Задачи из книги В. И. Арнольда «ОДУ»

Задача 1 (Задача 2, стр. 238). *Сколько компонент связности имеет многообразие невырожденных матриц размера $n \times n$?*

$\square$ Покажем, что это многообразие имеет 2 компоненты связности.

1°. Покажем, что всякую матрицу $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ с $\det A > 0$ можно соединить отрезками и дугами окружностей с единичной матрицей так, что при движении вдоль полученной кривой определитель остаётся положительным. Разложим матрицу по первой строке: $\det A = \sum\limits_k a_{1k} A_{1k} > 0 \Rightarrow \exists\ a_{1i} A_{1i} > 0$. Сделаем новую матрицу $A^{(1)}$, в которой $a_{1k} = 0\ \forall\ k \neq i$:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & \\ & & & * & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Рассмотрим семейство матриц вида $M(t) = (1-t)A + tA^{(1)},\ t \in [0,1]$. Тогда

$$\det M(t) = \det \left[(1-t)A + tA^{(1)}\right] = \det \left[A + t(A^{(1)} - A)\right] =$$

$$= \det \begin{pmatrix} (1-t)a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & (1-t)a_{1n} \\ a_{21} & & \dots & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{1i} A_{1i} + (1-t)B,$$

где $B = \sum\limits_{k \neq i} a_{1k} A_{1k}$. Очевидно, $\det M(t)$ – непрерывная функция, линейная по t. Имеем $\det M(0) = \det A > 0$, кроме того, $\det M(1) = a_{1i} A_{1i} > 0$. Значит, уравнение $\det M(t) = 0$ на отрезке $[0,1]$ корней не имеет, а нам только этого и надо: при движении по этому отрезку определитель сохраняет знак. Аналогично, зануляя далее строку за строкой, придём к матрице $A^{(n)}$ вида

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{2i_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ni_n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

причём $\det A^{(n)} > 0$. Заметим, что все i_k здесь будут различны, иначе определитель был бы равен 0. Далее отнормируем элементы матрицы, домножив a_{ki_k} на соответствующие положительные числа. Это можно сделать, не изменив знака определителя, поскольку с точностью до знака он равен $a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$. Так мы придём к матрице N, у которой в каждой строке и в каждом столбце ровно один ненулевой элемент: 1 или -1. Очевидно, $N \in \mathbf{SO}(n)$, а любой собственный ортогональный оператор приводится к единичной матрице поворотами вокруг базисных векторов. Поворот — непрерывное преобразование, сохраняющее определитель. Таким образом мы приведём матрицу N к матрице E.

Совершенно аналогично можно показать, что любую матрицу с отрицательным определителем можно привести к матрице вида

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

2°. Докажем вспомогательное утверждение:

Теорема 1 (О пауке). *Пусть A_i – связные подмножества топологического пространства $\mathcal{X}$, такие что $\bigcap\limits_i A_i \neq \varnothing$. Тогда $A = \bigcup\limits_i A_i$ – связное подмножество $\mathcal{X}$.*

$\square$ В самом деле, допустим, что A несвязно. Тогда оно, по определению несвязного множества, разбивается на 2 открытых в A множества: $A = U_1 \oplus U_2$. Рассмотрим точку, принадлежащую всем A_i, пусть она, для определённости, лежит в U_1. Тогда найдётся A_k, точки которого лежат и в U_1, и в U_2. Рассмотрим $\widetilde{U}_1 = U_1 \cap A_k$ и $\widetilde{U}_2 = U_2 \cap A_k$. Множества $\widetilde{U}_1$ и $\widetilde{U}_2$ открыты в A_k по определению. Они образуют разбиение A_k. Но это противоречит связности A_k. $\blacksquare$

3°. Добьём задачу, применив теорему о пауке к связным кривым, соединяющим матрицу с E (для $\det > 0$) или с $-E$ (для $\det < 0$). $\blacksquare$

Задача 2 (Задача 1, стр. 238). *Связны ли многообразия, заданные уравнениями вида* $x^2+y^2-z^2=c$, $c \neq 0$ *в* $\mathbb{R}^3(\mathbb{RP}^3)$*?*

□ **1°**. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^3$. Пусть сначала $c > 0$, и для простоты выкладок $c = 1$. Тогда получим однополостный гиперболоид. Рассмотрим сечения плоскостями $y = 0$ и $x = 0$. Рассмотрим стереографическую проекцию на каждую из плоскостей. Тогда все точки гиперболоида, за исключением двух гипербол, будут изображены на любой из карт, и для них связность очевидна. Если же точки попали на гиперболы, их надо непрерывно пошевелить, чтобы обе они были видны на одной карте. Значит, гиперболоид связен.

Если $c < 0$, то это двуполостный гиперболоид. Тогда он несвязен, ибо две его части лежат в разных полупространствах относительно плоскости $z = 0$. Следовательно, пересечение каких-то U_i и U_{i+1} будет пусто.

2°. Рассмотрим случай $\mathbb{RP}^3$. Пусть $c < 0$, тогда рассмотрим уравнение многообразия в неоднородных координатах: $\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2 - \left(\frac{z}{t}\right)^2 = -1$, т.е. уравнение вида $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$. Рассмотрим аффинную карту S_1 этого многообразия, заданную уравнением $x_0 - x_3 = 1$. Посмотрим, как выглядит наше многообразие на этой аффинной карте, т.е. просто подставим в исходное уравнение $x_3 = x_0 - 1$. Получим $x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2x_0$. Это будет параболоид. Найдём точки, которые не попали на данную карту. Они задаются условиями $x_0 - x_3 = 0$ и $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$. Решая совместно эти уравнения, получаем единственную точку $(1 : 0 : 0 : 1)$.

Теперь рассмотрим карту S_2, заданную уравнением $x_1 - x_3 = 1$. Бесконечно удалённой по отношению к S_2 будет точка $(0 : 1 : 0 : 1)$, а образом — параболоид. Таким образом, получаем, что наше многообразие связно.

Пусть теперь $c > 0$. Рассматривая те же самые карты, получаем, что на первой карте не видны точки $(0 : 1 : \pm 1 : 0)$, а по отношению ко второй не видны $(1 : 0 : \pm 1 : 0)$. Так как точки не совпадают, получаем, что наше многообразие связно. ■