

Программа экзамена по математической статистике

Лектор — А. В. Прохоров

V семестр, 2004 г.

Билеты

1. Эмпирическая функция распределения, её свойства как функции распределения и как оценки теоретической функции распределения.
2. Теорема Гливенко – Кантелли о сходимости эмпирической функции распределения.
3. Асимптотические свойства эмпирических моментов и функций от них.
4. Теорема Колмогорова: доказательство независимости статистики Колмогорова от вида непрерывной функции распределения.
5. Вариационный ряд, распределение порядковых статистик для равномерного семейства распределений.
6. Свойства частоты как оценки вероятности «удачи» в схеме испытаний Бернулли.
7. Условные математические ожидания и условные распределения относительно σ -алгебр. Свойства условных математических ожиданий.
8. Достаточные статистики. Теорема Неймана – Фишера (критерий достаточности).
9. Свойства статистических оценок. Оценки параметров нормального распределения.
10. Улучшение оценок с помощью достаточных статистик. Теорема Колмогорова – Блекуэлла – Рао.
11. Полные достаточные статистики и несмещённые оценки с минимальной дисперсией.
12. Эффективные оценки в регулярном случае. Неравенство информации (Крамера – Рао).
13. Информация Фишера и её свойства.
14. Метод моментов оценивания параметров. Состоятельность оценок метода моментов.
15. Метод максимального правдоподобия. Теорема об асимптотической нормальности оценок максимального правдоподобия.
16. Асимптотические свойства статистических оценок. Примеры состоятельных и асимптотически нормальных оценок.
17. Теорема о байесовской оценке при квадратичной функции риска. Априорный и апостериорный риск. Примеры байесовских оценок.
18. Эквивалентность определений и свойства многомерного нормального распределения.
19. Лемма о независимости среднего арифметического и среднего квадратического для независимых одинаково нормально распределённых случайных величин.
20. Распределения χ^2 , Стьюдента, Фишера – Снедекора как распределения статистик для нормальных выборок.
21. Интервальные оценки. Построение точных доверительных интервалов.
22. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения (для среднего при известной дисперсии и для дисперсии при **неизвестном** среднем).
23. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения (для среднего при **неизвестной** дисперсии и для дисперсии при известном среднем).
24. Построение точного доверительного интервала для параметра биномиального распределения.
25. Асимптотические доверительные интервалы для параметра биномиального распределения.
26. Теорема Неймана – Пирсона. Критерий отношения правдоподобий для проверки двух простых гипотез, как наиболее мощный критерий.
27. Равномерно наиболее мощные критерии. Свойства распределений с монотонным отношением правдоподобия.
28. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения (для среднего при известной дисперсии и для дисперсии при **неизвестном** среднем).
29. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения (для среднего при **неизвестной** дисперсии и для дисперсии при известном среднем).
30. Критерий Стьюдента равенства средних значений двух нормальных выборок.

31. Критерий Фишера равенства дисперсий двух нормальных выборок.
32. Дисперсионный анализ однофакторной модели для выборок из нормального распределения. Множественное сравнение.
33. Теорема об асимптотическом χ^2 -распределении статистики Пирсона.
34. Критерий χ^2 для гипотезы о заданном распределении.
35. Проверка гипотезы о значениях параметра биномиального распределения. Критерий знаков.
36. Критерий Колмогорова для проверки гипотез о данном непрерывном распределении.

Программа экзамена

- Основные понятия: выборка, статистическая модель, выборочные характеристики, статистики; повторная выборка, параметрическая статистическая модель, функция правдоподобия.
- Вариационный ряд, порядковые статистики, распределение порядковых статистик. Квантили распределения и эмпирические квантили.
- Статистические задачи для схемы Бернулли. Свойства частоты как оценки вероятности удаchi в схеме Бернулли. Критерии проверки гипотез о значении параметра биномиального распределения. Критерий знаков.
- Эмпирическая функция распределения, её свойства как функции распределения и как случайного элемента (распределение и числовые характеристики). Сходимость эмпирической функции распределения. Теорема Гливенко – Кантелли.
- Теорема Колмогорова и доказательство независимости статистики Колмогорова от вида непрерывной функции распределения. Критерий Колмогорова.
- Условные математические ожидания и условные распределения относительно сигма-алгебр. Свойства условного математического ожидания. Аналоги формулы полной вероятности для условных математических ожиданий и распределений.
- Достаточные статистики. Теорема Неймана – Фишера (критерий достаточности). Улучшение оценок с помощью достаточных статистик. Теорема Колмогорова – Блекуэла – Рао. Полные достаточные статистики и их использование для нахождения несмещённых оценок с минимальной дисперсией.
- Статистические оценки. Свойства оценок параметров в параметрической модели: состоятельность, несмещённость, эффективность. Задача оптимального статистического оценивания.
- Неравенство информации (Крамера – Рао). Эффективные оценки в регулярном случае. Информация Фишера, её свойства.
- Методы оценивания параметров. Метод моментов: свойство состоятельности оценок. Метод максимального правдоподобия; свойство асимптотической нормальности и другие свойства оценок. Оценки метода моментов и максимального правдоподобия для параметров нормального распределения, биномиального и других распределений.
- Асимптотические свойства статистических оценок: состоятельность и асимптотическая нормальность. Состоятельность и асимптотическая нормальность функций от эмпирических характеристик. Состоятельность и асимптотическая нормальность эмпирических моментов.
- Байесовский подход к задачам статистического оценивания. Байесовские оценки при квадратичной функции риска. Априорный и апостериорный риск, априорное и апостериорное распределение. Построение байесовских оценок (для параметров биномиального и нормального распределений).
- Нормальное распределение в \mathbb{R}^n , эквивалентность различных определений и основные свойства. Распределение линейных и квадратичных форм от независимых нормальных случайных величин. Независимость среднего арифметического и среднего квадратичного для независимых нормально распределённых случайных величин. Распределения χ^2 , Стюдента и Фишера – Снедекора как распределения статистик для выборок из нормального распределения.
- Интервальное оценивание параметров, доверительные интервалы. Построение точных доверительных интервалов и асимптотических доверительных интервалов. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Точный и асимптотический доверительные интервалы для параметра биномиального распределения.
- Проверка гипотез о параметрах нормального распределения. Проверка однородности двух нормальных выборок: критерий Фишера равенства дисперсий нормальных выборок, критерий Стюдента равенства средних значений нормальных выборок.
- Однофакторная модель. Дисперсионный анализ k выборок из нормального распределения. Множественное сравнение.

- Критерий χ^2 для гипотезы о данном полиномиальном распределении. Теорема об асимптотическом χ^2 -распределении статистики Пирсона (теорема Пирсона). Критерий χ^2 для проверки гипотезы о любом данном распределении.
- Проверка статистических гипотез. Общие понятия: простые и сложные гипотезы, статистический критерий, критическая область, вероятности ошибок I и II рода, размер и мощность критерия, функция мощности критерия. Критерии согласия. Теорема Неймана – Пирсона: критерий отношения правдоподобия как наиболее мощный критерий для проверки двух простых гипотез. Понятие равномерно наиболее мощного критерия. Равномерно наиболее мощный критерий для семейства распределений с монотонным отношением правдоподобия.

Последняя компиляция: 30 мая 2020 г. г.
 Обновления документа на сайтах <http://dmvn.mexmat.net>,
<http://dmvn.mexmat.ru>.
 IAT_EX исходники
<https://bitbucket.org/dmvn/mexmat.lectures>
 Об опечатках и неточностях пишите на dmvn@mccme.ru.