Варианты и программа экзамена по УрЧП

Лектор В. А. Кондратьев

V–VI семестры, 2005–2006 г.

1 Программа экзамена

1. Постановка задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Формулировка теоремы Коши. Доказательство единственности аналитического решения задачи Коши.
2. Определение характеристик линейного уравнения с частными производными. Обобщённая задача Коши (сведение её к обычной).
3. Определение корректности задачи Коши. Пример Адамара.
4. Приведение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами к каноническому виду. Классификация линейных уравнений второго порядка.
5. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.
6. Формула Кирхгофа. Доказательство существования решения задачи Коши для волнового уравнения.
7. Доказательство единственности решения смешанной краевой задачи для волнового уравнения.
8. Задача Штурма – Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций. Функция Грина.
9. Обоснование метода Фурье для решения смешанной задачи для волнового уравнения.
10. Принцип максимума для гармонических функций.
11. Лемма о знаке производной по внутреннему направлению для гармонических функций.
12. Строгий принцип максимума для гармонических функций.
13. Постановка основных краевых задач для гармонических функций. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана.
14. Формула Грина. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа. Симметрия функции Грина.
15. Формула для решения задачи Дирихле для оператора Лапласа в круге. Обоснование.
16. Теоремы о среднем.
17. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций.
18. Теорема Лиувилля для гармонических функций.
19. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций.
20. Оценки производных гармонических функций (неравенство Бернштейна).
21. Обобщённая производная по Соболеву. Пространство H^1, полнота.
22. Неравенство Фридрихса, пространство $\mathring{H}^1$.
23. Усреднение функций.
24. Обобщённое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Существование и единственность.
25. Гладкость обобщённого решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
26. Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа.
27. Схема вариационного метода решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
28. Принцип максимума для уравнения теплопроводности (в ограниченной и неограниченной области).
29. Существование и единственность решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.
30. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
31. Непрерывность интеграла, равномерно сходящегося в точке.
32. Непрерывность потенциала простого слоя.
33. Формулы скачков потенциала двойного слоя.
34. Формулы скачков нормальной производной потенциала простого слоя.
35. Интегральные уравнения для основных краевых задач для уравнения Лапласа.
36. Доказательство существования решения задачи Коши методом мажорант.
37. Доказательство теоремы о стабилизации решений задачи Коши.
38. Аналитичность гармонических функций.

2 Досрочный экзамен

2.1 Вариант №1

1. (a) Написать формулу решения задачи Коши для волнового уравнения для трёх пространственных переменных.
   (b) Доказать единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.
   (c) $u(x,t)$ – решение задачи

$$4u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$
$$u_x\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$
$$\varphi \geqslant 0, \quad \varphi = 0 \text{ вне } (2,4), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

   Найти множество точек (x,t), в которых $u_t(x,t) = 0$ для любой функции φ.

2. (a) Сформулировать теоремы о среднем для гармонических функций.
   (b) Доказать вторую теорему о среднем для гармонических функций.
   (c) Найти решение внешней задачи Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ в } |x| > 1, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$
$$u\Big|_{|x|=1} = x_1.$$

3. (a) Написать формулу для решения задачи Коши с непрерывными и ограниченными начальными данными при $t = 0$ для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + 4u_{yy}.$$

   (b) Доказать непрерывность решения задачи Коши для уравнения $u_t = u_{xx}$, $t > 0$.
   (c) $u(x,t)$ – решение задачи

$$u_t = 4u_{xx}, \quad x > 0,\ t > 0, \text{ такое, что}$$
$$u(0,t) = 2, \quad u(x,0) = 2\cos^2 3\pi x.$$

   Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(\frac{3\pi}{4}, t)$.

2.2 Вариант №2

1. (a) Сформулировать теорему Коши – Ковалевской.
   (b) Привести уравнение

$$u_{xy} - u_{yz} + u_{xz} = 0$$

   к каноническому виду.
   (c) При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ задача Коши

$$\alpha^2 u_{tt} + u_{tx} - u_{xx} + 1 = 0$$
$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x),$$

   имеет единственное решение?

2. (a) Сформулировать лемму о знаке производной по внутреннему направлению для гармонических функций.
   (b) Бесконечная дифференцируемость гармонических функций.
   (c) Пусть $u(x)$ гармонична в шаре $|x| < 3$ в $\mathbb{R}^3$ и

$$\int\limits_{|x|<3} |u(x)|\,dx < 2.$$

   Указать $C = const$ такую, что в точке $(0,0,1)$ выполнено

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right| < C.$$

3. (a) Определение пространства $H^1(\Omega)$.
   (b) Доказать полноту пространства $H^1(\Omega)$.
   (c) При каких вещественных α и $s > 0$ функция $\ln^\alpha(1 + r^s)$ принадлежит $H^1(B_n^1)$, где B_n^1 – единичный шар в $\mathbb{R}^n$: $\left\{r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < 1\right\}$, $n \geqslant 1$.

3 Основной экзамен

3.1 Вариант №3

1. (a) Определение характеристик линейного дифференциального уравнения порядка m. Найти характеристики
$$2u_{xx} - u_{xy} = 1.$$
   (b) Сформулировать теорему Коши – Ковалевской. Доказать единственность решения.
   (c) Привести пример Адамара. Будет ли корректна задача
$$u_{tt} + u_{xx} + 2u_x + 4u = 0,$$
$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x)?$$

2. (a) Написать формулу решения задачи Коши для уравнения
$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad t > 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t\Big|_{t=0} = 0.$$
   (b) Доказать единственность решения задачи Коши для уравнения
$$a^2 u_{tt} = \Delta u, \quad a = const > 0.$$
   (c) Найти решение задачи
$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad t > 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$u\Big|_{t=0} = \cos x + \sin y, \quad u_t\Big|_{t=0} = \sin x - \cos y.$$

3. (a) Сформулировать и доказать принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области.
   (b) Доказать теорему о стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
   (c) Пусть $u(x, t)$ – решение задачи Коши
$$u_t = 4u_{xx}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad u\Big|_{t=0} = \frac{x^2 + \sin x^2}{1 + x^2}.$$
   Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u_x(x, t)$.

3.2 Вариант №4

1. (a) Постановка внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Доказать теорему о единственности решения.
   (b) Определение функции Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области в $\mathbb{R}^2$. Построить функцию Грина для круга радиуса R.
   (c) $\Delta u = 0$, $u \leqslant 0$ в $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $u \in C^2(x^2 + y^2 \leqslant 1)$ и
$$\iint\limits_{\frac{9}{25} \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1} u\,dx\,dy = 16.$$
   Указать $C = \text{const}$ такую, что
$$\max_{x^2+y^2=\frac{16}{25}} u(x, y) \leqslant C.$$

2. (a) Дайте определение уравнения эллиптического типа. При каких $\alpha = const$ уравнение
$$u_{xy} + 2\alpha u_{xx} - 3\alpha^2 u_{yy} - \alpha u_y + u_x = 0$$
   является уравнением эллиптического типа?
   (b) Доказать существование решения задачи Коши
$$u_{tt} = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$
$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x).$$

(c) Решить задачу

$$4u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad t > 0$$
$$u\Big|_{t\,=\,0} = \cos x - e^{-2z}, \quad u_t\Big|_{t\,=\,0} = \sin y.$$

3. (a) Дайте определение собственного значения задачи Штурма – Лиувилля. Докажите, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.
   (b) Существование решения смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности (формулировка и доказательство).
   (c) Пусть $u(x,t)$ – решение задачи

$$u_t = u_{xx} + e^{-t^2}, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}, \quad u\Big|_{t\,=\,0} = e^{-x^2}.$$

Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

Последняя компиляция: 30 мая 2020 г. г.
Обновления документа на сайтах http://dmvn.mexmat.net,
http://dmvn.mexmat.ru.
LaTeX исходники
https://bitbucket.org/dmvn/mexmat.lectures
Об опечатках и неточностях пишите на dmvn@mccme.ru.