

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BEJA  
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Física Aplicada à Computação

# Simulação Numérica da Trajetória Terra-Lua em Python

**Aluno:** Diogo Vidazinha

**Número:** 23911

**Docente:** Nuno Pereira

**Data:** 26 de março de 2025

## Resumo

Este artigo apresenta a simulação numérica da trajetória de uma nave espacial no sistema Terra-Lua, utilizando o método de integração numérica de Runge-Kutta de ordem 5(4), com passo adaptativo. O modelo considera a interação gravitacional entre a Terra, a Lua e a nave, adotando unidades normalizadas para simplificação das equações diferenciais. Foram simuladas diferentes condições iniciais para analisar a sensibilidade da trajetória. Os resultados mostram como pequenas variações iniciais podem alterar significativamente o destino da nave, evidenciando o comportamento caótico do problema de três corpos. A implementação foi realizada em Python com o uso de bibliotecas especializadas.

## 1 Introdução

A exploração espacial tem sido um dos grandes desafios científicos e tecnológicos da humanidade. Desde as primeiras missões lunares da NASA, como o programa Apollo, até as atuais ambições de colonização lunar, a previsão e o controle de trajetórias espaciais são fundamentais. Neste contexto, a simulação computacional surge como uma ferramenta poderosa para prever o comportamento de sistemas complexos.

O problema Terra-Lua é um exemplo clássico de problema de três corpos, regido pelas leis da gravitação universal de Newton. Por ser um sistema sensível às condições iniciais, ele é ideal para estudos de estabilidade orbital e análise numérica. Este trabalho, realizado no âmbito da unidade curricular *Física Aplicada à Computação* do Instituto Politécnico de Beja, tem como objetivo desenvolver um modelo numérico da trajetória de uma nave neste sistema.

## 2 Fundamentos Físicos e Matemáticos

A força gravitacional entre dois corpos com massas  $m_1$  e  $m_2$ , separados por uma distância  $r$ , é dada por:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Neste estudo, a nave está sujeita à atração da Terra e da Lua. As equações diferenciais do movimento da nave, considerando as posições da Terra em  $(0,0)$  e da Lua em órbita circular  $(\cos t, \sin t)$ , são:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{Gx}{r^3} - \frac{GM(x - \cos t)}{r_m^3} \\ \ddot{y} &= -\frac{Gy}{r^3} - \frac{GM(y - \sin t)}{r_m^3}\end{aligned}$$

onde:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a distância da nave à Terra,
- $r_m = \sqrt{(x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2}$  é a distância da nave à Lua,
- $M = \frac{1}{81.3}$  é a massa relativa da Lua.

## 3 Metodologia

### 3.1 Método de Integração

Para resolver o sistema de equações diferenciais, utilizamos o método de Runge-Kutta de ordem 5(4), com passo adaptativo, através da função `solve_ivp` da biblioteca `scipy.integrate`. Este método ajusta dinamicamente o tamanho do passo para manter o erro numérico dentro de limites pré-estabelecidos (tolerância absoluta e relativa).

### 3.2 Implementação Computacional

O código Python implementa as seguintes etapas:

1. Definição das equações do movimento;
2. Definição das condições iniciais;
3. Integração do sistema com `solve_ivp`;
4. Visualização gráfica com `matplotlib`.

### 3.3 Condições Iniciais

Foram simuladas diferentes condições iniciais, variando o ângulo de lançamento e a velocidade da nave, de modo a analisar o seu impacto na trajetória final.

## 4 Resultados e Discussão

### 4.1 Trajetória Simulada

A Figura 1 mostra a trajetória da nave, juntamente com a órbita da Lua e as posições da Terra e da Lua.

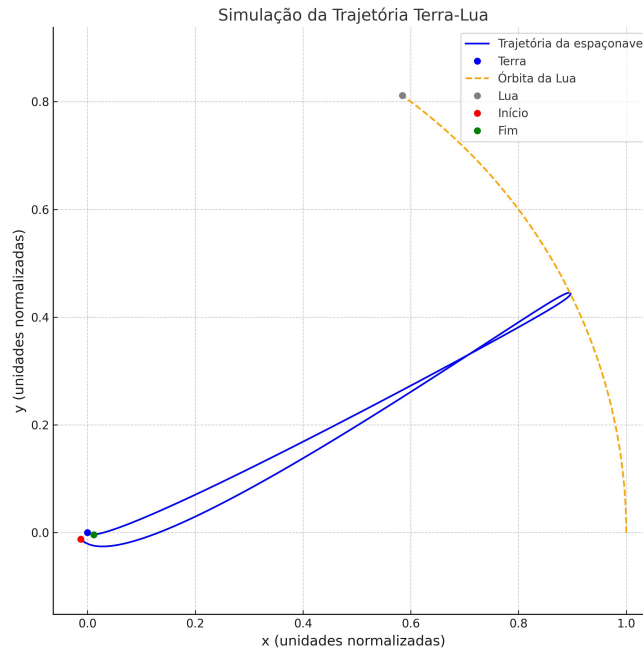


Figura 1: Trajetória da nave espacial no sistema Terra-Lua com condições iniciais específicas.

## 4.2 Outras Simulações

Foram simuladas trajetórias com diferentes valores de velocidade e ângulo de lançamento. A Figura 2 mostra como pequenas alterações nas condições iniciais resultam em trajetórias significativamente distintas. Este comportamento demonstra a sensibilidade extrema do sistema, uma característica típica de problemas caóticos como o dos três corpos.

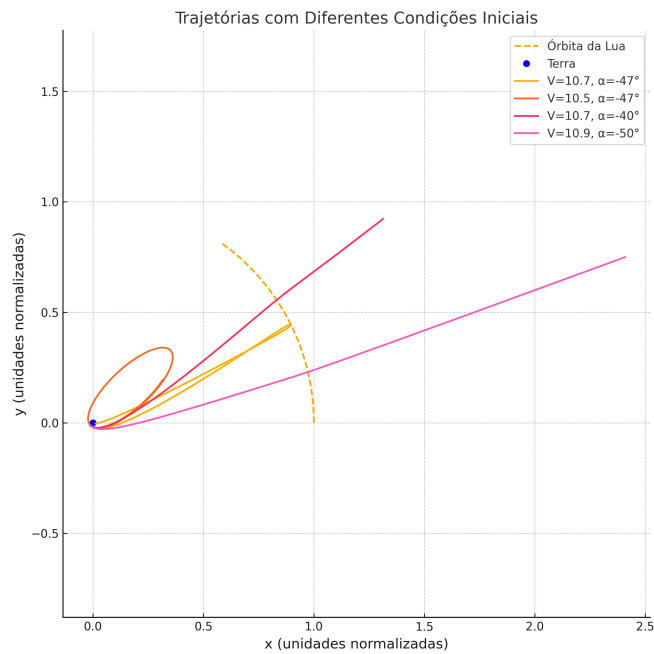


Figura 2: Trajetórias da nave para diferentes ângulos e velocidades iniciais.

## 5 Conclusão e Trabalhos Futuros

O modelo apresentou-se eficaz para a simulação de trajetórias no sistema Terra-Lua. A utilização de métodos adaptativos de Runge-Kutta permitiu elevada precisão numérica. Como trabalhos futuros, propõe-se:

- Inclusão da influência solar;
- Simulação com modelos de propulsão;
- Validação com dados reais;
- Interface gráfica interativa para fins educacionais.

Este estudo reforça a importância da simulação numérica para o planeamento de missões espaciais e pode ser utilizado como base para análises mais avançadas em astrodinâmica.

## 6 Referências

- Danby, J. M. A. (1997). *Computer Modeling: From Sports To Spaceflight... From Order To Chaos*. Willmann-Bell, Richmond USA.
- Virtanen, P., et al. (2020). SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17, 261–272. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D Graphics Environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90-95.
- [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve\\_ivp.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html)