

## ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΤΟΜΕΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός (8<sup>ο</sup> εξάμηνο)

### ΕΡΓΑΣΙΑ - Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων

#### Μέρος Α – Ηλεκτροστατικό Πεδίο

Προθεσμία: 10 Μαΐου 2019

##### Α.1 Ομοαξονικό καλώδιο με διηλεκτρικό τον αέρα

Δίνεται ομοαξονικό καλώδιο χαρακτηριστικής αντίστασης  $50 \Omega$  με διηλεκτρικό τον αέρα και διάμετρο εξωτερικού αγωγού  $2b = 3.5\text{mm}$ . Αφού υπολογίσετε την ακτίνα  $a$  του εσωτερικού αγωγού, γράψτε έναν κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση του ηλεκτροστατικού προβλήματος εντός του ομοαξονικού καλωδίου και στη συνέχεια τον υπολογισμό της χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους του. Ο εσωτερικός αγωγός τίθεται σε δυναμικό  $V$  (έστω  $1 \text{ Volt}$ ), ενώ ο εξωτερικός γειώνεται ( $\phi=0$ ).

Για τη σύνταξη του προγράμματος ακολουθήστε τις εξής οδηγίες:

- Ορίστε τις μεταβλητές που περιγράφουν τη γεωμετρία (είναι στην ουσία οι ακτίνες του εσωτερικού και εξωτερικού αγωγού) και κατασκευάστε τον πίνακα περιγραφής γεωμετρίας. Χρησιμοποιήστε την decsg για να φτιάξετε τον decomposed solid geometry matrix, εξαιρώντας την εσωτερική περιοχή του αγωγού ακτίνας  $a$ . Φτιάξτε το αρχικό πλέγμα με την initmesh. Εισάγετε μία ή περισσότερες εντολές refinemesh για πύκνωση του πλέγματος.
- Με τη βοήθεια του πίνακα e και με βάση και τις συντεταγμένες των κόμβων, εντοπίστε τους κόμβους που αντιστοιχούν σε συνθήκες Dirichlet (στην περίπτωση αυτή είναι οι κόμβοι και των δύο αγωγών – εσωτερικού και εξωτερικού), κατασκευάζοντας έτσι το διάνυσμα node\_id. Κατασκευάστε επίσης και το διάνυσμα X0 που περιέχει τις τιμές του δυναμικού στους κόμβους του πλέγματος, αρχικά μόνον στους γνωστούς (το διάνυσμα αυτό θα χρειαστεί για την απεικόνιση του δυναμικού μετά την εκτέλεση του προγράμματος). Σε αυτό θα πρέπει οι κόμβοι του εσωτερικού αγωγού να έχουν τιμή  $V$ , ενώ αυτοί του εξωτερικού αγωγού θα έχουν τιμή μηδέν. Φυσικά προς το παρόν οι άγνωστοι κόμβοι θα έχουν επίσης δυναμικό μηδέν.
- Φτιάξτε το διάνυσμα επαναρίθμησης index που θα περιέχει την αρίθμηση που θα έχει κάθε κόμβος ως άγνωστος (γνωστοί κόμβοι θα έχουν index μηδέν).
- Αρχικοποιήστε τον ολικό αραιό πίνακα και γράψτε το βρόχο συνάθροισης for για κάθε στοιχείο, σε κάθε επανάληψη του οποίου θα υπολογίζονται οι τοπικοί πίνακες και θα προστίθενται στον ολικό (όπως και το διάνυσμα δεξιού μέλους), ακριβώς όπως περιγράφεται στην παρουσίαση της μεθόδου.
- Λύστε το σύστημα  $SX=B$  με direct solver ( $X = S \setminus B$ ).
- Συμπληρώστε το διάνυσμα X0 (το οποίο έχει ακόμα μόνο τις τιμές των γνωστών κόμβων) με τις άγνωστες τιμές που μόλις βρήκατε από την επίλυση (θα χρειαστεί προφανώς το διάνυσμα index).
- Απεικονίστε χρωματικά τη μεταβολή του δυναμικού με την pdeplot. Βρείτε (με την pdegrad) και απεικονίστε με την pdeplot και το διανυσματικό πεδίο  $E$ .

- Συγκρίνετε τα αποτελέσματα για ένα, δύο ή και τρία refinement και γράψτε το πλήθος βαθμών ελευθερίας σε κάθε περίπτωση.
- Προσπαθήστε να λύσετε το σύστημα και με iterative solver (π.χ. biconjugate gradient ή GMRES). Συγκρίνετε το χρόνο επίλυσης του συστήματος (με tic και toc) για direct και iterative solvers σε κάθε περίπτωση.
- Με βάση το αποτέλεσμα του πεδίου, γράψτε ένα μικρό κώδικα για τον υπολογισμό της συνολικής ανά μονάδα μήκους ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου, βάσει της γνωστής σχέσης

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \varepsilon |\mathbf{E}|^2 ds = \frac{1}{2} \iint_S \varepsilon |\nabla \phi|^2 ds = \frac{1}{2} \iint_S \nabla \phi \cdot \varepsilon \nabla \phi ds.$$

Αναλύοντας το δυναμικό ως προς τις συναρτήσεις βάσης, γράψτε μια διακριτή έκφραση για το παραπάνω ολοκλήρωμα και υπολογίστε το προσθέτοντας τις συνεισφορές από όλα τα στοιχεία, βάσει της λύσης που έχετε. Από την ενέργεια, υπολογίστε τη χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους βάσει της σχέσης

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2$$

Συγκρίνετε με την αναλυτική (ακριβή λύση) και υπολογίστε το σχετικό σφάλμα για ένα, δύο, τρία και τέσσερα refinements.

## Α.2 Πυκνωτής παράλληλων πλακών πεπερασμένου πλάτους

Πυκνωτής (άπειρου μήκους) παράλληλων πλακών πεπερασμένου πλάτους  $w$  και πάχους  $t$  έχει διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς  $\varepsilon_r$  ανάμεσα στις πλάκες, οι οποίες βρίσκονται σε απόσταση  $d$  μεταξύ τους. Θεωρήστε ότι το χωρίο υπολογισμού έχει διαστάσεις  $A \times B$  ( $A=B=5w$ ) και ότι ο πυκνωτής είναι στο κέντρο του χωρίου. Το δυναμικό είναι  $V/2$  στην πάνω πλάκα και  $-V/2$  στην κάτω πλάκα. Στο (απομακρυσμένο) εξωτερικό σύνορο τίθενται ομογενείς συνθήκες Neumann.

Χρησιμοποιήστε παραλλαγή του ήδη υπάρχοντος κώδικα από το Α.1 για την απεικόνιση του πεδίου και τον υπολογισμό της χωρητικότητας. Συγκρίνετε τις τιμές που προκύπτουν για ένα, δύο και τρία refinements.

Υπόδειξη: Η ουσιαστική διαφοροποίηση σε σχέση με το Α.1 είναι ότι για το σχηματισμό του διανύσματος `node_id`, όπως και του `X0`, θα πρέπει να λάβετε υπόψη (σε κατάλληλες εντολές if) και τις συντεταγμένες των εξωτερικών κόμβων που συναντούμε στον πίνακα `e`. Για παράδειγμα, η πάνω πλάκα του πυκνωτή ξεχωρίζει από την κάτω από το ότι οι συντεταγμένες  $y$  των κόμβων της είναι μεγαλύτερες του μηδενός, ενώ και οι δύο πλάκες ξεχωρίζουν από το σύνορο του domain ως προς το ότι βρίσκονται εντός ενός «κουτιού» διαστάσεων π.χ.  $|x| < w$ ,  $|y| < d$ .

Αριθμητική εφαρμογή:  $w = 3\text{cm}$ ,  $t = 2\text{mm}$ ,  $d = 1\text{cm}$ ,  $V = 100\text{ Volt}$ ,  $\varepsilon_r = 2.2$ .