Тончайшим, славящимся во всем мире математикам.

Как мы достоверно знаем, едва ли существует что-либо иное, что могло бы в большей степени побудить благородные умы к совершению дел, ведущих к умножению знаний, чем предложение трудных, но в то же время полезных вопросов; их разрешением, с помощью того или иного метода, они достигнут славы для своего имени и воздвигнут себе вечный памятник у потомков. Я полагаю, что для меня не будет ничего более приятного, чем, если я, подражая примеру таких мужей, как Мерсенн, Паскаль, Ферма, Вивиани, предложу превосходнейшим аналитикам нашего века некоторую задачу. Пусть всякий, кто может, берет себе ту премию, которую мы заготовили для решившего задачу, - конечно, не суммы золота или серебра, приводящие в движение только низкие наемные умы, от которых мы вообще не ожидаем ничего похвального и ничего полезного для наук. Так как добродетель сама для себя представляет наилучшую награду, а слава содержит в себе неизмеримое побуждение, то мы и предлагаем премию, которая подходит мужу благородной крови, - премию, сплетенную из чести, похвалы и рукоплесканий; мы будем и публично, и устно увенчивать и украшать и восхвалять проницательность нашего великого Аполлона.

Иоганн Бернулли. Программа, изданная в Гронингене в 1697 г.

1 Задачи.

1. Найти "общее"решение уравнения. Нарисовать семейство линий уровня решений.

$$(14x-9y)(\frac{\partial z}{\partial x})+(4x+2y)(\frac{\partial z}{\partial y})=0$$

2. Решить задачу Коши для уравнения:

$$xu_x+yu_y+xyu_z=0; \qquad u=x^2+y^2,\ z=0$$

3. Решить задачу Коши для уравнения:

$$z_x+\frac{1}{2}z_y^2=1; \qquad x=0,\ z=\frac{1}{2}y^2.$$

4. Исследовать корректность постановки задачи Коши при $t=0$ для системы уравнений с частными производными:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t-2u_x+3v_x & =0\\ v_t+4u_x+2v_x & =0\end{array}\right.$$

5. Исследовать корректность постановки задачи Коши при $t=0$ для системы уравнений с частными производными:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t-2u_x+8v_x & =0\\ v_t-u_x+2v_x & =0\end{array}\right.$$

6. Рассматривается смешанная задача для системы

$$\left\{\begin{array}{ll} 2u_t+(2t-1)u_x-(2t+1)v_x & =0\\ 2v_t-(2t+1)u_x+(2t-1)v_x & =0\end{array}\right.$$

с начальными условиями $u(0,x) = \sin(\pi x)$, $v(0,x) = \mathrm{arctg}(x), 0 \le x \le 1, t \ge 0$ с одной из следующих пар краевых условий

$$u(0,t) + v(0,t) = t,\ v(1,t) = \frac{\pi}{4} + t \tag{1}$$

$$u(0,t) - v(0,t) = t,\ u(1,t) = \frac{\pi}{4} + t \tag{2}$$

$$u(0,t) + v(0,t) = t,\ u(1,t) - v(1,t) = \frac{\pi}{4} + t \tag{3}$$

$$u(0,t) = t,\ v(1,t) = \frac{\pi}{4} + t \tag{4}$$

Какие из этих пар краевых условий являются правильно поставленными? В случае правильно поставленных краевых условий определить, какую гладкость решения обеспечивают эти условия и построить решение смешанной задачи в области

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le 1$$

7. Написать уравнение поверхности, проходящей через прямую $x + y = 1;\ t = 0$ и являющейся характеристической поверхностью для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$. Чему могут быть равны скорости движения фронтов плоских волн, двигающихся вдоль прямой $x = y$? А вдоль прямой $x = -y$?

8. Написать уравнение поверхности, проходящей через прямую $x + y = 1;\ t = 0$ и являющейся характеристической поверхностью для системы

$$\begin{cases} 2u_t + v_t + 8w_x &= 0 \\ u_t + v_t - w_y &= 0 \\ w_t + 4v_x + v_y &= 0 \end{cases}$$

С какими скоростями могут двигаться фронты плоских волн, распространяющихся вдоль прямой $x = -y$?

9. Решить задачу Коши для системы

$$\begin{cases} (x-1)u_t - (x+1)v_t + u_x &= 0 \\ (x+1)u_t - (x-1)v_t - v_x &= 0 \end{cases}$$

$$u(0,x) = \sin(x),\ v(0,x) = \mathrm{arctg}(x),\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Нарисовать область на плоскости (x,t), в которой решение этой системы однозначно определяется начальными условиями, заданными на луче $t = 0,\ x \in [0, +\infty)$.

10. Дана система

$$\begin{cases} 5u_t + 3v_t + 16u_x + 8v_x + 6u_y + 2v_y &= 0 \\ 3u_t + 5v_t + 8u_x + 16v_x + 2u_y + 6v_y &= 0 \end{cases}$$

С какими скоростями могут двигаться плоские волны вдоль оси x? Постройте решение в виде плоских волн, двигающихся вдоль прямой $x = -y$. С какими скоростями они могут двигаться?

11. Восстановить однопараметрическую группу преобразований R^3 по заданному ее инфинитиземальному оператору $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{L} = (2x - y - z)\frac{\partial}{\partial x} + (2x - y - 2z)\frac{\partial}{\partial y} + (-x + y + 2z)\frac{\partial}{\partial z}$$

12. Решить уравнение Пфаффа

$$2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz = 0$$

13. Отображение $\vec{z} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ задано следующей системой уравнений с многомерным временем

$$\begin{cases} dz_1 &= z_1 dt_1 \\ dz_2 &= z_2 dt_1 + z_1 dt_2 \\ dz_3 &= z_3 dt_1 + z_2 dt_2 - z_1 dt_2 \end{cases}$$

Назовем орбитой (т.е. аналогом фазовой траектории) данной точки в $\mathbb{R}^3$ параметрически заданную поверхность $\vec{t} \mapsto \vec{z}(\vec{t}) \in \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, получающуюся при всевозможных $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$. Опишите орбиты для заданной системы. Сделайте примерный чертеж.

14. Те же вопросы для системы

$$\begin{cases} dz_1 &= z_1(dt_1 + dt_2) - z_2 dt_1 \\ dz_2 &= z_1 dt_1 + z_2(dt_1 + dt_2) \\ dz_3 &= z_3 dt_2 \end{cases}$$

"- *Г-голубчики, - сказал Федор Симеонович озадаченно, разобравшись в почерках. - Это же n-проблема Бен Б-бецалеля. Калиостро же доказал, что она не имеет решения.*

- Мы сами знаем, что она не имеет решения, - сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. - Мы хотим знать, как ее решать.

- К-как-то ты странно рассуждаешь, К-кристо. К-как же искать решение, к-когда его нет? Б-бессмыслица какая-то.

- Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. Бессмыслица - искать решение, если оно и так есть. Речь идет о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет. Это глубоко принципиальный вопрос, который, как я вижу, тебе, как прикладнику, к сожалению, не доступен. По-видимому, я напрасно начал с тобой беседу на эту тему".

А Стругацкий, Б. Стругацкий. Понедельник начинается в субботу. Москва, изд. Детская литература, 1965.