilon^{1-n}\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)dS_\xi=(n-2)\omega_n\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S^x_\varepsilon}\rho(\xi)dS_\xi\to(n-2)\omega_n\rho(x),\ \varepsilon\to 0.$$

Получаем (20.1).
Упражнение.
Самостоятельно провести доказательство для n=2. ($P_0(x)=\int_\Omega\rho(\xi)\ln|x-\xi|d\xi$)
Теорема доказана.
Подведем итоги.
Свойства $P_0(x)=\int_\Omega\rho(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}d\xi$
Пусть $\rho\in C(\bar{\Omega})$, тогда
а) $P_0(x)\in C^1(\mathbb{R}^n)$
б) $|P_0(x)|\leqslant\frac{c}{|x|^{n-2}},\ |x|\to\infty$
в) $\Delta P_0(x)=0,\ x\in\mathbb{R}^n/\bar{\Omega}$
Пусть $\rho\in C^1(\bar{\Omega})$, тогда
г) $\Delta P_0(x)=-(n-2)\omega_n\rho(x),\ x\in\Omega$
Замечание. Используя эти свойства, можно вычислить P_0 не через $\int_\Omega$, а как решение г) со свойствами а)-в)

6.2 Потенциал двойного слоя.

Замкнутая поверхность $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ называется поверхностью Ляпунова, если
а)$\forall x\in\Gamma\ \exists$ номаль ν_x к Γ в точке x. (ν_x -внешняя)
б)$\exists a>0,\ \alpha>0\ \forall x,\xi\in\Gamma,\ \nu_x,\nu_\xi$ - нормали; θ - угол между ними $\Rightarrow\theta\leqslant a|x-\xi|^\alpha$
Отметим некоторые очевидные свойства:
1. $\Gamma\in C^2\Rightarrow\Gamma$ - поверхность Ляпунова.
2. Γ - поверхность Ляпунова $\Rightarrow\Gamma\in C^2$
Упражнение.
Доказать, что из условия б) следует условие Гелдера для нормали: $|\nu_x-\nu_\xi|\leqslant a|x-\xi|^\alpha$

Теорема 2.
Пусть Γ - поверхность Ляпунова. Тогда $\exists d>0:\ \forall x\in\Gamma$ любая прямая, параллельная ν_x, пересекает Γ внутри Q^x_d не более чем в одной точке.
Доказательство.
Берем d таким, чтобы $ad^\alpha<1$, предположим противное, т.е пусть в точке ξ_1 прямая l вышла из Ω , а в ξ_2 - вошла. Проведем касательную плоскость Π в ξ_2. Прямая l и внешняя нормаль ν_{ξ_2} будут лежать по разные стороны от Π, $\nu_{\xi_2}\perp\Pi$

$$\widehat{(l,\nu_{\xi_2})}\Rightarrow\widehat{(\nu_x,\nu_{\xi_2})}\geqslant\pi/2;\ |x-\xi_2|\leqslant d,\ \text{т.к}\ \xi_2\in Q^x_d$$

Тогда $\pi/2\leqslant ad^\alpha$. Противоречие.

$\Gamma'=\Gamma\cap Q^x_d$ однозначно проектируется на касательную плоскость в x $\Rightarrow\Gamma'$ можно рассматривать в некоторой системе координат, как график функции.

Фиксируем $x\in\Gamma$. S^x_d называется сферой Ляпунова .
$\Gamma':\ \xi_n=f(\xi_n,\dots,\xi_{n-1}),\ f$ задана на проекции Γ' на касательную плоскость.
При этом $f(0,\dots,0)=0;\ \nu_x=(0,\dots,0,1)$
Теперь будет некоторая муторная работа, целью которой будет следующее:
$\forall x,\xi\in\Gamma\ |\cos{(r,\nu_\xi)}|\leqslant cr^\alpha,\ \alpha$ из определения поверхности Ляпунова.
($P_2(x)=-(n-2)\int_\Gamma\sigma(\xi)\frac{\cos{(r,\nu_\xi)}}{|x-\xi|^{n-1}}dS_\xi$)

$$\nu_x=\left(-\frac{f_{\xi_1}(0)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'}f|^2}},-\frac{f_{\xi_2}(0)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'}f|^2}},\dots,-\frac{f_{\xi_{n-1}}(0)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'}f|^2}},-\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'}f|^2}}\right)$$

Здесь и далее $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.
Сравнивая это выражение с выражением раньше, получаем $f_{\xi_j} = 0,\ j = 1, \dots, n-1$
Упражнение.

$$\cos{(r, \nu_\xi)} = \sum_{k=1}^{n} \cos{(r, \xi_k)} \cos{(\nu_\xi, \xi_k)}$$

Выделим в этой сумме последнее слагаемое.

$$\cos{(r, \xi_n)} \cos{(\nu_\xi, \xi_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos{(r, \xi_k)} \cos{(\nu_\xi, \xi_k)} \tag{$*$}$$

Хочется оценить $|\xi_n| = |f|$ и $|\cos{(\nu_\xi, \xi_k)}|,\ k = 1, \dots, n-1$

$$\nu_\xi = \left(-\frac{f_{\xi_1}(\xi)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{f_{\xi_2}(\xi)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, \dots, -\frac{f_{\xi_{n-1}}(\xi)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}} \right)$$

$$\cos{(\nu_\xi, \xi_k)} = -\frac{f_{\xi_k}(\xi)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}},\ k = 1, \dots, n-1;$$

$$\cos\theta = \cos{(\nu_\xi, \nu_x)} = \cos{(\nu_\xi, \xi_n)} = -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}$$

θ из определения поверхности Ляпунова. $\cos\theta \geqslant 1 - \frac{\theta^2}{2}$ (из математического анализа), $\theta \leqslant ar^\alpha \leqslant ad^\alpha < 1 \Rightarrow \cos\theta \geqslant 1/2$

$$-\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}} \geqslant 1 - \frac{a^2 r^{2\alpha}}{2}$$

$$\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{a^2 r^{2\alpha}}{2}} = 1 + \frac{a^2 r^{2\alpha}}{2 - a^2 r^{2\alpha}} \geqslant (a^2 r^{2\alpha} < 1) 1 + a^2 r^{2\alpha}$$

$$|\nabla_{\xi'} f|^2 \leqslant 2a^2 r^{2\alpha} + a^4 r^{4\alpha} \leqslant 3a^2 r^{2\alpha}$$

Окончательно получаем, что

$$|\nabla_{\xi'} f| \leqslant \sqrt{3} a r^\alpha$$

$$|f_{\xi_k}(\xi)| \leqslant |\nabla_{\xi'} f| \leqslant \sqrt{3} a r^\alpha,\ k = 1, ..., n-1$$

В (*) последнее слагаемые оцениваются

$$|\cos{(r, \xi_k)} \cos{(\nu_\xi, \xi_k)}| \leqslant |\cos{(\nu_\xi, \xi_k)}| \leqslant \sqrt{3} a r^\alpha$$

$r^2 = \xi_n^2 + \rho^2,\ \rho^2 = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \xi_k^2$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\xi_k}{\rho} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \right| \leqslant \sqrt{3} a n r^\alpha \leqslant \sqrt{3} a n d^\alpha = C_1$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow |f(\xi)| \leqslant \int\limits_0^\rho \left| \frac{\partial f}{\partial \rho'} \right| d\rho' \leqslant C_1 \rho \Rightarrow |\xi_n| = |f(\xi)| \leqslant C_1 \rho$$

Отсюда

$$\rho^2 < r^2 \leqslant C_1 \rho^2 + \rho^2 = C_2 \rho^2 \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right| \leqslant C_3 \rho^\alpha$$

$$|\xi_n| = |f(\xi)| \leqslant C_4 \rho^{\alpha+1} \Rightarrow |\xi_n| = |f(\xi)| \leqslant C_4 r^{\alpha+1}$$

Из (*):

$$|\cos{r, \nu_\xi}| \leqslant \frac{|\xi_n|}{2} + C_0 r^\alpha \leqslant \bar{C} r^\alpha$$

что и требовалось.

7 Лекция 21

Теорема 1. Пусть Γ - замкнутая поверхность Ляпунова, $\sigma(\xi) \equiv 1$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$

$$\int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r^{n-2}} \right| ds_\xi = (n-2) \int_\Gamma \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq M < \infty$$

Доказательство.
1. Пусть $\rho(x, \Gamma) \geq \frac{d}{2}$. Тогда $r = |x - \xi| \geq \frac{d}{2}$, откуда

$$\int_\Gamma \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq \frac{2^{n-1}}{d^{n-1}} |\Gamma| \leq \infty$$

2. Пусть $\rho(x, \Gamma) < \frac{d}{2}$.
2а. Пусть $x \in \Gamma$, тогда

$$\int_\Gamma \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi = \int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi + \int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi$$

,где $\Gamma' = \Gamma \cap Q_d^x$, $\Gamma'' = \Gamma \setminus \Gamma'$.

$$\int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq \frac{1}{d^{n-1}} |\Gamma|$$

$$\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq \int_{\Gamma'} \frac{cr^\alpha}{r^{n-1}} ds_\xi \leq c_2 \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho^\alpha}{\rho^{n-1}} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} = c_3 \int_0^{d_1} \rho^{\alpha+1-n} \rho^{n-2} d\rho =$$

$$= c_3 \int_0^{d_1} \rho^{\alpha-1} d\rho \leq c_4 < \infty$$

К последним неравенствам мы переходили, заменяя интегрирование по Γ' интегрированием по проекции Γ' на касательную плоскость, $\cos(r, \nu_\xi) ds_\xi = d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}$; $\quad \rho^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2$; $\quad \rho^2 \leq r^2 = \rho^2 + \xi_n^2$; $\quad |\xi_n| \leq c_1 \rho^{\alpha+1}$
2б. x не принадлежит Γ, $|x - x_0| < \frac{d}{2}$.
В $\{\xi_i\}$ $\quad x$ имеет координаты $(0, \dots, 0, \pm\delta), \delta > 0$.

$$\cos(r, \nu_\xi) = \sum_{k=1}^{n} \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k) \quad \text{- это упражнение из предыдущей лекции}$$

$$\cos(r, \nu_\xi) = \sum_{k=1}^{n-1} \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k) + \cos(r, \xi_n) \cos(\nu_\xi, \xi_n)$$

$$|\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leq C r_0^\alpha, \quad r_0 = |x_0 - \xi|, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad r_0^2 = \rho^2 + \xi_n^2$$

$$|\cos(r, \xi_n)| \leq \frac{|\xi_n \pm \delta|}{r}$$

$$\cos(r, \nu_\xi) \leq C r_0^\alpha + \frac{|\xi_n \pm \delta|}{r}$$

Теперь разбиваем наш интеграл на 2 других интеграла:

$$\int_\Gamma \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi = \int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi + \int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi$$

$\int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi$ оценивается так же, как в пункте 2а. Оценим $\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi$.

$$r^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \xi_k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2 + (\xi_n \pm \delta)^2 = \rho^2 + (\xi_n \pm \delta)^2$$

$$\pm \xi_n \delta \geq -\frac{\delta^2}{2} - 2\xi^2 \quad r^2 \geq \rho^2 - \xi_n^2 + \frac{\delta^2}{2}, \text{ и еще } |\xi_n| \leq c_1 \rho^{\alpha+1} \leq c_1 d^\alpha \rho$$

Уменьшим, если надо, d, чтобы $c_1 d^\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $|\xi_n| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Итак, $r^2 \geq \frac{\rho^2 + \delta^2}{2}$.

$$\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq C_0 \left(\int_{\Gamma'} \frac{r_0^\alpha}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n-1}{2}}} ds_\xi + \int_{\Gamma'} \frac{\rho^{\alpha+1}}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n}{2}}} ds_\xi + \delta \int_{\Gamma'} \frac{ds_\xi}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n}{2}}} \right)$$

Первый интеграл обозначим I_1, второй I_2, третий I_3. $r_0^2 = \rho^2 + \xi_n^2 \leq \tilde{c}\rho^2$.

$$I_1 \leq K_1 \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho^\alpha}{(\rho^2+\delta^2)^{\frac{n-1}{2}}} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \leq K_2 \int_0^{d_1} \rho^{\alpha+1-n}\rho^{n-2} d\rho < \infty$$

Аналогично оценивается I_2.

$$I_3 \leq K\delta \int_0^{d_1} \frac{\rho^{n-2}d\rho}{(\rho^2+\delta^2)^{\frac{n}{2}}} = K\delta \int_0^{d_1} \frac{\rho^{n-2}d\rho}{\rho^n(1+\frac{\delta^2}{\rho^2})^{\frac{n}{2}}} = K\int_0^{d_1} \frac{-d\frac{\delta}{\rho}}{(1+\frac{\delta^2}{\rho^2})^{\frac{n}{2}}} = K\int_{\delta/d_1}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} \leq \infty$$

Ч.т.д.

Σ - часть поверхности, на которой задано положительное направление нормали, x не принадлежит Σ. Предполагаем $\xi \in \Sigma \quad \cos(\overrightarrow{x\xi}, \nu_\xi) \geq 0$. Соединим теперь x с каждой точкой Σ. Полученную коническую границу обозначим K. $\widetilde{\partial K} = K \cup \Sigma$. $Q_R^x \cap \Sigma = \emptyset$. K высечет на S_R^x некоторую поверхность, обозначим ее $\sigma_R \subset S_R^x$.

$$\omega_x(\Sigma) = \frac{|\sigma_R|}{R^{n-1}} = |\sigma_1|$$

В случае $cos(\overrightarrow{x\xi}, \nu_\xi) < 0$ считаем $\omega_x(\Sigma) = -\frac{|\sigma_R|}{R^{n-1}}$.

В общем случае мы разбиваем Σ на соответствующие части.

<u>Теорема 2.</u>

$$\omega_x(\Sigma) = -\frac{1}{n-2}\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi \quad (n \geq 3)$$

(т.е. ω_x - потенциал двойного слоя)

Доказательство.

$\Omega_\varepsilon = \widetilde{K} \setminus \overline{Q_\varepsilon^x}; \quad K_\varepsilon = K \setminus \overline{Q_\varepsilon^x}$.

В $\Omega_\varepsilon \quad \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$ - гармоническая, тогда запишем $\Delta_\xi \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} = 0$ в Ω_ε.

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta_\xi \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi = int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi =$$

$$= \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi + \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi + \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}|_{\xi\in\sigma_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}|_{\xi\in\sigma_\varepsilon} == (n-2)\varepsilon^{1-n}$$

$$\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi == (n-2)\varepsilon^{1-n}|\sigma_\varepsilon| = (n-2)\omega_x(\Sigma)$$

$$\int_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi = -(n-2)\int_{K_\varepsilon} \frac{\cos(r,\nu_\xi)}{r^{n-1}} ds_\xi = 0, \quad \text{т.к. } \cos(r,\nu_\xi) = 0$$

Итак,

$$0 = \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi + (n-2)\omega_x(\Sigma)$$

Ч.т.д.

Следствие. Γ - замкнутая поверхность Ляпунова, ограничивающая область Ω.

Тогда $\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi$ может принимать следующие значения:

$$\begin{cases} -\omega_n(n-2), \quad x \in \Omega \\ \qquad 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \\ -\dfrac{\omega_n(n-2)}{2}, \quad x \in \Gamma \end{cases}$$

, где $n \geq 3$, $\omega_n = |S_1|$.

Доказательство.

1)

$$x \in \Omega \Rightarrow \omega_x(\Gamma) = \omega_n \Rightarrow \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi = -\omega_n(n-2)$$

2)

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \Rightarrow \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \text{ - гармоническая по } \xi \in \Omega$$

3)
$x \in \Gamma$. π_x - касательная плоскость к Γ в точке x. Рассмотрим $Q_\varepsilon^x, \varepsilon \ll d$. $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap Q_\varepsilon^x$. $\widetilde{S_\varepsilon^x} = S_\varepsilon^x \cap \Omega$. $\widehat{S_\varepsilon^x}$ - полусфера. $\widehat{S_\varepsilon^x} = \widetilde{S_\varepsilon^x} + B_\varepsilon$. $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{Q_\varepsilon^x}$.
$\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$ гармоническая по ξ в Ω.

$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi = -\int_{\widetilde{S_\varepsilon^x}} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi =$$

$$= -\int_{\widehat{S_\varepsilon^x}} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi + \int_{B_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi$$

$$\int_{B_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi = -(n-2)\int_{B_\varepsilon} \frac{\cos(r,\nu_\xi)}{r^{n-1}}ds_\xi$$

$$\int_{B_\varepsilon} \frac{|\cos(r,\nu_\xi)|}{r^{n-1}}ds_\xi \le K_0\varepsilon^{\alpha+1-n}|B_\varepsilon| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

Кроме того,

$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi \to \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi \text{ при } \varepsilon \to 0$$

и

$$-\int_{\widehat{S_\varepsilon^x}} \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi \to -\frac{\omega_n(n-2)}{2} \text{ при } \varepsilon \to 0$$

Ч.т.д.

7.1 Теорема о скачке потенциала двойного слоя.

$x_0 \in \Gamma$ $P_2^+(x_0) = \lim_{x\to x_0, x\in\Omega} P_2(x)$, $P_2^-(x_0) = \lim_{x\to x_0, x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega} P_2(x)$, $\overline{P_2(x_0)}$ - прямое значение.
Пусть Γ - замкнутая поверхность Ляпунова, $x_0 \in \Gamma$, $\sigma(x) \in C(\Gamma)$.
Тогда

$$P_2^+(x_0) = -\frac{\omega_n(n-2)}{2}\sigma(x_0) + \overline{P_2(x_0)}$$

$$P_2^-(x_0) = \frac{\omega_n(n-2)}{2}\sigma(x_0) + \overline{P_2(x_0)}$$

8 Лекция 22.

Пусть Γ – замкнутая поверхность Ляпунова, тогда для потенциала двойного слоя с $\sigma(x) \equiv 1$ мы получили результат

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash \bar{\Omega} \\ -\frac{(n-2)w_n}{2}, & x \in \Gamma \\ -(n-2)w_n, & x \in \Omega \end{cases}$$

Теорема 8.1. *Пусть Γ – замкнутая поверхность Ляпунова,$\sigma(x) \in C(\Gamma)$, тогда $\forall x_0 \in \Gamma$:*

$$P_2^+(x_0) = \lim_{x \to x_0, x \in \Omega} P_2(x) = -\frac{(n-2)w_n}{2}\sigma(x_0) + \overline{P}_2(x_0)$$

$$P_2^-(x_0) = \lim_{x \to x_0, x \in \mathbb{R}^n \backslash \bar{\Omega}} P_2(x) = \frac{(n-2)w_n}{2}\sigma(x_0) + \overline{P}_2(x_0)$$

Где $\overline{P}_2(x_0)$ – прямое значение в точке x_0.

Доказательство:

$$P_2(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dS_\xi = \int_\Gamma (\sigma(\xi) - \sigma(x_0)) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dS_\xi + \sigma(x_0) \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dS_\xi$$

Первое слагаемое назовем $W_0(x)$,а второе $W(x)$. Если мы докажем непрерывность $W_0(x)$ в точке x_0, то тем самым мы докажем теорему.В самом деле, если $W_0^+(x_0) = W_0^-(x_0) = \bar{W}_0(x_0)$, то $\bar{P}_2(x_0) = \bar{W}_0(x_0) - \sigma(x_0)\frac{(n-2)w_n}{2}$, тогда $P_2^+(x_0) = \bar{W}_0(x_0) - \sigma(x_0)(n-2)w_n = \bar{P}_2(x_0) - \sigma(x_0)\frac{(n-2)w_n}{2}$ и аналогично для $P_2^-(x_0)$.

Докажем непрерывность. Выбросим из Γ маленькую шаровую окрестность Γ', тогда $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$.

$$|W_0(x) - W_0(x_0)| = |W_0'(x) + W_0''(x) - W_0'(x_0) - W_0''(x_0)| \le |W_0'(x)| + |W_0'(x_0)| + |W_0''(x) - W_0''(x_0)|$$

Здесь $W_0'(x)$ - интеграл по Γ', а $W_0''(x)$ - интеграл по Γ''.

$W_0''(x)$ в точке x_0 дифференцируема, поэтому $|W_0''(x) - W_0''(x_0)| \to 0$ при $x \to x_0$.

Функция $\sigma(x)$ непрерывна, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_0\, \forall \eta < \eta_0\, \forall \xi \in \Gamma : |\xi - x_0| < \eta \quad |\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| < \varepsilon$ А значит можно оценить

$$|W_0(x)| \le \varepsilon \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dS \le \varepsilon \cdot Const$$

И уменьшая ε, можно и первые слагаемые сделать сколь угодно малыми. Непрерывность доказана.

8.1 Потенциал простого слоя

Напоминаем: Это

$$P_1(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\, dS_\xi$$

Где $\mu(x) \in C(\Gamma)$, Γ – замкнутая поверхность Ляпунова.

Теорема 8.2. *Потенциал простого слоя непрерывен в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство: Непрерывность может нарушаться только при переходе через Γ. Вначале проверим,что потенциал определен в точках поверхности. Заметим, что $\forall x_0 \in \Gamma$:

$$|P_1(x_0)| \le \max_\Gamma |\mu(x)| \int_\Gamma \frac{1}{|x_0-\xi|^{n-2}}\, dS_\xi = M\Big(\int_{\Gamma'} \frac{1}{|x_0-\xi|^{n-2}}\, dS_\xi + \int_{\Gamma''} \frac{1}{|x_0-\xi|^{n-2}}\, dS_\xi\Big)$$

Где $M = \max_\Gamma |\mu(x)|$, Γ'-пересечение Γ с маленьким шариком с центром в x_0, а Γ'' – оставшаяся часть Γ. Второй интеграл конечен,а конечность первого проверяется переходом к системе координат $r^2 = \rho^2 + \xi_n^2$:

$$\int_{\Gamma'} \frac{1}{|x_0-\xi|^{n-2}}\, dS_\xi = \int_{\Gamma'} \frac{dS_\xi}{r^{n-2}} = \int_{D(x_0)} \frac{d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}}{\rho^{n-2}\cos(\nu_\xi, \xi_n)} \le C \int_0^d \rho^{2-n}\rho^{n-2}\, d\rho = Cd$$

Непрерывность доказывается аналогично предыдущей теореме:

$$|P_1(x) - P_1(y)| \le |P_1'(x)| + |P_1'(y)| + |P_1''(x) - P_1''(y)|$$

Где, как обычно, $P_1'(x)$ и $P_1''(x)$ – соответственно интегралы по $\Gamma' = \Gamma \cap Q_\eta^x, \quad \eta \ll 1$ и по $\Gamma'' = \Gamma \backslash \Gamma'$. Последнее слагаемое стремится к нолю ввиду дифференцируемости P'',а первые в силу оценки

$$|P_1'(x)| \leq M \int_{\Gamma'} \frac{dS_\xi}{|x-\xi|^{n-2}} \leq M\eta$$

и выбора достаточно маленького η

Покажем, что $\forall x \in \mathbb{R}^n$ определена (конечна) нормальная производная

$$\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \, dS_\xi$$

Достаточно проверить существование для $x \in \Gamma$. Аналогично выкладкам для потенциала двойного слоя, $\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} = -\frac{|\cos(r,\nu_\xi)}{r^{n-1}}$,поэтому

$$\Big|\int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \, dS_\xi\Big| \leq M\Big(\int_{\Gamma'} \frac{|cos(r,\nu_x)|}{r^{n-1}} \, dS_\xi + \int_{\Gamma''} \frac{|cos(r,\nu_x)|}{r^{n-1}} \, dS_\xi\Big)$$

Второй интеграл конечен, а первый, в силу сделанной ранее оценки,

$$\int_{\Gamma'} \frac{|cos(r,\nu_x)|}{r^{n-1}} \, dS_\xi \leq C_1 \int_{D(x)} \frac{r^\alpha}{r^{n-1}} \, d\xi_1 \ldots d\xi_n \leq C_2 \int_0^d \rho^{\alpha-n+1} \rho^{n-2} \, d\rho = C_3 d^\alpha$$

следовательно, нормальная производная определена $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

9 Лекция 23.

Теорема 9.1 (О скачке нормальной производной потенциала простого слоя). *Пусть* Γ *– замкнутая поверхность Ляпунова,*$\mu(x)\in C(\Gamma)$*, тогда* $\forall x_0\in\Gamma$*:*

$$\Big(\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}\Big)^+(x_0)=\lim_{\Omega\ni x\to x_0,x\in\nu_x}\Big(\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}\Big)=\frac{(n-2)w_n}{2}\mu(x_0)+\overline{\Big(\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}\Big)}$$

$$\Big(\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}\Big)^-(x_0)=\lim_{\mathbb{R}^n\setminus\bar\Omega\ni x\to x_0,x\in\nu_x}\Big(\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}\Big)=-\frac{(n-2)w_n}{2}\mu(x_0)+\overline{\Big(\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}\Big)}$$

Где $\overline{\Big(\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}\Big)}$ *– прямое значение в точке* x_0*.*

Доказательство:

$$\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}(x)=\int_\Gamma\Big[\mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\Big]\,dS_\xi-\int_\Gamma\mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\,dS_\xi=W_0(x)+W(x)$$

Достаточно доказать непрерывность $W_0(x)$.В самом деле, пусть $W_0^+(x)=W_0^-(x)=\overline{W_0(x)}$. функция $W(x)$ уже была фактически вычислена в предыдущей теореме, поэтому

$$\overline{\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}}(x_0)=\overline{W_0(x_0)}-\overline{P_2(x_0)}$$

$$\Big(\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}\Big)^+(x_0)=\overline{W_0(x_0)}+\mu(x_0)\frac{(n-2)w_n}{2}-\overline{P_2(x_0)}=\overline{\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}}(x_0)+\mu(x_0)\frac{(n-2)w_n}{2}$$

Аналогично,

$$\Big(\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}\Big)^-(x_0)=\overline{W_0(x_0)}-\mu(x_0)\frac{(n-2)w_n}{2}-\overline{P_2(x_0)}=\overline{\frac{\partial P_1}{\partial\nu_x}}(x_0)-\mu(x_0)\frac{(n-2)w_n}{2}$$

Докажем непрерывность $W_0(x)$.Опять рассмотрим разбиение $\Gamma=\Gamma'\cup\Gamma''$,где $\Gamma'=\Gamma\cap Q^x_\eta$, $\eta\ll d$, d – радиус Ляпунова нашей поверхности. Интеграл распадется в сумму двух, причем интеграл по Γ'' непрерывен в точке x_0 и,значит, стремится к нолю при $x\to x_0$.Оценим интеграл по Γ'.

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}=(n-1)\frac{\cos(r,\nu_x)}{|x-\xi|^{n-1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}=(n-1)\frac{\cos(r,\nu_\xi)}{|x-\xi|^{n-1}}$$

То справедливо равенство :

$$\Big|\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\Big|=\frac{(n-2)}{r^{n-1}}\Big|\cos(r,\nu_x)-\cos(r,\nu_\xi)\Big|$$

Введем локальную систему координат $\xi_1,\dots\xi_n$ с центром в x_0. Тогда

$$\cos(r,\nu_x)=\cos(r,\xi_n)$$

$$\cos(r,\nu_\xi)=\sum_{k=1}^{n-1}\cos(r,\xi_k)\cos(\nu_\xi,\xi_k)+\cos(r,\xi_n)\cos(\nu_\xi,\xi_n)$$

Поэтому

$$\frac{(n-2)}{r^{n-1}}\Big|\cos(r,\nu_x)-\cos(r,\nu_\xi)\Big|\le\frac{(n-2)}{r^{n-1}}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}|\cos(\nu_\xi,\xi_k)|+|1-\cos(\nu_\xi,\xi_n)|\Big)$$

Из неравенства $|1-cos\theta|\le\frac{\theta^2}{2}$ и свойства поверхности Ляпунова $|\cos(\nu_\xi,\xi_k)|\le cr_0^\alpha$:

$$\Big|\int_{\Gamma'_\eta}\mu(\xi)\Big[\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\Big]\,dS_\xi\Big|\le M_1\int_{\Gamma'_\eta}\frac{r_0^\alpha}{r^{n-1}}\,dS_\xi$$

Поскольку $r_0^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2 = \rho^2 + \xi_n^2 \le C_1\rho^2$ (Так как $|\xi_n| \le C\rho^{\alpha+1}$), то

$$M_1 \int_{\Gamma'_\eta} \frac{r_0^\alpha}{r^{n-1}}\, dS_\xi \le M_2 \int_{\Gamma'_\eta} \rho^{\alpha-n+1}\, dS_\xi = M_3 \int_0^\eta \rho^{\alpha-n+1}\rho^{n-2}\, d\rho = M_4\eta^\alpha$$

Так что выбрав подходящее η, можно сделать сколь угодно малым и этот интеграл. Это доказывает непрерывность, а значит и всю теорему.

9.1 Постановка краевых задач

D_i **(внутренняя задача Дирихле):**
Пусть Ω - ограниченная область,$\partial\Omega = \Gamma$ - поверхность Ляпунова.

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega \quad u\,|_\Gamma = f(x) \quad f \in C(\Gamma)$$

Решение ищем в классе функций $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
.
D_e **(внешняя задача Дирихле):**

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega} \quad u\,|_\Gamma = f(x) \quad f \in C(\Gamma) \quad u \to 0\,|x| \to \infty$$

Решение также ищем в классе $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
.

Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $x_0 \in \Gamma = \partial\Omega$

Определение: правильная нормальная производная функции u на поверхности Γ – равномерный по x_0 предел (если таковой существует и непрерывен)

$$\lim \Omega \ni x \to x_0, x \in \nu_x \frac{\partial u}{\partial \nu_x}$$

Определение: Γ – регулярная поверхность, если:

1. $\forall x_0 \in \Gamma \quad \nu_{x_0}$
2. В локальной системе координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с началом координат x_0,такой что ξ_n направлено по ν_x, может быть записано $\xi_n = f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ в некоторой окрестности x_0.
3. $f \in C^2(D)$, где D – проекция окрестности x_0 на касательную плоскость.

10 Лекция 24.

10.1 Решение внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана в виде потенциала.

Ω - ограниченная область, $\partial\Omega = \Gamma$ - регулярная поверхность.
Будем искать решение внутренней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью.

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi$$

$$\sigma(x) - \frac{2}{\omega_n(n-2)}\int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi = -\frac{2}{\omega_n(n-2)}\varphi(x) \quad (*)$$

Будем искать решение внешней задачи Неймана в виде потенциала простого слоя.

$$u(x) = \int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi$$

$$\mu(x) - \frac{2}{\omega_n(n-2)}\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi = -\frac{2}{\omega_n(n-2)}\psi(x) \quad (**)$$

В обоих случаях интегральное уравнение имеет вид $\sigma(x) - \lambda T\sigma = f(x)$.
Пусть X - банахово пространство, $T : X \longrightarrow X$ - вполне непрерывен (компактен).
$T^* : X^* \longrightarrow X^*$. $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$u - \lambda Tu = f, \quad f \in X, u \in X \qquad (1)$$

$$v - \bar{\lambda}T^*v = g, \quad g \in X^*, v \in X^* \qquad (2)$$

$$u - \lambda Tu = 0, \quad u \in X \qquad (3)$$

$$v - \bar{\lambda}T^*v = 0, \quad v \in X^* \qquad (4)$$

Определение. λ - *характеристическое число* T, если существует нетривиальное решение (3); это решение будем называть *собственным элементом* T. Размерность пространства решений (3), отвечающих данному характеристическому числу λ, назовем *рангом* λ.

10.1.1 Теоремы Фредгольма.

Теорема 1. Пусть T - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X. Тогда любое характеристическое число T имеет конечный ранг.
Теорема 2. Пусть T - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X. Тогда если λ - характеристическое число T, то $\bar{\lambda}$ - характеристическое число T^* того же ранга.
Теорема 3. Пусть T - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X. Тогда множество характеристических чисел T либо конечно, либо счетно, причем если оно счетно,то имеет единственную предельную точку на бесконечности.
Теорема 4. Пусть T - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X. Тогда (1) разрешимо $\Leftrightarrow$ $f \perp v$, где v - произвольное решение (4).
Теорема 5 (альтернатива Фредгольма) Пусть T - вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда либо (3) имеет только тривиальное решение, и тогда (1) имеет единственное решение $\forall f \in H$, либо (3) имеет нетривиальное решение, и тогда (1) или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений (это зависит от f).
Рассмотрим оператор $T : L_2(\Gamma) \longrightarrow L_2(\Gamma)$.

$$Tu = \int_\Gamma u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi$$

Тот факт, что $Tu \in L_2(\Gamma)$, будет доказан позднее. Тогда

$$T^*v = \int_\Gamma v(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}ds_\xi$$

Обозначим

$$K(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \quad K_1(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial\nu_x}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$$

Легко заметить, что $K_1(\xi, x) = K(x, \xi)$.
покажем, что из разрешимости соответствующих интегральных уравнений следует разрешимость внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.
Рассмотрим сопряженное однородное уравнение

$$\mu(x) - \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi = 0$$

и докажем, что у него есть только тривиальное решение.
Пусть $\mu_0(x) \in L_2(\Gamma)$ - решение нашего уравнения (то,что $\mu_0 \in C(\Gamma)$, мы докажем позже). Можно построить потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(x)$:

$$P_1(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi$$

По свойствам потенциала простого слоя:

$$\Delta P_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$$

$$P_1(x) \longrightarrow 0, \quad |x| \to \infty$$

Поскольку μ_0 - решение нашего уравнения, то $\lim_{x \longrightarrow x_0 \in \Gamma} \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} = 0$, т.е. P_1 - решение внешней задачи Неймана. В силу единственности решения такой задачи получаем $P_1 \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. По свойствам потенциала простого слооя $P_1 \in C(\mathbb{R}^n)$, откуда $P_1 \equiv 0$ на Γ.
Внутри области Ω имеем $\Delta P_1(x) = 0, \quad x \in \Omega$, $P_1(x) = 0, x \in \Gamma$. В силу единственности решения внутренней задачи Дирихле получаем $P_1 \equiv 0$ на Ω.
Итак, $P_1 \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n$. По теореме о скачке нормальной производной потенциала простого слоя $\mu_0(x) \equiv 0$ на Γ, что и требовалось доказать.
По теореме 5 уравнение (**) имеет единственное решение $\forall \psi \in L_2(\Gamma)$, а,значит, и для $\forall \psi \in C(\Gamma)$, т.е. внешняя задача Неймана разрешима. Но тогда $\lambda = \frac{2}{\omega_n(n-2)}$ не является характеристическим числом T^*, следовательно, $\bar{\lambda} = \frac{2}{\omega_n(n-2)}$ не является характеристическим числом T. Отсюда получаем, что внутренняя задача Дирихле разрешима $\forall \varphi \in L_2(\Gamma)$, а,значит, и для $\forall \varphi \in C(\Gamma)$, что и требовалось.
Теперь можно окончательно сформулировать доказанные теоремы.
Теорема. Внутренняя задача Дирихле $(\mathcal{D}_i)$ имеет единственное классическое решение для любой непрерывной граничной функции φ, и это решение представимо в виде потенциала двойного слоя.
Теорема. Внешняя задача Неймана $(\mathcal{N}_e)$ имеет единственное классическое решение для любой непрерывной граничной функции ψ, и это решение представимо в виде потенциала простого слоя.

10.2 Решение внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана в виде потенциала.

Будем искать решение наших задач в таком же виде, что и в предыдущем разделе, где

$$\sigma(x) + \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi = \frac{2}{\omega_n(n-2)} \varphi(x) \quad (*)$$

$$\mu(x) + \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_\xi = \frac{2}{\omega_n(n-2)} \psi(x) \quad (**)$$

Однородное уравнение D_l:

$$\sigma(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int\limits_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dS_\xi = 0, \ x \in \Gamma.$$

Есть нетривиальное решение $\sigma(x) \equiv 1$:

$$\int\limits_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dS_\xi = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}, \ x \in \Gamma$$

Ранг $\lambda = -\frac{2}{(n-2)\omega_n} \geqslant 1 \ \Rightarrow$ у сопряженного однородного уравнения

$$\mu(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int\limits_\Gamma \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dS_\xi = 0, \ x \in \Gamma.$$

Есть нетривиальное решение $\mu_(x)$.
Покажем, что любое нетривиальное решение линейно выражается через это тогда и только тогда, когда $rank\ \lambda = 1$
Пусть $\mu_1(x)$ - другое нетривиальное решение. Построим два потенциала простого слоя:

$$P_1^0(x) = \int\limits_\Gamma \mu_0(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi P_1^1(x) = \int\limits_\Gamma \mu_1(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi$$

$$\begin{cases} \Delta P_1^0(x) = 0,\ x \in \Omega \\ \lim\limits_{x\to x_0\in\Gamma} \frac{\partial P_1^0}{\partial \nu_x} = 0 \end{cases}$$

Т.е P_1^0 есть решение $N_i \Rightarrow P_1^0 \equiv c_0 = const,\ x \in \Omega$
То же самое относится к $P_1^1 \Rightarrow P_1^1 \equiv c_1 = const,\ x \in \Omega$
Возьмем плотность $\tilde{\mu} = c_1\mu_0(x) - c_0\mu_1(x)$ и рассмотрим потенциал простого слоя

$$P_1(x) = \int\limits_\Gamma \tilde{\mu}(\xi)\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi = c_1c_0 - c_0c_1 = 0,\ x \in \Omega$$

$P_1 \equiv 1,\ x \in \Omega \Rightarrow P_1 \equiv 0,\ x \in \Gamma$; $\Delta P_1 = 0,\ x \in \mathbb{R}^n/\overline{\Omega},\ P_1 \to 0,\ |x| \to \infty$
В силу единственности решения $D_l,\ P_1 \equiv 0,\ x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \tilde{\mu},\ x \in \Gamma \Rightarrow \mu_0, \mu_1$ линейно независимы.
Согласно теореме Фредгольма (**) разрешимо $\Leftrightarrow \psi$ ортогональна константе:

$$(\psi, 1)_{L_2(\Gamma)} = \int_\Gamma \psi dS = 0 \text{ - условие разрешимости необходимое и достаточное}$$

Теорема 3
Внутренняя задача Неймана (N_i) имеет (классическое) решение для тех и только для тех непрерывных ограниченных функций $\psi(x)$, для которых $\int_\Gamma \psi(x)dS = 0$. Если есть решение, то оно единственное, с точностью до прибавления постоянной.
D_l : согласно теореме Фредгольма (*) разрешимо $\Leftrightarrow$
$(\varphi, \mu_0)_{L_2(\Gamma)},\ \mu_0(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n}\int\limits_\Gamma \mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi = 0$
Решение $D_l\ \exists\ \forall\ \varphi \in C(\Gamma)$, но в общем случае его нельзя найти в виде потенциала двойного слоя.
Для (φ, μ_0) все хорошо.
В общем случае ищем решение в виде (считаем, что $0 \in \Omega$)

$$u(x) = \int\limits_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi + \frac{1}{|x|^{n-2}}\int_\Gamma \sigma(\xi)dS_\xi$$

Тогда на границе

$$\varphi(x) - \frac{1}{|x|^{n-2}}\int_\Gamma \sigma(\xi)dS_\xi = (\text{теорема о скачке}) =$$

$$= \frac{(n-2)\omega_n}{2}\sigma(x) + \int\limits_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi,\ x \in \Gamma$$

$$\sigma(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n}\int\limits_\Gamma \sigma(\xi)(\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} + \frac{1}{|x|^{n-2}})dS_\xi = \frac{2}{(n-2)\omega_n}\varphi(x),\ x \in \Gamma$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$\sigma(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n}\int\limits_\Gamma \sigma(\xi)(\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} + \frac{1}{|x|^{n-2}})dS_\xi = 0$$

Докажем, что $\sigma \equiv 0$.
Пусть существует решение $\sigma_0 \in L_2(\Gamma)(\Rightarrow C(\Gamma) -$ докажем дальше):

$$u_0(x) = \int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi + \frac{1}{|x|^{n-2}}\int_\Gamma \sigma_0(\xi)dS_\xi$$

$\Delta u_0 = 0$ вне $\overline{\Omega}$; $u_0(x) \to 0,\ x \to \infty;\ u_0|_\Gamma = 0.$
В силу единственности решения $D_l:\ u_0 \equiv 0,\ x \in \mathbb{R}^n/\overline{\Omega}$ имеем

$$\int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi + \frac{1}{|x|^{n-2}}\int_\Gamma \sigma_0(\xi)dS_\xi = 0$$

Умножим обе части уравнения на $|x|^{n-2}$, устремим $x \to \infty$ и воспользуемся тем, что $|P_2(x)| \leqslant \frac{c}{|x|^{n-1}}$ получаем, что

$$\int_\Gamma \sigma_0(\xi)dS_\xi = 0$$

Вспоминая уравнение для σ_0 получаем (т.к $\int_\Gamma \sigma_0(\xi)\frac{1}{|x|^{n-2}}dS_\xi = 0$)

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n}\int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}dS_\xi = 0$$

Как мы уже доказали, в таком случае $\sigma_0(\xi) \equiv c = const$. Подставляя, получаем $\int_\Gamma c dS_\xi = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \sigma_0 \equiv 0$, что и требовалось.
Теперь по теореме Фредгольма неоднородное уравнение разрешимо $\forall \varphi \in C(\Gamma)$.

Теорема 4.
Внешняя задача Дирихле D_l имеет единственное (классическое) решение для любой непрерывной граничной функции φ и это решение представляется в виде (выше).

11 Лекция 25.

$$T : L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma),\ Tu = \int\limits_{\Gamma} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} dS_\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} = K(\xi,\varepsilon) = -(n-2)\frac{\cos{(r,\nu_\xi)}}{r^{n-1}}$$

$|\cos(r,\nu_\xi)| \leqslant |x-\xi|^\alpha$, Γ - поверхность Ляпунова с показателем α.

$$K(\xi,\varepsilon) = -(n-2)\frac{\cos{(r,\nu_\xi)} r^{-\alpha/2}}{r^{n-1-\alpha/2}} = \frac{A(x,\xi)}{r^{n-1-\alpha/2}}$$

$$Tu \equiv \int_\Gamma \frac{A(x,\xi)}{r^{n-1-\alpha/2}} u(\xi) dS_\xi \text{ - операторы со слабой обобенностью}$$

$A(x,\xi) \in C(\Gamma \times \Gamma)$- продолжение по непрерывности.
Пусть $u \in L_2(\Gamma),\ \beta = \alpha/2$, тогда

$$||Tu||^2_{L_2(\Gamma)} = \int_\Gamma (\int_\Gamma \frac{A(x,\xi)}{r^{n-1-\beta}} u(\xi) dS_\xi)^2 dS_x$$

$$\left(\int_\Gamma \frac{A(x,\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} dS_\xi\right)^2 \leqslant \int_\Gamma \left(\frac{A(x,\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}}\right)^2 dS_\xi \int_\Gamma \left(\frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}}\right)^2 dS_\xi$$

$|A(x,\xi)| \leqslant M_0,\ x,\xi \in \Gamma\ \eta \leqslant d$- радиус сферы.

$$\int_\Gamma \frac{A(x,\xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_\xi \leqslant M_0^2 \left(\int_{\Gamma'_\eta} \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}} + \int_{\Gamma''_\eta} \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}}\right)$$

$$\int_{\Gamma''_\eta} \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}} \leqslant \infty$$

$$\int_{\Gamma'_\eta} \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}} \leqslant C_0 \int_0^\eta \rho^{1+\beta-n} \rho^{n-2} d\rho \leqslant \infty \Rightarrow \int_\Gamma \frac{A(x,\xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_\xi \leqslant \infty$$

$$||Tu||^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant M_1 \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{u^2(\xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_\xi dS_x = M_1 \int_\Gamma u^2(\xi) \left(\int_\Gamma \frac{dS_x}{r^{n-1-\beta}} dS_\xi\right) \leqslant$$

$$\leqslant M_1 M_2 \int_\Gamma u^2(\xi) dS_\xi = M_1 M_2 ||u||^2_{L_2\Gamma} \Rightarrow Tu \in L_2(\Gamma), T \text{ — ограничен.}$$

Теорема 4.
Т - вполне непрерывен.
Доказательство.
$\{T_n\},\ T_n : X \to X$ (банахово), T_n компактны, $T_n \xrightarrow{||\cdot||} T,\ T : X \to X \Rightarrow T$ компактен.
$T = T^1_\varepsilon + T^2_\varepsilon$

$$K^1_\varepsilon(x,\xi) = \begin{cases} K(x,\xi),\ |x-\xi| < \varepsilon \\ 0, |x-\xi| \geqslant \varepsilon \end{cases} \quad K^2_\varepsilon(x,\xi) = \begin{cases} K(x,\xi),\ |x-\xi| \geqslant \varepsilon \\ 0, |x-\xi| < \varepsilon \end{cases}$$

При фиксированном $\varepsilon,\ T^2_\varepsilon$ - фредгольмов, т.к $|K^2_\varepsilon| \leqslant K_0$ Осталось доказать, что $||T^1_\varepsilon|| \to 0,\ \varepsilon \to +0$.

$$||T^1_\varepsilon u||^2_{L_2(\Gamma)} = \int_\Gamma \left(\int_{\Gamma'_\varepsilon} K(x,\xi) u(\xi) dS_\xi\right)^2 dS_x$$

$$\left(\int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{A(x,\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} dS_\xi\right)^2 \leqslant \int_{\Gamma'_\varepsilon} \left(\frac{A(x,\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}}\right)^2 dS_\xi \int_{\Gamma'_\varepsilon} \left(\frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}}\right)^2 dS_\xi$$

$$\int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{A(x,\xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_\xi \leqslant M \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}} \leqslant M \int_0^\varepsilon \rho^{1+\beta-n} \rho^{n-2} d\rho = M_2 \varepsilon^\beta$$

$$||T^1_\varepsilon u||^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant M_2\varepsilon^\beta \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{u^2(\xi)}{r^{n-1-\beta}}dS_\xi dS_x = M_2\varepsilon^\beta \int_\Gamma \left(\int_\Gamma \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}}\right) u^2(\xi)dS_x \leqslant M_3\varepsilon^\beta ||u||^2_{L_2(\Gamma)}$$

Теорема 2

Пусть $u(x) \in L_2(\Gamma)$ решение интегрального уравнения со слабой особенностью:

$$u(x) - \int_\Gamma \frac{A(x,\xi)}{r^{n-1-\beta}} u(\xi)dS_\xi = \varphi(x),\ A(x,\xi) \in C(\Gamma\times\Gamma),\ \varphi(x) \in C(\Gamma),\ \beta > 0$$

Тогда $u \in C(\Gamma)$. *Доказательство.*
$T = T^1_\varepsilon + T^2_\varepsilon,\ K^1_\varepsilon(x,\xi) = K(x,\xi)\eta(|x-\xi|),\ K^2_\varepsilon(x,\xi) = K(x,\xi)(1-\eta(|x-\xi|)),$
$\eta-$ "шапочка до "ε. $u(x) - T^1_\varepsilon = T^2_\varepsilon + \varphi =: g(x),\ ||T^1_\varepsilon|| < M\varepsilon^{\beta/2},\ \varepsilon << 1$
$T^2_\varepsilon u$ непрерывен, т.к $K^2_\varepsilon \in C^\infty \Rightarrow g(x) \in C(\Gamma)$
$(Id - T^1_\varepsilon)u = g(x) \in C(\Gamma), ||T^1_\varepsilon|| < 1.$

Теорема Банаха.

A - линейный ограниченный оператор на банаховых пространствах и норма A меньше 1, тогда существует ограниченный оператор $(Id-A)^{-1}$ и при этом $(Id-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$
продолжим доказательство
$u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (T^1_\varepsilon)^n g(x);\ (T^1_\varepsilon)^n g(x) \in C(\Gamma)$

$$|T^1_\varepsilon g| \leqslant \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{|A(x,\xi)|}{r^{n-1-\beta}}|g(\xi)|dS_\xi,\ |g(\xi)| \leqslant M_0,\ |A(x,\xi)| \leqslant M_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |T^1_\varepsilon g| \leqslant M_0 M_1 \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}}, \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}} \leqslant M_2\varepsilon^\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_x |T^1_\varepsilon g| \leqslant M_0M_1M_2\varepsilon^\beta$$

$$|(T^1_\varepsilon)^2 g| = |T^1_\varepsilon(T^1_\varepsilon g))| \leqslant (M_0M_1M_2\varepsilon^\beta)^2$$

$$|(T^1_\varepsilon)^n g| \leqslant (M_0M_1M_2\varepsilon^\beta)^n$$

Берем $\varepsilon:\ M_0M_1M_2\varepsilon^\beta = q < 1$ тогда исходный ряд будет сходится равномерно $\Rightarrow u \in C(\Gamma)$

11.1 Вариационный метод решения задачи Дирихле.

Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n,\ H' \subset H_1(\Omega)$ произвольное подпространство - линейное подпространство, на котором задано (.,.), и оно эквивалентно (.,.) на $H_1(\Omega)$, причем H' полно относительно (.,.) $c||u||_{H_1} \leqslant ||u||_{H'} \leqslant C||u||_{H_1}$.
Рассмотрим:
$E: H' \to \mathbb{R},\ Eu = ||u||^2_{H'} + 2(f,u)_{L_2},\ f \in L_2(\Omega)$ фиксирована.

$$|(f,u)_{L_2(\Omega)}| \leqslant ||f||_{L_2(\Omega)}||u||_{L_2(\Omega)} \leqslant ||f||_{L_2(\Omega)}||u||_{H_1(\Omega)} \leqslant c||f||_{L_2(\Omega)}||u||_{H'}$$

$$Eu = ||u||^2_{H'} + 2(f,u)_{L_2} \geqslant ||u||^2_{H'} - 2c||f||_{L_2(\Omega)}||u||_{H'} = (|u||_{H'} - ||f||_{L_2})^2 - c^2||f||_{L_2} \geqslant -c^2||f||_{L_2}$$

$\Rightarrow \inf\limits_{H'} Eu < -\infty,\ \exists v_n:\ \lim\limits_{m\to\infty} E(v_m) = d$ - минимизирующая последовательность.
$u \in H'$ называется элементом, реализующим $minE$ на H', если $Eu = d$

Лемма.

Для любого подпраcтранства H' пространства $H(\Omega)$ $\exists!$ элемент $u \in H'$, реализующий минимум функционала E на H'.
Любая минимизирующая последовательность сходится к этому элементу.
Доказательство леммы
$\{v_m\}$ минимизирующая последовательность. $\forall\varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon)\ \forall m > M\ d \leqslant Ev_m < d + \varepsilon$

$$||\frac{v_m \pm v_n}{2}||^2_{H'} = \frac{1}{4}||v_m||^2_{H'} + \frac{1}{4}||v_n||^2_{H'} \pm \frac{1}{2}(v_m,v_n)_{H'}$$

$$||\frac{v_m - v_n}{2}||^2_{H'} = \frac{1}{2}||v_m||^2_{H'} + \frac{1}{2}||v_n||^2_{H'} - ||\frac{v_m + v_n}{2}||^2_{H'} = \frac{1}{2}E(v_n) + \frac{1}{2}E(v_n) - E(\frac{v_n + v_m}{2})$$

$m, n \geqslant M, \Rightarrow ||\frac{v_m - v_n}{2}||^2_{H'} < \frac{1}{2}(d+\varepsilon) + \frac{1}{2}(d-\varepsilon) - d = \varepsilon \Rightarrow \{v_m\}$ фундаментальная, тогда сходится по норме в H', т.к они эквивалентны
$v_m \xrightarrow{||\cdot||_{H'}} \Rightarrow Eu = d$. Единственность очевидна.

12 Лекция 26

12.1 Метод Ритца

Возьмем в H' произвольную линейно независимую систему функций $\phi_1, \ldots, \phi_k, ...$, линейная оболочка которой плотна в H'. обозначим через R_k линейную оболочку первых k функций из этой системы. Мы знаем, что $\exists! v_k \in R_k : \ \min_{R_k} E(u) = E(v_k)$. Ищем $v_k = \sum_{j=1}^k c_j^k \phi_j$.ВВедем функцию

$$F(c_1, \ldots, c_k) = E(\sum_{j=1}^k c_j^k \phi_j)$$

В точке минимума должны выполняться условия $\frac{\partial F}{\partial c_j} = 0 \ \forall j = 1, \ldots, k$, что эквивалентно системе линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^k c_i(\phi_i, \phi_j)_{H'} + (f, \phi_j)_{L_2(\Omega)} \quad j = 1, \ldots, k$$

Определитель системы представляет собой определитель Грамма для системы $\phi_1, \ldots, \phi_k$ и не равен нолю в силу их линейной независимости. Поэтому существует решение $c_1^k, \ldots, c_k^k$, и элемент $v_k = \sum_{j=1}^k c_j^k \phi_j$, реализующий минимум на R_k.

Последовательность $\{v_k\}$ называется *последовательностью Ритца.*

Теорема 12.1. *Последовательность Ритца является минимизирующей функционал $E(\cdot)$ на подпространстве H' последовательностью.*

Доказательство:
Имеем

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots$$
$$E(v_1) \geq E(v_2) \geq E(v_3) \geq \ldots \geq d$$

Так как система $\{\phi_k\}$ полна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) \ \exists u_\varepsilon(x) = C_1(\varepsilon)\phi_1 + \ldots + C_{K(\varepsilon)}\phi_{K(\varepsilon)} \in R_{K(\varepsilon)} \ : \ ||u - u_\varepsilon||_{H'} < \varepsilon$$

Где $E(u) = d$.Рассмотрим

$$E(u_\varepsilon) = ||u_\varepsilon||^2_{H'} + 2(f, u_\varepsilon)_{L_2} = ||u_\varepsilon - u + u||^2_{H'} + 2(f, u_\varepsilon - u)_{L_2} + 2(f, u)_{L_2} =$$
$$= E(u) + E(u_\varepsilon - u) + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leq d + ||u_\varepsilon - u||^2_{H'} + 2(f, u_\varepsilon - u)_{L_2} + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leq d + \varepsilon^2 + C_0\varepsilon \leq$$
$$\leq d + C_1\varepsilon$$

Получили $E(u_\varepsilon) \leq d + C_1\varepsilon$, Но $d \leq E(v_{K_\varepsilon}) \leq E(u_\varepsilon) \leq d + C_1\varepsilon$, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) \ \forall s > K(\varepsilon) \quad d \leq E(v_s) \leq d + C_1\varepsilon$, откуда $\lim_{s\to\infty} E(v_s) = d$. Что и требовалось доказать.

Итак, пусть $E(u) = d$ – минимум функционала в H'. Рассмотрим функцию $w(t) = u + tw$, где $t \in \mathbb{R}, \ w \in H'$, и многочлен

$$P(t) = E(u + wt) = ||u + tw||^2_{H'} + 2(f, u + tw)_{L_2} =$$
$$= ||u||^2_{H'} + 2(f, u)_{L_2} + 2t(u, w)_{H'} + t^2||w||_{H'} + 2t(f, w)_{L_2} \geq d \quad \forall t$$

Кроме того, $P(0) = E(u) = d$, значит $P'(0) = 2(u, w)_{H'} + (f, w)_{L_2} = 0 \ \forall w \in H'$.

Рассмотрим $H' = H_1^0(\Omega)$, тогда это соотношение примет вид

$$(u, w)_{H'} = (u, w)_{H_1^0(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx = -\int_\Omega f w \, dx \quad \forall w \in H_1^0(\Omega)$$

Тогда $u \in H_1^0(\Omega)$ есть обобщенное решение задачи Дирихле.

Подведем итог.

Теорема 12.2. *Существует единственная функция ,реализующая минимум функционала на. Если скалярное произведение на задается формулой ,то эта функция является обобщенным решением задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = f, \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u \in H_1^0(\Omega), \quad f \in L_2(\Omega) \end{cases}$$

Последовательность Ритца может быть рассмотрена как последовательность, приближающая решение.

12.2 Уравнение теплопроводности

Рассмотрим дифференциальный оператор (теплопроводности):

$$Tu = u_t - \Delta_x u$$

тогда сопряженный оператор

$$T^* v = -v_t - \Delta_x v$$

Уравнение теплопроводности имеет вид $Tu = f(x,t)$, где $x \in \Omega$ – ограниченная область, $t \geq 0$.

Для уравнения теплопроводности имеет место аналог формулы Грина: пусть

$$u, v \in C^{2,1}(\tilde{\omega}_\tau) \cap C^1(\overline{\omega}_\tau),$$

где

$$\tilde{\omega}_\tau = \big\{(x,t) \,\big|\, x \in \Omega,\ 0 < t \leq \tau\big\}$$
$$\omega_\tau = \big\{(x,t) \,\big|\, x \in \Omega,\ 0 < t < \tau\big\}$$

здесь $C^{2,1}$ – пространство функций, дважды дифференцируемых по x и один раз по t. Тогда

$$\int_{\omega_\tau} (vTu - uT^*v)\, dxdt = \int_{\omega_\tau} (vu_t + uv_t - v\Delta u + u\Delta v)\, dxdt =$$

$$= \int_\Omega u(x,\tau)v(x,\tau)\, dx - \int_\Omega u(x,0)v(x,0)\, dx + \int_{S_\tau} \big(u\frac{\partial v}{\partial \nu} + v\frac{\partial u}{\partial \nu}\big)\, dS$$

Проверим, что фундаментальным решение для оператора теплопроводности является

$$\Gamma(x, x_0, t, t_0) = \frac{\theta(t-t_0)}{(2\sqrt{\pi(t-t_0)})^n} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}}$$

То есть нужно проверить

$$\big(T_{x,t}\Gamma(x,x_0,t,t_0), f(x,t)\big) = \big(\Gamma(x,x_0,t,t_0), T^* f(x,t)\big) = f(x_0,t_0)$$

Убедимся, что $\Gamma \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \int\limits_{t_0}^{t_0+R} \int\limits_{|x-x_0|< C} \frac{1}{|t-t_0|^{n/2}} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}}\, dxdt\Bigg|_{\xi = \frac{x-x_0}{2\sqrt{t-t_0}}} = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{t_0}^{t_0+R} \int\limits_{|\xi|<\frac{C}{2\sqrt{t-t_0}}} e^{-|\xi|^2}\, d\xi dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{t_0}^{t_0+R} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\, d\xi dt = R$$

То есть

$$\big(\Gamma(x,x_0,t,t_0), T^* f(x,t)\big) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma(x,x_0,t,t_0) T^* f(x,t)\, dxdt =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{t_0+\varepsilon}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,x_0,t,t_0) T^* f(x,t)\, dxdt =$$

Пользуясь формулой Грина,

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} T\Gamma(x,x_0,t,t_0) Tf(x,t)\, dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,x_0,t_0+\varepsilon,t_0) f(x,t_0+\varepsilon)\, dx \Big)$$

Упражнение: Для любого $t > t_0$ $T\Gamma = 0$.

Используя этот факт, пишем:

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,x_0,t_0+\varepsilon,t_0) f(x,t_0+\varepsilon)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\sqrt{\pi\varepsilon})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4\varepsilon}} f(x,t_0+\varepsilon)\, dx\Bigg|_{\xi = \frac{x-x_0}{2\sqrt{\varepsilon}}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} f(x_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi, t_0+\varepsilon)\, d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \Big\{ \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{|\xi|>N} e^{-|\xi|^2} (f(x_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi, t_0+\varepsilon) - f(x_0,t_0))\, d\xi + \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{|\xi|<N} e^{-|\xi|^2} (f(x_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi, t_0+\varepsilon) - f(x_0,t_0))\, d\xi \Big\}$$

$$+ f(x_0,t_0)$$

Покажем, что интегралы стремятся к нолю:

$$M = \sup_{\mathbb{R}^n} |f(x,t)| < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \frac{M}{\pi^{n/2}} \int\limits_{|\xi|>N} e^{-|\xi|^2}\, d\xi < \varepsilon/2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad \forall x,t : |x-x_0| < \delta, |t-t_0| < \delta \quad |f(x,t) - f(x_0,t_0)| < \varepsilon$$

Возьмем $2\sqrt{\varepsilon}N < \delta, \varepsilon < \delta$, тогда и второй интеграл меньше ε,что мы и хотели показать. Итак, мы доказали, что $\Gamma(x, x_0, t, t_0)$ является фундаментальным решением.

Теорема 12.3 (Принцип максимума в ограниченной области). *Пусть $u(x,t)$ - решение уравнения $Tu = 0$ в слое $\tilde{w}_\tau$, принадлежащее классу $C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w_\tau})$. Тогда $\forall (x,t) \in \tilde{w}_\tau$:*

$$\min_{\sigma_\tau} u(x,t) \le u(x,t) \le \max_{\sigma_\tau} u(x,t)$$

Где $\sigma_\tau = \Omega \cup S_\tau$, S_τ – боковая поверхность цилиндра.

Доказательство:

Достаточно доказать, что $\min_{\sigma_\tau} u(x,t) \le u(x,t)$, потому что применив это рассуждение к функции $v = -u$, получим утверждение для максимума.

Из непрерывности u $\exists M > 0 : |u(x,t)| < M$ в $\overline{w_\tau}$. Выберем M_1 такое, что

$$v(x,t) = u(x,t) - M_1 < 0 \quad \forall (x,t) \in \overline{w_\tau}$$

Тогда $Tv = 0$ в $\tilde{w}_\tau$ и $v < 0$ в $\overline{w_\tau}$. Положим $v = e^{\gamma t} w$, $\gamma = const > 0$. Покажем, что минимум отрицательного значения w может достигаться лишь на σ_τ. Предположим противное: $\exists (x_0,t_0) \in \tilde{w}_\tau \ : \ 0 > w(x_0,t_0) = \min_{\overline{w_\tau}} w(x,t)$. Ясно, что $w(x,t) < 0$ в $\overline{w_\tau}$, $\frac{\partial w}{\partial x_j}(x_0,t_0) = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t}(x_0,t_0) \le 0$, а $\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}(x_0,t_0) \ge 0$. Но тогда

$$Tv\Big|_{(x_0,t_0)} = \Big(\gamma e^{\gamma t} w(x,t) + e^{\gamma t} \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) - e^{\gamma t} \Delta w(x,t)\Big)\Big|_{(x_0,t_0)} < 0$$

Что противоречит равенству $Tv = 0$.

Следовательно

$$w(x,t) \ge \min_{\sigma_\tau} w(x,t)$$

Или, что то же самое,

$$e^{-\gamma t} v(x,t) \ge \min_{\sigma_\tau} e^{-\gamma t} v(x,t)$$

Переходя к пределу при $\gamma \to 0$ получаем $v(x,t) \ge \min_{\sigma_\tau} v(x,t)$, а отсюда и требуемое неравенство для $u(x,t)$.

13 Лекция 27.

13.1 Принципы максимума

Теорема 13.1 (Принцип максимума в неограниченной области). *Пусть $u(x,t)$ - решение уравнения $Tu = 0$ в слое $G_\tau = \left\{ (x,t) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n,\, 0 < t \le \tau \right\}$, принадлежащее классу $C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$. Предположим, что $\forall (x,t) \in G_\tau \quad |u(x,t)| \le M$. Тогда $\forall (x,t) \in G_\tau$:*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0) \le u(x,t) \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0)$$

Доказательство:
Обозначим

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0),\ m_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0)$$

Введем вспомогательную функцию $v(x,t) = |x|^2 + 2nt$. Легко видеть, что в G_τ $Tv = v_t - \Delta|x|^2 = 2n - 2n = 0$. Введем еще функции

$$W_1(x,t) = M_0 - u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$$

$$W_2(x,t) = M_0 - u(x,t) - \varepsilon v(x,t)$$

Заметим, что $TW_1 = TW_2 = 0$ в G_τ, и кроме того

$$W_1(x,0) = M_0 - u(x,0) + \varepsilon |x|^2 \ge 0$$

$$W_2(x,0) = m_0 - u(x,0) - \varepsilon |x|^2 \le 0$$

Далее, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R(\varepsilon) \quad \forall x : |x| \ge R(\varepsilon) \quad W_1(x,t) \ge 0,\, W_2(x,t) \le 0$ Теперь применим принцип максимума для ограниченной области к функциям W_1 и W_2 в области G_τ:

$$W_1(x,t) \ge 0, \quad W_2(x,t) \le 0 \qquad (x,t) \in G_\tau$$

Что равносильно

$$m_0 - \varepsilon v(x,t) \le u(x,t) \le M_0 + \varepsilon v(x,t) \qquad \forall (x,t) \in G_\tau$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим утверждение теоремы.

Теорема 13.2 (строгий принцип максимума). *Пусть функция $u(x,t)$ в цилиндре $\tilde{w}_\tau = \left\{ (x,t) \,\middle|\, x \in \Omega,\, 0 < t \le \tau \right\}$ удовлетворяет уравнению $Tu = 0$, принадлежит классу $C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$ и принимает в точке $(x_0,t_0) \in \tilde{w}_\tau$ наибольшее значение, то $u(x,t) \equiv u(x_0,t_0) = const$ в цилиндре $\tilde{w}_{\tau_0} = \tilde{w}_\tau \cap \{t \le \tau_0\}$.*

Доказательство:
Предположим противное. Пусть $u(x_1,t_1) < u(x_0,t_0) := M$, где $t_1 < t_0$. Соединим точки (x_0,t_0) и (x_1,t_1) ломаной, содержащейся в $\tilde{w}_\tau$ с вершинами в точках $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} = t_0$, причем $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = t_0$. Если мы докажем, что из неравенства $u(x_s,t_s) < M$ следует $u(x_{s+1},t_{s+1}) < M$, то, двигаясь по ломаной, получим $u(x_0,t_0) < M$ – противоречие, и теорема будет доказана.

Пусть точки (x_s,t_s) и (x_{s+1},t_{s+1}) лежат на прямой

$$x_j = k_j t + a_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

Рассмотрим цилиндр $P(x,t) < \rho^2$, где $P(x,t) = \sum_{j=1}^n (x_j - k_j t - a_j)^2$. Выберем $\rho > 0 : u(x,t_s) < M - \varepsilon_1 \quad \forall x : P(x,t_s) < \rho^2$. Построим вспомогательную функцию

$$v(x,t) = e^{-\gamma t}(\rho^2 - P(x,t))^2, \quad \gamma > 0$$

Тогда

$$Tv = e^{-\gamma t}(-\gamma(\rho^2 - P)^2 - 2(\rho^2 - P)\frac{\partial P}{\partial t} + 4n(\rho^2 - 8P) - 8P$$

Покажем, что можно γ выбрать настолько большим, что $Tv < 0$ внутри цилиндра. Действительно, на боковой поверхности цилиндра $Tv = -8e^{-\gamma t}\rho^2 < 0$, поэтому неравенство справедливо и в некоторой δ-окрестности поверхности. Если же $P(x,t) < \rho^2 - \delta$, то $\rho^2 - P(x,t) > \delta$ и при достаточно большом γ первый член в скобках будет больше по модулю, чем сумма модулей остальных членов, то есть $Tv < 0$ внутри цилиндра. Рассмотрим функцию

$$W(x,t) = M - u(x,t) - \alpha v(x,t)$$

Ясно, что $TW = -\alpha Tv > 0$ в цилиндре. Тогда по принципу максимума для ограниченной области,

$$W(x,t) \geq \min_{\sigma} W(x,t)$$

Где σ – "наклонный стакан"(боковая поверхность плюс нижнее основание нашего цилиндра).На боковой поверхности цилиндра $W(x,t) = M - u(x,t) > 0$, а на нижнем основании $W(x,t_s) = M - u(x,t_s) - \alpha v(x,t_s) \geq \varepsilon_1 - \alpha v(x_t,s) > 0$, при достаточно маленьком α. Значит, и во всем цилиндре $W(x,t) \geq 0$, в частности $W(x_{s+1},t_{s+1}) \geq 0$, то есть

$$u(x_{s+1},t_{s+1}) \leq M - \alpha v(x_s,t_s) < M$$

Что и хотели доказать.

Теорема 13.3 (о стабилизации). *Пусть* $u(x,t) \in C^{2,1}(w_\infty) \cap C(\overline{w}_\infty)$ *– решение уравнения* $Tu = 0$,

$$w_\infty = \left\{ (x,t) \,\middle|\, x \in \Omega,\, 0 < t < \infty, \right\}$$

$$S_\infty = \left\{ (x,t) \,\middle|\, x \in \partial\Omega,\, 0 < t < \infty, \right\}$$

Пусть $u|_{S_\infty} = 0$, *тогда* $u(x,t) \to 0 \quad t \to \infty$ *равномерно по всем* $x \in \overline{\Omega}$

Доказательство:

Для удобства положим $0 \in \Omega$. Рассмотрим функцию

$$v(x,t) = e^{-at} \prod_{j=1}^{n} \cos bx_j, \quad a > 0$$

Поскольку $v_t = -av$ и $v_{x_jx_j} = -b^2 v$, то $Tv = (nb^2 - a)v$. Следовательно при $a = nb^2$ $v(x,t)$ – решение уравнения теплопроводности. Выберем b настолько малым, что

$$\Omega \subset \left\{ |x_j| < \frac{\pi}{4b}, \quad j = 1, \dots, n \right\}$$

Внутри этого параллелепипеда $v(x,0) > 0$, поэтому (из непрерывности u и v) $\exists M > 0 : |u(x,0)| < v(x,0), \quad x \in \Omega$. Кроме того, $v|_{S_\infty} > 0$. Рассмотрим функции

$$W_1(x,t) = Mv(x,t) - u(x,t)$$

$$W_2(x,t) = Mv(x,t) + u(x,t)$$

Очевидно, $TW_1 = TW_2 = 0$, при этом M мы выбрали так, что $W_1(x,0) = Mv(x,0) + u(x,0) \geq 0$ и кроме того, $W_1|_{S_\infty} > 0$, отсюда по принципу максимума $W_1(x,t) \geq 0, \quad x \in \overline{w}_\infty$, то есть $u(x,t) \leq Mv(x,t)$. Аналогично применяя принцип максимума к W_2, получаем $-u(x,t) \leq Mv(x,t)$. Итак,

$$|u(x,t)| \leq Mv(x,t) \quad x \in \overline{w}_\infty$$

Но $v(x,t)$ убывает к нолю равномерно по $x \in \overline{\Omega}$, так что теорема доказана.

13.2 Начально-краевые задачи

1) Первая начально-краевая задача:

$C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$

$Tu = f(x,t) \quad (x,t) \in \tilde{w}_\tau$

$u|_{S_\tau} = \psi(x,t), \quad S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$

$u|_{t=0} = \varphi(x)$

Здесь f, ψ, φ – заданные непрерывные функции.

2) Вторая начально-краевая задача:

$C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$

$Tu = f(x,t) \quad (x,t) \in \tilde{w}_\tau$

$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{S_\tau} = \psi(x,t)$

$u|_{t=0} = \varphi(x)$

Здесь f, ψ, φ – заданные непрерывные функции, а поверхность $\partial\Omega$ – регулярна.

3) Третья начально-краевая задача:
$C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$
$Tu = f(x,t) \quad (x,t) \in \tilde{w}_\tau$
$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x,t)u\right)|_{S_\tau} = \psi(x,t)$
$u|_{t=0} = \varphi(x)$
Здесь f, a, ψ, φ – заданные непрерывные функции, а поверхность $\partial\Omega$ – регулярна.

4) Задача Коши:
$C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G}_\tau)$
$Tu = f(x,t) \quad (x,t) \in G_\tau = \mathbb{R}^n \times (0,\tau]$
$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$
Здесь f, φ – заданные непрерывные функции.

13.3 Теоремы единственности

Теорема 13.4. *Первая краевая задача для оператора теплопроводности имеет единственное решение.*
Доказательство:
Как обычно, рассмотрим разность $v = u_1 - u_2$ двух решений этой задачи. Тогда $Tv = 0, \quad v|_{S_\tau} = 0, \quad v|_{t=0} = 0.$ Согласно принципу максимума для ограниченных областей,

$$0 = \min_{\sigma_\tau} v(x,t) \leq v(x,t) \leq \max_{\sigma_\tau} v(x,t) = 0$$

Поэтому $v(x,t) = 0$ в $\tilde{w}_\tau$ и единственность доказана.

Теорема 13.5. *Задача Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций имеет единственное решение.*
Доказательство:
Рассмотрим разность $v = u_1 - u_2$ двух решений этой задачи. Тогда $Tv = 0, \quad v|_{t=0} = 0, |v| \leq M$ для $v \in G_\tau$. Согласно принципу максимума для неограниченных областей,

$$0 = \min_{\mathbb{R}^n} v(x,0) \leq v(x,t) \leq \max_{\mathbb{R}^n} v(x,0) = 0$$

Поэтому $v(x,t) = 0$ в G_τ и единственность доказана.