

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико математический факультет

Курс лекций по уравнения с частными производными

Лектор — Шапошникова Татьяна Ардолионовна

III курс, 6 семестр, поток математиков

Москва, 2020 г.

Содержание

1	Гармонические функции, их свойства	4
1.1	Формулы Грина	4
1.2	Фундаментальное решение оператора Лапласа	4
1.3	Представление в виде суммы трёх потенциалов	5
1.4	Теоремы о среднем для гармонических функций	6
1.5	Принцип максимума	7
2	Лекция 16.	9
2.1	Лемма о знаке нормальной производной гармонической функции в точке максимума.	9
2.2	Основные краевые задачи для уравнения Лапласа и единственность решения этих задач.	9
2.2.1	Задача Дирихле.	9
2.2.2	Задача Неймана.	9
2.3	Оценки производных гармонической функции.	9
2.4	Аналитичность гармонических функций.	10
3	Лекция 17.	11
3.1	Функция Грина. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.	11
4	Лекция 18.	13
4.1	Интеграл Пуассона.	13
4.2	Неравенство Харнака.	14
4.3	Обратная теорема о среднем.	14
4.4	Теорема об устранимой особенности.	14
5	Лекция 19	15
5.1	Теория потенциала.	15
6	Лекция 20.	18
6.1	Объемный потенциал.	18
6.2	Потенциал двойного слоя.	19
7	Лекция 21	21
7.1	Теорема о скачке потенциала двойного слоя.	23
8	Лекция 22.	24
8.1	Потенциал простого слоя	24
9	Лекция 23.	26
9.1	Постановка краевых задач	27
10	Лекция 24.	28
10.1	Решение внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана в виде потенциала.	28
10.1.1	Теоремы Фредгольма.	28
10.2	Решение внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана в виде потенциала.	29
11	Лекция 25.	32
11.1	Вариационный метод решения задачи Дирихле.	33
12	Лекция 26	34
12.1	Метод Ритца	34
12.2	Уравнение теплопроводности	35
13	Лекция 27.	37
13.1	Принципы максимума	37
13.2	Начально-краевые задачи	38
13.3	Теоремы единственности	39

Предисловие

Документ перерабатывается В. В. Харламовым под курс лекций 2020 года. **Важно**, что дальнейший текст не является в полной мере конспектом, но в то же время есть хорошее приближение материала лекций.

Так как DMVN не подаёт признаков жизни, то огромная просьба писать на [мою почту](#) при обнаружении ошибок. Самая актуальная версия конспекта находится на [Github](#). В 2020 году Bitbucket прекращает поддержку репозитория с системой контроля версий Mercurial, поэтому я скопировал репозиторий на Github.

В.Х.

Последняя компиляция: 30 мая 2020 г. г.
Обновления документа на сайтах <http://dmvn.mexmat.net>,
<http://dmvn.mexmat.ru>.
L^AT_EX исходники
<https://bitbucket.org/dmvn/mexmat.lectures>
Об опечатках и неточностях пишите на dmvn@mccme.ru.

1 Гармонические функции, их свойства

Определение. Пусть $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset (R)^n$ - область. Функция u называется *гармонической* в Ω , если $\forall x \in \Omega \Delta u = 0$.

Примеры

1. $u = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$ - гармоническая в \mathbb{R}^n .
2. $n = 3$: $u = \frac{1}{r}$, $r = |x - x_0|$ - гармоническая при $x \neq x_0$.
3. $n = 2$: $\ln r$, $r^{\pm m} \cos m\varphi$, $r^{\pm m} \sin m\varphi$ - гармонические.

Пусть теперь $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, Ω ограниченная область в \mathbb{R}^n , $\partial\Omega \in C^1$ тогда вспомним, что

$$\int_{\Omega} uv_{x_j x_j} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} \nu_j dS$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A dx = \int_{\partial\Omega} (A, \nu) dS : A = (0, \dots, u \frac{\partial v}{\partial x_j}, \dots, 0)$$

1.1 Формулы Грина

Утверждение 1.1 (Первая формула Грина).

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS, \quad (1)$$

где ν — единичная внешняя нормаль к границе.

Утверждение 1.2 (Вторая формула Грина).

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS. \quad (2)$$

1.2 Фундаментальное решение оператора Лапласа

Рассмотрим гармонические функции, зависящие только от расстояния до точки, т.е гармонические функции вида:

$$v(x) = v(|x - x_0|), \quad x \neq x_0, \quad \Delta v = 0.$$

Найдём такие гармонические функции v , что для любых финитных функций ϕ в области Ω имеет место тождество

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(|x - x_0|) \Delta \phi(x) dx = \phi(x_0). \quad (3)$$

Положим $r := |x - x_0|$. Тогда оператор Лапласа переписывается как

$$\Delta v(r) = v'' + \frac{n-1}{2} v'.$$

Учитывая гармоничность функции v , получаем

$$v(|x - x_0|) = C_1 |x - x_0|^{2-n} + C_2, \quad n \geq 3, \quad v(|x - x_0|) = C_1 \ln |x - x_0| + C_2, \quad n = 2. \quad (4)$$

Рассмотрим левую часть равенства (3). Для $n \geq 3$ в силу гармоничности v она равна

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{T}_{\varepsilon}^{x_0}} v(|x - x_0|) \Delta \phi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{T}_{\varepsilon}^{x_0}} (v(|x - x_0|) \Delta \phi - \phi \Delta v(|x - x_0|)) dx. \quad (5)$$

К правой части выражения (5) применим вторую формулу Грина (2), тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{T}_{\varepsilon}^{x_0}} v(|x - x_0|) \Delta \phi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega \cup S_{\varepsilon}^{x_0}} (v(|x - x_0|) \partial_{\nu} \phi - \phi(x) \partial_{\nu} v(|x - x_0|)) dS. \quad (6)$$

В силу финитности φ интеграл по $\partial\Omega$ равен нулю. Положим $K := \max_{\Omega} \partial_{\nu}\varphi$, ω_n — площадь поверхности n -мерного шара. Заметим, что имеет место оценка

$$\left| \int_{S_{\varepsilon}^{x_0}} |x - x_0|^{2-n} \partial_{\nu}\varphi dS \right| \leq \varepsilon^{2-n} \omega_n K \varepsilon^{n-1} = \omega_n K \varepsilon.$$

Следовательно, в силу представления (4) для v получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\varepsilon}^{x_0}} v(|x - x_0|) \partial_{\nu}\varphi dS = 0.$$

Далее заметим, что

$$C_1 \frac{\partial}{\partial \nu} r^{2-n} = -C_1 \frac{\partial}{\partial r} r^{2-n} = -(2-n)C_1 r^{1-n}.$$

Подставляя в выражение (6) полученные результаты, приходим к

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{T_{\varepsilon}^{x_0}}} v(|x - x_0|) \Delta \varphi dx &= -C_1(n-2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\varepsilon}^{x_0}} \varphi(x) dS = -C_1(n-2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(x_{\varepsilon}) \omega_n \varepsilon^{n-1} \varepsilon^{1-n} = \\ &= -C_1(n-2) \omega_n \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Учитывая представление (4), получаем

$$C_1 = \frac{-1}{\omega_n(n-2)}, \quad n \geq 3, \quad C_1 = \frac{1}{2\pi}, \quad n = 2.$$

Определение. *Фундаментальное решение оператора Лапласа.*

$$E(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{|x-x_0|^{2-n}}{\omega_n(n-2)}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln(x - x_0), & n = 2 \end{cases}$$

Основное характерное свойство фундаментального решения:

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, x_0) \Delta \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

На языке обобщенных функций это выглядит так

$$(\Delta E(x, x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0) = (\delta(x - x_0), \varphi), \quad \Delta E(x, x_0) = \delta(x - x_0).$$

1.3 Представление в виде суммы трёх потенциалов

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $\partial\Omega$ — липшицева, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $x_0 \in \Omega$. Положим $\Omega_{\varepsilon} := \Omega \setminus \overline{T_{\varepsilon}^{x_0}}$. В силу соотношения (4) справедливо равенство

$$\Delta_x E(x, x_0) = 0, \quad x \in \Omega_{\varepsilon}. \quad (7)$$

По второй формуле Грина 1.2

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} (u \Delta E - \Delta u E) dx = \int_{\partial\Omega} (u \partial_{\nu} E - \partial_{\nu} u E) dS + \int_{\partial T_{\varepsilon}^{x_0}} (u \partial_{\nu} E - \partial_{\nu} u E) dS. \quad (8)$$

В равенстве (8) устремим ε к нулю, в силу тождества (7) получим

$$-\int_{\Omega} \Delta u E dx = \int_{\partial\Omega} (u \partial_{\nu} E - \partial_{\nu} u E) dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial T_{\varepsilon}^{x_0}} u \partial_{\nu} E dS = \int_{\partial\Omega} (u \partial_{\nu} E - \partial_{\nu} u E) dS - u(x_0).$$

Таким образом, получаем, что

$$u(x_0) = \int_{\Omega} E(x, x_0) \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} u \partial_{\nu} E(x, x_0) dS - \int_{\partial\Omega} E(x, x_0) \partial_{\nu} u dS. \quad (9)$$

Каждое слагаемое в полученном представлении имеет своё название.

Определение. Выражение

$$P_1(x_0) := \int_{\Omega} E(x, x_0) \Delta u dx$$

называется *объёмным потенциалом*.

Выражение

$$P_2(x_0) := \int_{\partial\Omega} u \partial_{\nu} E(x, x_0) dS$$

называется *потенциалом двойного слоя*.

Выражение

$$P_3(x_0) := \int_{\partial\Omega} E(x, x_0) \partial_{\nu} u dS$$

называется *потенциалом простого слоя*.

1.4 Теоремы о среднем для гармонических функций

Теорема 1.3 (О среднем по сфере). Пусть $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\bar{T}_R^{x_0})$, предположим, что $\Delta u = 0$ в $T_R^{x_0}$ тогда

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R^{x_0}|} \int_{S_R^{x_0}} u(x) dS$$

□ Рассмотрим $T_{\rho}^{x_0}$, $\rho < R$. Тогда в силу представления в виде суммы трёх потенциалов (9), где один из них равен нулю в силу гармоничности, имеем

$$u(x_0) = \int_{S_{\rho}^{x_0}} u \partial_{\nu} E(x, x_0) dS - \int_{S_{\rho}^{x_0}} E(x, x_0) \partial_{\nu} u dS = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{S_{\rho}^{x_0}} u(x) dS$$

Заметим, что по формуле Гаусса - Остроградского

$$\int_{S_{\rho}^{x_0}} E(x, x_0) \partial_{\nu} u dS = \int_{S_{\rho}^{x_0}} \frac{\rho^{2-n}}{(2-n)\omega_n} \partial_{\nu} u dS = \frac{\rho^{2-n}}{(2-n)\omega_n} \int_{T_{\rho}^{x_0}} \operatorname{div} \nabla u dx = 0.$$

Из того, что

$$\partial_{\nu} E(x, x_0) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} = \frac{1}{|S_{\rho}^{x_0}|},$$

следует

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_{\rho}^{x_0}|} \int_{S_{\rho}^{x_0}} u dS.$$

Переходя к пределу при $\rho \rightarrow R$, получаем искомое. ■

Теорема 1.4 (О среднем по шару). Пусть $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\bar{T}_R^{x_0})$. Предположим, что $\Delta u = 0$ в $T_R^{x_0}$. Тогда

$$u(x_0) = \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int_{T_R^{x_0}} u(x) dS.$$

□ Из теоремы о среднем по сфере 1.3 следует, что для $\rho < R$

$$\omega_n \rho^{n-1} u(x_0) = \int_{S_{\rho}^{x_0}} u(x) dS. \quad (10)$$

В силу теоремы Фубини получаем

$$|T_R^{x_0}| u(x_0) = \frac{\omega_n}{n} R^n u(x_0) = \int_0^R \omega_n \rho^{n-1} u(x_0) u(x_0) d\rho = \int_0^R \int_{S_{\rho}^{x_0}} u(x) dS d\rho = \int_{T_R^{x_0}} u(x) dS.$$

Теорема 1.5. Пусть $\varphi \in C[0, R]$. Положим

$$A_{\varphi} := \int_0^R \varphi(|x - x_0|) dx.$$

Предположим, что A_φ отлично от нуля. Пусть $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T_R^{x_0}})$. Тогда

$$u(x_0) = \frac{1}{A_\varphi} \int_{T_R^{x_0}} u(x) \varphi(|x - x_0|) dx.$$

□ Умножим тождество (10) обеих сторон на $\varphi(\rho) = \varphi(|x - x_0|)$ и проинтегрируем по ρ .

$$u(x_0) \int_0^R \omega_n \rho^{n-1} \varphi(\rho) d\rho = \int_0^R \int_{S_\rho^{x_0}} \varphi(|x - x_0|) dS dx = \int_{T_R^{x_0}} \varphi(|x - x_0|) dS dx.$$

■

Теорема 1.6 (О бесконечной дифференцируемости). Пусть Ω область в \mathbb{R}^n , $u(x)$ гармоническая в Ω . Тогда $u \in C^\infty(\Omega)$.

□ Пусть $x \in \Omega$, $h > 0$, $\overline{T_h^x} \subset \Omega$, ω_h – ядро усреднения. Рассмотрим

$$u_h(x) = \int_{\mathbb{R}_y^n} \omega_h(|x - y|) u(y) dy = \int_{|x-y|<h} \omega_h(|x - y|) u(y) dy = \int_0^h \omega_h(\rho) \int_{S_\rho^x} u(y) dS d\rho.$$

В силу теоремы о среднем $\int_{S_\rho^x} u(y) dS = u(x) |S_\rho^x|$, поэтому

$$u_h(x) = u(x) \int_0^h \omega_h(\rho) |S_\rho^x| d\rho = u(x) \int_0^h \int_{S_\rho^x} \omega_h(|x - y|) dS_y d\rho$$

В силу свойств ядра усреднения $\int_0^h \int_{S_\rho^x} \omega_h(|x - y|) dS_y d\rho = 1$, откуда для достаточно малых h имеет место тождество $u_h(x) = u(x)$. Так как функция $u_h(x)$ является бесконечно дифференцируемой. ■

1.5 Принцип максимума

Теорема 1.7 (Слабый принцип максимума). Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u \geq 0$ в Ω . Тогда справедливо тождество

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

□ Предположим сначала, что $\Delta u > 0$ в Ω . Так как функция u непрерывна в $\overline{\Omega}$, то её максимум достигается в какой-то точке x_0 .

Пусть $x_0 \in \Omega$. Тогда матрица Якоби J_u является нулевой в этой точке, и квадратичная форма матрицы вторых частных производных неположительна, то есть

$$\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i x_j} u(x_0) \xi_i \xi_j \leq 0.$$

В частности, $\partial_{x_i x_i} u(x_0) \leq 0$, откуда $\Delta u(x_0) \leq 0$. Противоречие с предположением, что $\Delta u > 0$ в Ω . Поэтому в этом случае максимум достигается в точке x_0 , лежащей на $\partial\Omega$.

Рассмотрим общий случай, когда $\Delta u \geq 0$. Введём новую функцию

$$v_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon l(x) = u(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Тогда

$$\Delta v_\varepsilon = \Delta u + n\varepsilon \Delta x_i^2 = \Delta u + 2n\varepsilon > 0.$$

Так как l является непрерывной функцией на компакте $\overline{\Omega}$, то её значения ограничены по модулю какой-то константой K . Тогда

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} v_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + nK\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем искомое. ■

Теорема 1.8 (Строгий принцип максимума). Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω – ограниченная область с гладкой границей. Предположим, что $\Delta u = 0$ в Ω . Положим

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) := M, \quad \min_{\overline{\Omega}} u(x) := m.$$

Тогда, если для $x_0 \in \Omega$ справедливо тождество $u(x_0) = M$ ($u(x_0) = m$), то $u(x) \equiv \text{const}$.

□ Рассмотрим случай, когда в некоторой точке $x_0 \in \Omega$ достигается значение M функции u . Положим

$$L := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}.$$

Докажем, что множество L является открыто-замкнутым подмножеством Ω . Оно непусто, потому что $x_0 \in L$. Замкнутость следует из непрерывности u .

Докажем открытость. От противного, пусть существует $x_1 \in L$ такой, что любая его окрестность в Ω содержит точку не из L . Выберем такую окрестность $T_{\varepsilon_1}^{x_1}$, что $\overline{T_{\varepsilon_1}^{x_1}} \subset \Omega$. Тогда существует $x_2 \in T_{\varepsilon_1}^{x_1}$ такой, что $u(x_2) < M$. В силу непрерывности функции u существует окрестность $T_{\varepsilon_2}^{x_2}$, $\overline{T_{\varepsilon_2}^{x_2}} \subset T_{\varepsilon_1}^{x_1}$ точки x_2 такая, что для любого $x \in T_{\varepsilon_2}^{x_2}$ справедливо неравенство $u(x) < M - \delta$. Тогда в силу теоремы о среднем по шару 1.4 имеет место оценка

$$\begin{aligned} u(x_1) &= \frac{1}{|T_{\varepsilon_1}^{x_1}|} \int_{T_{\varepsilon_1}^{x_1}} u(x) dx = \frac{1}{|T_{\varepsilon_1}^{x_1}|} \left(\int_{T_{\varepsilon_1}^{x_1} \setminus \overline{T_{\varepsilon_2}^{x_2}}} u(x) dx + \int_{T_{\varepsilon_2}^{x_2}} u(x) dx \right) \leq \\ &\leq \frac{M(|T_{\varepsilon_1}^{x_1}| - |T_{\varepsilon_2}^{x_2}|) + (M - \delta)|T_{\varepsilon_2}^{x_2}|}{|T_{\varepsilon_1}^{x_1}|} = M - \delta \frac{|T_{\varepsilon_2}^{x_2}|}{|T_{\varepsilon_1}^{x_1}|} < M. \end{aligned}$$

Но так как $x_1 \in L$, то $u(x_1) = M$. Противоречие с не открытостью L . По теореме об открыто-замкнутом подмножестве области $L = \Omega$, то есть $u \equiv M$. Для рассмотрения минимума достаточно рассмотреть $v := -u$. ■

Следствие 1.1. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u \leq 0$ в Ω . Тогда справедливо тождество

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

□ Применяем слабый принцип максимума 1.3 для $v := -u$. ■

Следствие 1.2. Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u \equiv 0$ в Ω . Тогда справедливы тождества

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u, \quad \max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

□ Применяем слабый принцип максимума 1.3 и следствие 1.1. ■

Теорема 1.9 (лемма Вейля). Пусть $u \in L^p(\Omega)$, где $p \geq 1$, Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , и для любой финитной φ на Ω справедливо тождество

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi dx = 0.$$

Тогда функция u является гармонической.

Теорема 5 (О знаке нормальной производной гармонической функции в точке минимума(максимума)). Пусть $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T_R^{x_0}})$, предположим, что $\Delta u = 0$ в $T_R^{x_0}$ и $u \neq \text{const}$ в $T_R^{x_0}$. Также предположим, что в точке $x' \in S_R^{x_0}$, $\min_{\overline{T_R^{x_0}}} u(x) = u(x')$

Тогда, если существует нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x')$, ν – внешняя единичная нормаль к границе в точке x' , то

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') < 0$$

2 Лекция 16.

2.1 Лемма о знаке нормальной производной гармонической функции в точке максимума.

Пусть $u(x) \neq const$ - гармоническая в Ω , $x_0 \in \partial\Omega$ - точка максимума $u(x)$, $\exists B_\rho^{x'} \subset \Omega : S_\rho^{x'} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$, $\exists \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{s \rightarrow +0} \frac{u(x_0) - u(x_0 - s\nu)}{s}$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$.

Доказательство.

Можно считать, что $u(x_0) = 0, u(x) < 0$ в Ω . Вспомним следствие принципа максимума: если $\Delta u = \Delta v = 0$ в Ω , $u(x) \leq v(x)$ на $\partial\Omega$, то $u(x) \leq v(x)$ в Ω .

Рассмотрим $w(x) = -(|x - x'|^{2-n} - \rho^{2-n})$. При $n \geq 3$ $w(x)$ будет гармонической в $\mathbb{R}^n \setminus \{x'\}$. Рассмотрим шаровой слой $K = B_\rho^{x'} \setminus \overline{B}_{\rho/2}^{x'}$ и функции $u(x), \varepsilon w(x)$ на K .

Внешняя граница: $|x - x'| = \rho$, и на ней $w(x) = 0, u(x) \leq 0$.

Внутренняя граница: $|x - x'| = \rho/2$, и на ней $u(x) < -c < 0, w(x) = -((\frac{\rho}{2})^{2-n} - \rho^{2-n}) = -\frac{2^{n-2}-1}{\rho^{n-2}}$.

$\exists \varepsilon > 0 : \varepsilon w(x) \geq u(x)$ на ∂K , $\varepsilon = c \frac{\rho^{n-2}}{2^{n-2}-1}$. Значит, $\varepsilon w(x) \geq u(x)$ в K .

$\varepsilon w(x_0) - \varepsilon w(x_0 - s\nu) \leq u(x_0) - u(x_0 - s\nu) \Rightarrow 0 < \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \leq \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$

Ч.т.д.

Примечание. В случае $n = 2$ достаточно рассмотреть функцию $w(x) = \ln|x - x_0| - \ln\rho$.

2.2 Основные краевые задачи для уравнения Лапласа и единственность решения этих задач.

2.2.1 ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в ограниченной области } \Omega, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi & \varphi \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Решение задачи Дирихле единственно. Если мы рассмотрим $w(x)$ - разность двух решений, то имеем $\Delta w = 0, w|_{\partial\Omega} = 0$, тогда по принципу максимума/минимума $w \equiv 0$.

2.2.2 ЗАДАЧА НЕЙМАНА.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в ограниченной области } \Omega, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \psi & \psi \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Условие разрешимости: $\int_{\partial\Omega} \psi ds = 0$.

Решение задачи Неймана определено с точностью до константы. Если мы рассмотрим $w(x)$ - разность двух решений, то имеем $\Delta w = 0, \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$, тогда по лемме о нормальной производной $w = const$.

2.3 Оценки производных гармонической функции.

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x-x_0| \leq R} u(x) dx$$

$u(x)$ - гармоническая $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k}$ - гармоническая.

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) \right| = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x-x_0| \leq R} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x-x_0| \leq R} u \cos(\nu, x) ds$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) \right| \leq \frac{\sigma_n R^{n-1}}{\omega_n R^n} \max_{|x-x_0|=R} |u|$$

,где σ_n - площадь единичной сферы, ω_n - объем единичного шара в \mathbb{R}^n .

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) \right| \leq \frac{n}{R} \max_{|x-x_0|=R} |u|$$

Пусть $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_0$ - ограниченная область в \mathbb{R}^n и $dist(\partial\Omega_1, \partial\Omega_0) \geq d > 0$. Пусть u - гармоническая в Ω_0 , $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Тогда

$$\forall x \in \Omega_1 \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) \right| \leq \frac{n}{d} \max_{\bar{\Omega}_0} |u|$$

Аналогично (методом математической индукции) доказывается неравенство

$$|\mathcal{D}^\alpha u(x)| \leq \left(\frac{nm}{\sigma} \right)^m \max_{\bar{\Omega}_0} |u|$$

, где $x \in \Omega_0$, $dist(x, \partial\Omega_0) = \sigma > 0$. Действительно, пусть оценка доказана для всех $\alpha : |\alpha| \leq k-1$. Возьмем два шара $B_{\sigma'}^x$ и $B_{\sigma'/k}^x$, где σ' - любое положительное число, меньшее σ . По предположению индукции для любой точки ξ из шара $B_{\sigma'/k}^x$ и любого β , $|\beta| = k-1$, имеет место неравенство

$$|\mathcal{D}^\beta u(\xi)| \leq \left(\frac{n(k-1)}{\sigma' - \sigma'/k} \right)^{k-1} \max_{\bar{\Omega}_0} |u| = \left(\frac{nk}{\sigma'} \right)^{k-1} \max_{\bar{\Omega}_0} |u|$$

Таким образом, для любого β , $|\beta| = k-1$, гармоническая функция $|\mathcal{D}^\beta u(\xi)|$ ограничена в шаре $B_{\sigma'/k}^x$ постоянной $\left(\frac{nk}{\sigma'} \right)^{k-1} \max_{\bar{\Omega}_0} |u|$. Тогда для первых производных этой функции по уже доказанному имеем

$$|\mathcal{D}^\beta u(\xi)_{\xi_i}| \leq \left(\frac{nk}{\sigma'} \right)^k \max_{\bar{\Omega}_0} |u|$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\sigma' \rightarrow \sigma - 0$, получаем требуемое неравенство. Ч.т.д.

2.4 Аналитичность гармонических функций.

Теорема. Гармоническая в области Ω функция $u(x)$ является аналитической в Ω .

$$u(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\tilde{x})}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

, где $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $(x - x_0)^\alpha = (x_1 - x_{01})^{\alpha_1} \dots (x_n - x_{0n})^{\alpha_n}$.

Обозначим

$$\gamma_m(x_0, x, \tilde{x}) = \sum_{|\alpha| = m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\tilde{x})}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

Пусть $|x - x_0| < \varepsilon$, $x, \tilde{x} \in B_{\rho}^{x_0}$, u - гармоническая в $B_{2\rho}^{x_0}$. Тогда

$$|\gamma_m(x_0, x, \tilde{x})| \leq \varepsilon^m \left(\frac{nm}{\rho} \right)^m \max_{B_{2\rho}^{x_0}} |u| \sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{\alpha!}$$

Но

$$\sum_{|\alpha| = m} \frac{1}{\alpha!} = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} = \frac{n^m}{m!}$$

Получаем

$$|\gamma_m(x_0, x, \tilde{x})| \leq \left(\frac{\varepsilon n^2 m}{\rho} \right)^m \frac{1}{m!} \max_{B_{2\rho}^{x_0}} |u|$$

Согласно формуле Стирлинга, $m! \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e} \right)^m$, тогда $|\gamma_m(x_0, x, \tilde{x})|$ оценивается сверху величиной, эквивалентной

$$\frac{c}{\sqrt{m}} \left(\frac{\varepsilon n^2}{\rho} \right)^m \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty, \varepsilon \ll 1$$

3 Лекция 17.

3.1 Функция Грина. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Теорема 3.1 (Лиувилль). Пусть $u(x)$ - гармоническая в \mathbb{R}^n , неотрицательная функция. Тогда $u = \text{const}$.

Доказательство: Зафиксируем точку x_0 и шар $Q_R^{x_0}$ радиуса R с центром в нашей точке. Поскольку производная гармонической функции – также функция гармоническая, по теореме о среднем имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{|Q_R^{x_0}|} \int_{Q_R^{x_0}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) dx = \frac{1}{|Q_R^{x_0}|} \int_{S_R^{x_0}} u(x) \nu_j(x) dS$$

Мы использовали формулу Стокса, чтобы перейти к интегрированию по границе шара. А теперь используем еще одну теорему о среднем, на этот раз из курса математического анализа:

$$= \frac{1}{|Q_R^{x_0}|} \nu_j(\tilde{x}) \int_{S_R^{x_0}} u(x) dS = \frac{|S_R^{x_0}|}{|Q_R^{x_0}|} \nu_j(\tilde{x}) |u(x_0)|$$

Здесь $|S_R^{x_0}| = w_n R^{n-1}$, а $|Q_R^{x_0}| = \frac{w_n}{n} R^n$. Таким образом,

$$|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)| \leq \frac{n}{R} |u(x_0)| \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

Ничего не мешает нам выбрать радиус шара сколь угодно большим, а значит, $|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)| = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$. Следовательно, $u = \text{const}$, что и требовалось.

Задача: Пусть $u(x)$ - гармоническая в \mathbb{R}^n и $u(x) \geq -C(1 + |x|^m)$, где $C, m > 0$ и $u(x)$. Показать, что в этом случае $u(x)$ есть полином степени не выше $[m]$.

Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega, \varphi \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Под классическим решением понимается решение из класса $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Для такого решения ранее была получена формула

$$u(x_0) = \int_{\Omega} E(|x - x_0|) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial E(|x - x_0|)}{\partial \nu} dS - \int_{\partial\Omega} E(|x - x_0|) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS$$

Пусть существует функция $g(x, x_0)$ со следующими свойствами:

$g(x, x_0) \in C_x^2(\overline{\Omega})$, $\Delta_x g(x, x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \Omega$ и при этом $g(x, x_0)|_{x \in \partial\Omega} = -E(|x - x_0|)|_{x \in \partial\Omega}$, $\forall x_0 \in \Omega$

Запишем вторую формулу Грина для $u(x), g(x, x_0)$:

$$\int_{\Omega} (u \Delta g - g \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

Поскольку функции u и g – гармонические в области, то левая часть формулы обращается в ноль. Теперь прибавим к левой и правой частям уже упоминавшееся соотношение:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial E(|x - x_0|)}{\partial \nu} dS - \int_{\partial\Omega} E(|x - x_0|) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS$$

И поскольку $g(x, x_0) + E(|x - x_0|) = 0$ на $\partial\Omega$, получаем:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial (E(|x - x_0|) + g(x, x_0))}{\partial \nu} dS$$

Определение: Функцией Грина называется функция $G(x, x_0) = E(|x - x_0|) + g(x, x_0)$, где функция $g(x, x_0)$ введена ранее. Точка x_0 называется полюсом.

Итак, если $u \in C^2(\overline{\Omega})$ – решение задачи Дирихле, то:

$$u(x_0) = u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu} dS$$

Лемма 3.2. $\forall x_1, x_0 \in \Omega \quad G(x_1, x_0) = G(x_0, x_1)$

Доказательство: Исходя из определения функции Грина, $\Delta_x G(x, x_0) = 0$ при $x \neq x_0$. Вырежем вокруг точек x и x_0 шарики маленького радиуса ε , и то что осталось обозначим за Ω_ε :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega(\overline{Q_\varepsilon^{x_0} \cup Q_\varepsilon^{x_1}})$$

Введем функции $u(x) = G(x, x_0)$, и $v(x) = G(x, x_1)$. В области Ω_ε они гармонические, поэтому по второй формуле Грина:

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS$$

Поскольку $G(x, x_0)|_{\partial \Omega} = 0$ (вспомним, что функция g определялась условием $g(x, x_0)|_{x \in \partial \Omega} = -E(|x - x_0|)|_{x \in \partial \Omega}$, $\forall x_0 \in \Omega$), то $u(x)|_{\partial \Omega} = v(x)|_{\partial \Omega} = 0$. Поэтому

$$0 = \int_{S_\varepsilon^{x_0}} G(x, x_0) \frac{\partial G(x, x_1)}{\partial \nu} dS + \int_{S_\varepsilon^{x_1}} G(x, x_0) \frac{\partial G(x, x_1)}{\partial \nu} dS$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial E(|x - x_1|)}{\partial \nu} = -\frac{\partial E}{\partial r}(r) = -\frac{1}{w_n r^{n-1}}$$

Получаем, что

$$\int_{S_\varepsilon^{x_1}} G(x, x_0) \frac{\partial G(x, x_1)}{\partial \nu} dS = -\frac{1}{w_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon^{x_1}} G(x, x_0) dS \rightarrow -G(x_1, x_0)$$

Аналогично переходя к пределу в другом слагаемом, имеем

$$0 = -G(x_1, x_0) + G(x_0, x_1)$$

что и требовалось доказать.

4 Лекция 18.

4.1 Интеграл Пуассона.

$u(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^n , $\partial\Omega \in C^1$.

Будем решать следующую задачу (1):

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x_0) = \int_{\Omega} f(x)G(x, x_0)dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x, x_0)ds$$

$G(x, x_0)$ - функция Грина, G не более чем единственна.

$\Omega = Q_R^0 \subset \mathbb{R}^n$, $G(x, x_0) = E(|x - x_0|) - E(\frac{\rho}{R}|x - x_*|)$

Если

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), x \in \Omega, & u \in C^2(\bar{Q}_R^0) \\ u|_{S_R^0} = \varphi(x) \end{cases}$$

,то $u(x_0) = \int_{S_R^0} \varphi(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu_x} ds_x$.

$$\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu} \Big|_{x \in S_R^0, x_0 \in Q_R^0} = E'(r) \frac{\partial |x - x_0|}{\partial \nu} - \frac{\rho}{R} E'(\frac{\rho}{R} r_1) \frac{\partial |x - x_*|}{\partial \nu}$$

, где $r = |x - x_0|$, $r_1 = |x - x_*|$.

$\frac{\partial |x - x_0|}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_{0j}}{|x - x_0|} = \cos \gamma$, где γ - угол между ν и $x - x_0$. Аналогично $\frac{\partial |x - x_*|}{\partial \nu} = \cos \beta$.

По теореме косинусов $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}$.

Аналогично

$$\cos \beta = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1} = \frac{R^2 + \frac{R^2 r^2}{\rho^2} - \frac{r^4}{\rho^2}}{2R \frac{rR}{\rho}} = \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2r}$$

Т.к. $E(r) = -\frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}$, то $E'(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}$.

Тогда

$$\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu} \Big|_{x \in S_R^0, x_0 \in Q_R^0} = E'(r)(\cos \gamma - \frac{\rho}{R} \cos \beta) = E'(r) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr} = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \frac{1}{|x - x_0|^n}$$

Следовательно,

$$u(x_0) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{\varphi(x)}{|x - x_0|^n} ds_x \quad \text{- интеграл Пуассона}$$

$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \alpha$, тогда

$$u(x_0) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{\varphi(x) ds_x}{(R^2 + |x_0|^2 - 2R|x_0| \cos \alpha)^{n/2}}$$

Пусть $\varphi \in C(S_R^0)$. Тогда функция $u(x)$, задаваемая интегралом Пуассона, есть решение задачи (1). Необходимо проверить 2 условия:

1) $u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu_x} ds_x$ - гармоническая по x_0 , $x_0 \in Q_R^0$.

2) $\forall \hat{x} \in S_R^0 \quad \exists \lim_{x_0 \rightarrow \hat{x}} u(x_0) = \varphi(\hat{x})$

Докажем это.

1) При $x \neq x_0$ $\Delta_x G(x, x_0) = 0 \Rightarrow \Delta_{x_0} G(x_0, x) = 0 \Rightarrow \Delta_{x_0} G(x, x_0) = 0$ в силу симметричности G .

$x_0 \in \Omega \subset \subset Q_R^0 \Rightarrow \Delta_{x_0} u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Delta_{x_0} G(x, x_0) ds_x = 0$

2) В силу решения задачи Дирихле задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in Q_R^0 \\ u|_{S_R^0} = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение $u \equiv 1$, тогда

$$1 = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{ds_x}{r^n}$$

$$\varphi(\hat{x}) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{\varphi(\hat{x})}{r^n} ds_x$$

$$\begin{aligned}
|u(x_0) - \varphi(\hat{x})| &= \left| \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{\varphi(x) - \varphi(\hat{x})}{r^n} ds_x \right| \leq \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\hat{x})|}{r^n} ds_x = \\
&= \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\sigma_{\delta(\varepsilon)}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\hat{x})|}{r^n} ds_x + \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0 \setminus \sigma_{\delta(\varepsilon)}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\hat{x})|}{r^n} ds_x
\end{aligned}$$

Первое слагаемое обозначим за I_1 , второе за I_2 .

Здесь мы пользовались тем, что $\forall \varepsilon \quad \exists \delta > 0 : \quad x \in \sigma_\delta = Q_\delta^{\hat{x}} \cap S_R^0 \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(\hat{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{ds_x}{r^n} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Что можно сказать об I_2 ? При $x \in S_R^0 \setminus \sigma_\varepsilon$ имеем $|x - x_0| \geq a > 0$, как только $|x_0 - x| < \delta_1$. Тогда

$$I_2 \leq 2 \max_{S_R^0} |\varphi(x)| a^{-n} \frac{\omega_n R^{n-1}}{\omega_n R} (R^2 - |x_0|^2) = c_1 (R^2 - |x_0|^2)$$

С другой стороны, $\exists \tilde{\delta} > 0 : |x_0 - \hat{x}| < \tilde{\delta} \Rightarrow R^2 - |x_0|^2 < \frac{\varepsilon}{c_1}$. Тогда $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ч.т.д.

4.2 Неравенство Харнака.

Пусть $u(x)$ - гармоническая в Q_R^0 функция, непрерывная вплоть до границы; $u(x) \geq 0$. Тогда $\forall x \in Q_R^0$

$$\frac{R^{n-2}(R - \rho)}{(R + \rho)^{n-1}} \leq u(x_0) \leq \frac{R^{n-2}(R + \rho)}{(R - \rho)^{n-1}}$$

,где $\rho = |x_0|$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
u(x_0) &= \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{u(x)}{r^n} ds_x; \quad R - \rho \leq r \leq R + \rho \\
\frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \frac{1}{(R + \rho)^n} \int_{S_R^0} u(x) ds_x &\leq u(x_0) \leq \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \frac{1}{(R - \rho)^n} \int_{S_R^0} u(x) ds_x
\end{aligned}$$

Но $\int_{S_R^0} u(x) ds_x = u(0) \omega_n R^{n-1}$, откуда и получаем нужное нам утверждение.

Ч.т.д.

4.3 Обратная теорема о среднем.

Пусть $u \in C(\Omega)$ и для любого шара $\overline{Q_r^{x_0}} \subset \Omega$ для u справедлива теорема о среднем по сфере. Тогда $u(x)$ - гармоническая в Ω функция.

Доказательство.

Задача

$$\begin{cases} \Delta v = 0, x \in Q_R^{x_0}, \overline{Q_r^{x_0}} \subset \Omega \\ v|_{S_R^{x_0}} = u|_{S_R^{x_0}} \end{cases}$$

имеет единственное решение, которое задается интегралом Пуассона.

Тогда имеем $v(x) \equiv u(x)$ в $Q_R^{x_0}$, что следует из равенства $u(x)$ и $v(x)$ на $\partial Q_R^{x_0}$, выполнения теоремы о среднем и принципа максимума.

4.4 Теорема об устранимой особенности.

Пусть $u(x)$ - гармоническая в $\Omega \setminus \{x_0\}$ функция, $m(\rho) = \sup_{\Omega \setminus Q_\rho^{x_0}} |u(x)|$.

Пусть $m(\rho) \leq a(\rho)E(\rho)$, где $a(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$.

Тогда $u(x)$ можно доопределить в x_0 таким образом, что полученная функция будет гармонична в Ω .

5 Лекция 19

Доказательство теоремы об устранимой особенности

Рассмотрим $Q_{\rho_1}^{x_0} : \overline{Q_{\rho_1}^{x_0}} \in \Omega$

Найдем:

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, & x \in Q_{\rho_1}^{x_0} \\ v(x) = u(x), & x \in \overline{Q_{\rho_1}^{x_0}} \end{cases}$$

Наша цель показать, что $u(x) = v(x)$ в шаре всюду, кроме его центра x_0 . Рассмотрим $\omega(x) = v(x) - u(x), x \in Q_{\rho_1}^{x_0} / \overline{Q_{\rho_1}^{x_0}}$. $\Delta \omega = 0, x \in Q_{\rho_1}^{x_0} / \overline{Q_{\rho_1}^{x_0}}$ $\omega = 0$ на $S_{\rho_1}^{x_0}$

$$\max_{\overline{Q_{\rho_1}^{x_0}}} |v(x)| \leq \max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |u(x)| = M$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0, Q_{\rho_1}^{x_0} / \{x_0\}, |\omega(x)| \leq \varepsilon E(|x - x_0|)$

$$\max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |\omega(x)| \leq \max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |u(x)| + \max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |v(x)| \leq \quad (19.1)$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \rho \leq \rho_0 : M \leq \frac{\varepsilon}{2} |E(\rho)|$

С другой стороны по условию теоремы

$$\max_{S_{\rho}^{x_0}} |u(x)| \leq a(\rho) |E(\rho)| \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\rho}_0 : \forall \rho \leq \tilde{\rho}_0, a(\rho) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \max_{S_{\rho}^{x_0}} |u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |E(\rho)|$$

Тогда (19.1) можно продолжить

$$\leq \varepsilon |E(\rho)|, \quad \forall \rho \leq \hat{\rho}$$

По принципу максимума:

$$|\omega(x)| \leq \varepsilon |E(|x - x_0|)|, \quad \forall x \in Q_{\rho_1}^{x_0} / \{x_0\}$$

Следовательно, полагая $u(x_0) := v(x_0)$, получаем гармоническую функцию во всем шаре

5.1 Теория потенциала.

$$u(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \partial\Omega \in C^1$$

Вспомним, что

$$u(x_0) = \int_{\Omega} E(x, x_0) \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} dS - \int_{\partial\Omega} E(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

- представляется в виде трех потенциалов.

Введем для каждого из потенциалов обозначения:

$$P_0(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi, \quad n \geq 3 \text{ - объемный потенциал.}$$

$$P_1(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} \text{ - потенциал простого слоя.}$$

$$P_2(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} \text{ - потенциал двойного слоя.}$$

Здесь $E|x - \xi| = c_n \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$.

Теорема 2

Пусть $\mu(x), \sigma(x) \in L_1(\Gamma)$. Тогда $P_1(x), P_2(x)$ - гармонические функции в R^n / Γ

Доказательство

Можно дифференцировать 2 раза P_1, P_2 под знаком интеграла.

$$\forall x \in \Omega_1; \quad \Omega, \quad \partial\Omega = \Gamma, \quad \Omega_0 = R^n / \overline{\Omega} \quad \Omega_1 \subset \subset \Omega$$

Возьмем Ω_1 , $\rho(\Omega_1, \Gamma) \geq \alpha > 0$. В $P_1(x)$ можно дифференцировать под знаком интеграла. То же самое и для Ω_0

$$\Delta_x P_1(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \Delta_x \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0$$

Теперь посмотрим на потенциал двойного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} &= -(n-2) \frac{1}{|x - \xi|^{n-1}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial |x - \xi|}{\partial \xi_k} \nu_{\xi}^k = -(n-2) \frac{1}{|x - \xi|^{n-1}} \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k - x_k}{|x - \xi|} \nu_{\xi}^k = \\ &= -(n-2) \frac{\cos(r, \nu_{\xi})}{r^{n-1}} \end{aligned}$$

Тогда

$$P_2(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_k^{\xi} dS_{\xi}$$

Теперь по тем же соображениям можно дифференцировать и потенциал двойного слоя.

Посмотрим, как ведут себя P_1 , P_2 на бесконечности. Если $\xi \in \Gamma$, $|x| \gg 1$, $\Rightarrow |x - \xi| \geq |x| - |\xi| \geq \frac{|x|}{2}$ Тогда для P_1 :

$$|P_1(x)| \leq \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} |\mu(\xi)| dS_{\xi} = \frac{M_0}{|x|^{n-2}}$$

Следовательно для $n \geq 3$, $P_1(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$.

По тем же соображениям

$$\begin{aligned} |P_2(x)| &\leq \frac{M_1}{|x|^{n-2}} \\ |P_0(x)| &\leq \frac{M_2}{|x|^{n-2}} \end{aligned}$$

Теорема 3

Пусть $\rho(x) \in C(\bar{\Omega})$. Тогда $P_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и $P_0(x)$ гармоническая функция при $x \in \mathbb{R}^n / \bar{\Omega}$

Доказательство.

$$x \in \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n / \bar{\Omega} \Rightarrow \Delta_x P_0(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi) \Delta_x \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = 0$$

$x \in \bar{\Omega}$, Q_{ε}^x - шар.

$$\begin{aligned} P_0(x) &\leq \int_{\bar{\Omega} \cap Q_{\varepsilon}^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi + \int_{\bar{\Omega} / Q_{\varepsilon}^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi \\ \int_{\bar{\Omega} \cap Q_{\varepsilon}^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi &\leq \max_{\bar{\Omega}} |\rho(x)| \int_{Q_{\varepsilon}^x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi \\ \int_{\bar{\Omega} / Q_{\varepsilon}^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi &\leq M_{1,\varepsilon} \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^n / \bar{\Omega} \Rightarrow |P_0(x)| \leq M$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} |P_0(x_0 + h) - P_0(x_0)| &\leq \int_{\bar{\Omega} \cap Q_{\delta}^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 + h - \xi|^{n-2}} d\xi + \int_{\bar{\Omega} \cap Q_{\delta}^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} d\xi + \\ &+ \int_{\bar{\Omega} / Q_{\delta}^x} |\rho(\xi)| \left| \frac{1}{|x_0 + h - \xi|^{n-2}} - \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} \right| d\xi \\ \int_{\bar{\Omega} / Q_{\delta}^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} d\xi &\text{ гладкая поверхность.} \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists h_0 > 0, \forall |h| < h_0$$

$$\int_{\bar{\Omega} / Q_{\delta}^x} |\rho(\xi)| \left| \frac{1}{|x_0 + h - \xi|^{n-2}} - \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} \right| d\xi \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\Omega} \cap Q_\delta^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} d\xi &\leq \max_{\overline{\Omega}} |\rho(x)| \int_{Q_\delta^{x_0}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = C_1 \int_0^\delta r dr = C_2 \delta^2 < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } \delta < 1 \\
\left| \int_{\overline{\Omega} \cap Q_\delta^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 + h - \xi|^{n-2}} d\xi \right| &(|h| < \delta/2) (|x_0 + h - \xi| \leq |x_0 - \xi| + |h| < 3\delta/2) \leq \\
&\leq \max_{\overline{\Omega}} |\rho(x)| C_2 \int_0^{3\delta/2} r dr = C_3 \delta^2 \leq \varepsilon/3 \text{ при } \delta < 1
\end{aligned}$$

Окончательно получаем, что при малых h

$$|P_0(x_0 + h) - P(x_0)| < \varepsilon \rightarrow P_0 \in C(\mathbb{R}^n)$$

Упражнение.

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_k} \in C(\mathbb{R}^n)$$

$$\Delta P_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n / \overline{\Omega}$$

$$\Delta P_0(x) = -(n-2)\omega_n \rho(x), \quad x \in \Omega', \quad \omega_n = |S_1^0|$$

$$(n=2: \Delta P_0 = -2\pi \rho(x))$$

Теорема 4

Пусть $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$. Тогда $P_0(x) \in C^2(\Omega)$, при $x \in \Omega$

$$\Delta P_0(x) = \begin{cases} -(n-2)\omega_n \rho(x), & n \geq 3 \\ -2\pi \rho(x), & n = 2 \end{cases}$$

Доказательство:

$n \geq 3$, вычислим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_0(x)}{\partial x_k} &= \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = - \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Omega / \Omega_\varepsilon^x} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi
\end{aligned}$$

И получим то, что требуется доказать в условии.

6 Лекция 20.

Объемный потенциал: $P_0(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi$

Потенциал простого слоя: $P_1(x) = \int_{\Omega} \mu(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi$

Потенциал двойного слоя: $P_2(x) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi$

$\Delta P_i(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n / \Gamma, i = 1, 2;$

6.1 Объемный потенциал.

$\Delta P_0(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n / \bar{\Omega}, P_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n), \rho \in C(\bar{\Omega})$

$$\text{Уравнение Пуассона} \begin{cases} \Delta P_0 = -(n-2)\omega_n \rho(x), & x \in \Omega, n \geq 3; \\ \Delta P_0 = -2\pi \rho(x), & x \in \Omega, n = 2 \end{cases} \quad (20.1)$$

Теорема 1.

Пусть $\rho \in C^1(\bar{\Omega})$. Тогда $P_0 \in C^2(\Omega)$, P_0 удовлетворяет уравнению (20.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial x_k} &= \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi = - \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega / \bar{Q}_{\varepsilon}^x} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega / \bar{Q}_{\varepsilon}^x} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial(\Omega / \bar{Q}_{\varepsilon}^x)} \rho(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} \right) = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial(\Omega)} \rho(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\varepsilon}^x} \rho(\xi) \varepsilon^{2-n} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} \\ & \quad \left| \int_{S_{\varepsilon}^x} \rho(\xi) \varepsilon^{2-n} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} \right| \leq M \varepsilon^{2-n} \varepsilon^{n-1} = M \varepsilon \\ & \Rightarrow - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{\varepsilon}^x} \rho(\xi) \varepsilon^{2-n} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} = 0 \end{aligned}$$

Т.е. получаем что $\frac{\partial P_0}{\partial x_k} \in C^1(\Omega)$, поскольку первое слагаемое есть объемный потенциал с плотностью $\frac{\partial \rho}{\partial \xi_k} \in C(\Omega)$, а второе - потенциал простого слоя с $\rho(\xi) \nu_{\xi}^k \in L_1(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_k^2}(x) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\xi)}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial \Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} - \xi = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega / \bar{Q}_{\varepsilon}^x} \frac{\partial \rho(\xi)}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial \Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega / \bar{Q}_{\varepsilon}^x} \rho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial(\Omega / \bar{Q}_{\varepsilon}^x)} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} \right\} - \\ & \quad - \int_{\partial \Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} \end{aligned}$$

Записываем эти равенства для всех $k = 1, \dots, n$ и складываем

$$\Delta P_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega / \bar{Q}_{\varepsilon}^x} \rho(\xi) \Delta_{\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi - \sum_{k=1}^n \int_{\partial \Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \nu_{\xi}^k dS_{\xi} -$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_\xi - \sum_{k=1}^n \int_{\partial \Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_\xi^k dS_\xi -$$

В $\Omega/\overline{Q}_\varepsilon^x$, $\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$ гармоническая, тогда первое слагаемое равно 0.

Второе и четвертое слагаемое отличаются знаком, т.к. $\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} = -\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_\xi &= - \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} dS_\xi = \\ &= (n-2)\varepsilon^{1-n} \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) dS_\xi = (n-2)\omega_n \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) dS_\xi \rightarrow (n-2)\omega_n \rho(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Получаем (20.1).

Упражнение.

Самостоятельно провести доказательство для $n=2$. ($P_0(x) = \int_\Omega \rho(\xi) \ln |x - \xi| d\xi$)

Теорема доказана.

Подведем итоги.

Свойства $P_0(x) = \int_\Omega \rho(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi$

Пусть $\rho \in C(\overline{\Omega})$, тогда

а) $P_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$

б) $|P_0(x)| \leq \frac{c}{|x|^{n-2}}, |x| \rightarrow \infty$

в) $\Delta P_0(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n/\overline{\Omega}$

Пусть $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$, тогда

г) $\Delta P_0(x) = -(n-2)\omega_n \rho(x), x \in \Omega$

Замечание. Используя эти свойства, можно вычислить P_0 не через \int_Ω , а как решение г) со свойствами а)-в)

6.2 Потенциал двойного слоя.

Замкнутая поверхность $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ называется поверхностью Ляпунова, если

а) $\forall x \in \Gamma \exists$ нормаль ν_x к Γ в точке x . (ν_x - внешняя)

б) $\exists \alpha > 0, \alpha > 0 \forall x, \xi \in \Gamma, \nu_x, \nu_\xi$ - нормали; θ - угол между ними $\Rightarrow \theta \leq \alpha |x - \xi|^\alpha$

Отметим некоторые очевидные свойства:

1. $\Gamma \in C^2 \Rightarrow \Gamma$ - поверхность Ляпунова.

2. Γ - поверхность Ляпунова $\Rightarrow \Gamma \in C^2$

Упражнение.

Доказать, что из условия б) следует условие Гелдера для нормали: $|\nu_x - \nu_\xi| \leq \alpha |x - \xi|^\alpha$

Теорема 2.

Пусть Γ - поверхность Ляпунова. Тогда $\exists d > 0 : \forall x \in \Gamma$ любая прямая, параллельная ν_x , пересекает Γ внутри Q_d^x не более чем в одной точке.

Доказательство.

Берем d таким, чтобы $ad^\alpha < 1$, предположим противное, т.е. пусть в точке ξ_1 прямая l вышла из Ω , а в ξ_2 - вошла. Проведем касательную плоскость Π в ξ_2 . Прямая l и внешняя нормаль ν_{ξ_2} будут лежать по разные стороны от Π , $\nu_{\xi_2} \perp \Pi$

$$(\widehat{l, \nu_{\xi_2}}) \Rightarrow (\widehat{\nu_x, \nu_{\xi_2}}) \geq \pi/2; |x - \xi_2| \leq d, \text{ т.к. } \xi_2 \in Q_d^x$$

Тогда $\pi/2 \leq ad^\alpha$. Противоречие.

$\Gamma' = \Gamma \cap Q_d^x$ однозначно проектируется на касательную плоскость в $x \Rightarrow \Gamma'$ можно рассматривать в некоторой системе координат, как график функции.

Фиксируем $x \in \Gamma$. S_d^x называется сферой Ляпунова.

$\Gamma' : \xi_n = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, f задана на проекции Γ' на касательную плоскость.

При этом $f(0, \dots, 0) = 0$; $\nu_x = (0, \dots, 0, 1)$

Теперь будет некоторая муторная работа, целью которой будет следующее:

$\forall x, \xi \in \Gamma | \cos(r, \nu_\xi) | \leq cr^\alpha$, α из определения поверхности Ляпунова.

$$(P_2(x) = -(n-2) \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\cos(r, \nu_\xi)}{|x-\xi|^{n-1}} dS_\xi)$$

$$\nu_x = \left(-\frac{f_{\xi_1}(0)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{f_{\xi_2}(0)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}}, \dots, -\frac{f_{\xi_{n-1}}(0)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}} \right)$$

Здесь и далее $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Сравнивая это выражение с выражением раньше, получаем $f_{\xi_j} = 0$, $j = 1, \dots, n-1$
Упражнение.

$$\cos(r, \nu_\xi) = \sum_{k=1}^n \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k)$$

Выделим в этой сумме последнее слагаемое.

$$\cos(r, \xi_n) \cos(\nu_\xi, \xi_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k) \quad (*)$$

Хочется оценить $|\xi_n| = |f|$ и $|\cos(\nu_\xi, \xi_k)|$, $k = 1, \dots, n-1$

$$\nu_\xi = \left(-\frac{f_{\xi_1}(\xi)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{f_{\xi_2}(\xi)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}}, \dots, -\frac{f_{\xi_{n-1}}(\xi)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}} \right)$$

$$\cos(\nu_\xi, \xi_k) = -\frac{f_{\xi_k}(\xi)}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}}, \quad k = 1, \dots, n-1;$$

$$\cos \theta = \cos(\nu_\xi, \nu_x) = \cos(\nu_\xi, \xi_n) = -\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}}$$

θ из определения поверхности Ляпунова. $\cos \theta \geq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ (из математического анализа), $\theta \leq ar^\alpha \leq ad^\alpha < 1 \Rightarrow \cos \theta \geq 1/2$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2}} &\geq 1 - \frac{a^2 r^{2\alpha}}{2} \\ \sqrt{1+|\nabla_{\xi'} f|^2} &\leq \frac{1}{1 - \frac{a^2 r^{2\alpha}}{2}} = 1 + \frac{a^2 r^{2\alpha}}{2 - a^2 r^{2\alpha}} \geq (a^2 r^{2\alpha} < 1)1 + a^2 r^{2\alpha} \\ |\nabla_{\xi'} f|^2 &\leq 2a^2 r^{2\alpha} + a^4 r^{4\alpha} \leq 3a^2 r^{2\alpha} \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} |\nabla_{\xi'} f| &\leq \sqrt{3}ar^\alpha \\ |f_{\xi_k}(\xi)| &\leq |\nabla_{\xi'} f| \leq \sqrt{3}ar^\alpha, \quad k = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

В (*) последнее слагаемые оцениваются

$$|\cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leq |\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leq \sqrt{3}ar^\alpha$$

$$r^2 = \xi_n^2 + \rho^2, \quad \rho^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\xi_k}{\rho} \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \right| \leq \sqrt{3}anr^\alpha \leq \sqrt{3}and^\alpha = C_1$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow |f(\xi)| \leq \int_0^\rho \left| \frac{\partial f}{\partial \rho'} \right| d\rho' \leq C_1 \rho \Rightarrow |\xi_n| = |f(\xi)| \leq C_1 \rho$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \rho^2 < r^2 &\leq C_1 \rho^2 + \rho^2 = C_2 \rho^2 \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right| \leq C_3 \rho^\alpha \\ |\xi_n| = |f(\xi)| &\leq C_4 \rho^{\alpha+1} \Rightarrow |\xi_n| = |f(\xi)| \leq C_4 r^{\alpha+1} \end{aligned}$$

Из (*):

$$|\cos r, \nu_\xi| \leq \frac{|\xi_n|}{2} + C_0 r^\alpha \leq \bar{C} r^\alpha$$

что и требовалось.

7 Лекция 21

Теорема 1. Пусть Γ - замкнутая поверхность Ляпунова, $\sigma(\xi) \equiv 1$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r^{n-2}} \right| ds_{\xi} = (n-2) \int_{\Gamma} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} \leq M < \infty$$

Доказательство.

1. Пусть $\rho(x, \Gamma) \geq \frac{d}{2}$. Тогда $r = |x - \xi| \geq \frac{d}{2}$, откуда

$$\int_{\Gamma} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} \leq \frac{2^{n-1}}{d^{n-1}} |\Gamma| \leq \infty$$

2. Пусть $\rho(x, \Gamma) < \frac{d}{2}$.

2а. Пусть $x \in \Gamma$, тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} = \int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} + \int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi}$$

, где $\Gamma' = \Gamma \cap Q_d^x$, $\Gamma'' = \Gamma \setminus \Gamma'$.

$$\int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} \leq \frac{1}{d^{n-1}} |\Gamma|$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} &\leq \int_{\Gamma'} \frac{C r^{\alpha}}{r^{n-1}} ds_{\xi} \leq c_2 \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho^{\alpha}}{\rho^{n-1}} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} = c_3 \int_0^{d_1} \rho^{\alpha+1-n} \rho^{n-2} d\rho = \\ &= c_3 \int_0^{d_1} \rho^{\alpha-1} d\rho \leq c_4 < \infty \end{aligned}$$

К последним неравенствам мы переходили, заменяя интегрирование по Γ' интегрированием по проекции Γ' на касательную плоскость, $\cos(r, \nu_{\xi}) ds_{\xi} = d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}$; $\rho^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2$; $\rho^2 \leq r^2 = \rho^2 + \xi_n^2$; $|\xi_n| \leq c_1 \rho^{\alpha+1}$

2б. x не принадлежит Γ , $|x - x_0| < \frac{d}{2}$.

В $\{\xi_i\}$ x имеет координаты $(0, \dots, 0, \pm \delta)$, $\delta > 0$.

$$\cos(r, \nu_{\xi}) = \sum_{k=1}^n \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_{\xi}, \xi_k) \quad - \text{ это упражнение из предыдущей лекции}$$

$$\cos(r, \nu_{\xi}) = \sum_{k=1}^{n-1} \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_{\xi}, \xi_k) + \cos(r, \xi_n) \cos(\nu_{\xi}, \xi_n)$$

$$|\cos(\nu_{\xi}, \xi_k)| \leq C r_0^{\alpha}, \quad r_0 = |x_0 - \xi|, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad r_0^2 = \rho^2 + \xi_n^2$$

$$|\cos(r, \xi_n)| \leq \frac{|\xi_n \pm \delta|}{r}$$

$$\cos(r, \nu_{\xi}) \leq C r_0^{\alpha} + \frac{|\xi_n \pm \delta|}{r}$$

Теперь разбиваем наш интеграл на 2 других интеграла:

$$\int_{\Gamma} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} = \int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} + \int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi}$$

$\int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi}$ оценивается так же, как в пункте 2а. Оценим $\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi}$.

$$r^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \xi_k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2 + (\xi_n \pm \delta)^2 = \rho^2 + (\xi_n \pm \delta)^2$$

$$\pm \xi_n \delta \geq -\frac{\delta^2}{2} - 2\xi^2 \quad r^2 \geq \rho^2 - \xi_n^2 + \frac{\delta^2}{2}, \quad \text{и еще } |\xi_n| \leq c_1 \rho^{\alpha+1} \leq c_1 d^{\alpha} \rho$$

Уменьшим, если надо, d , чтобы $c_1 d^{\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $|\xi_n| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Итак, $r^2 \geq \frac{\rho^2 + \delta^2}{2}$.

$$\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} \leq C_0 \left(\int_{\Gamma'} \frac{r_0^{\alpha}}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n-1}{2}}} ds_{\xi} + \int_{\Gamma'} \frac{\rho^{\alpha+1}}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n}{2}}} ds_{\xi} + \delta \int_{\Gamma'} \frac{ds_{\xi}}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n}{2}}} \right)$$

Первый интеграл обозначим I_1 , второй I_2 , третий I_3 . $r_0^2 = \rho^2 + \xi_n^2 \leq \tilde{c}\rho^2$.

$$I_1 \leq K_1 \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho^\alpha}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n-1}{2}}} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \leq K_2 \int_0^{d_1} \rho^{\alpha+1-n} \rho^{n-2} d\rho < \infty$$

Аналогично оценивается I_2 .

$$I_3 \leq K\delta \int_0^{d_1} \frac{\rho^{n-2} d\rho}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n}{2}}} = K\delta \int_0^{d_1} \frac{\rho^{n-2} d\rho}{\rho^n (1 + \frac{\delta^2}{\rho^2})^{\frac{n}{2}}} = K \int_0^{d_1} \frac{-d\frac{\delta}{\rho}}{(1 + \frac{\delta^2}{\rho^2})^{\frac{n}{2}}} = K \int_{\delta/d_1}^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} \leq \infty$$

Ч.т.д.

Σ - часть поверхности, на которой задано положительное направление нормали, x не принадлежит Σ . Предполагаем $\xi \in \Sigma$ $\cos(\vec{x\xi}, \nu_\xi) \geq 0$. Соединим теперь x с каждой точкой Σ . Полученную коническую границу обозначим K . $\partial K = K \cup \Sigma$. $Q_R^x \cap \Sigma = \emptyset$. K высечет на S_R^x некоторую поверхность, обозначим ее $\sigma_R \subset S_R^x$.

$$\omega_x(\Sigma) = \frac{|\sigma_R|}{R^{n-1}} = |\sigma_1|$$

В случае $\cos(\vec{x\xi}, \nu_\xi) < 0$ считаем $\omega_x(\Sigma) = -\frac{|\sigma_R|}{R^{n-1}}$.

В общем случае мы разбиваем Σ на соответствующие части.

Теорема 2.

$$\omega_x(\Sigma) = -\frac{1}{n-2} \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi \quad (n \geq 3)$$

(т.е. ω_x - потенциал двойного слоя)

Доказательство.

$$\Omega_\varepsilon = \tilde{K} \setminus \overline{Q_\varepsilon^x}; \quad K_\varepsilon = K \setminus \overline{Q_\varepsilon^x}.$$

В Ω_ε $\frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$ - гармоническая, тогда запишем $\Delta_\xi \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} = 0$ в Ω_ε .

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta_\xi \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = \text{int}_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi = \\ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi + \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi + \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}|_{\xi \in \sigma_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}|_{\xi \in \sigma_\varepsilon} = (n-2)\varepsilon^{1-n} \\ &\quad \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi = (n-2)\varepsilon^{1-n}|\sigma_\varepsilon| = (n-2)\omega_x(\Sigma) \\ &\quad \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi = -(n-2) \int_{K_\varepsilon} \frac{\cos(r, \nu_\xi)}{r^{n-1}} ds_\xi = 0, \quad \text{т.к. } \cos(r, \nu_\xi) = 0 \end{aligned}$$

Итак,

$$0 = \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi + (n-2)\omega_x(\Sigma)$$

Ч.т.д.

Следствие. Γ - замкнутая поверхность Ляпунова, ограничивающая область Ω .

Тогда $\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi$ может принимать следующие значения:

$$\begin{cases} -\omega_n(n-2), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \\ -\frac{\omega_n(n-2)}{2}, & x \in \Gamma \end{cases}$$

, где $n \geq 3$, $\omega_n = |S_1|$.

Доказательство.

1)

$$x \in \Omega \Rightarrow \omega_x(\Gamma) = \omega_n \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi = -\omega_n(n-2)$$

2)

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \Rightarrow \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} - \text{гармоническая по } \xi \in \Omega$$

3)

$x \in \Gamma$. π_x - касательная плоскость к Γ в точке x . Рассмотрим $Q_\varepsilon^x, \varepsilon \ll d$. $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap Q_\varepsilon^x$. $\widetilde{S}_\varepsilon^x = S_\varepsilon^x \cap \Omega$. $\widehat{S}_\varepsilon^x$ - полусфера. $\widehat{S}_\varepsilon^x = \widetilde{S}_\varepsilon^x + B_\varepsilon$. $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{Q_\varepsilon^x}$. $\frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$ гармоническая по ξ в Ω .

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi &= - \int_{\widetilde{S}_\varepsilon^x} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi = \\ &= - \int_{\widehat{S}_\varepsilon^x} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi + \int_{B_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi \\ \int_{B_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi &= -(n-2) \int_{B_\varepsilon} \frac{\cos(r, \nu_\xi)}{r^{n-1}} ds_\xi \\ \int_{B_\varepsilon} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi &\leq K_0 \varepsilon^{\alpha+1-n} |B_\varepsilon| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi \rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

и

$$- \int_{\widehat{S}_\varepsilon^x} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi \rightarrow - \frac{\omega_n(n-2)}{2} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

Ч.т.д.

7.1 Теорема о скачке потенциала двойного слоя.

$x_0 \in \Gamma$ $P_2^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} P_2(x)$, $P_2^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} P_2(x)$, $\overline{P_2(x_0)}$ - прямое значение. Пусть Γ - замкнутая поверхность Ляпунова, $x_0 \in \Gamma$, $\sigma(x) \in C(\Gamma)$. Тогда

$$\begin{aligned} P_2^+(x_0) &= - \frac{\omega_n(n-2)}{2} \sigma(x_0) + \overline{P_2(x_0)} \\ P_2^-(x_0) &= \frac{\omega_n(n-2)}{2} \sigma(x_0) + \overline{P_2(x_0)} \end{aligned}$$

8 Лекция 22.

Пусть Γ – замкнутая поверхность Ляпунова, тогда для потенциала двойного слоя с $\sigma(x) \equiv 1$ мы получили результат

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \\ -\frac{(n-2)w_n}{2}, & x \in \Gamma \\ -(n-2)w_n, & x \in \Omega \end{cases}$$

Теорема 8.1. Пусть Γ – замкнутая поверхность Ляпунова, $\sigma(x) \in C(\Gamma)$, тогда $\forall x_0 \in \Gamma$:

$$P_2^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} P_2(x) = -\frac{(n-2)w_n}{2} \sigma(x_0) + \bar{P}_2(x_0)$$

$$P_2^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} P_2(x) = \frac{(n-2)w_n}{2} \sigma(x_0) + \bar{P}_2(x_0)$$

Где $\bar{P}_2(x_0)$ – прямое значение в точке x_0 .

Доказательство:

$$P_2(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = \int_{\Gamma} (\sigma(\xi) - \sigma(x_0)) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \sigma(x_0) \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}$$

Первое слагаемое назовем $W_0(x)$, а второе $W(x)$. Если мы докажем непрерывность $W_0(x)$ в точке x_0 , то тем самым мы докажем теорему. В самом деле, если $W_0^+(x_0) = W_0^-(x_0) = \bar{W}_0(x_0)$, то $\bar{P}_2(x_0) = \bar{W}_0(x_0) - \sigma(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2}$, тогда $P_2^+(x_0) = \bar{W}_0(x_0) - \sigma(x_0)(n-2)w_n = \bar{P}_2(x_0) - \sigma(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2}$ и аналогично для $P_2^-(x_0)$.

Докажем непрерывность. Выбросим из Γ маленькую шаровую окрестность Γ' , тогда $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$.

$$|W_0(x) - W_0(x_0)| = |W_0'(x) + W_0''(x) - W_0'(x_0) - W_0''(x_0)| \leq |W_0'(x)| + |W_0'(x_0)| + |W_0''(x) - W_0''(x_0)|$$

Здесь $W_0'(x)$ – интеграл по Γ' , а $W_0''(x)$ – интеграл по Γ'' .

$W_0'(x)$ в точке x_0 дифференцируема, поэтому $|W_0'(x) - W_0'(x_0)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

Функция $\sigma(x)$ непрерывна, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_0 \forall \eta < \eta_0 \forall \xi \in \Gamma : |\xi - x_0| < \eta \quad |\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| < \varepsilon$ А значит можно оценить

$$|W_0(x)| \leq \varepsilon \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS \leq \varepsilon \cdot Const$$

И уменьшая ε , можно и первые слагаемые сделать сколь угодно малыми. Непрерывность доказана.

8.1 Потенциал простого слоя

Напоминаем: Это

$$P_1(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}$$

Где $\mu(x) \in C(\Gamma)$, Γ – замкнутая поверхность Ляпунова.

Теорема 8.2. Потенциал простого слоя непрерывен в \mathbb{R}^n .

Доказательство: Непрерывность может нарушаться только при переходе через Γ . Вначале проверим, что потенциал определен в точках поверхности. Заметим, что $\forall x_0 \in \Gamma$:

$$|P_1(x_0)| \leq \max_{\Gamma} |\mu(x)| \int_{\Gamma} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = M \left(\int_{\Gamma'} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \int_{\Gamma''} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} \right)$$

Где $M = \max_{\Gamma} |\mu(x)|$, Γ' – пересечение Γ с маленьким шариком с центром в x_0 , а Γ'' – оставшаяся часть Γ . Вторым интеграл конечен, а конечность первого проверяется переходом к системе координат $r^2 = \rho^2 + \xi_n^2$:

$$\int_{\Gamma'} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = \int_{\Gamma'} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-2}} = \int_{D(x_0)} \frac{d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}}{\rho^{n-2} \cos(\nu_{\xi}, \xi_n)} \leq C \int_0^d \rho^{2-n} \rho^{n-2} d\rho = Cd$$

Непрерывность доказывается аналогично предыдущей теореме:

$$|P_1(x) - P_1(y)| \leq |P_1'(x)| + |P_1'(y)| + |P_1''(x) - P_1''(y)|$$

Где, как обычно, $P'_1(x)$ и $P''_1(x)$ – соответственно интегралы по $\Gamma' = \Gamma \cap Q_\eta^x$, $\eta \ll 1$ и по $\Gamma'' = \Gamma \setminus \Gamma'$. Последнее слагаемое стремится к нулю ввиду дифференцируемости P'' , а первые в силу оценки

$$|P'_1(x)| \leq M \int_{\Gamma'} \frac{dS_\xi}{|x - \xi|^{n-2}} \leq M\eta$$

и выбора достаточно маленького η

Покажем, что $\forall x \in \mathbb{R}^n$ определена (конечна) нормальная производная

$$\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_\xi$$

Достаточно проверить существование для $x \in \Gamma$. Аналогично выкладкам для потенциала двойного слоя, $\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} = -\frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}}$, поэтому

$$\left| \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_\xi \right| \leq M \left(\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_x)|}{r^{n-1}} dS_\xi + \int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_x)|}{r^{n-1}} dS_\xi \right)$$

Второй интеграл конечен, а первый, в силу сделанной ранее оценки,

$$\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_x)|}{r^{n-1}} dS_\xi \leq C_1 \int_{D(x)} \frac{r^\alpha}{r^{n-1}} d\xi_1 \dots d\xi_n \leq C_2 \int_0^d \rho^{\alpha-n+1} \rho^{n-2} d\rho = C_3 d^\alpha$$

следовательно, нормальная производная определена $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

9 Лекция 23.

Теорема 9.1 (О скачке нормальной производной потенциала простого слоя). Пусть Γ – замкнутая поверхность Ляпунова, $\mu(x) \in C(\Gamma)$, тогда $\forall x_0 \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}\right)^+(x_0) &= \lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0, x \in \nu_x} \left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}\right) = \frac{(n-2)w_n}{2} \mu(x_0) + \overline{\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}\right)} \\ \left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}\right)^-(x_0) &= \lim_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega \ni x \rightarrow x_0, x \in \nu_x} \left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}\right) = -\frac{(n-2)w_n}{2} \mu(x_0) + \overline{\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}\right)} \end{aligned}$$

Где $\overline{\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}\right)}$ – прямое значение в точке x_0 .

Доказательство:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}(x) = \int_{\Gamma} \left[\mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \right] dS_{\xi} - \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = W_0(x) + W(x)$$

Достаточно доказать непрерывность $W_0(x)$. В самом деле, пусть $W_0^+(x) = W_0^-(x) = \overline{W_0(x)}$. Функция $W(x)$ уже была фактически вычислена в предыдущей теореме, поэтому

$$\overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}}(x_0) = \overline{W_0(x_0)} - \overline{P_2(x_0)}$$

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}\right)^+(x_0) = \overline{W_0(x_0)} + \mu(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2} - \overline{P_2(x_0)} = \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}}(x_0) + \mu(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2}$$

Аналогично,

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}\right)^-(x_0) = \overline{W_0(x_0)} - \mu(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2} - \overline{P_2(x_0)} = \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}}(x_0) - \mu(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2}$$

Докажем непрерывность $W_0(x)$. Опять рассмотрим разбиение $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, где $\Gamma' = \Gamma \cap Q_{\eta}^x$, $\eta \ll d$, d – радиус Ляпунова нашей поверхности. Интеграл распадется в сумму двух, причем интеграл по Γ'' непрерывен в точке x_0 и, значит, стремится к нулю при $x \rightarrow x_0$. Оценим интеграл по Γ' .

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} &= (n-1) \frac{\cos(r, \nu_x)}{|x - \xi|^{n-1}} \\ \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} &= (n-1) \frac{\cos(r, \nu_{\xi})}{|x - \xi|^{n-1}} \end{aligned}$$

То справедливо равенство :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \right| = \frac{(n-2)}{r^{n-1}} |\cos(r, \nu_x) - \cos(r, \nu_{\xi})|$$

Введем локальную систему координат ξ_1, \dots, ξ_n с центром в x_0 . Тогда

$$\cos(r, \nu_x) = \cos(r, \xi_n)$$

$$\cos(r, \nu_{\xi}) = \sum_{k=1}^{n-1} \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_{\xi}, \xi_k) + \cos(r, \xi_n) \cos(\nu_{\xi}, \xi_n)$$

Поэтому

$$\frac{(n-2)}{r^{n-1}} |\cos(r, \nu_x) - \cos(r, \nu_{\xi})| \leq \frac{(n-2)}{r^{n-1}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\cos(\nu_{\xi}, \xi_k)| + |1 - \cos(\nu_{\xi}, \xi_n)| \right)$$

Из неравенства $|1 - \cos \theta| \leq \frac{\theta^2}{2}$ и свойства поверхности Ляпунова $|\cos(\nu_{\xi}, \xi_k)| \leq cr_0^{\alpha}$:

$$\left| \int_{\Gamma'_\eta} \mu(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \right] dS_{\xi} \right| \leq M_1 \int_{\Gamma'_\eta} \frac{r_0^{\alpha}}{r^{n-1}} dS_{\xi}$$

Поскольку $r_0^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2 = \rho^2 + \xi_n^2 \leq C_1 \rho^2$ (Так как $|\xi_n| \leq C \rho^{\alpha+1}$), то

$$M_1 \int_{\Gamma'_\eta} \frac{r_0^\alpha}{r^{n-1}} dS_\xi \leq M_2 \int_{\Gamma'_\eta} \rho^{\alpha-n+1} dS_\xi = M_3 \int_0^\eta \rho^{\alpha-n+1} \rho^{n-2} d\rho = M_4 \eta^\alpha$$

Так что выбрав подходящее η , можно сделать сколь угодно малым и этот интеграл. Это доказывает непрерывность, а значит и всю теорему.

9.1 Постановка краевых задач

D_i (внутренняя задача Дирихле):

Пусть Ω - ограниченная область, $\partial\Omega = \Gamma$ - поверхность Ляпунова.

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega \quad u|_\Gamma = f(x) \quad f \in C(\Gamma)$$

Решение ищем в классе функций $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

D_e (внешняя задача Дирихле):

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \quad u|_\Gamma = f(x) \quad f \in C(\Gamma) \quad u \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty$$

Решение также ищем в классе $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $x_0 \in \Gamma = \partial\Omega$

Определение: правильная нормальная производная функции u на поверхности Γ – равномерный по x_0 предел (если таковой существует и непрерывен)

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0, x \in \nu_x} \frac{\partial u}{\partial \nu_x}$$

Определение: Γ – регулярная поверхность, если:

1. $\forall x_0 \in \Gamma \quad \nu_{x_0}$
2. В локальной системе координат ξ_1, \dots, ξ_n с началом координат x_0 , такой что ξ_n направлено по ν_x , может быть записано $\xi_n = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ в некоторой окрестности x_0 .
3. $f \in C^2(D)$, где D – проекция окрестности x_0 на касательную плоскость.

10 Лекция 24.

10.1 Решение внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана в виде потенциала.

Ω - ограниченная область, $\partial\Omega = \Gamma$ - регулярная поверхность.

Будем искать решение внутренней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью.

$$u(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi}$$

$$\sigma(x) - \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = -\frac{2}{\omega_n(n-2)} \varphi(x) \quad (*)$$

Будем искать решение внешней задачи Неймана в виде потенциала простого слоя.

$$u(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi}$$

$$\mu(x) - \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = -\frac{2}{\omega_n(n-2)} \psi(x) \quad (**)$$

В обоих случаях интегральное уравнение имеет вид $\sigma(x) - \lambda T\sigma = f(x)$.

Пусть X - банахово пространство, $T : X \rightarrow X$ - вполне непрерывен (компактен).

$T^* : X^* \rightarrow X^*$. $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$u - \lambda Tu = f, \quad f \in X, u \in X \quad (1)$$

$$v - \bar{\lambda} T^* v = g, \quad g \in X^*, v \in X^* \quad (2)$$

$$u - \lambda Tu = 0, \quad u \in X \quad (3)$$

$$v - \bar{\lambda} T^* v = 0, \quad v \in X^* \quad (4)$$

Определение. λ - характеристическое число T , если существует нетривиальное решение (3); это решение будем называть *собственным элементом T* . Размерность пространства решений (3), отвечающих данному характеристическому числу λ , назовем *рангом λ* .

10.1.1 ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА.

Теорема 1. Пусть T - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X . Тогда любое характеристическое число T имеет конечный ранг.

Теорема 2. Пусть T - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X . Тогда если λ - характеристическое число T , то $\bar{\lambda}$ - характеристическое число T^* того же ранга.

Теорема 3. Пусть T - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X . Тогда множество характеристических чисел T либо конечно, либо счетно, причем если оно счетно, то имеет единственную предельную точку на бесконечности.

Теорема 4. Пусть T - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X . Тогда (1) разрешимо $\Leftrightarrow f \perp v$, где v - произвольное решение (4).

Теорема 5 (альтернатива Фредгольма) Пусть T - вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H . Тогда либо (3) имеет только тривиальное решение, и тогда (1) имеет единственное решение $\forall f \in H$, либо (3) имеет нетривиальное решение, и тогда (1) или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений (это зависит от f).

Рассмотрим оператор $T : L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$.

$$Tu = \int_{\Gamma} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi}$$

Тот факт, что $Tu \in L_2(\Gamma)$, будет доказан позднее. Тогда

$$T^*v = \int_{\Gamma} v(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi}$$

Обозначим

$$K(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \quad K_1(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$$

Легко заметить, что $K_1(\xi, x) = K(x, \xi)$.

покажем, что из разрешимости соответствующих интегральных уравнений следует разрешимость внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.

Рассмотрим сопряженное однородное уравнение

$$\mu(x) - \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = 0$$

и докажем, что у него есть только тривиальное решение.

Пусть $\mu_0(x) \in L_2(\Gamma)$ - решение нашего уравнения (то, что $\mu_0 \in C(\Gamma)$, мы докажем позже). Можно построить потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(x)$:

$$P_1(x) = \int_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi$$

По свойствам потенциала простого слоя:

$$\Delta P_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$$

$$P_1(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

Поскольку μ_0 - решение нашего уравнения, то $\lim_{x \rightarrow x_0 \in \Gamma} \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} = 0$, т.е. P_1 - решение внешней задачи Неймана. В силу единственности решения такой задачи получаем $P_1 \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$. По свойствам потенциала простого слоя $P_1 \in C(\mathbb{R}^n)$, откуда $P_1 \equiv 0$ на Γ .

Внутри области Ω имеем $\Delta P_1(x) = 0$, $x \in \Omega$, $P_1(x) = 0$, $x \in \Gamma$. В силу единственности решения внутренней задачи Дирихле получаем $P_1 \equiv 0$ на Ω .

Итак, $P_1 \equiv 0$ в \mathbb{R}^n . По теореме о скачке нормальной производной потенциала простого слоя $\mu_0(x) \equiv 0$ на Γ , что и требовалось доказать.

По теореме 5 уравнение (**) имеет единственное решение $\forall \psi \in L_2(\Gamma)$, а, значит, и для $\forall \psi \in C(\Gamma)$, т.е. внешняя задача Неймана разрешима. Но тогда $\lambda = \frac{2}{\omega_n(n-2)}$ не является характеристическим числом T^* , следовательно, $\bar{\lambda} = \frac{2}{\omega_n(n-2)}$ не является характеристическим числом T . Отсюда получаем, что внутренняя задача Дирихле разрешима $\forall \varphi \in L_2(\Gamma)$, а, значит, и для $\forall \varphi \in C(\Gamma)$, что и требовалось.

Теперь можно окончательно сформулировать доказанные теоремы.

Теорема. Внутренняя задача Дирихле (D_i) имеет единственное классическое решение для любой непрерывной граничной функции φ , и это решение представимо в виде потенциала двойного слоя.

Теорема. Внешняя задача Неймана (N_e) имеет единственное классическое решение для любой непрерывной граничной функции ψ , и это решение представимо в виде потенциала простого слоя.

10.2 Решение внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана в виде потенциала.

Будем искать решение наших задач в таком же виде, что и в предыдущем разделе, где

$$\sigma(x) + \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = \frac{2}{\omega_n(n-2)} \varphi(x) \quad (*)$$

$$\mu(x) + \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = \frac{2}{\omega_n(n-2)} \psi(x) \quad (**)$$

Однородное уравнение D_l :

$$\sigma(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Есть нетривиальное решение $\sigma(x) \equiv 1$:

$$\int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}, \quad x \in \Gamma$$

Ранг $\lambda = -\frac{2}{(n-2)\omega_n} \geq 1 \Rightarrow$ у сопряженного однородного уравнения

$$\mu(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Есть нетривиальное решение $\mu(x)$.

Покажем, что любое нетривиальное решение линейно выражается через это тогда и только тогда, когда $\text{rank } \lambda = 1$

Пусть $\mu_1(x)$ - другое нетривиальное решение. Построим два потенциала простого слоя:

$$P_1^0(x) = \int_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} P_1^1(x) = \int_{\Gamma} \mu_1(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}$$

$$\begin{cases} \Delta P_1^0(x) = 0, & x \in \Omega \\ \lim_{x \rightarrow x_0 \in \Gamma} \frac{\partial P_1^0}{\partial \nu_x} = 0 \end{cases}$$

Т.е P_1^0 есть решение $N_i \Rightarrow P_1^0 \equiv c_0 = \text{const}, x \in \Omega$

То же самое относится к $P_1^1 \Rightarrow P_1^1 \equiv c_1 = \text{const}, x \in \Omega$

Возьмем плотность $\tilde{\mu} = c_1\mu_0(x) - c_0\mu_1(x)$ и рассмотрим потенциал простого слоя

$$P_1(x) = \int_{\Gamma} \tilde{\mu}(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = c_1c_0 - c_0c_1 = 0, x \in \Omega$$

$P_1 \equiv 1, x \in \Omega \Rightarrow P_1 \equiv 0, x \in \Gamma; \Delta P_1 = 0, x \in \mathbb{R}^n / \bar{\Omega}, P_1 \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$

В силу единственности решения $D_l, P_1 \equiv 0, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \tilde{\mu}, x \in \Gamma \Rightarrow \mu_0, \mu_1$ линейно независимы.

Согласно теореме Фредгольма (**) разрешимо $\Leftrightarrow \psi$ ортогональна константе:

$$(\psi, 1)_{L_2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \psi dS = 0 - \text{условие разрешимости необходимое и достаточное}$$

Теорема 3

Внутренняя задача Неймана (N_i) имеет (классическое) решение для тех и только для тех непрерывных ограниченных функций $\psi(x)$, для которых $\int_{\Gamma} \psi(x) dS = 0$. Если есть решение, то оно единственное, с точностью до прибавления постоянной.

D_l : согласно теореме Фредгольма (*) разрешимо \Leftrightarrow

$$(\varphi, \mu_0)_{L_2(\Gamma)}, \mu_0(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0$$

Решение $D_l \exists \forall \varphi \in C(\Gamma)$, но в общем случае его нельзя найти в виде потенциала двойного слоя.

Для (φ, μ_0) все хорошо.

В общем случае ищем решение в виде (считаем, что $0 \in \Omega$)

$$u(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) dS_{\xi}$$

Тогда на границе

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) dS_{\xi} &= (\text{теорема о скачке}) = \\ &= \frac{(n-2)\omega_n}{2} \sigma(x) + \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}, x \in \Gamma \\ \sigma(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) dS_{\xi} &= \frac{2}{(n-2)\omega_n} \varphi(x), x \in \Gamma \end{aligned}$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$\sigma(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) dS_{\xi} = 0$$

Докажем, что $\sigma \equiv 0$.

Пусть существует решение $\sigma_0 \in L_2(\Gamma) (\Rightarrow C(\Gamma) - \text{докажем дальше})$:

$$u_0(x) = \int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) dS_{\xi}$$

$\Delta u_0 = 0$ вне $\overline{\Omega}$; $u_0(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$; $u_0|_{\Gamma} = 0$.

В силу единственности решения D_l : $u_0 \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^n / \overline{\Omega}$ имеем

$$\int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) dS_{\xi} = 0$$

Умножим обе части уравнения на $|x|^{n-2}$, устремим $x \rightarrow \infty$ и воспользуемся тем, что $|P_2(x)| \leq \frac{c}{|x|^{\frac{c}{n-1}}}$ получаем, что

$$\int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) dS_{\xi} = 0$$

Вспомогая уравнение для σ_0 получаем (т.к. $\int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{1}{|x|^{n-2}} dS_{\xi} = 0$)

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0$$

Как мы уже доказали, в таком случае $\sigma_0(\xi) \equiv c = \text{const}$. Подставляя, получаем $\int_{\Gamma} c dS_{\xi} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \sigma_0 \equiv 0$, что и требовалось.

Теперь по теореме Фредгольма неоднородное уравнение разрешимо $\forall \varphi \in C(\Gamma)$.

Теорема 4.

Внешняя задача Дирихле D_l имеет единственное (классическое) решение для любой непрерывной граничной функции φ и это решение представляется в виде (выше).

11 Лекция 25.

$$T : L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma), \quad Tu = \int_{\Gamma} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} = K(\xi, \varepsilon) = -(n-2) \frac{\cos(r, \nu_{\xi})}{r^{n-1}}$$

$|\cos(r, \nu_{\xi})| \leq |x - \xi|^{\alpha}$, Γ - поверхность Ляпунова с показателем α .

$$K(\xi, \varepsilon) = -(n-2) \frac{\cos(r, \nu_{\xi}) r^{-\alpha/2}}{r^{n-1-\alpha/2}} = \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\alpha/2}}$$

$$Tu \equiv \int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\alpha/2}} u(\xi) dS_{\xi} \text{ - операторы со слабой обобщенностью}$$

$A(x, \xi) \in C(\Gamma \times \Gamma)$ - продолжение по непрерывности.

Пусть $u \in L_2(\Gamma)$, $\beta = \alpha/2$, тогда

$$\|Tu\|_{L_2(\Gamma)}^2 = \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} u(\xi) dS_{\xi} \right)^2 dS_x$$

$$\left(\int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} dS_{\xi} \right)^2 \leq \int_{\Gamma} \left(\frac{A(x, \xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \right)^2 dS_{\xi} \int_{\Gamma} \left(\frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \right)^2 dS_{\xi}$$

$|A(x, \xi)| \leq M_0$, $x, \xi \in \Gamma$ $\eta \leq d$ - радиус сферы.

$$\int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} \leq M_0^2 \left(\int_{\Gamma'_{\eta}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} + \int_{\Gamma''_{\eta}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \right)$$

$$\int_{\Gamma''_{\eta}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \leq \infty$$

$$\int_{\Gamma'_{\eta}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \leq C_0 \int_0^{\eta} \rho^{1+\beta-n} \rho^{n-2} d\rho \leq \infty \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} \leq \infty$$

$$\|Tu\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq M_1 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{u^2(\xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} dS_x = M_1 \int_{\Gamma} u^2(\xi) \left(\int_{\Gamma} \frac{dS_x}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} \right) \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \int_{\Gamma} u^2(\xi) dS_{\xi} = M_1 M_2 \|u\|_{L_2 \Gamma}^2 \Rightarrow Tu \in L_2(\Gamma), T \text{ - ограничен.}$$

Теорема 4.

T - вполне непрерывен.

Доказательство.

$\{T_n\}$, $T_n : X \rightarrow X$ (банахово), T_n компактны, $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$, $T : X \rightarrow X \Rightarrow T$ компактен.

$T = T_{\varepsilon}^1 + T_{\varepsilon}^2$

$$K_{\varepsilon}^1(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi), & |x - \xi| < \varepsilon \\ 0, & |x - \xi| \geq \varepsilon \end{cases} \quad K_{\varepsilon}^2(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi), & |x - \xi| \geq \varepsilon \\ 0, & |x - \xi| < \varepsilon \end{cases}$$

При фиксированном ε , T_{ε}^2 - фредгольмов, т.к. $|K_{\varepsilon}^2| \leq K_0$ Осталось доказать, что

$\|T_{\varepsilon}^1\| \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow +0$.

$$\|T_{\varepsilon}^1 u\|_{L_2(\Gamma)}^2 = \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma'_{\varepsilon}} K(x, \xi) u(\xi) dS_{\xi} \right)^2 dS_x$$

$$\left(\int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \frac{A(x, \xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} dS_{\xi} \right)^2 \leq \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \left(\frac{A(x, \xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \right)^2 dS_{\xi} \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \left(\frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \right)^2 dS_{\xi}$$

$$\int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} \leq M \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \leq M \int_0^{\varepsilon} \rho^{1+\beta-n} \rho^{n-2} d\rho = M_2 \varepsilon^{\beta}$$

$$\|T_\varepsilon^1 u\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq M_2 \varepsilon^\beta \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{u^2(\xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_\xi dS_x = M_2 \varepsilon^\beta \int_\Gamma \left(\int_\Gamma \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}} \right) u^2(\xi) dS_x \leq M_3 \varepsilon^\beta \|u\|_{L_2(\Gamma)}^2$$

Теорема 2

Пусть $u(x) \in L_2(\Gamma)$ решение интегрального уравнения со слабой особенностью:

$$u(x) - \int_\Gamma \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} u(\xi) dS_\xi = \varphi(x), \quad A(x, \xi) \in C(\Gamma \times \Gamma), \quad \varphi(x) \in C(\Gamma), \quad \beta > 0$$

Тогда $u \in C(\Gamma)$. *Доказательство.*

$$T = T_\varepsilon^1 + T_\varepsilon^2, \quad K_\varepsilon^1(x, \xi) = K(x, \xi) \eta(|x - \xi|), \quad K_\varepsilon^2(x, \xi) = K(x, \xi) (1 - \eta(|x - \xi|)),$$

η — "шапочка до ε . $u(x) - T_\varepsilon^1 = T_\varepsilon^2 + \varphi =: g(x)$, $\|T_\varepsilon^1\| < M \varepsilon^{\beta/2}$, $\varepsilon < 1$

$T_\varepsilon^2 u$ непрерывен, т.к. $K_\varepsilon^2 \in C^\infty \Rightarrow g(x) \in C(\Gamma)$

$$(Id - T_\varepsilon^1)u = g(x) \in C(\Gamma), \quad \|T_\varepsilon^1\| < 1.$$

Теорема Банаха.

A — линейный ограниченный оператор на банаховых пространствах и норма A меньше 1, тогда существует ограниченный оператор $(Id - A)^{-1}$ и при этом $(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$

продолжим доказательство

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (T_\varepsilon^1)^n g(x); \quad (T_\varepsilon^1)^n g(x) \in C(\Gamma)$$

$$|T_\varepsilon^1 g| \leq \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{|A(x, \xi)|}{r^{n-1-\beta}} |g(\xi)| dS_\xi, \quad |g(\xi)| \leq M_0, \quad |A(x, \xi)| \leq M_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |T_\varepsilon^1 g| \leq M_0 M_1 \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}}, \quad \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{dS_\xi}{r^{n-1-\beta}} \leq M_2 \varepsilon^\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_x |T_\varepsilon^1 g| \leq M_0 M_1 M_2 \varepsilon^\beta$$

$$|(T_\varepsilon^1)^2 g| = |T_\varepsilon^1 (T_\varepsilon^1 g)| \leq (M_0 M_1 M_2 \varepsilon^\beta)^2$$

$$|(T_\varepsilon^1)^n g| \leq (M_0 M_1 M_2 \varepsilon^\beta)^n$$

Берем $\varepsilon : M_0 M_1 M_2 \varepsilon^\beta = q < 1$ тогда исходный ряд будет сходиться равномерно $\Rightarrow u \in C(\Gamma)$

11.1 Вариационный метод решения задачи Дирихле.

Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $H' \subset H_1(\Omega)$ произвольное подпространство — линейное подпространство, на котором задано (\cdot, \cdot) , и оно эквивалентно (\cdot, \cdot) на $H_1(\Omega)$, причем H' полно относительно (\cdot, \cdot) $c\|u\|_{H_1} \leq \|u\|_{H'} \leq C\|u\|_{H_1}$.

Рассмотрим:

$$E : H' \rightarrow \mathbb{R}, \quad Eu = \|u\|_{H'}^2 + 2(f, u)_{L_2}, \quad f \in L_2(\Omega) \text{ фиксирована.}$$

$$|(f, u)_{L_2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H_1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H'}$$

$$Eu = \|u\|_{H'}^2 + 2(f, u)_{L_2} \geq \|u\|_{H'}^2 - 2c \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H'} = (\|u\|_{H'} - \|f\|_{L_2})^2 - c^2 \|f\|_{L_2}^2 \geq -c^2 \|f\|_{L_2}^2$$

$$\Rightarrow \inf_{H'} Eu < -\infty, \quad \exists v_n : \lim_{m \rightarrow \infty} E(v_m) = d - \text{минимизирующая последовательность.}$$

$u \in H'$ называется элементом, реализующим $\min E$ на H' , если $Eu = d$

Лемма.

Для любого подпространства H' пространства $H(\Omega)$ $\exists!$ элемент $u \in H'$, реализующий минимум функционала E на H' .

Любая минимизирующая последовательность сходится к этому элементу.

Доказательство леммы

$\{v_m\}$ минимизирующая последовательность. $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \forall m > M \quad d \leq Ev_m < d + \varepsilon$

$$\left\| \frac{v_m \pm v_n}{2} \right\|_{H'}^2 = \frac{1}{4} \|v_m\|_{H'}^2 + \frac{1}{4} \|v_n\|_{H'}^2 \pm \frac{1}{2} (v_m, v_n)_{H'}$$

$$\left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|_{H'}^2 = \frac{1}{2} \|v_m\|_{H'}^2 + \frac{1}{2} \|v_n\|_{H'}^2 - \left\| \frac{v_m + v_n}{2} \right\|_{H'}^2 = \frac{1}{2} E(v_m) + \frac{1}{2} E(v_n) - E\left(\frac{v_m + v_n}{2}\right)$$

$m, n \geq M \Rightarrow \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|_{H'}^2 < \frac{1}{2}(d + \varepsilon) + \frac{1}{2}(d - \varepsilon) - d = \varepsilon \Rightarrow \{v_m\}$ фундаментальная, тогда сходится по норме в H' , т.к. они эквивалентны

$v_m \xrightarrow{\|\cdot\|_{H'}} Eu = d$. Единственность очевидна.

12 Лекция 26

12.1 Метод Ритца

Возьмем в H' произвольную линейно независимую систему функций $\phi_1, \dots, \phi_k, \dots$, линейная оболочка которой плотна в H' . обозначим через R_k линейную оболочку первых k функций из этой системы. Мы знаем, что $\exists! v_k \in R_k : \min_{R_k} E(u) = E(v_k)$. Ищем $v_k = \sum_{j=1}^k c_j^k \phi_j$. Введем функцию

$$F(c_1, \dots, c_k) = E\left(\sum_{j=1}^k c_j^k \phi_j\right)$$

В точке минимума должны выполняться условия $\frac{\partial F}{\partial c_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$, что эквивалентно системе линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^k c_i (\phi_i, \phi_j)_{H'} + (f, \phi_j)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad j = 1, \dots, k$$

Определитель системы представляет собой определитель Грама для системы ϕ_1, \dots, ϕ_k и не равен нулю в силу их линейной независимости. Поэтому существует решение c_1^k, \dots, c_k^k , и элемент $v_k = \sum_{j=1}^k c_j^k \phi_j$, реализующий минимум на R_k .

Последовательность $\{v_k\}$ называется *последовательностью Ритца*.

Теорема 12.1. *Последовательность Ритца является минимизирующей функционал $E(\cdot)$ на подпространстве H' последовательностью.*

Доказательство:

Имеем

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots \\ E(v_1) \geq E(v_2) \geq E(v_3) \geq \dots \geq d$$

Так как система $\{\phi_k\}$ полна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \exists u_\varepsilon(x) = C_1(\varepsilon)\phi_1 + \dots + C_{K(\varepsilon)}\phi_{K(\varepsilon)} \in R_{K(\varepsilon)} : \|u - u_\varepsilon\|_{H'} < \varepsilon$$

Где $E(u) = d$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} E(u_\varepsilon) &= \|u_\varepsilon\|_{H'}^2 + 2(f, u_\varepsilon)_{L_2} = \|u_\varepsilon - u + u\|_{H'}^2 + 2(f, u_\varepsilon - u)_{L_2} + 2(f, u)_{L_2} = \\ &= E(u) + E(u_\varepsilon - u) + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leq d + \|u_\varepsilon - u\|_{H'}^2 + 2(f, u_\varepsilon - u)_{L_2} + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leq d + \varepsilon^2 + C_0\varepsilon \leq \\ &\leq d + C_1\varepsilon \end{aligned}$$

Получили $E(u_\varepsilon) \leq d + C_1\varepsilon$, Но $d \leq E(v_{K(\varepsilon)}) \leq E(u_\varepsilon) \leq d + C_1\varepsilon$, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall s > K(\varepsilon) \quad d \leq E(v_s) \leq d + C_1\varepsilon$, откуда $\lim_{s \rightarrow \infty} E(v_s) = d$. Что и требовалось доказать.

Итак, пусть $E(u) = d$ – минимум функционала в H' . Рассмотрим функцию $w(t) = u + tw$, где $t \in \mathbb{R}$, $w \in H'$, и многочлен

$$\begin{aligned} P(t) &= E(u + tw) = \|u + tw\|_{H'}^2 + 2(f, u + tw)_{L_2} = \\ &= \|u\|_{H'}^2 + 2(f, u)_{L_2} + 2t(u, w)_{H'} + t^2\|w\|_{H'}^2 + 2t(f, w)_{L_2} \geq d \quad \forall t \end{aligned}$$

Кроме того, $P(0) = E(u) = d$, значит $P'(0) = 2(u, w)_{H'} + (f, w)_{L_2} = 0 \quad \forall w \in H'$.

Рассмотрим $H' = H_1^0(\Omega)$, тогда это соотношение примет вид

$$(u, w)_{H'} = (u, w)_{H_1^0(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla w \, dx = - \int_{\Omega} f w \, dx \quad \forall w \in H_1^0(\Omega)$$

Тогда $u \in H_1^0(\Omega)$ есть обобщенное решение задачи Дирихле.

Подведем итог.

Теорема 12.2. *Существует единственная функция, реализующая минимум функционала на. Если скалярное произведение на задается формулой, то эта функция является обобщенным решением задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u \in H_1^0(\Omega), & f \in L_2(\Omega) \end{cases}$$

Последовательность Ритца может быть рассмотрена как последовательность, приближающая решение.

12.2 Уравнение теплопроводности

Рассмотрим дифференциальный оператор (теплопроводности):

$$Tu = u_t - \Delta_x u$$

тогда сопряженный оператор

$$T^*v = -v_t - \Delta_x v$$

Уравнение теплопроводности имеет вид $Tu = f(x, t)$, где $x \in \Omega$ – ограниченная область, $t \geq 0$.

Для уравнения теплопроводности имеет место аналог формулы Грина: пусть

$$u, v \in C^{2,1}(\tilde{\omega}_\tau) \cap C^1(\bar{\omega}_\tau),$$

где

$$\tilde{\omega}_\tau = \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t \leq \tau\}$$

$$\omega_\tau = \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t < \tau\}$$

здесь $C^{2,1}$ – пространство функций, дважды дифференцируемых по x и один раз по t . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\tau} (vTu - uT^*v) dxdt &= \int_{\omega_\tau} (vu_t + uv_t - v\Delta u + u\Delta v) dxdt = \\ &= \int_{\Omega} u(x, \tau)v(x, \tau) dx - \int_{\Omega} u(x, 0)v(x, 0) dx + \int_{S_\tau} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} + v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS \end{aligned}$$

Проверим, что фундаментальным решением для оператора теплопроводности является

$$\Gamma(x, x_0, t, t_0) = \frac{\theta(t - t_0)}{(2\sqrt{\pi(t - t_0)})^n} e^{-\frac{|x - x_0|^2}{4(t - t_0)}}$$

То есть нужно проверить

$$(T_{x,t}\Gamma(x, x_0, t, t_0), f(x, t)) = (\Gamma(x, x_0, t, t_0), T^*f(x, t)) = f(x_0, t_0)$$

Убедимся, что $\Gamma \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \int_{t_0}^{t_0+R} \int_{|x-x_0|<C} \frac{1}{|t-t_0|^{n/2}} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}} dxdt \Big|_{\xi=\frac{x-x_0}{2\sqrt{t-t_0}}} &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{t_0}^{t_0+R} \int_{|\xi|<\frac{C}{2\sqrt{t-t_0}}} e^{-|\xi|^2} d\xi dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{t_0}^{t_0+R} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} d\xi dt = R \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned} (\Gamma(x, x_0, t, t_0), T^*f(x, t)) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma(x, x_0, t, t_0) T^*f(x, t) dxdt = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0+\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, x_0, t, t_0) T^*f(x, t) dxdt &= \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Грина,

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{t_0+\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} T\Gamma(x, x_0, t, t_0) T^*f(x, t) dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, x_0, t_0 + \varepsilon, t_0) f(x, t_0 + \varepsilon) dx \right)$$

Упражнение: Для любого $t > t_0$ $T\Gamma = 0$.

Используя этот факт, пишем:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, x_0, t_0 + \varepsilon, t_0) f(x, t_0 + \varepsilon) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\sqrt{\pi\varepsilon})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4\varepsilon}} f(x, t_0 + \varepsilon) dx \Big|_{\xi=\frac{x-x_0}{2\sqrt{\varepsilon}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} f(x_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi, t_0 + \varepsilon) d\xi = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\xi| > N} e^{-|\xi|^2} (f(x_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi, t_0 + \varepsilon) - f(x_0, t_0)) d\xi + \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\xi| < N} e^{-|\xi|^2} (f(x_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi, t_0 + \varepsilon) - f(x_0, t_0)) d\xi \right\} \\
&\quad + f(x_0, t_0)
\end{aligned}$$

Покажем, что интегралы стремятся к нулю:

$$M = \sup_{\mathbb{R}^n} |f(x, t)| < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \frac{M}{\pi^{n/2}} \int_{|\xi| > N} e^{-|\xi|^2} d\xi < \varepsilon/2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad \forall x, t : |x - x_0| < \delta, |t - t_0| < \delta \quad |f(x, t) - f(x_0, t_0)| < \varepsilon$$

Возьмем $2\sqrt{\varepsilon}N < \delta, \varepsilon < \delta$, тогда и второй интеграл меньше ε , что мы и хотели показать. Итак, мы доказали, что $\Gamma(x, x_0, t, t_0)$ является фундаментальным решением.

Теорема 12.3 (Принцип максимума в ограниченной области). Пусть $u(x, t)$ - решение уравнения $Tu = 0$ в слое \tilde{w}_τ , принадлежащее классу $C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w_\tau})$. Тогда $\forall (x, t) \in \tilde{w}_\tau$:

$$\min_{\sigma_\tau} u(x, t) \leq u(x, t) \leq \max_{\sigma_\tau} u(x, t)$$

Где $\sigma_\tau = \Omega \cup S_\tau$, S_τ - боковая поверхность цилиндра.

Доказательство:

Достаточно доказать, что $\min_{\sigma_\tau} u(x, t) \leq u(x, t)$, потому что применив это рассуждение к функции $v = -u$, получим утверждение для максимума.

Из непрерывности u $\exists M > 0 : |u(x, t)| < M$ в $\overline{w_\tau}$. Выберем M_1 такое, что

$$v(x, t) = u(x, t) - M_1 < 0 \quad \forall (x, t) \in \overline{w_\tau}$$

Тогда $Tv = 0$ в \tilde{w}_τ и $v < 0$ в $\overline{w_\tau}$. Положим $v = e^{\gamma t} w$, $\gamma = \text{const} > 0$. Покажем, что минимум отрицательного значения w может достигаться лишь на σ_τ . Предположим противное: $\exists (x_0, t_0) \in \tilde{w}_\tau : 0 > w(x_0, t_0) = \min_{\overline{w_\tau}} w(x, t)$. Ясно, что $w(x, t) < 0$ в $\overline{w_\tau}$, $\frac{\partial w}{\partial x_j}(x_0, t_0) = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t}(x_0, t_0) \leq 0$, а $\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}(x_0, t_0) \geq 0$. Но тогда

$$Tv \Big|_{(x_0, t_0)} = \left(\gamma e^{\gamma t} w(x, t) + e^{\gamma t} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - e^{\gamma t} \Delta w(x, t) \right) \Big|_{(x_0, t_0)} < 0$$

Что противоречит равенству $Tv = 0$.

Следовательно

$$w(x, t) \geq \min_{\sigma_\tau} w(x, t)$$

Или, что то же самое,

$$e^{-\gamma t} v(x, t) \geq \min_{\sigma_\tau} e^{-\gamma t} v(x, t)$$

Переходя к пределу при $\gamma \rightarrow 0$ получаем $v(x, t) \geq \min_{\sigma_\tau} v(x, t)$, а отсюда и требуемое неравенство для $u(x, t)$.

13 Лекция 27.

13.1 Принципы максимума

Теорема 13.1 (Принцип максимума в неограниченной области). Пусть $u(x, t)$ - решение уравнения $Tu = 0$ в слое $G_\tau = \left\{ (x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq \tau \right\}$, принадлежащее классу $C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$. Предположим, что $\forall (x, t) \in G_\tau \quad |u(x, t)| \leq M$. Тогда $\forall (x, t) \in G_\tau$:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0) \leq u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0)$$

Доказательство:

Обозначим

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0), \quad m_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0)$$

Введем вспомогательную функцию $v(x, t) = |x|^2 + 2nt$. Легко видеть, что в G_τ $Tv = v_t - \Delta|x|^2 = 2n - 2n = 0$. Введем еще функции

$$W_1(x, t) = M_0 - u(x, t) + \varepsilon v(x, t)$$

$$W_2(x, t) = m_0 - u(x, t) - \varepsilon v(x, t)$$

Заметим, что $TW_1 = TW_2 = 0$ в G_τ , и кроме того

$$W_1(x, 0) = M_0 - u(x, 0) + \varepsilon|x|^2 \geq 0$$

$$W_2(x, 0) = m_0 - u(x, 0) - \varepsilon|x|^2 \leq 0$$

Далее, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R(\varepsilon) \quad \forall x : |x| \geq R(\varepsilon) \quad W_1(x, t) \geq 0, W_2(x, t) \leq 0$ Теперь применим принцип максимума для ограниченной области к функциям W_1 и W_2 в области G_τ :

$$W_1(x, t) \geq 0, \quad W_2(x, t) \leq 0 \quad (x, t) \in G_\tau$$

Что равносильно

$$m_0 - \varepsilon v(x, t) \leq u(x, t) \leq M_0 + \varepsilon v(x, t) \quad \forall (x, t) \in G_\tau$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим утверждение теоремы.

Теорема 13.2 (строгий принцип максимума). Пусть функция $u(x, t)$ в цилиндре $\tilde{w}_\tau = \left\{ (x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t \leq \tau \right\}$ удовлетворяет уравнению $Tu = 0$, принадлежит классу $C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$ и принимает в точке $(x_0, t_0) \in \tilde{w}_\tau$ наибольшее значение, то $u(x, t) \equiv u(x_0, t_0) = \text{const}$ в цилиндре $\tilde{w}_{\tau_0} = \tilde{w}_\tau \cap \{t \leq \tau_0\}$.

Доказательство:

Предположим противное. Пусть $u(x_1, t_1) < u(x_0, t_0) := M$, где $t_1 < t_0$. Соединим точки (x_0, t_0) и (x_1, t_1) ломаной, содержащейся в \tilde{w}_τ с вершинами в точках $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = t_0$, причем $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = t_0$. Если мы докажем, что из неравенства $u(x_s, t_s) < M$ следует $u(x_{s+1}, t_{s+1}) < M$, то, двигаясь по ломаной, получим $u(x_0, t_0) < M$ – противоречие, и теорема будет доказана.

Пусть точки (x_s, t_s) и (x_{s+1}, t_{s+1}) лежат на прямой

$$x_j = k_j t + a_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Рассмотрим цилиндр $P(x, t) < \rho^2$, где $P(x, t) = \sum_{j=1}^n (x_j - k_j t - a_j)^2$. Выберем $\rho > 0 : u(x, t_s) < M - \varepsilon_1 \quad \forall x : P(x, t_s) < \rho^2$. Построим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = e^{-\gamma t} (\rho^2 - P(x, t))^2, \quad \gamma > 0$$

Тогда

$$Tv = e^{-\gamma t} (-\gamma(\rho^2 - P)^2 - 2(\rho^2 - P) \frac{\partial P}{\partial t} + 4n(\rho^2 - 8P) - 8P)$$

Покажем, что можно γ выбрать настолько большим, что $Tv < 0$ внутри цилиндра. Действительно, на боковой поверхности цилиндра $Tv = -8e^{-\gamma t} \rho^2 < 0$, поэтому неравенство справедливо и в некоторой δ -окрестности поверхности. Если же $P(x, t) < \rho^2 - \delta$, то $\rho^2 - P(x, t) > \delta$ и при достаточно большом γ первый член в скобках будет больше по модулю, чем сумма модулей остальных членов, то есть $Tv < 0$ внутри цилиндра. Рассмотрим функцию

$$W(x, t) = M - u(x, t) - \alpha v(x, t)$$

Ясно, что $TW = -\alpha Tv > 0$ в цилиндре. Тогда по принципу максимума для ограниченной области,

$$W(x, t) \geq \min_{\sigma} W(x, t)$$

Где σ – "наклонный стакан" (боковая поверхность плюс нижнее основание нашего цилиндра). На боковой поверхности цилиндра $W(x, t) = M - u(x, t) > 0$, а на нижнем основании $W(x, t_s) = M - u(x, t_s) - \alpha v(x, t_s) \geq \varepsilon_1 - \alpha v(x_t, s) > 0$, при достаточно маленьком α . Значит, и во всем цилиндре $W(x, t) \geq 0$, в частности $W(x_{s+1}, t_{s+1}) \geq 0$, то есть

$$u(x_{s+1}, t_{s+1}) \leq M - \alpha v(x_s, t_s) < M$$

Что и хотели доказать.

Теорема 13.3 (о стабилизации). Пусть $u(x, t) \in C^{2,1}(w_{\infty}) \cap C(\bar{w}_{\infty})$ – решение уравнения $Tu = 0$,

$$w_{\infty} = \left\{ (x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t < \infty, \right\}$$

$$S_{\infty} = \left\{ (x, t) \mid x \in \partial\Omega, 0 < t < \infty, \right\}$$

Пусть $u|_{S_{\infty}} = 0$, тогда $u(x, t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$ равномерно по всем $x \in \bar{\Omega}$

Доказательство:

Для удобства положим $0 \in \Omega$. Рассмотрим функцию

$$v(x, t) = e^{-at} \prod_{j=1}^n \cos bx_j, \quad a > 0$$

Поскольку $v_t = -av$ и $v_{x_j x_j} = -b^2 v$, то $Tv = (nb^2 - a)v$. Следовательно при $a = nb^2$ $v(x, t)$ – решение уравнения теплопроводности. Выберем b настолько малым, что

$$\Omega \subset \left\{ |x_j| < \frac{\pi}{4b}, \quad j = 1, \dots, n \right\}$$

Внутри этого параллелепипеда $v(x, 0) > 0$, поэтому (из непрерывности u и v) $\exists M > 0 : |u(x, 0)| < v(x, 0), \quad x \in \Omega$. Кроме того, $v|_{S_{\infty}} > 0$. Рассмотрим функции

$$W_1(x, t) = Mv(x, t) - u(x, t)$$

$$W_2(x, t) = Mv(x, t) + u(x, t)$$

Очевидно, $TW_1 = TW_2 = 0$, при этом M мы выбрали так, что $W_1(x, 0) = Mv(x, 0) - u(x, 0) \geq 0$ и кроме того, $W_1|_{S_{\infty}} > 0$, отсюда по принципу максимума $W_1(x, t) \geq 0, \quad x \in \bar{w}_{\infty}$, то есть $u(x, t) \leq Mv(x, t)$. Аналогично применяя принцип максимума к W_2 , получаем $-u(x, t) \leq Mv(x, t)$. Итак,

$$|u(x, t)| \leq Mv(x, t) \quad x \in \bar{w}_{\infty}$$

Но $v(x, t)$ убывает к нулю равномерно по $x \in \bar{\Omega}$, так что теорема доказана.

13.2 Начально-краевые задачи

1) Первая начально-краевая задача:

$$C^{2,1}(\tilde{w}_{\tau}) \cap C(\bar{w}_{\tau})$$

$$Tu = f(x, t) \quad (x, t) \in \tilde{w}_{\tau}$$

$$u|_{S_{\tau}} = \psi(x, t), \quad S_{\tau} = \partial\Omega \times (0, \tau)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

Здесь f, ψ, φ – заданные непрерывные функции.

2) Вторая начально-краевая задача:

$$C^{2,1}(\tilde{w}_{\tau}) \cap C(\bar{w}_{\tau})$$

$$Tu = f(x, t) \quad (x, t) \in \tilde{w}_{\tau}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{S_{\tau}} = \psi(x, t)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

Здесь f, ψ, φ – заданные непрерывные функции, а поверхность $\partial\Omega$ – регулярна.

3) Третья начально-краевая задача:

$$C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\bar{w}_\tau)$$

$$Tu = f(x, t) \quad (x, t) \in \tilde{w}_\tau$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x, t)u\right)|_{S_\tau} = \psi(x, t)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

Здесь f, a, ψ, φ – заданные непрерывные функции, а поверхность $\partial\Omega$ – регулярна.

4) Задача Коши:

$$C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\bar{G}_\tau)$$

$$Tu = f(x, t) \quad (x, t) \in G_\tau = \mathbb{R}^n \times (0, \tau]$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Здесь f, φ – заданные непрерывные функции.

13.3 Теоремы единственности

Теорема 13.4. *Первая краевая задача для оператора теплопроводности имеет единственное решение.*

Доказательство:

Как обычно, рассмотрим разность $v = u_1 - u_2$ двух решений этой задачи. Тогда $Tv = 0$, $v|_{S_\tau} = 0$, $v|_{t=0} = 0$. Согласно принципу максимума для ограниченных областей,

$$0 = \min_{\sigma_\tau} v(x, t) \leq v(x, t) \leq \max_{\sigma_\tau} v(x, t) = 0$$

Поэтому $v(x, t) = 0$ в \tilde{w}_τ и единственность доказана.

Теорема 13.5. *Задача Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций имеет единственное решение.*

Доказательство:

Рассмотрим разность $v = u_1 - u_2$ двух решений этой задачи. Тогда $Tv = 0$, $v|_{t=0} = 0$, $|v| \leq M$ для $v \in G_\tau$. Согласно принципу максимума для неограниченных областей,

$$0 = \min_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) \leq v(x, t) \leq \max_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) = 0$$

Поэтому $v(x, t) = 0$ в G_τ и единственность доказана.