

Варианты (по одному из 2х) с контрольных работ Шапошниковой Т. А. за 2010–2011 год, проведённых в 301 группе механико-математического факультета в рамках курса УрЧП. Ниже предлагаются, кроме того, решения этих задач. Надеюсь, сей конспект будет кому-либо будет полезен.  
Романов Е. Д., 2010–2011 ([romanoved@yandex.ru](mailto:romanoved@yandex.ru)).

Последняя компиляция: 30 мая 2020 г. г.  
Обновления документа на сайтах <http://dmvn.mexmat.net>,  
<http://dmvn.mexmat.ru>.  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X исходники  
<https://bitbucket.org/dmvn/mexmat.lectures>  
Об опечатках и неточностях пишите на [dmvn@mccme.ru](mailto:dmvn@mccme.ru).

## Контрольная работа №1. Вариант 1.

**Задача 1.** Найти решение уравнения  $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям:  $u|_{y=0} = \sin x$ ,  $u_y|_{y=0} = e^x$ .

**Решение.** Уравнение сводится к виду  $v_{\alpha\beta} + \frac{1}{6}v_\alpha = 0$  заменой:  $\begin{cases} \alpha = y - 5x \\ \beta = y + x \end{cases}$

Общее решение:  $f(\beta) + g(\alpha)e^{-\frac{\beta}{6}} = f(y+x) + g(y-5x)e^{-\frac{y+x}{6}}$ . Используя начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} f(x) + g(-5x)e^{-\frac{x}{6}} = \sin x \\ -\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}g(-5x) + e^{-\frac{x}{6}}g'(-5x) + f'(x) = e^x \end{cases}, , :$$

$$f(x) = -Ce^{-x/6} + \frac{5e^x}{7} - \frac{5\cos x}{37} + \frac{7\sin x}{37}, \quad g(x) = C - \frac{5}{7}e^{-7x/30} + \frac{5}{37}e^{-x/30} \left( \cos\left(\frac{x}{5}\right) - 6\sin\left(\frac{x}{5}\right) \right),$$

$$v(x, y) = -\frac{5}{7}e^{x-\frac{2y}{5}} + \frac{5e^{x+y}}{7} + \frac{5}{37}e^{-y/5} \left( \cos\left(x - \frac{y}{5}\right) + 6\sin\left(x - \frac{y}{5}\right) \right) + \frac{1}{37}(-5\cos(x+y) + 7\sin(x+y)).$$

■

**Задача 2.** Приведите к каноническому виду и определите тип уравнения:

$$2u_{xx} + 5u_{yy} + 2u_{zz} - 6u_{xy} - 4u_{xz} + 6u_{yz} - 3u + y - 2z = 0$$

**Решение.** Приведя форму к каноническому виду, имеем:

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 6xy - 4xz + 6yz = \left(\frac{x-z}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{5} * y - \frac{3}{\sqrt{5}} * (x-z)\right)^2$$

$$f(x+z, y, z) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 = 2\left(x^2 - 3xy + \frac{9}{4}y^2\right) + \frac{y^2}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{y^2}{2}$$

Откуда получаем, что замена  $\begin{cases} \alpha = x + z \\ \beta = 2y - 3z \\ \gamma = z \end{cases}$  приводит уравнение к каноническому виду. Проводя её, получаем

$2u_{\gamma\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) + 2u_{\beta\beta}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ . Следовательно, уравнение имеет параболический тип. ■

**Задача 3.** Найти все характеристики уравнения при каждом  $\alpha \in \mathbb{R}$ :  $u_{xx} + 2u_{yy} + 2\alpha u_{yz} + \alpha^2 u_{zz} + u_z + u = 1$ .

**Решение.** Запишем уравнение характеристик в общем виде:

$$\phi_x^2 + 2\phi_y^2 + 2\alpha\phi_y\phi_z + \alpha^2\phi_z^2 = \phi_x^2 + \phi_y^2 + (\phi_y + \alpha\phi_z)^2 = 0$$

При  $\alpha = 0$   $\phi(x, y, z) = f(z)$ , иначе  $\phi(x, y, z) = c$ . Характеристики в первом случае - плоскости  $z=c$ . Во втором отсутствуют. ■

**Задача 4.** Решите задачу Коши ( $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$ ):  $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u \\ u|_{t=0} = x_1 + x_2x_3 \\ u_t|_{t=0} = x_2 + x_1x_3 \end{cases}$

**Решение.** Ищем решения в виде, обнуляющем начальные условия:

$u(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2, x_3, t) + (x_1 + x_2x_3) + t(x_2 + x_1x_3)$ . Задача Коши для  $v$  имеет вид:  $\begin{cases} v_{tt} = \Delta v \\ v|_{t=0} = 0 \\ v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

Откуда  $v(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ ,  $u(x_1, x_2, x_3, t) = (x_1 + x_2x_3) + t(x_2 + x_1x_3)$ . ■

## Контрольная работа №2. Вариант 2.

**Задача 1.** При каких  $A \in \mathbb{R} \exists$  решение  $u(x, t) \in C^2(x \geq 0, y \geq 0)$  задачи: 
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + A, & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \\ (u_x + 2u_t)|_{x=0} = \sin 2t \end{cases}$$

**Решение.** Замена  $u = v + \frac{At^2}{2}$  приводит нас к системе: 
$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0 \\ (v_x + 2v_t)|_{x=0} = -2At + \sin 2t \end{cases}$$

1° В области  $x > t$  имеем:  $v = f(x-t) + g(x+t)$ . Учитывая  $v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0$  имеем  $f = -c, g = c, u = f + g = 0$ .

2° В области  $x < t$   $g$  определена, по-этому остаётся найти только  $f$ .  $u = f(x-t) + c$ . Воспользовавшись  $(v_x + 2v_t)|_{x=0} = -2At + \sin 2t$  находим  $v = -\frac{\cos(2(x-t))}{2} - A(x-t)^2 + C + C'$ . Для непрерывности вдоль характеристики  $x=t$  положим  $C + C' = \frac{1}{2}$ . Вспоминая что  $u = v + \frac{At^2}{2}$  имеем:

$$u = \begin{cases} \frac{At^2}{2}, & x \geq t \\ -\frac{\cos(2(x-t))}{2} - A(x-t)^2 + \frac{1}{2} + \frac{At^2}{2}, & x \leq t \end{cases}$$

3° Разрывы  $2x$  производных, если они есть, обязаны лежать на характеристике. Имеем:

$$u_{xx} = \begin{cases} 0, & x \geq t \\ -2A + 2\cos(2(x-t)), & x < t \end{cases} \quad u_{tt} = \begin{cases} A, & x > t \\ -A + 2\cos(2(x-t)), & x \leq t \end{cases}$$

Таким образом получаем, что при  $A=1$   $u(x, t) \in C^2(x \geq 0, y \geq 0)$ . ■

**Задача 2.** Найти все  $\alpha \in \mathbb{R}$ , что решение задачи удовлетворяет условию  $u = O(e^{-300t})$  при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \alpha u, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin x \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$$

**Решение.** Сведём задачу к задаче Штурма-Лиувилля.

1° Избавимся от  $\alpha u$ :  $u(x, t) = e^{\alpha t} v(x, t)$ . Тогда для  $v$  имеем: 
$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ v|_{t=0} = \sin x \\ v|_{x=0} = v|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$$

2° Решаем задачу методом Фурье: ищем решение  $v(x, t) = X(x)T(t)$ . Имеем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X_k'' - \lambda_k X_k = 0 \\ X_k(0) = X_k(\pi) = 0 \end{cases}, \text{ откуда } X_k = \sin kx, \lambda_k = -k^2.$$

4° Задача для  $T_k$ :  $T_k' - \lambda_k T_k = 0$ . Решение  $T_k = C_k e^{-k^2 t}$ .

5° Имеем  $v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k^2 t} \sin kx$ . Используя  $v|_{t=0} = \sin x$  получаем  $v(x, t) = e^{-t} \sin x$ .

6°  $u(x, t) = e^{\alpha t} v(x, t) = e^{\alpha t} e^{-t} \sin x$ . Тогда  $u = O(e^{-300t}) \Leftrightarrow \alpha \leq -299$ . ■

**Задача 3.** Решить задачу: 
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + e^{-t} \sin x \sin 2x, & 0 < x, y < \pi, t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

**Решение.** Пусть  $P$  - прямоугольник, на котором задана задача. Чтобы решить исходную задачу, решим методом Фурье такую задачу: 
$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u|_{\partial P} = 0 \end{cases}$$

1° Решение, как обычно, ищем в виде  $u = \sum T(t) X(x) Y(y)$ . Стандартным образом разделяя переменные имеем:

$$\begin{cases} X_k'' - \mu_k X_k = 0 \\ X_k(0) = X_k(\pi) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y_m'' - \nu_m Y_m = 0 \\ Y_m(0) = Y_m(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \mu_k = -k^2 \\ X_k = \sin kx \end{cases} \quad \begin{cases} \nu_m = -m^2 \\ Y_m = \sin my \end{cases}$$

2° Имеем  $\lambda_{k,m} = -k^2 - m^2$ ,  $u_{k,m} = \sin kx \sin my$ . Тогда  $u = \sum_{k,m=1}^{\infty} T_{k,m}(t) \sin kx \sin my$  и удовлетворяет нашей системе. Тогда  $T_{k,m} = 0$  при  $(k,m) \neq (1,2)$ , то есть  $u = T_{1,2}(t) \sin x \sin 2y$ . Подставляя в исходную систему, получаем уравнение:  $T_{1,2}'' + 5T_{1,2} = e^{-t}$ . Решая, получаем  $T_{1,2} = C_1 \cos(\sqrt{5}t) + C_2 \sin(\sqrt{5}t) + \frac{e^{-t}}{6}$ . Используя  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$  получаем  $C_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $C_2 = \frac{1}{5\sqrt{5}}$ . Итого  $u = (-\frac{1}{6} \cos(\sqrt{5}t) + \frac{1}{5\sqrt{5}} \sin(\sqrt{5}t) + \frac{e^{-t}}{6}) \sin x \sin 2y$ . ■

**Задача 4.** Найти решение краевой задачи: 
$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = -4r^3 \cos 6\varphi, & 1 < r < 3, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{3} \\ u_{\varphi}|_{\varphi=0} = u_{\varphi}|_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = 0 \\ u|_{r=3} = \cos 3\varphi, \quad u|_{r=1} = 1 \end{cases}$$

**Решение.** Избавимся от неоднородности в уравнении:  $u = v + C r^3 \cos 6\varphi$ . Подставляя, находим  $C = \frac{4}{27}$ .

1° После замены  $u = v + \frac{4}{27} r^3 \cos 6\varphi$  получаем задачу:

$$\begin{cases} (*) \begin{cases} r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\varphi\varphi} = 0 \\ v_{\varphi}|_{\varphi=0} = v_{\varphi}|_{\varphi=\frac{\pi}{3}} = 0 \end{cases} \\ (**) \begin{cases} v|_{r=3} = \cos 3\varphi - 4 \cos 6\varphi \\ v|_{r=1} = 1 - \frac{4}{27} \cos 6\varphi \end{cases} \end{cases}$$

2° из (\*):  $\begin{cases} \Phi_k'' + \lambda \Phi = 0 \\ \Phi'(0) = \Phi'(\frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$  Решение здесь константа для  $\lambda_0 = 0$  и  $\Phi_k(\varphi) = \cos 3k\varphi$ ,  $\lambda_k = (3k)^2$ .

3° Решая задачу Штурма-Лиувилля для  $R(r)$  ( $r^2 R_k'' + r R_k' - \lambda_k R_k = 0$ ), получаем, что  $v(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^{3k} + B_k r^{-3k}) \cos 3k\varphi$ .

4° Из (\*\*) получаем:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln 3 = 0 \\ A_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 3^3 + B_1 3^{-3} = 1 \\ A_1 + B_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 3^6 + B_2 3^{-6} = -4 \\ A_2 + B_2 = -\frac{4}{27} \end{cases} \quad \begin{cases} A_k = 0, \quad k > 2 \\ B_k = 0, \quad k > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ B_0 = -\frac{1}{\ln 3} \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{3^3 - 3^{-3}} \\ B_1 = -\frac{1}{3^3 - 3^{-3}} \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = -4 \frac{3^6 - 3^{-3}}{3^{12} - 1} \\ B_2 = -4 \frac{3^{-3} - 3^{-6}}{1 - 3^{-12}} \end{cases} \quad \begin{cases} A_k = 0, \quad k > 2 \\ B_k = 0, \quad k > 2 \end{cases}$$

Откуда, учитывая  $u = v + \frac{4}{27} r^3 \cos 6\varphi$  имеем  $u = 1 - \frac{\ln r}{\ln 3} + \frac{r^3 - r^{-3}}{3^3 - 3^{-3}} \cos 3\varphi - 4(\frac{3^6 - 3^{-3}}{3^{12} - 1} r^6 + \frac{3^{-3} - 3^{-6}}{1 - 3^{-12}} r^{-6} - \frac{1}{27} r^3) \cos 6\varphi$ . ■

**Задача 5.** Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике: 
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_x|_{x=0} = \sin y, \quad u_x|_{x=2\pi} = \sin 3y \\ u|_{y=0} = \cos 2x, \quad u|_{y=\pi} = \cos 6x \end{cases}$$

**Решение.** Разобьём систему на 2 по противоположным сторонам прямоугольника ( $u=v+w$ ):

1°  $\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v_x|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=2\pi} = 0 \\ v|_{y=0} = \cos 2x, \quad v|_{y=\pi} = \cos 6x \end{cases}$   $v_k = X_k(x)Y_k(y)$ , тогда  $-\frac{X_k''}{X_k} = \frac{Y_k''}{Y_k} = \lambda_k$ ,  $\begin{cases} X_k'' + \lambda X_k = 0 \\ X_k'(0) = X_k'(2\pi) = 0 \end{cases}$  Откуда

да  $v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) \cos \frac{kx}{2}$ . Для  $k > 0$   $Y_k(y) = C_k e^{\frac{ky}{2}} + D_k e^{-\frac{ky}{2}}$ . Из  $v|_{y=0} = \cos 2x$ ,  $v|_{y=\pi} = \cos 6x$  получаем:

$$\begin{cases} C_4 = \frac{1}{1 - e^{4\pi}} \\ D_4 = \frac{1}{1 - e^{-4\pi}} \end{cases} \quad \begin{cases} C_{12} = \frac{1}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}} \\ D_{12} = -\frac{1}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}} \end{cases} \quad \text{Окончательно } v = (\frac{e^{2y}}{1 - e^{4\pi}} + \frac{e^{-2y}}{1 - e^{-4\pi}}) \cos 2x + \frac{e^{6y} - e^{-6y}}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}} \cos 6x.$$

2° Аналогично для 2ой системы:  $\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w_x|_{x=0} = \sin y, \quad w_x|_{x=2\pi} = \sin 3y \\ w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=\pi} = 0 \end{cases}$

$w = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \sin ky$ . Коэффициенты находятся из краевых условий. Итого  $w = (\frac{e^x}{1 - e^{4\pi}} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-4\pi}}) \sin y + \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{3(e^{6\pi} - e^{-6\pi})} \sin 3y$ .

3°  $u = v + w = (\frac{e^{2y}}{1 - e^{4\pi}} + \frac{e^{-2y}}{1 - e^{-4\pi}}) \cos 2x + \frac{e^{6y} - e^{-6y}}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}} \cos 6x + (\frac{e^x}{1 - e^{4\pi}} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-4\pi}}) \sin y + \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{3(e^{6\pi} - e^{-6\pi})} \sin 3y$ . ■

Проверочная работа от Т.А. (одна задача на 30 минут, здесь оба варианта).

**Задача 1.** (Владимиров 19.35) Доказать, что для всех функций  $u \in C_0^1(|x| < 1)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  имеет место неравенство

$$\int_{|x|<1} |\nabla u|^2 + u \, dx \geq -\frac{\pi}{45}$$

. Имеет ли место равенство для какой-либо из описанных выше функций?

**Решение.** Рассмотрим функционал  $E(u) = \int_{|x|<1} |\nabla u|^2 + u \, dx$ .

$I(t) = E(u+tg) = \int_{|x|<1} |\nabla u|^2 + 2t(\nabla u, \nabla g) + t^2|\nabla g|^2 + u + tg \, dx$ .  $(\frac{d}{dt}I(t))|_{t=0} = \int_{|x|<1} 2(\nabla u, \nabla g) + g \, dx = \int_{|x|<1} (-2\Delta u + 1)g \, dx$ . Получаем вариационную задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{2} \\ u|_{|x|=1} = 0 \end{cases}$$

Ищем решение как функцию от радиуса:  $u = R(r)$ . Тогда

$$\begin{cases} \Delta u = R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) = \frac{1}{2} \\ u|_{|x|=1} = R(1) = 0 \end{cases}$$

Общее решение первого уравнения:  $\frac{C}{r} + d + \frac{r^2}{12}$ .  $u$  - гармоническая в шаре с центром в нуле, откуда  $C = 0$ ;  $u(1) = 0$ , откуда  $d = -\frac{1}{12}$ . Имеем  $u = \frac{r^2-1}{12}$ , на ней достигается минимум функционала. Теперь проверим неравенство:

$\int_{|x|<1} |\nabla u|^2 + u \, dx = \int_{|x|<1} \frac{r^2}{36} + \frac{r^2-1}{12} \, dx = \frac{1}{9} \int_{|x|<1} r^2 \, dx - \frac{4\pi}{3 \cdot 12} = \frac{1}{9} \int_0^1 4\pi r^4 - \frac{5\pi}{45} = \frac{4\pi}{45} - \frac{5\pi}{45} = -\frac{\pi}{45}$ , откуда неравенство верно, причём равенство достигается на найденной функции  $u$ . ■

**Задача 2.** (Владимиров 19.29) Пусть  $Q$  - куб  $\{0 < x_1 < 1; 0 < x_2 < 1; 0 < x_3 < 1\}$ . Доказать, что для любой функции  $f \in H_0^1(Q)$  справедливо неравенство:

$$\|f\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{3\pi^2} \|\nabla f\|_{L_2}^2$$

**Решение.** Рассмотрим функционал  $E(f) = \int_Q f^2 - \frac{1}{3\pi^2} |\nabla f|^2 \, dx$ .

$I(t) = E(f+tg) = \int_Q f^2 + 2tf g + t^2 g^2 - \frac{1}{3\pi^2} (|\nabla f|^2 + 2t(\nabla f, \nabla g) + t^2 |\nabla g|^2) \, dx$ .  $(\frac{d}{dt}I(t))|_{t=0} = \int_Q 2fg - \frac{2}{3\pi^2} (\nabla f, \nabla g) \, dx = \int_Q 2(f + \frac{1}{3\pi^2} \Delta f)g \, dx$ . Получаем вариационную задачу:

$$\begin{cases} -\Delta f = 3\pi^2 f \\ f|_{\partial Q} = 0 \end{cases}$$

Ищем решение в виде разложения по собственным функциям:  $f = \sum_{k,l,m=1}^{\infty} A_{ijk} \sin \pi k x_1 \sin \pi l x_2 \sin \pi m x_3$ . Легко видеть, что решением является  $f = a \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3$ . На таких функция достигается минимум нашего функционала. Проверим выполнение неравенства  $\int_Q f^2 - \frac{1}{3\pi^2} |\nabla f|^2 \, dx \leq 0$ :

$$\int_Q f^2 \, dx = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (\sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3)^2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \frac{1}{8},$$

$$\int_Q \frac{1}{3\pi^2} |\nabla f|^2 \, dx = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \pi^2 (\cos \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 + \dots) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 3\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \cos \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \frac{3\pi^2}{8},$$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{3\pi^2} \frac{3\pi^2}{8} = 0$ , откуда неравенство верно и достигается на функциях вида  $a \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3$ . ■

## Контрольная работа №3. Вариант 1.

**Задача 1.** На плоскости задан квадрат с вершинами в точках  $A(0,1)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(0,-1)$ ,  $D(-1,0)$ . Пусть  $\chi(x, y)$  - характеристическая функция этого квадрата. Найдите  $\chi_{xx} - \chi_{yy}$  в  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ .

**Решение.**  $(\chi_{xx} - \chi_{yy}, \varphi) = (\chi, \varphi_{xx} - \varphi_{yy}) = \int_{ABCD} \varphi_{xx} - \varphi_{yy} dS$ . Сделаем замену:  $\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$ .

Тогда  $\begin{cases} \varphi_{xx} = \psi_{\xi\xi} + 2\psi_{\xi\eta} + \psi_{\eta\eta} \\ \varphi_{yy} = \psi_{\xi\xi} - 2\psi_{\xi\eta} + \psi_{\eta\eta} \end{cases}$ . Кроме того, когда сделаем замену в интеграле, появится якобиан, равный  $\frac{1}{2}$ .

Квадрат ABCD перейдет в квадрат A'B'C'D' с вершинами в точках  $(\pm 1, \pm 1)$ .

Имеем  $\int_{ABCD} \varphi_{xx} - \varphi_{yy} dS = \int_{A'B'C'D'} 4\psi_{\xi\eta} \frac{1}{2} dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\psi_{\xi\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 2 \int_{-1}^1 \psi_{\xi\eta}(\xi, 1) - \psi_{\xi\eta}(\xi, -1) d\xi = 2\psi(1, 1) - 2\psi(-1, 1) - 2\psi(1, -1) + 2\psi(-1, -1) = 2\varphi(1, 0) - 2\varphi(0, -1) - 2\varphi(0, 1) + 2\varphi(-1, 0)$ , откуда окончательно получаем:  $\chi_{xx} - \chi_{yy} = 2\delta(x-1, y) - 2\delta(x, y+1) - 2\delta(x, y-1) + 2\delta(x+1, y)$ . ■

**Задача 2.** Докажите, что  $E(r) = -\frac{\cos kr}{4\pi r}$ ,  $r = |x - x_0|$ , является фундаментальным решением оператора  $\Delta + k^2$  ( $x \in \mathbb{R}^3$ ).

**Решение.**  $\Delta E = e^{\pm ikr} \Delta \frac{1}{4\pi r} + 2\nabla(e^{\pm ikr}) \nabla(-\frac{1}{4\pi r}) + (-\frac{1}{4\pi r}) \Delta e^{\pm ikr}$ . Первое слагаемое  $e^{\pm ikr} \Delta \frac{1}{4\pi r}$  даёт  $\delta$ -функцию, так как  $-\frac{1}{4\pi r}$  фундаментальное решение оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^3$ . Остается проверить, что  $2\nabla(e^{\pm ikr}) \nabla(-\frac{1}{4\pi r}) - \frac{1}{4\pi r} \Delta e^{\pm ikr} - k^2 \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} = 0$  (используя, например,  $\Delta V(r) = V_{rr} + \frac{2}{r} V_r$ ). ■

**Задача 3.** Дана гармоническая в кольце  $Q = 1 < x^2 + y^2 < 2$  функция  $u(x, y)$ , удовлетворяющая условиям:  $u(x, y) = x$  при  $x^2 + y^2 = 2$ ,  $\partial_\nu u + (1 - y^2)u = 0$  при  $x^2 + y^2 = 1$ . ( $\nu$  - внешняя нормаль). Не находя решения, найдите  $\max_Q |u(x, y)|$ .

**Решение.** Гармоническая функция  $u$ , очевидно, не константа, следовательно, по принципу экстремума её модуль не может принимать максимальное значение внутри области. Исследуем её на границе. Условие переписывается так:  $\partial_\nu u + x^2 u = 0$ . По лемме о нормальной производной  $\partial_\nu u > 0$  в точке максимума и  $\partial_\nu u < 0$  в точке минимума; экстремум не может достигаться при  $x=0$ . Таким образом, из  $\partial_\nu u = -x^2 u$  заключаем, что в точке максимума  $u < 0$ , а в точке минимума  $u > 0$ , а такой функции не существует. Противоречие означает, что  $u$  принимает максимум на  $x^2 + y^2 = 2$  равный, очевидно  $\sqrt{2}$  (так как там  $u(x, y) = x$ ). ■

**Задача 4.** Пусть  $u(x, t)$  - решение задачи Коши:  $\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin(x_1) \sin(x_2) \sin(x_3) I_\Pi = \varphi, & \Pi = [0, \pi]^3 \end{cases}$  (под  $I_\Pi$  понимается индикатор  $\Pi$ ). Найдите  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) dx$ .

**Решение.** Решение задачи Коши уравнения теплопроводности представимо в виде:  $u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$ . Тогда  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy dx$ . Решение от Т.А.:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\eta^2}}{\pi^{3/2}} d\eta dy = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) dy = 8$ . (другое решение) Замена:  $\frac{y-x}{2\sqrt{t}} = \eta$ , имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} u(x, t) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x + 2\eta\sqrt{t}) e^{-|\eta|^2} d\eta dx \xrightarrow{?} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) dx = 8$ .

Про последний предельный переход: Сведём к одномерной задаче (впрочем, дальнейшие рассуждения можно провести и сразу для исходной задачи): ищем решение в виде  $u(\bar{x}, t) = u_1(x_1, t) u_2(x_2, t) u_3(x_3, t)$ . Подставляя, получаем 3 задачи:  $\begin{cases} (u_i)_t = \Delta u_i, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ (u_i)|_{t=0} = \sin(x_i) I_{[0, \pi]} \end{cases}$  Для любой из них получаем по аналогичным соображениям  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x + 2\eta\sqrt{t}) e^{-|\eta|^2} d\eta dx$ . Тогда понятно, что чем больше  $t$ , тем меньше отрезок интегрирования по  $\eta$   $x + 2\eta\sqrt{t} \notin [0, \pi] \Rightarrow \varphi(x + 2\eta\sqrt{t}) = 0$ , тем ближе  $e^{-|\eta|^2}$  к 1, а соответствующий интеграл - к интегралу от синуса. ■

**Задача 5.** Постройте функцию Грина задачи Дирихле для полукруга  $K = \{x : |x| < 1, x_2 > 0\}$  на плоскости  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

**Решение.** Введём естественным образом комплексные координаты:  $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 + ix_2 = z$ . Конформное отображение  $w(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$  переводит  $K$  на полуплоскость  $\{z : \text{Im } z > 0\}$ . На ней функция Грина известна:  $G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \right|$ , тогда функция Грина для полукруга имеет вид  $\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - \overline{w(z_0)}}{w(z) - w(z_0)} \right|$ , который элементарными преобразованиями приводится к виду  $\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \right| \frac{1 - \bar{z} \bar{z}_0}{1 - z z_0}$ . ■