

# Review of Computer Graphics

## 1 概述

### 定义

CG中国定义：研究用计算机表示、生成、处理和显示图形的原理、算法、方法和技术的一门学科。

IEEE: the art or science of producing graphical images with the aid of computer

ISO: 一门研究通过计算机将数据转化成图形，并在专门显示设备显示的原理方法和技术的学科。它是建立在传统图学理论、应用数学及计算机科学基础上的一门边缘学科。

### 主要研究内容

#### 60年代

Sutherland 交互图形学

贝塞尔 贝塞尔曲线、曲面理论

Coons 超限插值，4个曲线插值成一个曲面 Coons Award

#### 70年代

光栅显示器诞生：第一个兴盛期

光栅图形学算法迅速发展

图形软件标准化 ISO发布

1. CGI 计算机图形接口
2. CGM ~~源文件标准
3. GKS 计算机图形核心系统
4. PHIGS 面向程序员的层次交互图形标准

真实感图形学、实体造型技术：简单光照模型

#### 80年代

光线跟踪算法

热辐射度模拟漫反射

超大规模集成电路：硬件基础

70年代汉字之难 80年代解决汉字字形的计算机表示

## 90年代

GPU

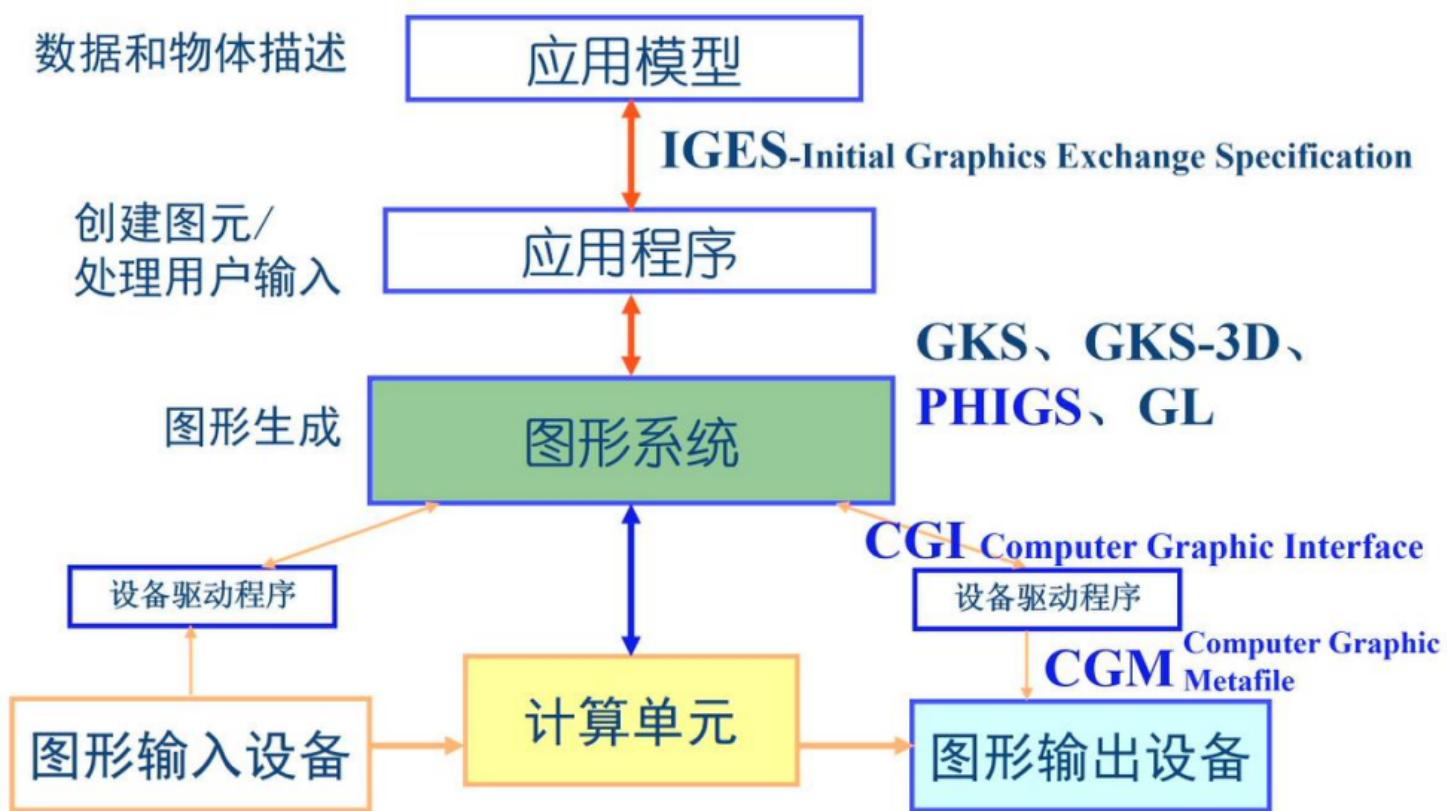
全局光照模型

三维造型技术

## 交互式图形系统的概念框架

与设备无关、与应用无关

CGI规定硬件接口（图形信息的描述与通信），CGM（图形文件格式），PHIGS（图形系统标准，应用程序和图形输入输出的中介，功能接口）



- 图形数据按层次结构组织；
- 动态修改和绘制图形数据；
- 在三维世界坐标系中操作。

OpenGL

DirectX

Postscript

## 典型三维模型

犹他壶

西洋跳板棋

山魈

骨骼模型

炸面圈

大众

斯坦福兔

## 2 三维物体的形体几何模型与表示

内涵：三维物体计算机表示的数据结构和存储结构；三维物体几何形状数据的获取（怎么得到，怎么存储）

### 多边形网络模型与表示

足够多的多边形平面可无限逼近三维物体表面几何形体。

多边形网格=(点集, 边集, 属性)

属性指定材质

点, 边, 面表示



# 多边形网格表示三维物体表面几何形体 (三维表面模型)

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$$

$$= ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n))$$

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$$

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_l)$$

$$E_1 = (V_1, V_2, P_1, \lambda)$$

$$E_2 = (V_2, V_3, P_2, \lambda)$$

$$E_3 = (V_3, V_4, P_2, \lambda)$$

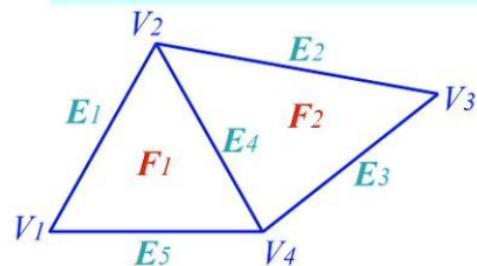
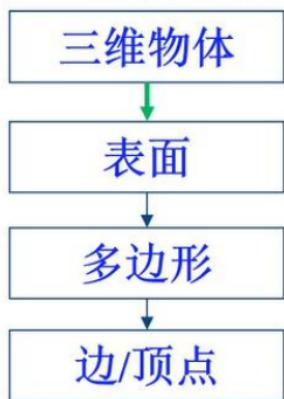
$$E_4 = (V_4, V_2, P_1, P_2)$$

$$E_5 = (V_4, V_1, P_1, \lambda)$$

$$F_1 = (E_1, E_4, E_5)$$

$$F_2 = (E_2, E_3, E_4)$$

三维物体多边形网格  
表示的概念层次分解



示例：由两个多边形平面按照  
SPHIGS定义的  
一个多边形网格  
的存储数据结构：**vertex list**、  
**edge list**

点：三维坐标

边：顶点和相邻的面，最外边的面记作 $\lambda$

面：由哪些边围成

一致性约束：

1. 所有多边形闭合
2. 一个顶点至少有两条边共享
3. 一条边至少是一个多边形的一部分
4. 每个多边形至少有一条公共边
5. 多边形网格是全连通图
6. 相邻顶点的二元关系可以用一个平面图表示（拓扑平面）

属性

	属性实例
多边形 属性	三角形或不是；平面法向；平面面积
	光洁度；平面方程系数；是否凸多边形；是否有洞
边属性	长度；边的位置（多边形或表面之间）
	该边每一侧的多边形
顶点属性	顶点法向（多边形明暗处理）；顶点关联多边形
	纹理坐标（表面纹理映射）

多边形网格表示的特点：

1. 构造简单，可表示任意三维物体表面几何形体
2. 已形成完善有效的明暗处理方式、硬件可实现
3. 表示精度与多边形网格数量成正比
4. 表示精度可伸缩是多边形网格模型的追求（增加和减少网格）
5. 可编辑是多边形网格表示的挑战

## 曲面片模型与表示

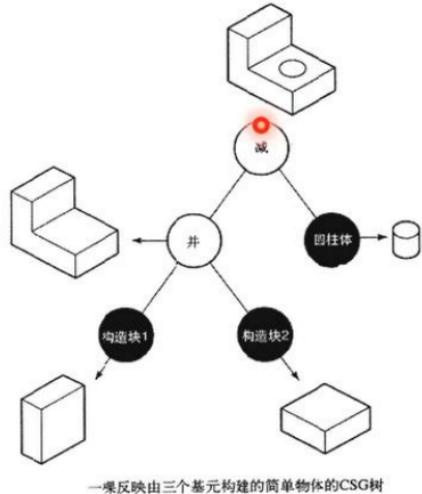
基元是曲边四边形的曲面片

1. 边是三次曲线
2. 精确参数表示，曲面由数学方程定义，面上的每个点都有定义
3. 三维形状编辑潜力，CAD交互式设计基础
4. 可能是一种更经济的物体几何形状表示方法

## 构造实体几何模型 (CSG: Constructive Solid Geometry)

三维基本构造块组合构建的三维物体形体层次表示（搭积木）

CSG是一种分解表示的有序二叉树，叶子结点是体素或形体变换参数，分支结点是正则集合运算（交并差等）或几何变换操作



CSG是一种分解表示的有序二叉树：  
叶子节点是体素或形体变换参数；  
分支节点是正则集合运算或几何变换操作；

- CSG树无二义性：定义域由所用体素、允许的几何变换和正则集合运算算子决定。
- 体素不唯一：立方体、圆柱、基本构件等组成一个体素正则集合。

## 特点

1. 正则集合运算和几何变换描述三维物体组成过程
2. 隐含表示形体几何边界元素
3. 需特殊绘制或多边形网格转换
4. 支持实现交互式实体建模

个人理解：比较偏高层，靠简单实体的搭建来表示复杂几何体。几何边界等元素隐含在搭建过程中，需要实现底层的绘制和网格等才能真正显示几何图形。对用户友好，适合交互式建模。

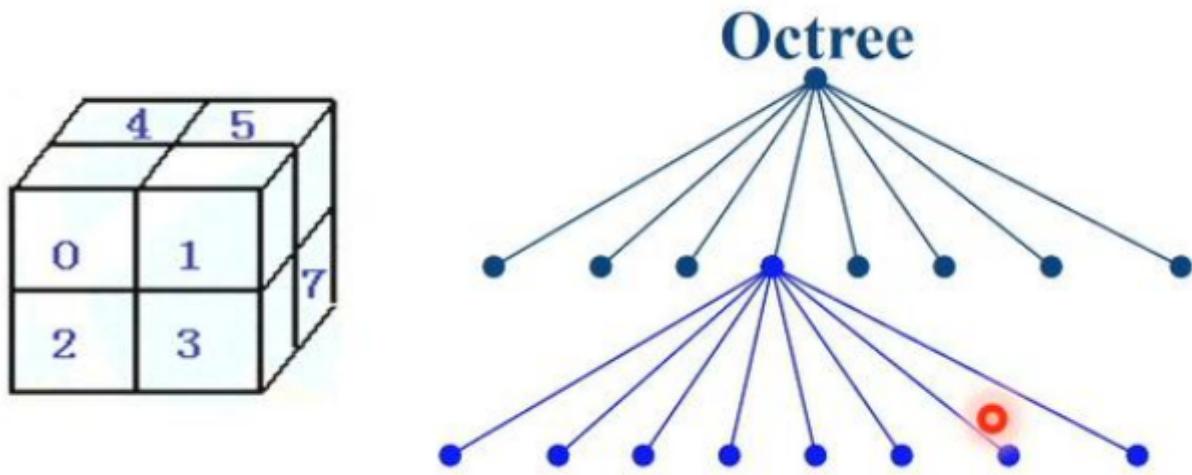
## 空间细分表示

把三维物体所在的整个世界空间细分为更小的立方体基元，按是否在物体中标记每一个体素（空间微元）

数据存储结构是八叉树，可表示三维实体内部分层树形结构。八叉树可转成二叉空间分区树（BSP）  
光流跟踪具有明显优势

医学图像是主要用途之一

八叉树：



按照上图将一个大体素不断划分为8个小体素

1. 几何形体表示，数据结构简单（非解析表达）
2. 简化了形体集合运算
3. 简化了隐藏线、面消除算法（保持体素空间信息）
4. 占用存储多、形体边界计算不易、形体近似表示

# 小结



## 本章小结

### 多边形网格

多边形小平面，表示物体的精确度；  
明暗处理很好解决了绘制问题；  
复杂物体和动画仍然很棘手；

### 双三次参数曲面片

曲面片，参数化定义；  
很强的交互能力；昂贵的可视化；

### 构造实体几何

基元构件“构造”刚性实体；  
是一种体表示方法；

### 空间细分技术

被物体占据的三维空间表示；  
体素既定义三维物体表面也定义内部组织；

### 隐函数表示

由解析表达式定义物体表面形状；  
可用于形态变化动画；  
表示现实物体用途有限；

考虑技术成熟度和计算资源，多边形网格是交互图形引擎最普及支持的三维物体表面几何形体表示模型。

## 3 三角网格的几何计算

### 三角网格及其存储表示

三角网格模型：三角形顶点集+顶点间拓扑关系集（边、面等）+属性  
两种典型存储结构

## obj文件格式

```
# This is a cube with polygon mesh
v 0.000000 2.000000 2.000000
v 0.000000 0.000000 2.000000
v 2.000000 0.000000 2.000000
v 2.000000 2.000000 2.000000
v 0.000000 2.000000 0.000000
v 0.000000 0.000000 0.000000
v 2.000000 0.000000 0.000000
v 2.000000 2.000000 0.000000
# 8 vertices
f 1 2 3 4
f 8 7 6 5
f 4 3 7 8
f 5 1 4 8
f 5 6 2 1
f 2 6 7 3
# 6 faces
```

```
# This is a cube with triangular mesh
v 0.000000 2.000000 2.000000
v 0.000000 0.000000 2.000000
v 2.000000 0.000000 2.000000
v 2.000000 2.000000 2.000000
v 0.000000 2.000000 0.000000
v 0.000000 0.000000 0.000000
v 2.000000 0.000000 0.000000
v 2.000000 2.000000 0.000000
# 8 vertices
f 1 2 3
f 3 4 1
f 8 7 6
f 6 5 8
f 4 3 7
f 7 8 4
f 5 1 4
f 4 8 5
f 5 6 2
f 2 1 5
f 2 6 7
f 7 3 2
# 12 faces
```

3D坐标表示点

用点下标表示面

(点+点间拓扑关系)

## 双向链接边表 (half-edge半边表示)

将三角网格的无向边拆成两条有向边，取其中一个（一般是按逆时针顺序）

精确地表示三角网格：只需存储点和拓扑关系

但如果要遍历某个顶点构成的面，只存储点和拓扑关系就需要遍历整个模型，这显然比较浪费时间。

半边：增加少量存储，提供更方便的访问。

半边e和其对边Opposite(e)对应同一条边

存储信息包括：

1. 顶点id和几何信息，即空间坐标
2. 半边e
  - (1) 该半边的源顶点Origin(e)
  - (2) 该半边在同一三角形的下一条边Next(e)

(3) 对边Opposite(e)

(4) 该半边所属面IncFace(e)

由此便于各种网格上的遍历操作

如获得上一条边

```
Prev(e) = Next(Next(e))
```

半边e指向的顶点

```
Target(e) = Origin(Next(e))
```

PPT上的C++代码定义

```
class vertex{
public:
    int id;
    double x;
    double y;
    double z;
    halfEdge* inc_Edge;
    vertex(int id1, double x1, double z1): id(id1), x(x1), y(z1){inc_Edge = NULL};
};

class halfEdge{
public:
    int id;
    halfEdge* opposite;
    halfEdge* prev;
    halfEdge* next;
    vertex* origin;
    face* inc_Face;
    halfEdge(int id1): id(id1){opposite=NULL; prev=NULL; next=NULL; origin=NULL; inc_Face=NULL};
};

class face{
public:
    int id;
    halfEdge* inc_Edge;
    face(int id1): id(id1){inc_Edge=NULL;};
};
```

# 三角网格的生成

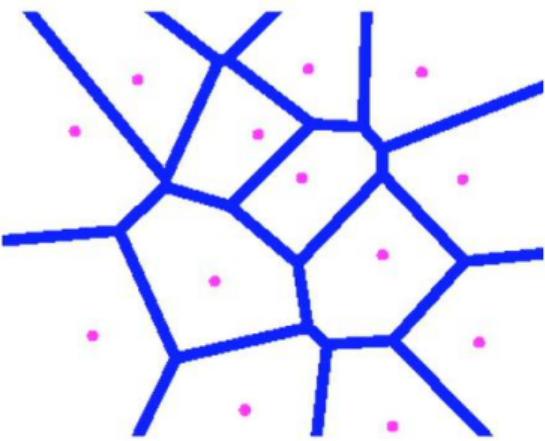
三角网格生成的本质是将三维物体表面划分为三角形面片

现有传感器很容易获取物体表面离散点的空间坐标。

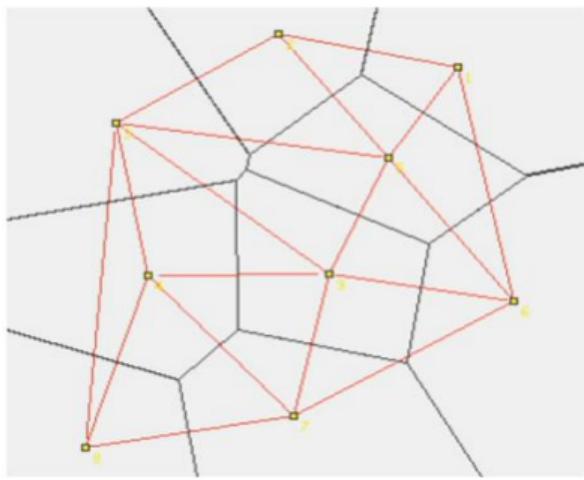
对区域内一组给定点，Voronoi图是对区域内给定一组基点的单元分区；Delaunay三角剖分完成区域内对给定基点的拓扑连接，形成三角形闭合平面。

## 二维空间的Delaunay三角剖分图和它的对偶Voronoi图

**Voronoi图**—邻接点的垂直平分线  
组成的凸多边形（泰森多边形法）

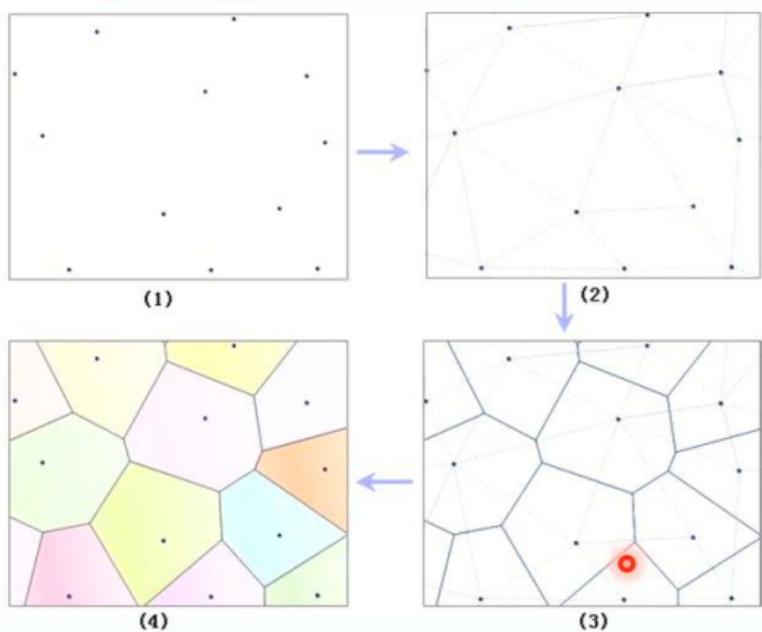


**Delaunay三角剖分**—三角剖分任意边的两个端点在**Voronoi图**中是相邻的



二者是对偶关系

## Voronoi图生成的泰森法



**Voronoi图生成的泰森法：**

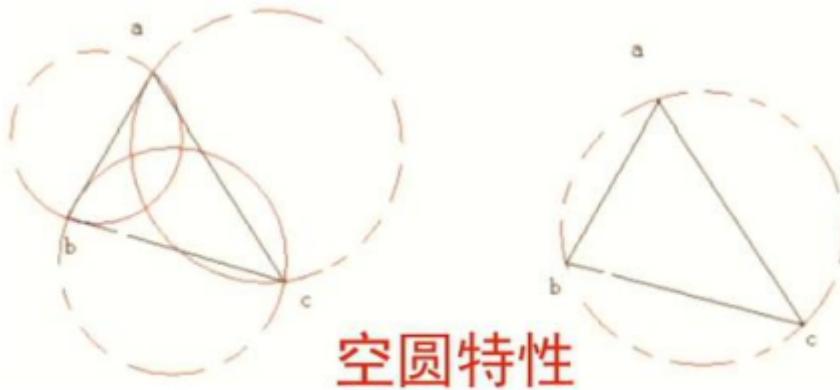
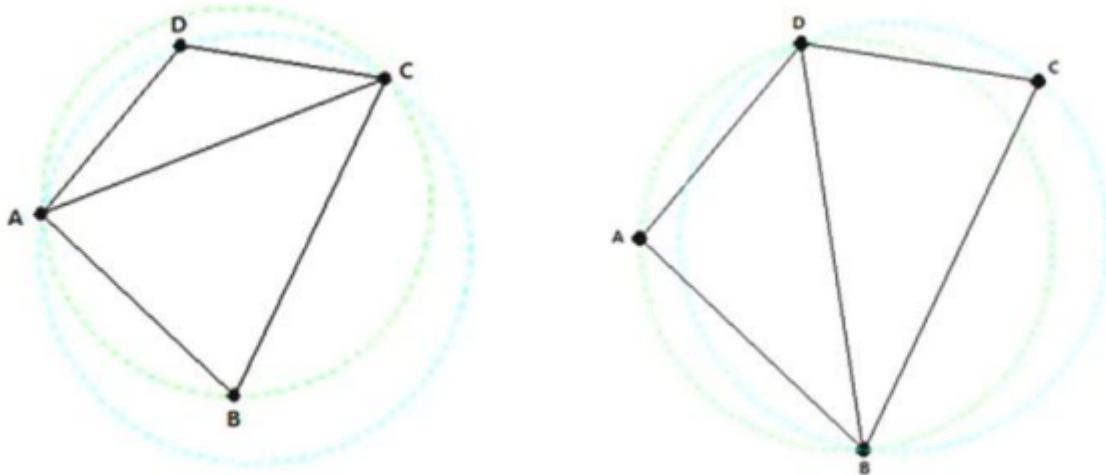
- 1.构建Delaunay三角形；
- 2.选择一个点的所有相关三角形；
- 3.计算每个三角形的外接圆心；
- 4.连接圆心。

xier1\_d312

## Delaunay三角剖分

Delaunay三角剖分是一组相连但不重叠的三角形的集合

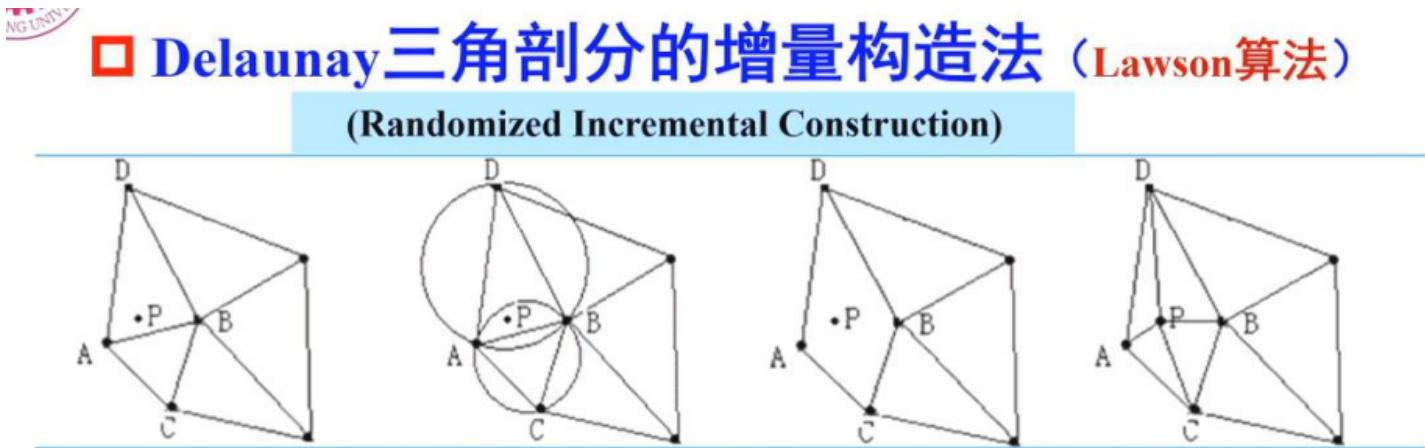
空圆特性：两个共边三角形，任意一个三角形的外接圆中都不包含另一个三角形的第三个顶点。



Delaunay三角剖分的意义：

1. 保证剖分产生的三角形最小角最大（最大化最小角）
2. 可避免狭长三角形产生（Delaunay三角剖分应用）

## Delaunay三角剖分的增量构造方法（Lawson算法）



增加散点P的计算过程：决定P连接的顶点；删除失效边；形成新三角形

- 1、构造一个超级三角形，插入三角形链表；
- 2、对点云的一个散点，从三角形链表中找出其外接圆包含该点的三角形。

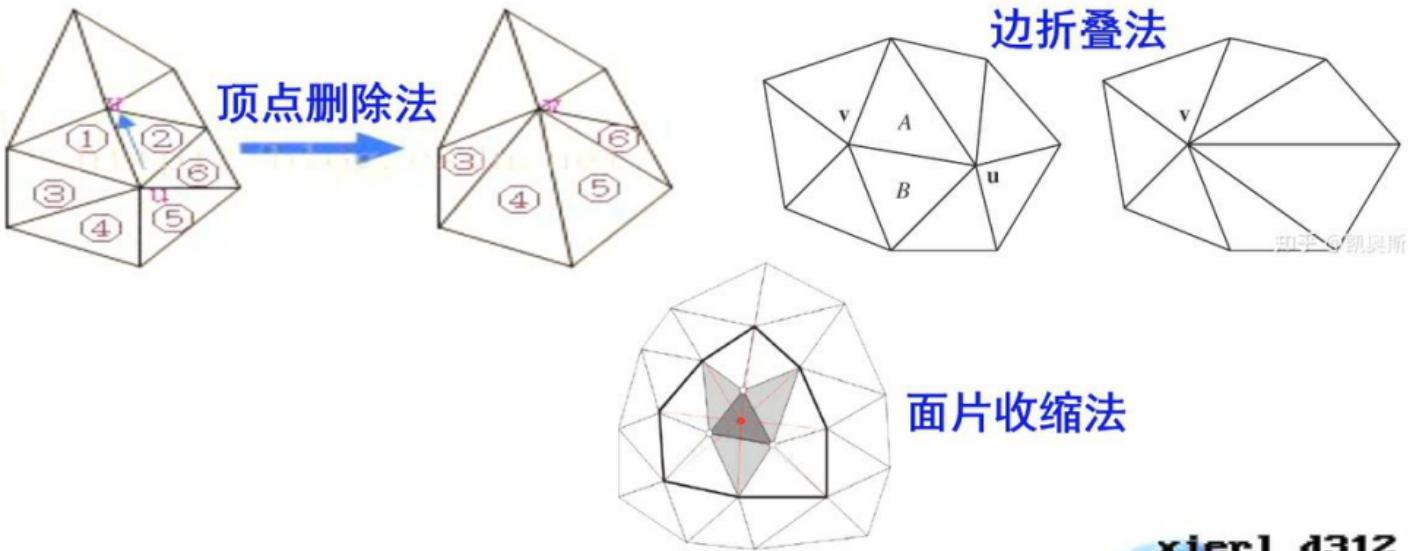
删除相关三角形的公共边，将散点同相关三角形所有顶点连接，完成散点所在三角形的链表插入；

- 3、局部三角形优化，记入Delaunay三角形链表；
- 4、循环执行上述第2、3直到所有散点处理完毕。

## 网格简化

目标：保持三角网格对三维物体表面几何形态逼近的条件下，减少网格的顶点、边和三角形面片的数量。

三条技术路线：顶点删除法、边折叠法、面片收缩法



## 顶点删除法

1. 删除顶点及相邻的面
2. 空洞填补

### 顶点可删除性判定条件

顶点平均平面距离小于误差阈值

平均平面距离：

### 可删除性判别

采用顶点到平均平面的距离定义顶点重要度，对任一顶点  $v_i$ ：  
搜索共享  $v_i$  的三角形组，计算平均平面的法向量、中心点

$$N = \frac{\sum n_k S_k}{\sum S_k} \quad n = \frac{N}{|N|} \quad c = \frac{\sum c_k S_k}{\sum S_k}$$

$$\text{计算 } v_i \text{ 到平均平面的距离 } d = \frac{|n_x d_x + n_y d_y + n_z d_z|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}$$

当  $d$  (重要度) 小于设定阈值时，即可删除顶点  $v_i$

$n$  是平均平面法向量，由各相邻面的法向量对面积加权再归一得到。然后用点到面的距离计算出点到平均平面的距离。

## 空洞填补

删除顶点后就会得到一个大的多边形，对这个多边形再使用Delaunay三角剖分就可以得到新的三角网格。（凹凸顶点判定的Delaunay三角剖分法）

## 边折叠法

选择相邻的顶点，删除边( $u, v$ )及其三角形，将两个顶点合并成一个新顶点 $w$

关键问题：折叠边的选择；新顶点的计算

对任一边 $E_i = (v_{i1}, v_{i2})$ ，搜索共享边 $E_i$ 的相关三角形组：

- 1) 设定边误差矩阵，计算边 $E_i$ 折叠操作带来的误差；
- 2) 通过误差矩阵计算新顶点 $v_{i0}$ 的位置；
- 3) 计算新顶点的折叠误差；
- 4) 按折叠误差从小到大排序，从边序列中取折叠误差最小的边执行折叠操作，更新相关信息；
- 5) 当边序列为空或误差满足阈值时，结束。

## 面片收缩法

S1、给定多边形表面，将模型所在空间分成小格；

S2、计算每个小格的一个代表顶点，将原始模型落到小格内的顶点合并到代表顶点；

S3、若三角形有一个以上顶点位于同一小格则被删除；

**关键问题：小格划分、代表顶点选择**

步骤简述：划分小格，选择小格的代表顶点，将小格中的顶点合并到代表顶点（三角形多个顶点位于同一个小格，自然就因为收缩而消失了）

## 三种方法的总结

顶点删除法：删除不重要的顶点

边折叠法，折叠不重要的边，边顶点合二为一

面收缩法：以小格为单位进行收缩

## 网格细分

与网格简化相反

目标：用更小的三角平面替代原有三角平面，以更加逼近物体表面几何形状。

需要确定几何规则和拓扑规则：怎么打点？怎么连线？

几何规则：计算新顶点的坐标和顶点的新坐标

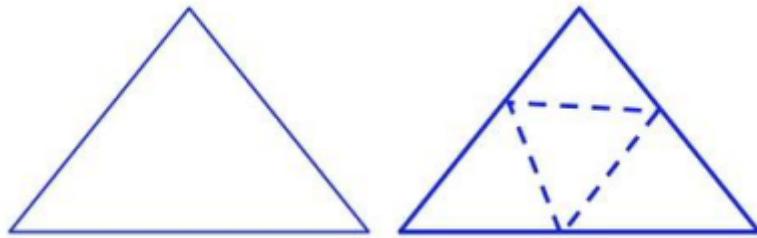
拓扑规则：确定新顶点的连接关系

## Loop细分

三角网格逼近型细分方法（分裂）

1-4三角形分裂法

o



为了保证参数连续性（个人理解是由于是空间三维坐标系，本来是一个三角形刚性结构，增加顶点后就变软了，可以向四周弯折保证平滑性）：

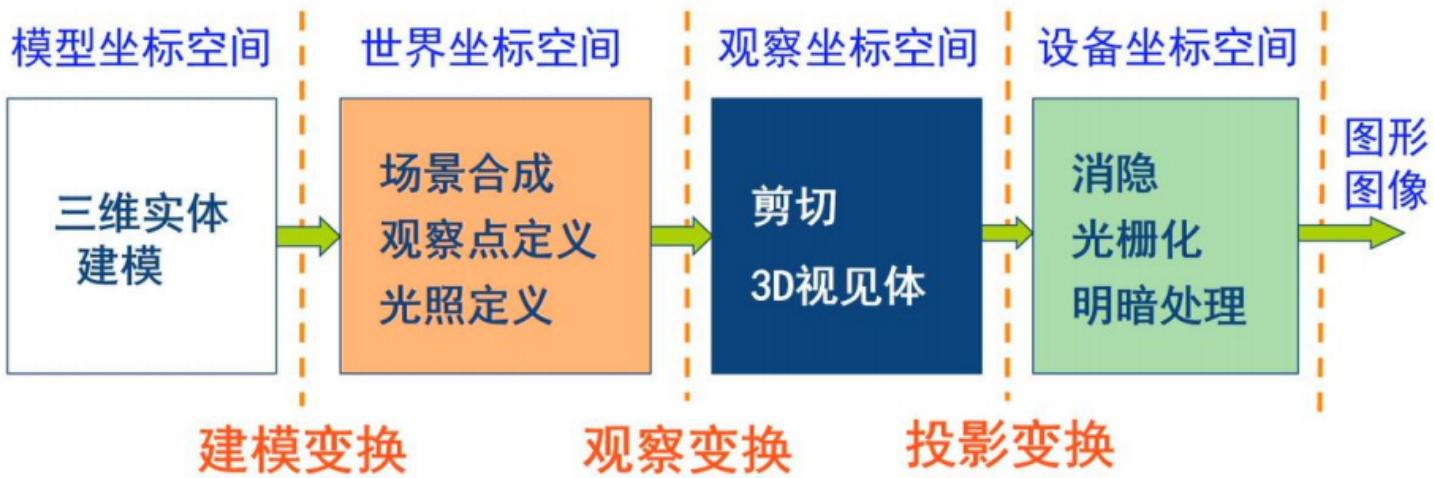
1. 对原始顶点根据邻接顶点进行坐标更新
2. 新增顶点坐标根据共享边的两个三角形顶点进行坐标更新

## 4 多边形网格的三维物体绘制

### 图形绘制流水线

图形绘制流水线是将多边形网格表示的三维物体表面几何形体转换为能在显示设备上显示的、经过明暗处理的像素亮度计算过程。

三维物体几何--计算-->能显示的像素



模型→世界坐标表示→观察→显示到设备

## 可见面判定与隐藏面消除

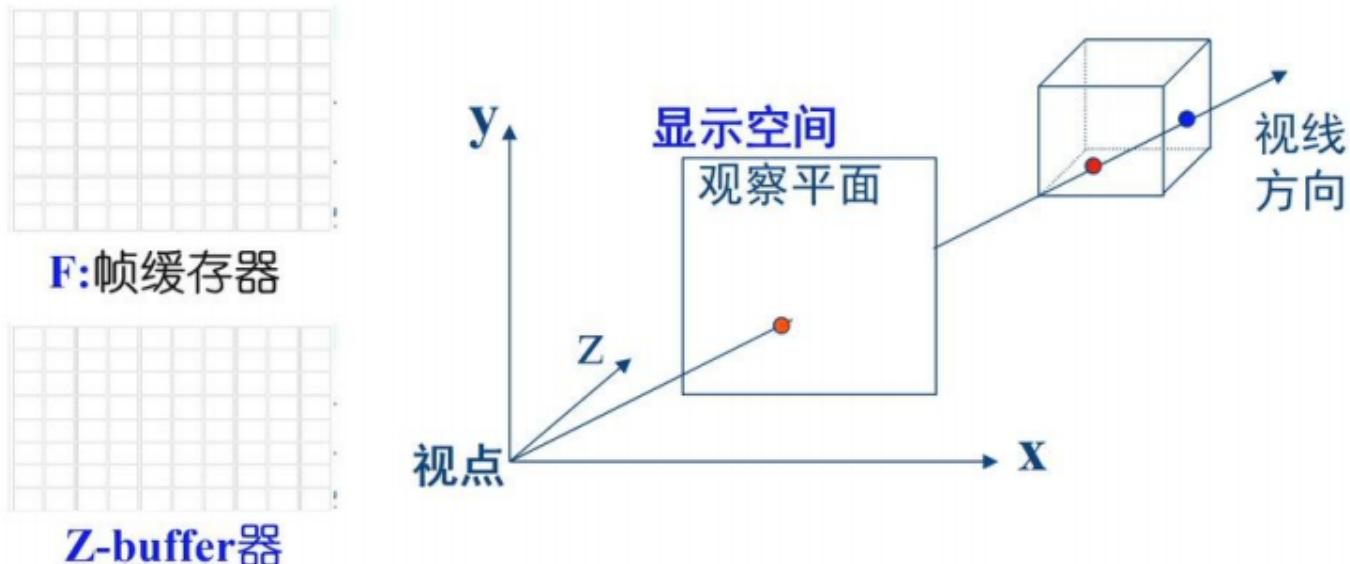
真实感绘制的要求，消除被遮挡的不可见线面，在二维显示设备把三维物体表面的当前可见表面绘制出来。

### Z-Buffer

最简单的可见面判定算法

帧缓存F：存储每个像素的颜色值

深度值缓存Z-Buffer：存储像素对应点的最小深度值



```

void zBuffer(){
    int x, y; // 投影平面坐标
    for(y = 0; y < YMAX; y++)
        for(x = 0; x < XMAX; x++){
            WritePixel(x, y, BACKGROUND_VALUE);
            WriteZ(x, y, ZMAX);
        }
    // 绘制背景, 将背景置于最底层
    for(每个多边形)
        for(投影中的每个像素){
            double pz = (x, y)处的深度z值
            if(pz < ReadZ(x, y)){
                WriteZ(x, y, pz);
                WritePixel(x, y, (x, y)处的颜色值)
            }
        }
    // 记录最小深度
}

```

优点：易于硬件实现

缺点：

1. 需要较大容量的Z-Buffer
2. 每个像素对应多边形区域的深度计算
3. 实现反走样、透明和半透明效果困难（因为是在投影面上操作的，并且只记录了浅层的值）

不要求图形一定是多边形组成的，只要确定对象投影每个点的深度和像素值就可以绘制。

## 光线投影算法

最自然的消隐算法

基本思想：考察由视点出发穿过观察平面的一像素而射入场景的一道射线，则可确定场景中与该射线相交的物体（模拟一道光照）

```

for(屏幕的每一像素){
    形成通过屏幕像素(u, v)的射线;
    for(场景中的每个物体){
        将射线与该物体求交;
        if(存在交点)
            以最近交点所属颜色显示像素(u, v);
        else 以背景色显示像素
    }
}

```

## 深度排序算法（画家算法）

最偷懒的消隐算法

原理：把表示三维实体的每一个多边形按距离视点由远及近排序，构成一张深度优先表，按照顺序逐个绘制各个多边形。

总体评价：

1. 多边形面片数量很大时，画家消隐算法最快（因为GPU结构？）
2. 不能处理多边形循环遮挡、相互穿透
3. 解决办法：分割多边形面片

## 多边形网格裁剪

显示设备视窗大小固定，显示实体范围有限，可避免不必要的无效计算，节省计算资源。

### 直线段裁剪

#### Cohen-Sutherland算法

端点区位码判定

直线上的所有点按照4位码编码，分别代表(上, 下, 右, 左)是否出界，例如右上角的点编码就是1010



算法流程

1. 找出直线段端点的编码code1, code2
2.  $code1 | code2 == 0$  (二者都是0000)，线段完全位于窗口内； $code1 & code2 != 0$ ，线段完全位于窗口外
3. 不属于2的情况，线段部分在窗口内，取线段的一个端点p
4. 从p编码的低位向高位找的第一个1，确定一个相交的边界，求出线段与该边界的交点，用该交点代替p作为端点，外围的剪裁掉

5. 重复4直到没有窗口外的点

### 梁友栋-Barsky算法

参数推理判定的线段剪裁算法

利用直线的参数方程

### 直线的参数方程：

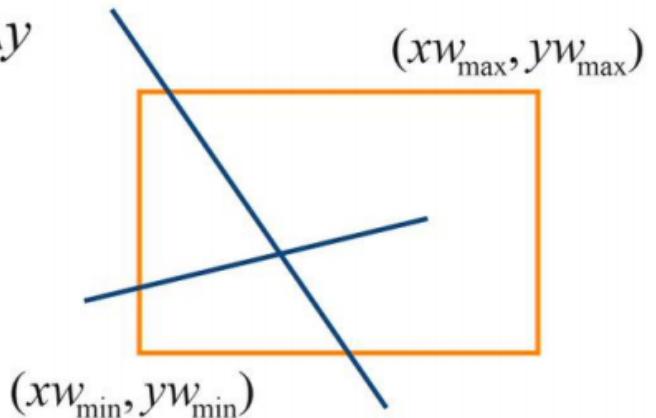
$$x = x_1 + u(x_2 - x_1) = x_1 + u\Delta x$$

$$y = y_1 + u(y_2 - y_1) = y_1 + u\Delta y$$

### 裁剪窗口内的线段点满足：

$$xw_{\min} \leq x_1 + u\Delta x \leq xw_{\max}$$

$$yw_{\min} \leq y_1 + u\Delta y \leq yw_{\max}$$



选择一个端点作为起始点P0，另一个端点作为终止点P1，二者相减得到 $\Delta x, \Delta y$

把上图中的式子转化一下可以得到如下形式的式子

$$up_k \leq q_k$$

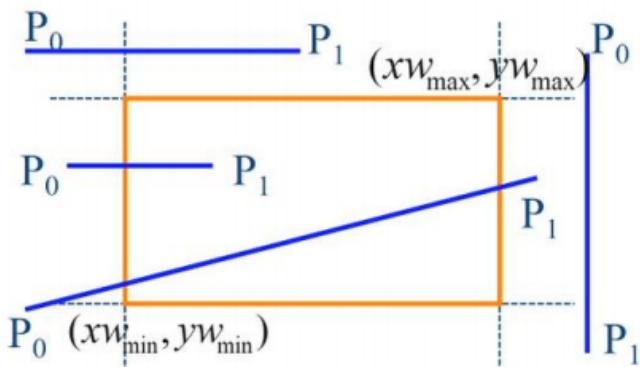
然后就可以利用p和q进行判断

$$u(-\Delta x) \leq x_1 - xw_{\min}$$

$$u(\Delta x) \leq xw_{\max} - x_1$$

$$u(-\Delta y) \leq y_1 - yw_{\min}$$

$$u(\Delta y) \leq yw_{\max} - y_1$$



**裁剪判定1：**任何平行于裁剪边界的直线

$P_k = 0 \Rightarrow q_k < 0$  直线在窗口外部，舍弃该线段；  
 $q_k \geq 0$  直线在窗口内部，保留该线段；

**裁剪判定2：**任何其它直线，有两种情况：

线段从边界延长线外部延伸到内部

线段从边界延长线内部延伸到外部

**外—》内**  $P_k < 0 \Rightarrow u_1 = \max(0, \frac{q_k}{p_k}, \frac{q_{k'}}{p_{k'}})$

**内—》外**  $P_k > 0 \Rightarrow u_2 = \min(1, \frac{q_k}{p_k}, \frac{q_{k'}}{p_{k'}})$

注：内外方向的判别根据边界外侧法向量与线段的夹角，大于90°为负（外—内），小于90°为正（内—外）

## 裁剪判定3：

如果  $u_1 > u_2$ , 线段在窗口之外;  
否则利用  $u_1$  和  $u_2$  计算裁剪线段的两个新端点。

```
if  $u_2 < 1.0$ 
{  $x_2 = x_1 + u_2 \times dx;$ 
   $y_2 = y_1 + u_2 \times dy;$  }
if  $u_1 > 0$ 
{  $x_1 = x_1 + u_1 \times dx;$ 
   $y_1 = y_1 + u_1 \times dy;$  }
```

$u$  其实就是线段到边界的裁断比例

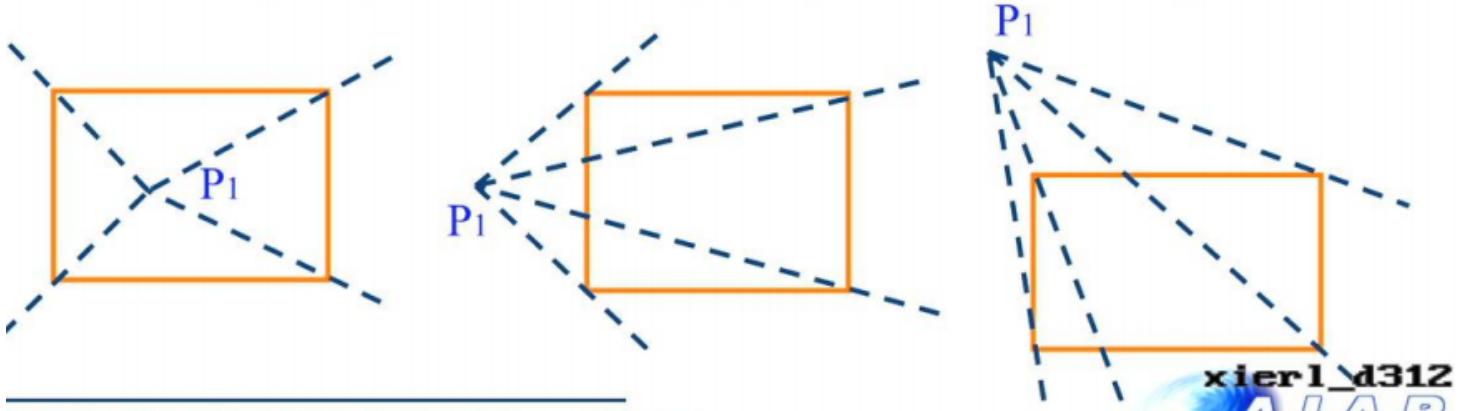
## Nicholl-Lee-Nicholl 算法

专门针对二维剪裁

分情况大势判定的算法，比较运算和除法运算执行次数远少于前两种

## 基本思想：

- 1、确定直线段的端点  $P_1$  所在区域；
- 2、根据  $P_1$  的位置组合判定端点  $P_2$  所在的区域；
- 3、根据端点  $P_1$ 、 $P_2$  的位置确定对直线的裁剪操作；

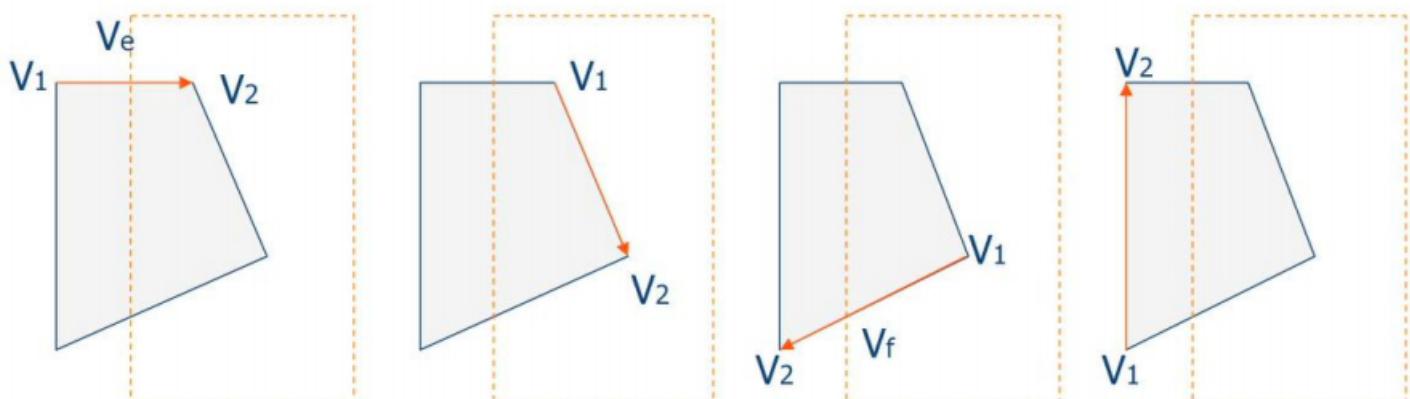
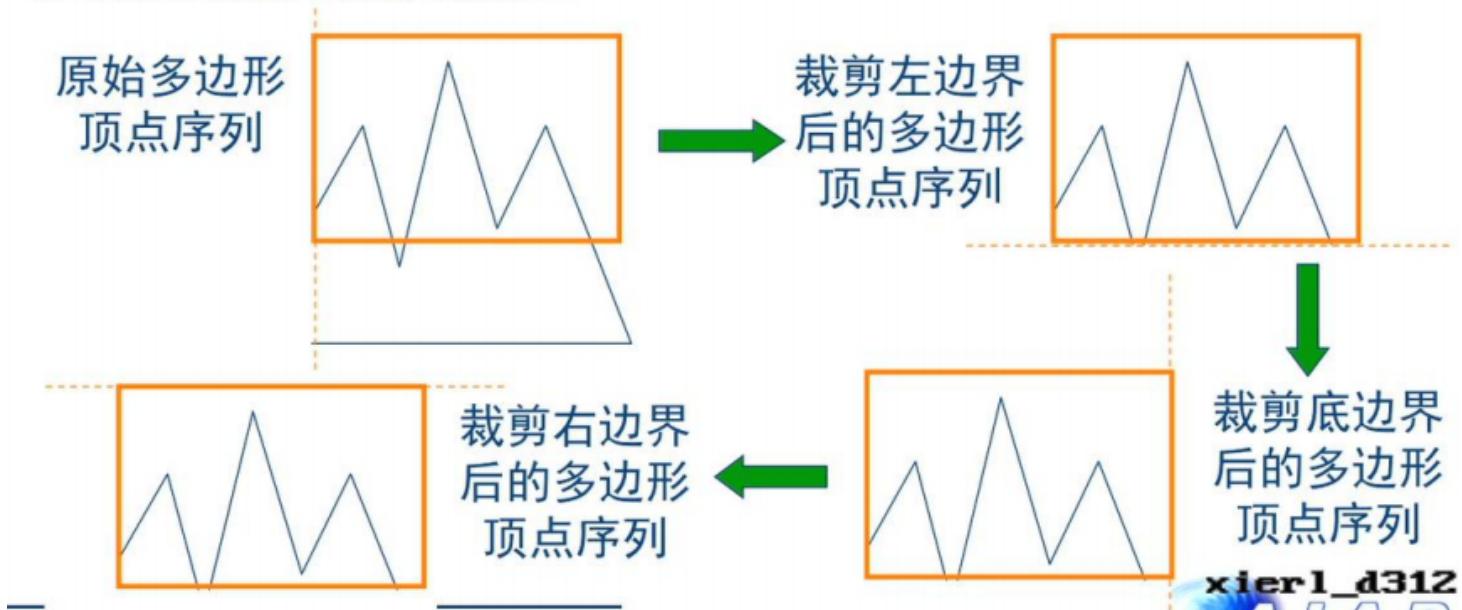


## 二维多边形裁剪

### Sutherland-Hodgeman剪裁

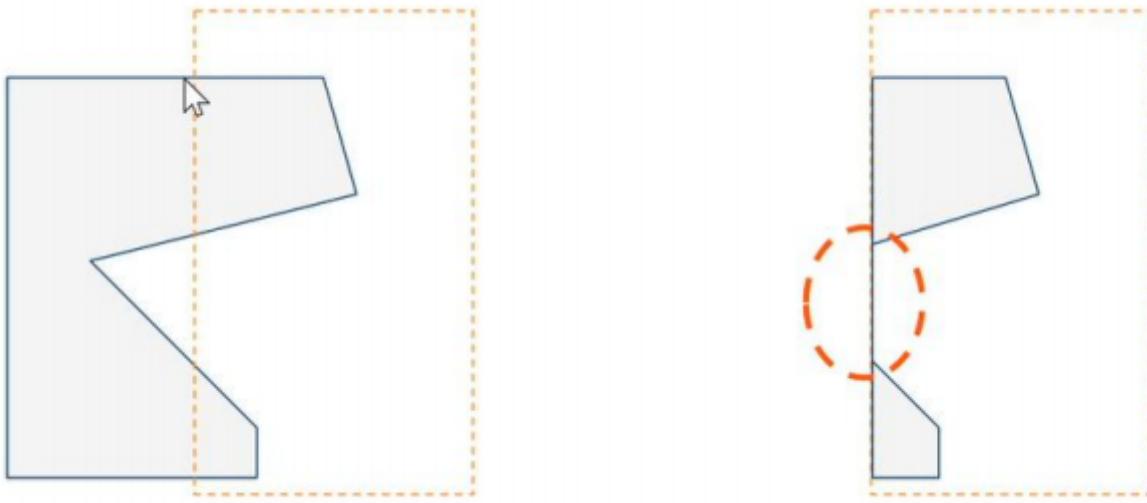
将多边形看作整体，对所有多边形顶点进行处理（把裁剪过后的所有相邻顶点都连起来）

### 多边形顶点序列裁剪流程：



问题：

剪裁凹多边形时可能出现多余的边



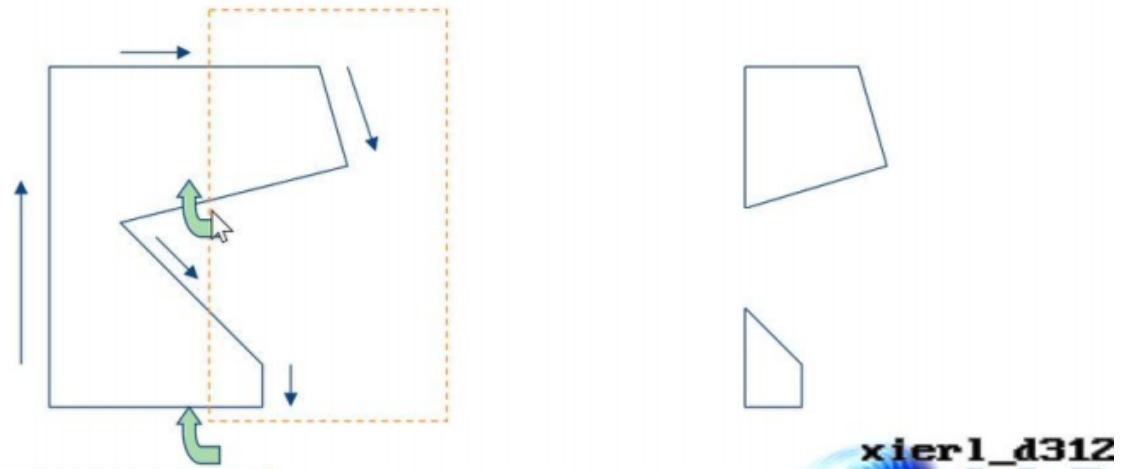
解决策略：将凹多边形转成凸多边形  
Weiler-Atherton算法不会有这个问题

### Weiler-Atherton算法

按照一定的方向处理顶点

根据多边形边的方向，决定沿多边形某一边的方向处理顶点、或者沿窗口的边界方向处理顶点。对顺时针处理顶点，采用如下规则：

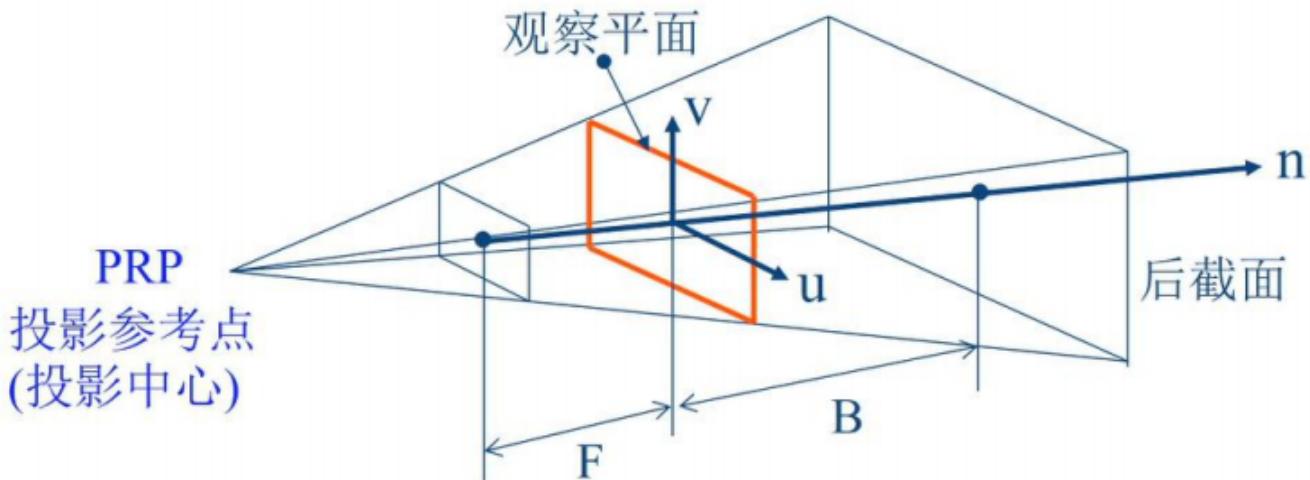
1. 由外到内的顶点对，沿多边形边界的方向；
2. 由内到外的顶点对，按顺时针沿着窗口边界的方向；



绿色箭头所示的两条边是从内向外的，所以沿着边界顺时针的方向去连，把顶点连到各自的区域去，而不会出现多余的边。

## 三维视见体与线段裁剪

- 三维视见体—由投影中心和观察窗口的四个角点的连线及其延长线构成的无底四棱锥(透视投影)或无限四棱柱(平行投影)。



二维扩展到三维

将Cohen-Sutherland的端点区位码方法扩展一下变成6位，即  
(后, 前, 上, 下, 右, 左)

## 5 光栅化计算

光栅显示器看作一个pixels矩阵，每个pixel对应一个显示色彩亮度的物理小区域，每个小区域显示一致的色彩亮度，显示屏的可用pixel有限。

光栅化：确定显示屏最佳逼近图形的pixels集合，并指定pixel属性的过程

像素扫描变换：图元到光栅显示器的pixel中心采样过程

数学图元→有限的像素

## 直线扫描转换算法

无限→有限

数学直线无宽度、无限个点

直线光栅化：在有限可用像素中，确定最佳逼近直线的一组像素

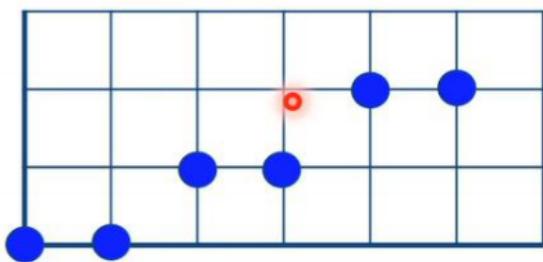
## 基本增量算法 (数值微分DDA法)

设直线段的端点是：  $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1)$

斜率是：  $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

直线方程：  $y_{i+1} = y_i + k\Delta x$

当  $\Delta x=1$  直线上象素  $(x_i, y_i)$  的下一象素坐标是



$(x_i + 1, Round(y_i + k))$

直接采样pixel，绘制线宽为pixel的直线（涉及四舍五入，最近邻插值？）

```
void DDALine(int x0, int y0, int x1, int y1, int value){  
    int x;  
    double dx = x1 - x0;  
    double dy = y1 - y0;  
    double k = dy / dx;  
    double y = y0;  
    for(x = x0; x < x1; x++){  
        WritePixel(x, Round(y), value);  
        y = y + k;  
    }  
}
```

问题：

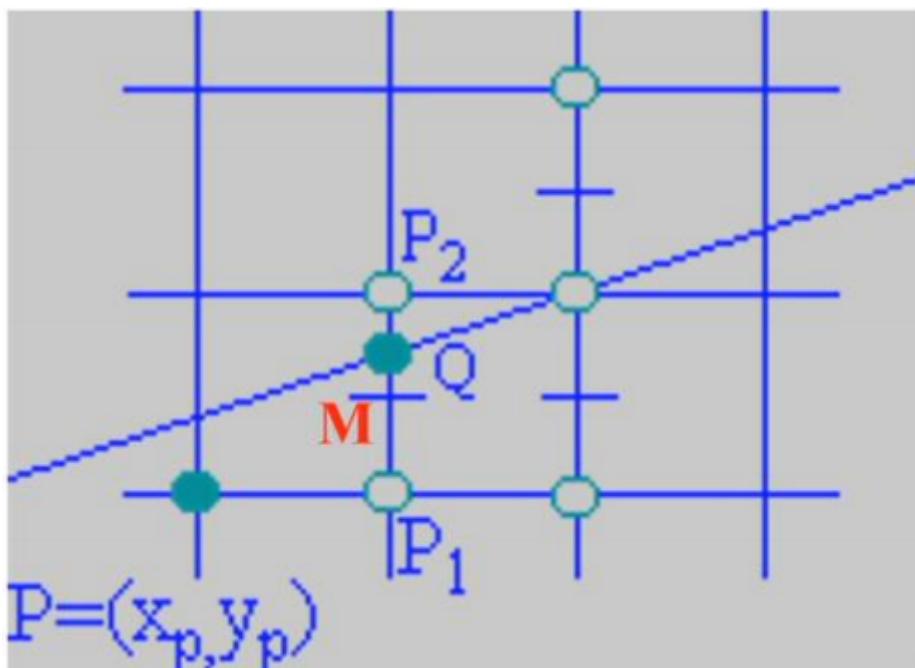
1. 仅适用于 $|k| \leq 1$ 的情况， $|k| > 1$ 时需要颠倒x, y（不然就不是连续采样了）
2. x, y, k用浮点数表示，且需四舍五入取整，不利于硬件实现（浮点数转整型）

## 直线扫描转换的中点线算法

上一个算法中涉及浮点运算。此算法的目标是只使用整型运算，根据当前点计算下一个像素点。

中点方法：两个光栅像素点P1, P2，中点M，考察M与直线的相对位置，直线在M上方则选择P2，否则选择P1

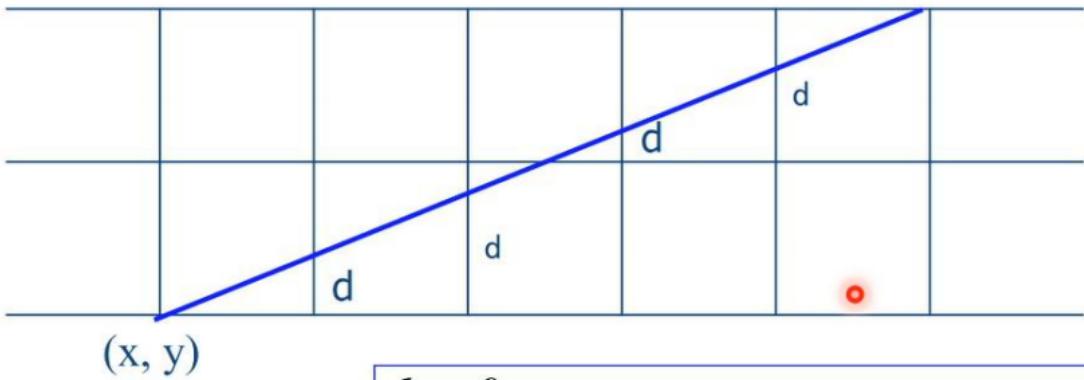
(以中点作为参考点，这样就不用四舍五入了)



```
void MidpointLine(int x0, int y0, int x1, int y1, int value){  
    int x;  
    int dx = x1 - x0;  
    int dy = y1 - y0;  
    int d = 2 * dy - dx; // d>0则高于中点，反之低于  
    int incrP1 = 2 * dy;  
    int incrP2 = 2 * (dy - dx);  
    int x = x0; int y = y0;  
    WritePixel(x, y, value);  
    while(x < x1){  
        if(d > 0){  
            x++;  
            y++;  
            d += incrP2;  
        }  
        else{  
            x++;  
            d += incrP1;  
        }  
        WritePixel(x, y, value);  
    }  
}
```

## Bresenham直线转换算法

改变了中点线算法选择pixel的判据（判定条件）



( $x, y$ )在直线上的下一个象素位置( $x + 1, y$ )或( $x + 1, y + 1$ )

决定要素:  $d$

$d = 0;$   
 $k = dy/dx; \quad d = d + k;$   
 $\text{if } d > 1 \text{ then } d = d - 1;$   
 $\text{if } d \geq 0.5 \text{ then } (x+1, y+1);$   
 $\text{if } d < 0.5 \text{ then } (x+1, y);$   
 $e = d - 0.5$

将 $d$ 维持在[0, 1]的范围内不断累加,  $d$ 就代表了在栅格内的相对位置, 大于0.5则在中点之上, 小于0.5则在中点之下。

转换一下: 用  $e = d - 0.5$  的正负来判断。

```
void Bresenham_Line(int x0, int y0, int x1, int y1, int value){
    int x;
    int dx = x1 - x0;
    int dy = y1 - y0;
    double k = dy / dx;
    double e = -0.5;
    int x = x0;
    int y = y0;
    while(x < x1){
        WritePixel(x, y, value);
        x++; e += k;
        if(e > 0){
            y++;
            e--;
        }
    }
}
```

$$e = e_0 + k = -0.5 + dy/dx \quad 2e \bullet dx = -dx + 2dy \quad e' = -dx + 2dy;$$

xier1\_d312

$$\text{if } e > 0 \text{ then } e = e - 1 \rightarrow e' = e' - 2dx$$

将 $2e \bullet dx$ 替换为 $e'$ , 用这种方法可以用整型表示 $e$ , 不再需要浮点, 直接代入 $dx$ ,  $dy$ 进行计算, 也不需要斜率 $k$ 。

```
void Bresenham_Line(int x0, int y0, int x1, int y1, int value){
    int x;
    int dx = x1 - x0;
    int dy = y1 - y0;
    int e = -dx;
    int x = x0;
    int y = y0;
    while(x < x1){
        WritePixel(x, y, value);
        x++; e += 2 * dy;
        if(e > 0){
            y++;
            e -= 2 * dx;
        }
    }
}
```

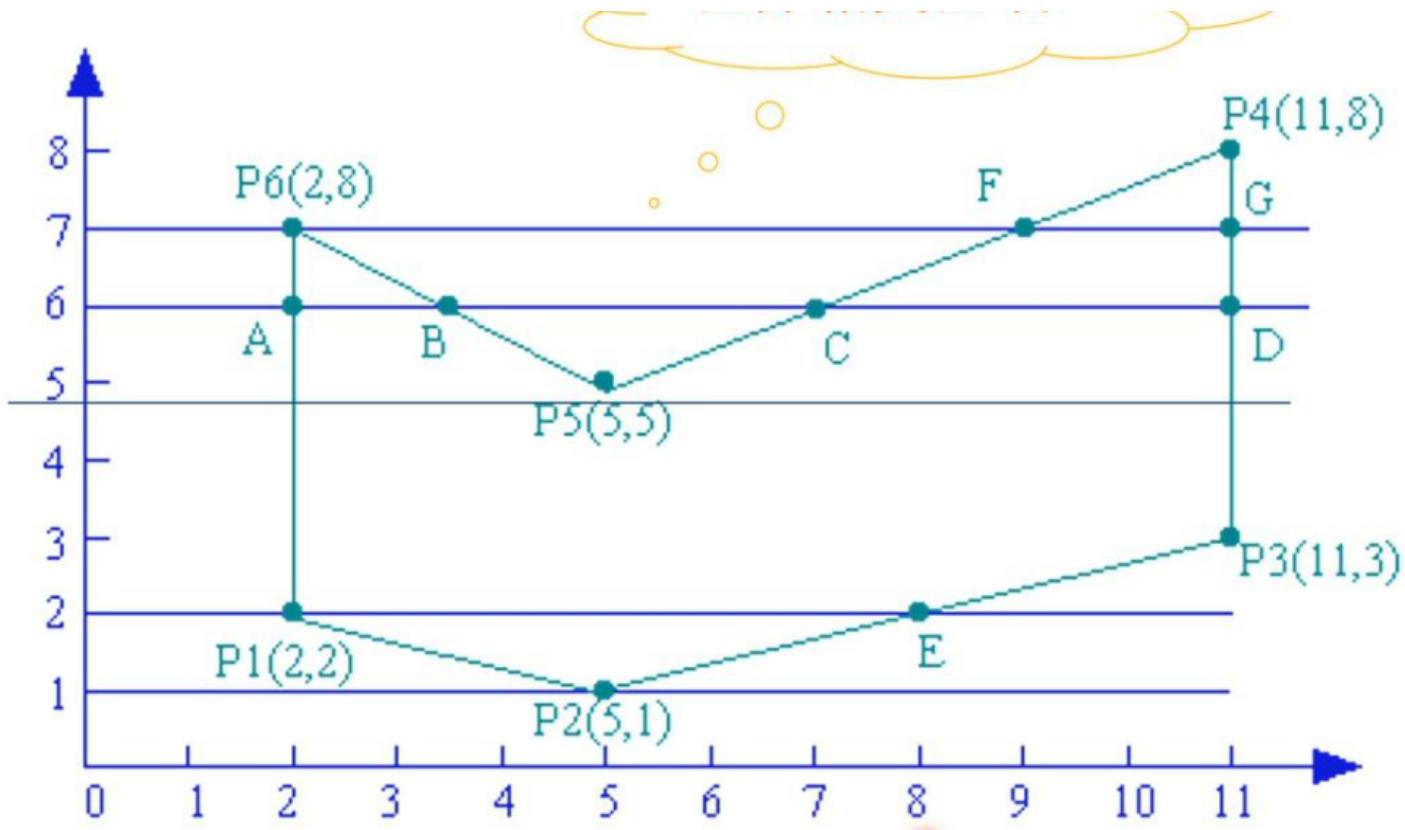
## 三角形的像素扫描转换

多边形像素扫描对多边形形状无要求, 但多边形边界必须封闭且不自交。

过程:

1. 求交: 计算扫描线与多边形各边交点
2. 排序: 把所有交点按 $x$ 值递增排序
3. 配对: 确定交点对, 区分扫描线与多边形的一个相交区间
4. 着色: 按照先滤波后采样策略把相交区间内采样像素置为滤波后的亮度

# 求交



拉一根扫描线，求扫描线与多边形交点

## 交点配队的内外测试

画出多边形轮廓后要对内部着色，如何判断一个点在多边形内部还是外部？

### 奇偶规则

从D向多边形远点引一条射线，射线与多边形有偶数个交点则D在多边形外（一进一出），反之在内

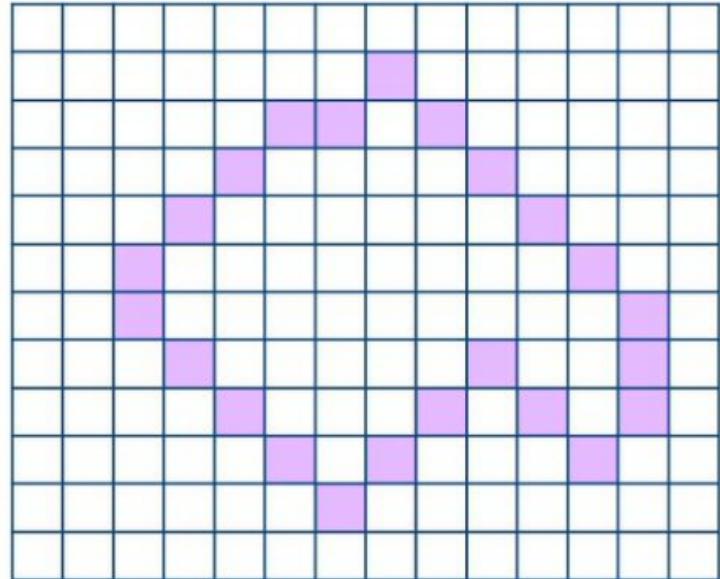
### 非零环绕数规则

沿着射线走，观察边穿过射线的方向，从右往左+1，从左往右-1，最后如果是0就在外部，反之在内  
(原理和上边差不多)

## 边界填充算法

从内部点开始，从内向外绘制点直到边界

- ◆ 4 - 连通法
- ◆ 8 - 连通法
- ◆ 沿扫描线填充水平象素区段



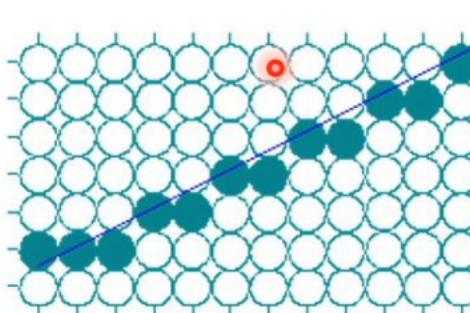
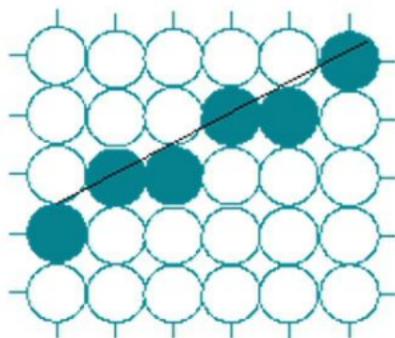
没细讲，也不知道都是个啥东西

## 走样与反走样

在光栅显示中，用离散量表示连续量引起的失真现象称为走样，反走样是减轻或除去走样的技术。  
基本策略

1. 提高分辨率
2. 像素采用不同的亮度值

- 提高分辨率；
- 象素采用不同的灰度值；



提高分辨率只能减轻，不能消除“锯齿”

依赖硬件进步

象素属性：黑、白

把显示器分辨率提高一倍，直线经过两倍的象素，  
锯齿亦增加一倍，只是尺度降低一半。

锯齿的数目随着分辨率的提高而增加，但是尺度变小了（变成小锯齿）且依赖硬件的进步（需要从硬件上才能提高分辨率）

## 提高分辨率

要真正地提高分辨率需要硬件进步。折中方法：利用提高分辨率的思想，在不用提高实际分辨率的情况下降低失真

子像素法：

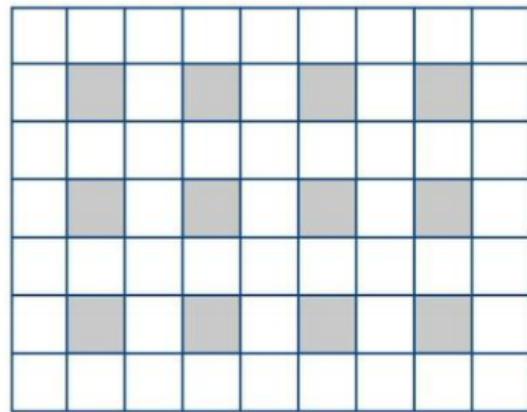
在高于显示器分辨率条件下采样像素，平均相关近邻像素属性，得到较低分辨率下的像素属性。

## 折中方案：

在高于显示分辨率条件下计算象素，对相关象素属性进行平均，得到较低分辨率下的象素属性。

+	+	+	+	+	+	+
0		0		0		
+	+	+	+	+	+	●
+	+	+	+	+	+	+
0		0		0		
+	+	+	+	+	+	+
0		0		0		
+	+	+	+	+	+	+

子象素颜色值的均值  
就是该象素的颜色值。



对位于象素中心及四周的九个子象素颜色值进行加权平均。

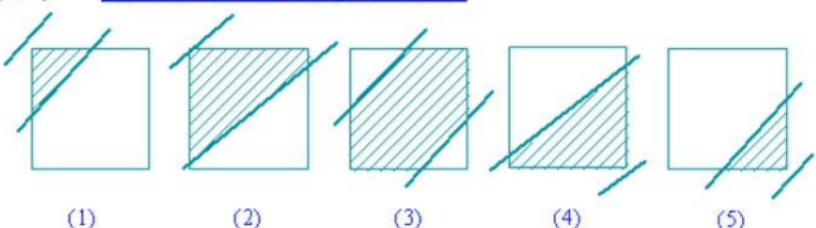
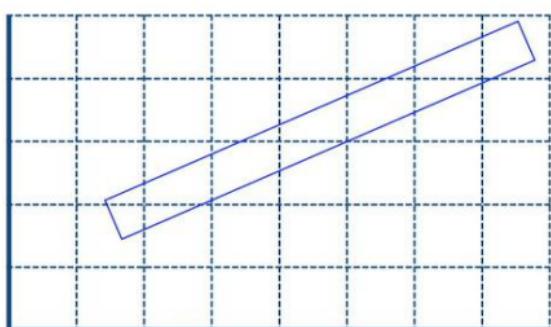
## 像素采用不同的亮度值

CV里边学过，对失真的图像做一下平滑可以降低失真



# 像素? → 区域?

像素灰度值的确定方法：加权区域采样



使相交区域对像素亮度贡献依赖于区域与像素中心的距离。

加权区域采样的权值函数构造：

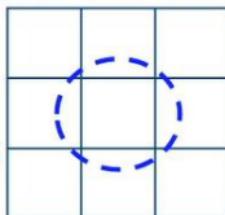
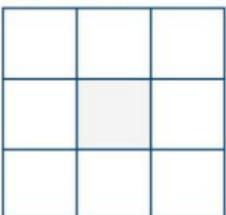
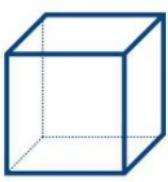
盒式滤波器

—

锥形滤波器

—

高斯滤波器



锥体滤波器特点：近距离像素可分配到更多灰度值；相邻像素的灰度差缩小  
xier1 da312

## 6 局部光照模型与明暗处理

像素亮度的计算原理和方法。光照模型是三维物体表面光强度计算的物理依据。

依据：光照明模型

计算方法：像素绘制算法

像素亮度值  
计算？

## 1. 依据：光照明模型

- 局部光照模型：朗伯模型、Phong模型、光投射模型
- 全局光照模型：Whitted模型，光能辐射度方程

**追求目标：**光照效果的真实感

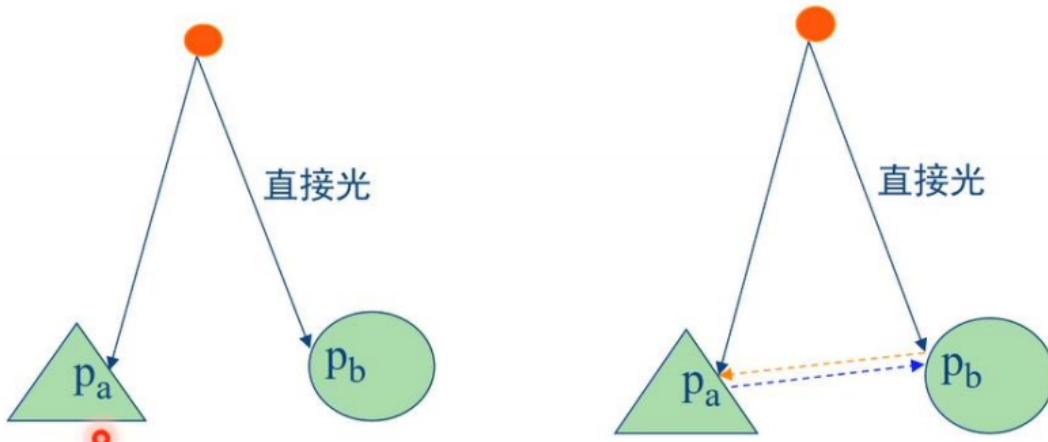
## 2. 计算方法：像素绘制算法

- 扫描线方法
- 光线跟踪方法
- 光能辐射度方法

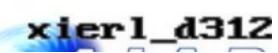
**追求目标：**实时绘制 graphical image

局部光照模型：仅考虑光照直接照在物体表面，物体之间的光照模拟为环境光

全局光照：还要考虑光照在物体之间的相互作用



**局部光照明模型：**仅考虑光源直接照射物体表面，将光在物体间传播效果笼统模拟为环境光。

**全局光照明模型：**除了考虑光源直接照射物体表面，还要考虑处理物体间光照相互作用的亮度计算。 

# 局部光照模型：像素级光强计算

光源：点、线、面光源

光谱：白色、彩色、单色

光的传播：入射光、环境光、理想漫反射、非理想镜面反射

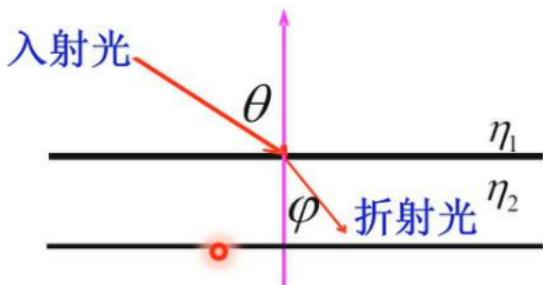
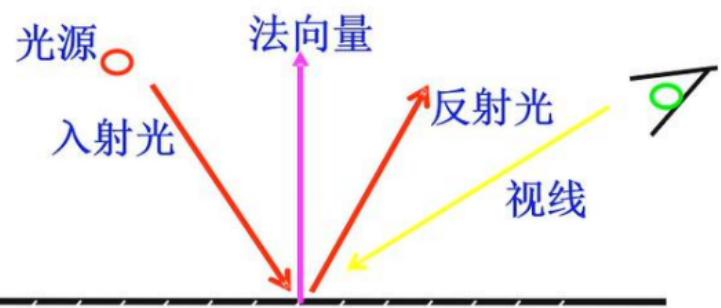
影响物体表面光强的因素：物体表面几何形状（法向量）、光源、环境（遮挡、反射、折射），视点位置和物体表面材质属性（如材料、光洁度等）

一些光学知识



## 光的传播

- 反射定律：入射角等于反射角，反射光线、入射光线与法向量在同一平面。



- 折射定律：折射线在入射线与法线构成的平面上，折射角与入射角满足

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}$$

- 能量关系

$$I_i = I_d + I_s + I_t + I_v$$

下标 i, d, s, t, v 分别表示为入射光强，漫反射光强，镜面反射光强，透射光强，吸收光强

## 简单光照模型-环境光

原理

1. 假设物体不透明
2. 环境光  $I_a$ ，在空间近似均匀分布，在任何位置、任何方向强度相同
3. 环境光反射系数  $K_a$ ，均匀光照射下物体表面反射系数

得到光照明方程

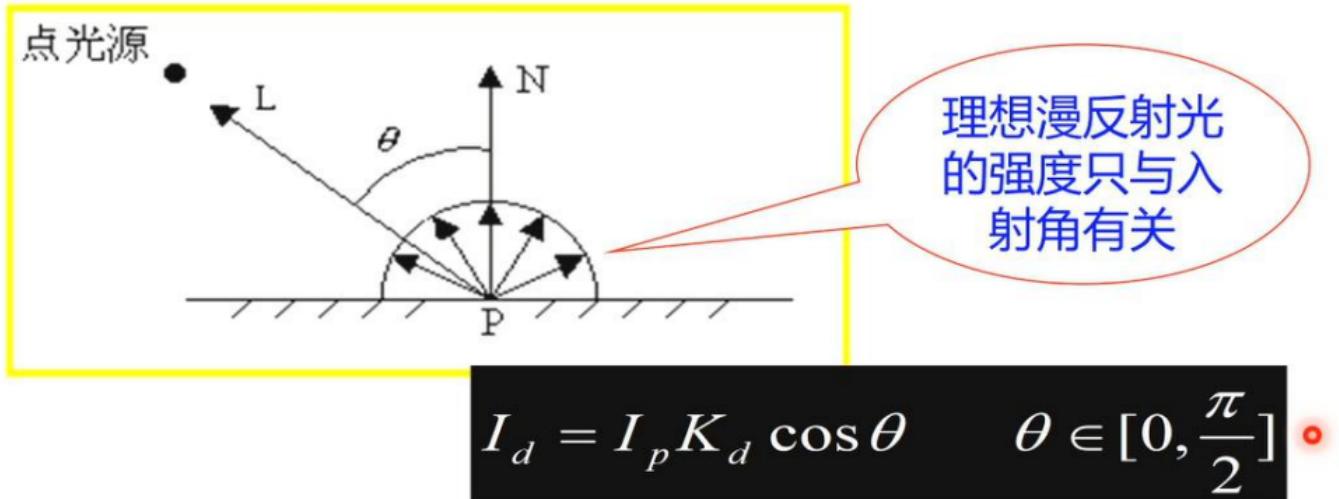
$$\text{物体表面亮度 } I_e = I_a \times K_a$$

缺点：虽然不同物体不同亮度，但同一物体亮度一致，没有明暗变化。

## 理想漫反射

原理

1. 点光源：由一点向空间所有方向辐射等强度光
2. 漫反射：粗糙无光泽物体表面对光的均匀反射



**$I_d$**  漫反射亮度,  **$I_p$**  点光源亮度,  **$K_d$**  漫反射系数,  **$\theta$**  入射角.

将漫反射和环境光结合： $I = I_e + I_d$

缺点：对金属球、光滑塑料等物体不适用，因为没有镜面反射。

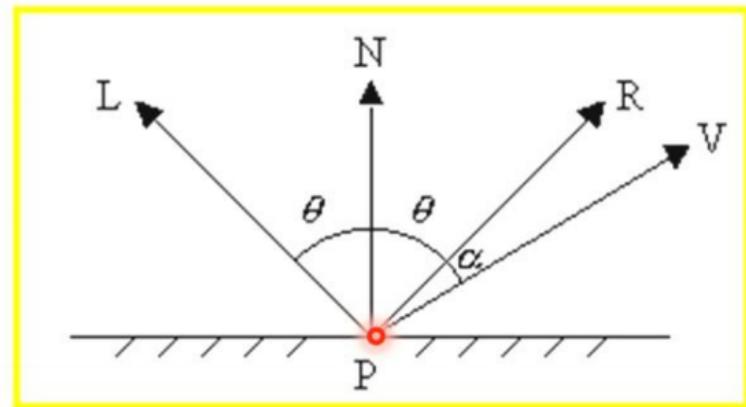
## 非理想镜面反射

原理

1. 镜面反射：光滑物体表面对光的反射
2. 高光：入射光在光滑物体表面形成特别亮的区域

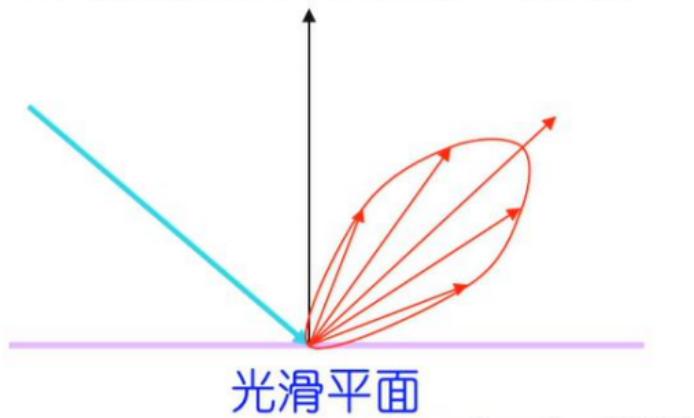


## 非理想镜面反射



P为物体表面上一点，L为从P指向光源的单位向量，N为表面微平面单位法向量，R为反射单位向量，V为从P指向视点的单位向量。

$$I_s = I_p K_s \cos^n \alpha$$



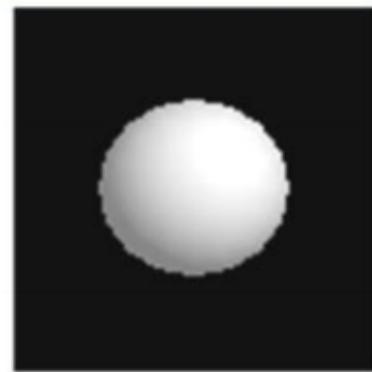
会反射出一系列的光，理想反射光的方向最亮，周围较弱。（会形成一个高亮区域）公式中的n是高光系数，n越大高光越集中



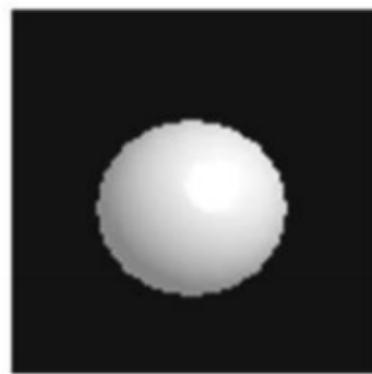
(a)



(b)



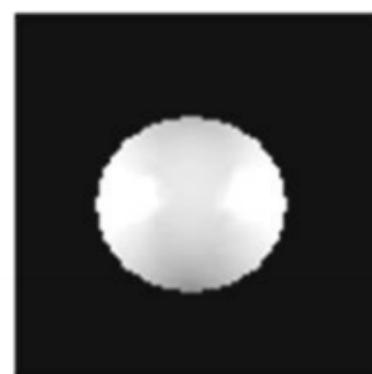
(c)



(d)



(e)



(f)

## Blinn-Phong模型

真实感图形学中第一个有影响的模型

点P光强为环境光+漫反射+镜面反射

$$I = I_e + I_d + I_s$$



$$I = I_e + I_d + I_s$$

$$I = I_a K_a + I_p K_d (L \cdot N) + I_p K_s (V \cdot R)^n$$

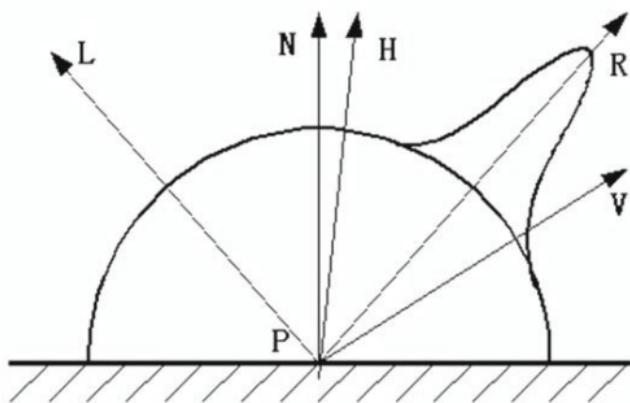


图 4.2.4 Phong 模型中的几何量示意

对物体表面上的点  $P$ , 均需计算光线的反射方向。

为了减少计算量, 假设:

- 光源在无穷远处,  $L$  为常向量
- 视点在无穷远处,  $V$  为常向量
- $(H \bullet N)$  近似  $(V \bullet R)$ ,  $H$  为  $L$  与  $V$  的平分向量

- $H$  是  $L$  和  $V$  的角平分线, 对所有的点总共只需计算一次  $H$  的值, 节省了计算时间。

注意一系列近似操作

彩色: 对RGB每个基色建立一个光照模型

经验模型, 存在以下问题

1. 物体像塑料, 缺乏质感
2. 环境光是常量, 没有考虑物体间的反射光
3. 镜面反射的样色是光源颜色, 与物体材料无关
4. 镜面反射计算在入射角很大时出现失真

## 插值明暗处理: 多边形表面光强计算

像素级光强的马赫带效应:

物体表面反射光强实际上是表面法向量的函数, 而多边形网格的三维物体由多边形组成, 每个多边形内部点法向量都相同, 多边形之间法向量变化不连续, 所以绘制分别计算的亮度在多边形交界处会产生突变 (明暗不连续变化)



恒定明暗处理：对每个多边形表面只计算一次亮度，只适用于光源、视点都在无穷远处，且多边形不是在对物体表面曲面进行逼近的情况下。

插值明暗处理：多边形内部亮度值根据顶点亮度或法向参数插值得到（多边形内部亮度不一）在对象空间以多边形为基本单元计算物体表面的光强度

### Gouraud明暗处理算法

思想：每个顶点根据其构成的各平面法向量计算平均法向量，并以此计算亮度，然后按照横向距离插值得到各边点亮度，再得到内部各点亮度。

## 算法思想：

对多边形网格中的每一个多边形：

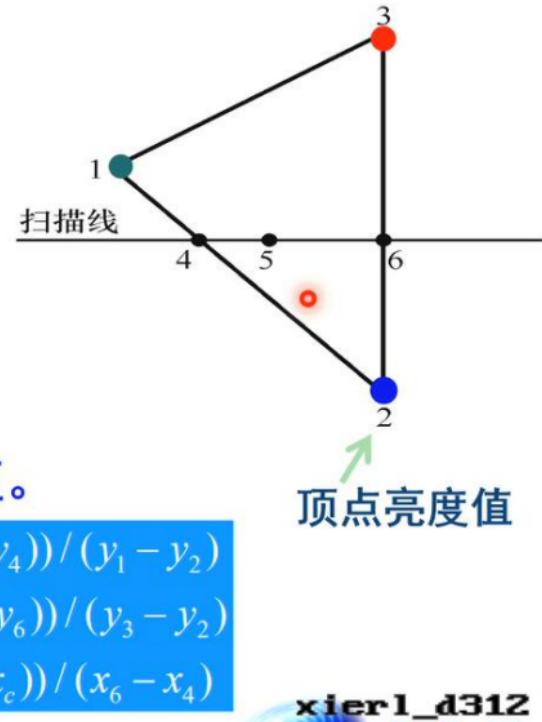
1) 计算多边形顶点的平均法向量；

2) 计算顶点的亮度值；

依据光栅扫描线规则确定计算点

3) 插值计算边上的各点光亮度值；

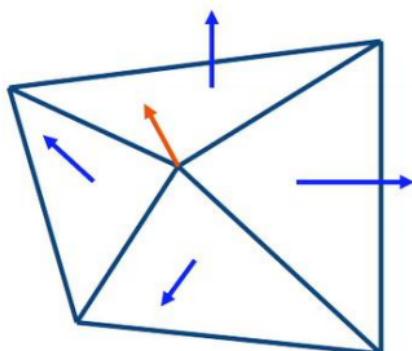
4) 插值计算多边形内部点的亮度值。



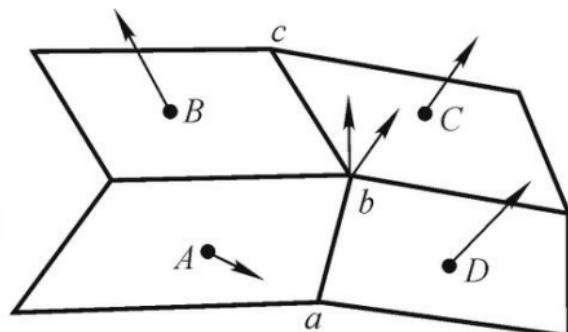
反其道而行：折痕效果的产生



## 共享顶点的法向问题：



通过共享顶点的所有多边形面法向的平均值来近似顶点法向。



## 反其道而行

如果希望在某处保留折痕效果。方法是在顶点（如b）设置2条法线。分别用于A和B，C和D之间的插值

## Phong明暗处理算法

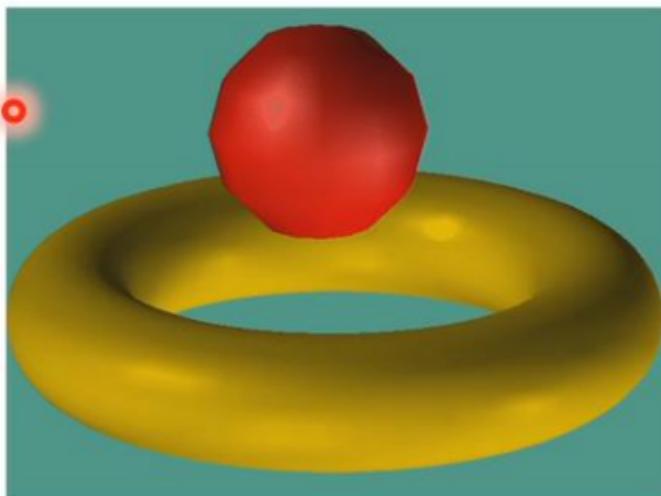
思想：先得到各顶点的平均法向量，然后直接插值得到各点的法向量再进行Phong模型计算

## 算法比较

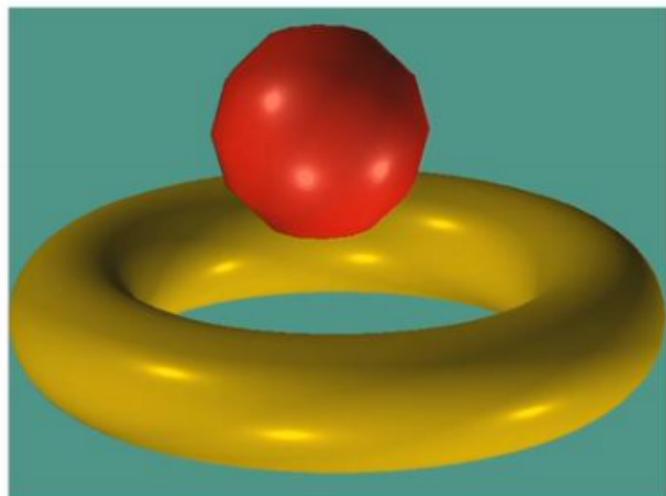
Gouraud: 亮度插值, 特征层融合

Phong: 法向量插值, 数据层融合

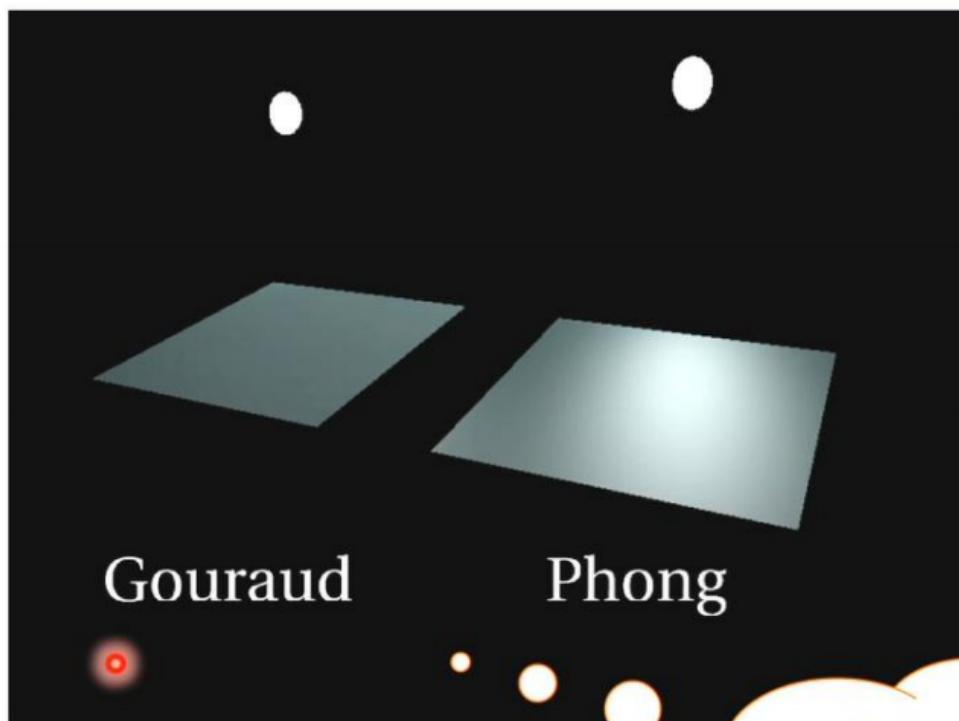
Phong比Gouraud更真实, 主要体现在高光区域的扩散和产生正确的高光区域, 但计算量远大于G



Gouraud



Phone



*The End*

明暗处理

# 7 表面纹理映射技术

局部光照模型只考虑表面几何形状，假设反射率是常数，只能差生颜色单一的物体表面，难以表现物体表面的丰富纹理细节。表面纹理映射技术是丰富物体表面细节的真实感绘制技术之一。

颜色纹理：各种花纹、图案、文字等图像数据

几何纹理：基于景物表面微观几何形状的表面纹理，如岩石等表面呈现的凹凸不平的纹理细节

过程纹理：表达各种规则或不规则动态变化自然景象如水波、云、火、烟雾。

## 二维纹理映射过程

表面上是将二维纹理图像映射到三维物体空间，再将物体投影到屏幕空间的变换过程。本质是建立纹理空间与物体空间的映射关系。

前向映射和反向映射

和CV里的一样，前向映射是由纹理空间找屏幕空间，反向映射是由屏幕空间（观察平面空间）像素需求驱动，通过纹理映射空间反向映射“预置图像”求得。

### 利用双线性插值的反向映射

好像完全就是CV里边那个反向映射双线性插值算法。

二维屏幕空间  $(x, y)$  到二维纹理空间  $(u, v)$   
的变换构造

有理线性投影变换：

$$x = \frac{au + bv + c}{gu + hv + i} \quad y = \frac{du + ev + f}{gu + hv + i}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ q \end{bmatrix} \quad (x, y)_{\textcolor{red}{\bullet}} = (x'/w, y'/w) \\ (u, v) = (u'/q, v'/q)$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w \end{bmatrix}$$



利用四边形顶点与纹理图坐标之间的关联，  
就可以求出9个系数： $a, b, c, d, e, f, g, h, i$



利用双线性插值方法确定每个  
像素对应的纹理图坐标  $u, v$



xier1

## 利用中间表面进行反向映射

在物体表面与纹理空间关联未知的情况下，获得表面顶点与纹理坐标的对应关联；中间表面方法将纹理空间到物体空间映射分解为两个简单映射的复合，解决无参数化曲面的纹理映射问题。

定义一个中间表面，一般是圆球或者圆柱面，做纹理空间→三维中间表面→物体空间的关联映射。

S映射：完成纹理空间到三维中间表面空间的映射

O映射：进行中间表面与物体空间的关联映射。关联映射完成纹理空间与物体几何表面顶点关联。

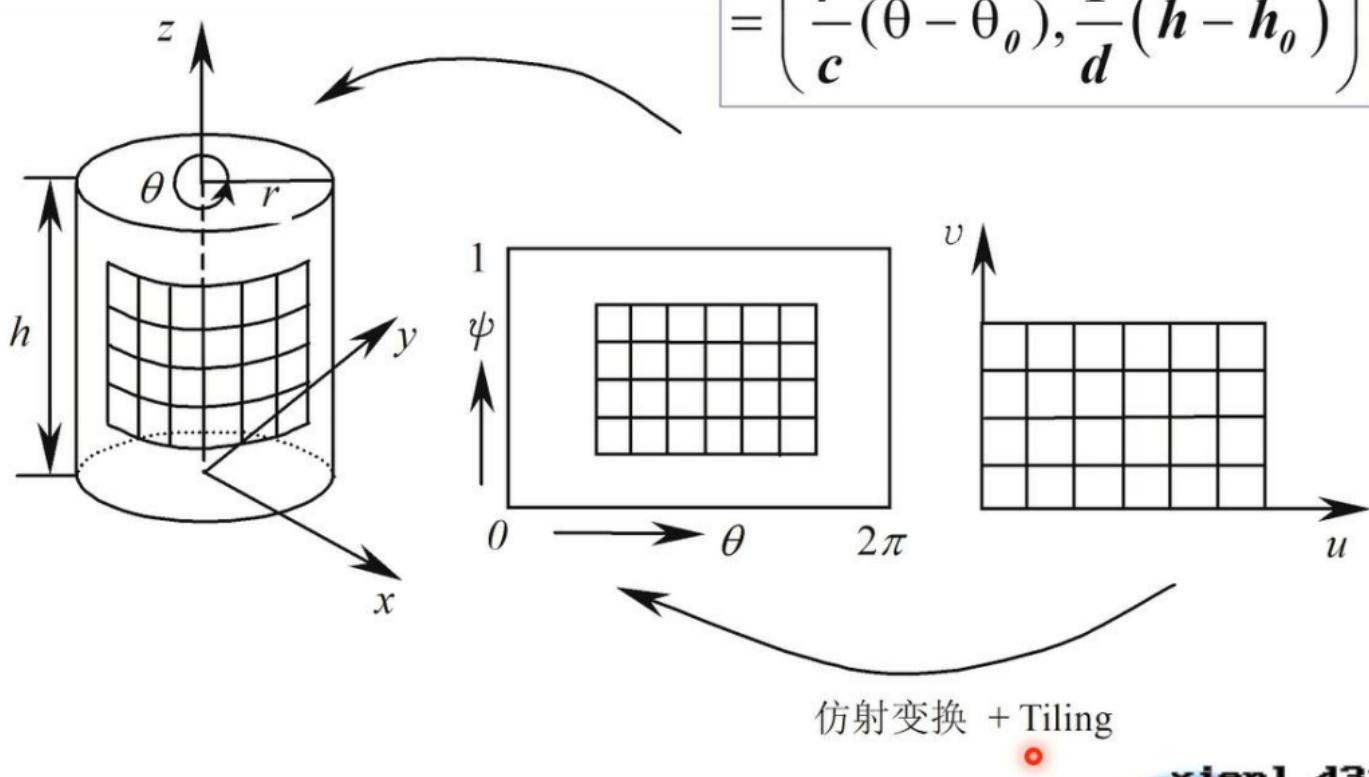
### O映射四种关联方法

1. 反射光线法。固定一个点光源，将物体上的点和反射光射到的中间表面点做关联。
2. 物体法向法。在物体表面点沿物体法向做射线，关联线上的物体表面点和中间表面点。
3. 物体质心法。由物体质心向外做射线，关联线上的物体表面点和中间表面点。

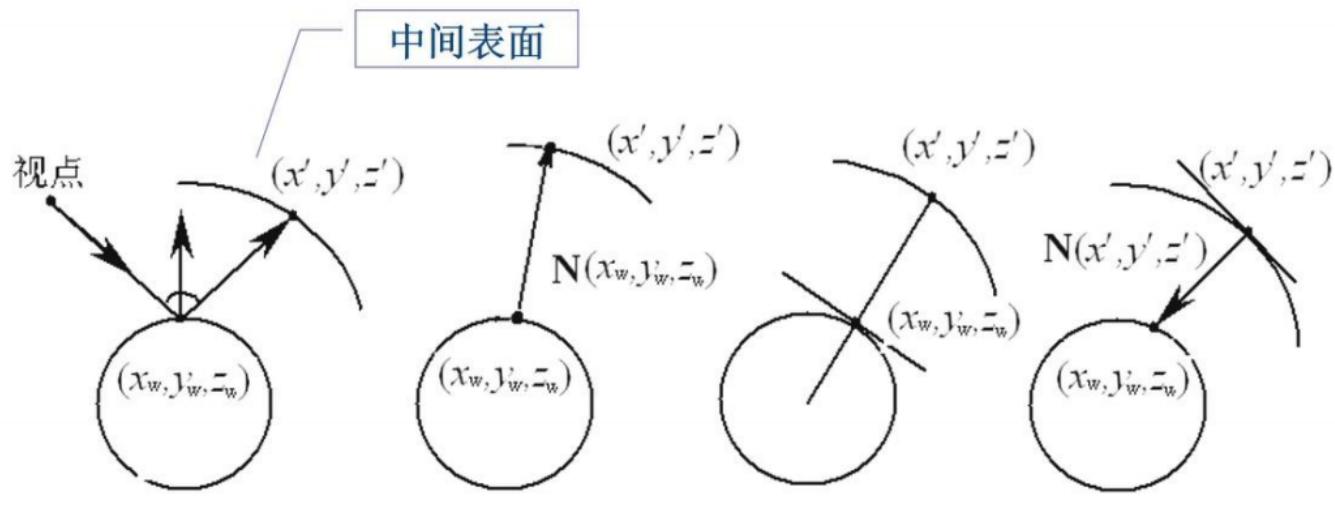
4. 中间表面法向法。从中间表面出发，沿法向做射线。



## 一、S映射：



## 二、O映射：中间表面到物体映射



(a) 反射光线

(b) 物体法向

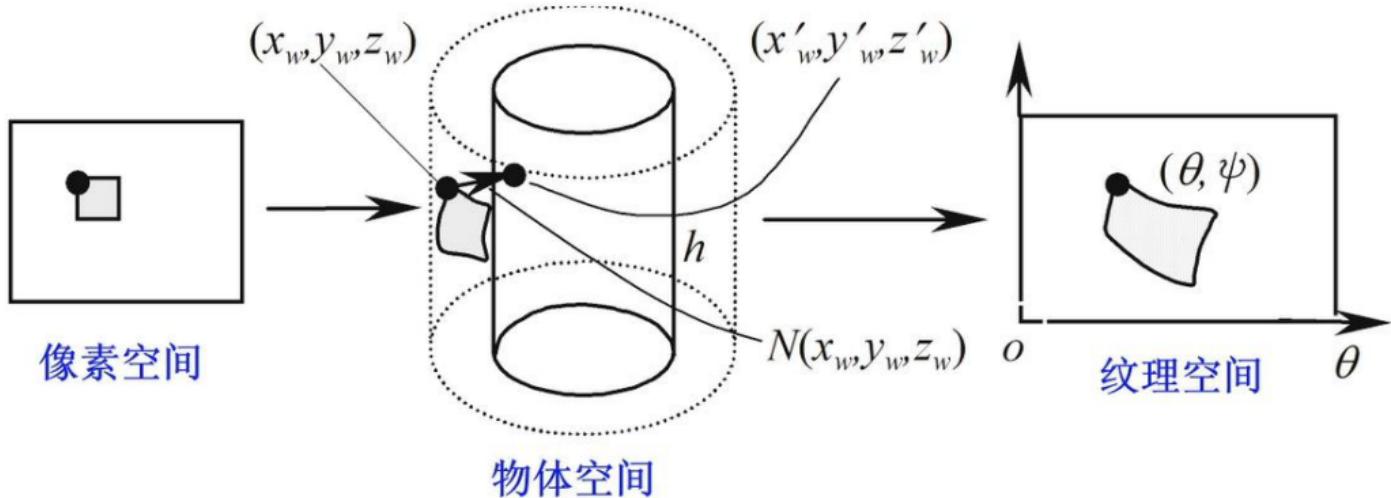
(c) 物体质心

(d) 中间表面法向

图示：中间表面到物体的四种影射



$$\begin{aligned}x_w, y_w, z_w &\rightarrow (\theta, h) \\&= \left( \tan^{-1}(y_w / x_w), z_w \right)\end{aligned}$$



将纹理到物体空间映射分解为两个简单映射的复合，解决了无参数化曲面的纹理映射问题，从而避免对物体表面的重新参数化。

xier1 d312

## 凹凸映射技术

产生凹凸不平的效果

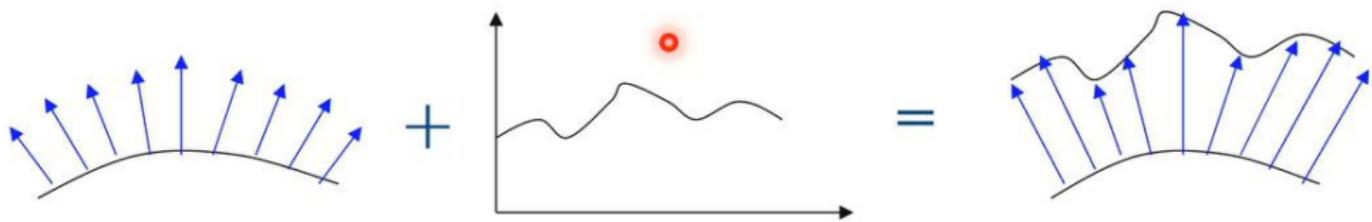
对物体表面各采样点做微小扰动，改变表面的微观几何形状，从而引起物体表面法向变化。由此可导致表面光亮度计算值的突变，巧妙利用人类视觉的马赫带效应产生表面凹凸不平的真实感绘制渲染效果。

人类视觉马赫带效应：人类视觉对物体表面亮度的突变很敏感

## 几何扰动法

直接对物体表面采样点 $P(u, v)$ 做扰动，沿其法向附加一微小增量。

定义纹理函数  $B(u, v)$ ，对理想光滑表面  $P(u, v)$  作不规则位移，产生凹凸不平的视觉效果。



在物体表面每一采样点  $P$  处沿其法向附加一微小增量，从而生成一张新的表面，它可表示为：□□

$$P'(u, v) = P(u, v) + B(u, v) \cdot N(u, v)$$

### 法向扰动法

扰动表面的法向量（对于表面来说也相当于改变了高度，只是这个值我们不关心）

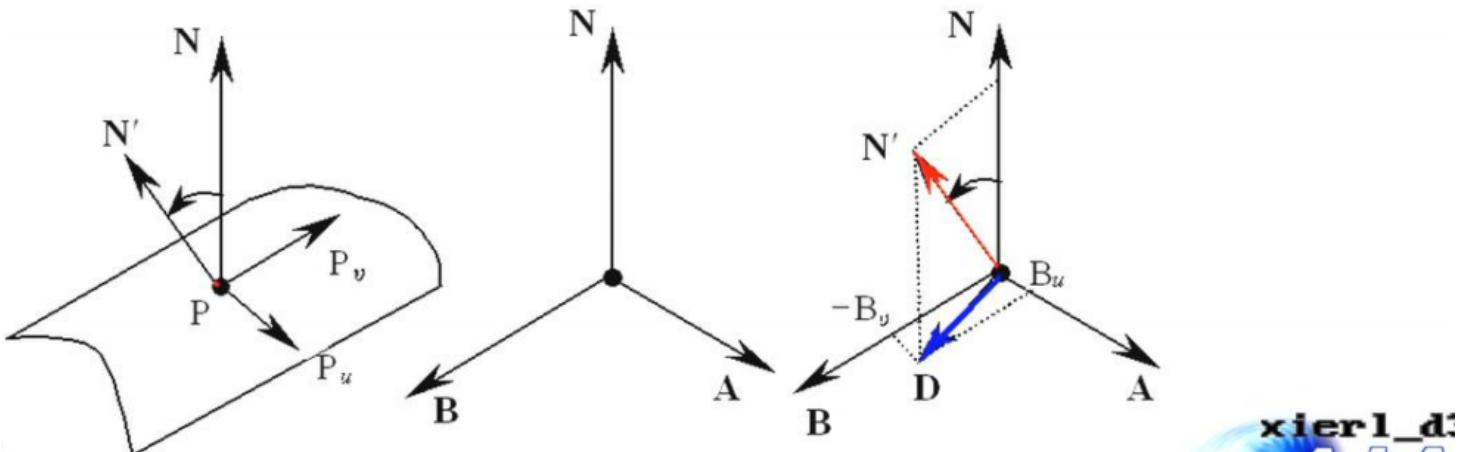
表面相应于  $B(u, v)$  的一个点  $P(u, v)$  的法向量为：

$$N = P_u \times P_v$$

新表面的法向量可以通过两个偏导数获得：

$$P_u' = dP'/du = P_u + B_u N + B(u, v) N_u \approx P_u + B_u N$$

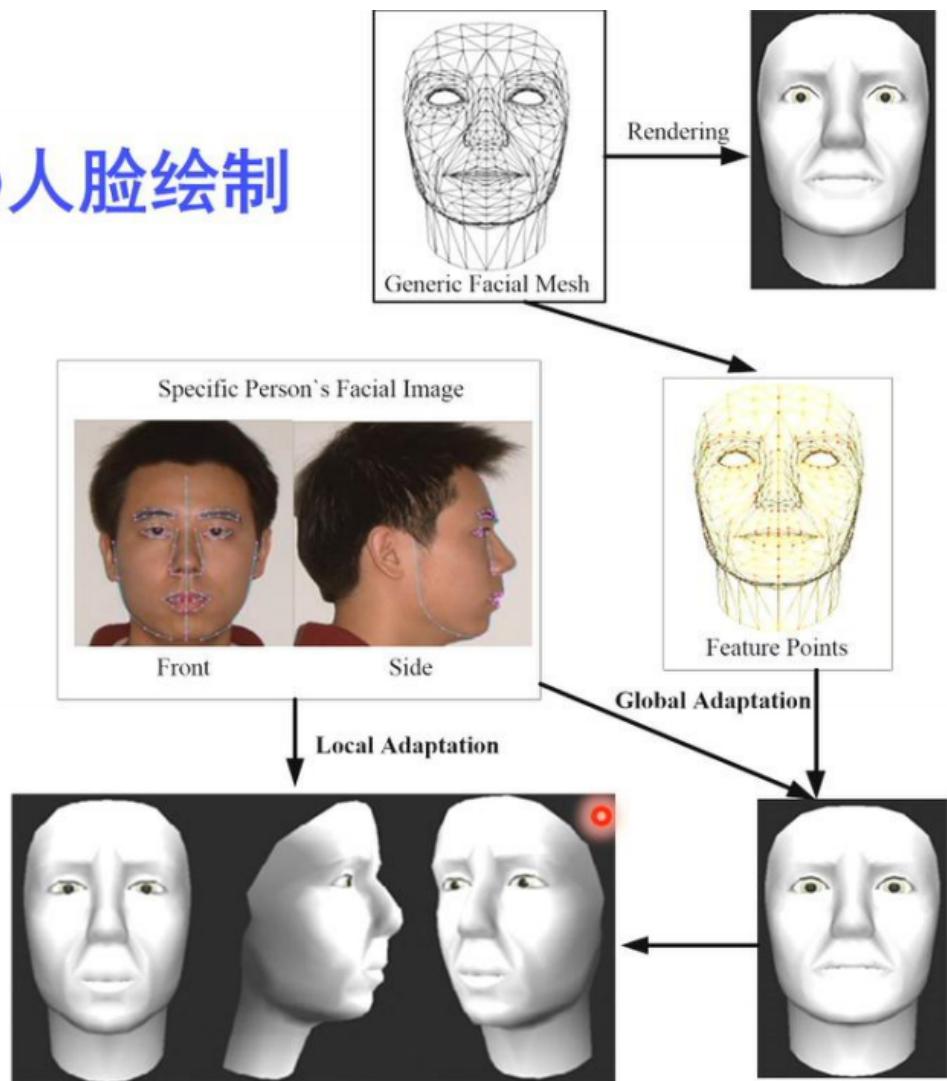
$$P_v' = dP'/dv = P_v + B_v N + B(u, v) N_v \approx P_v + B_v N$$

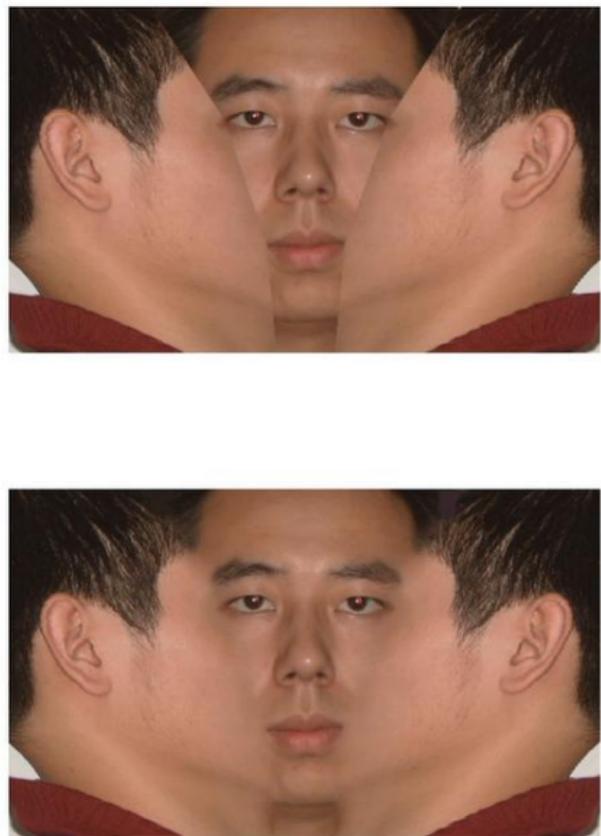
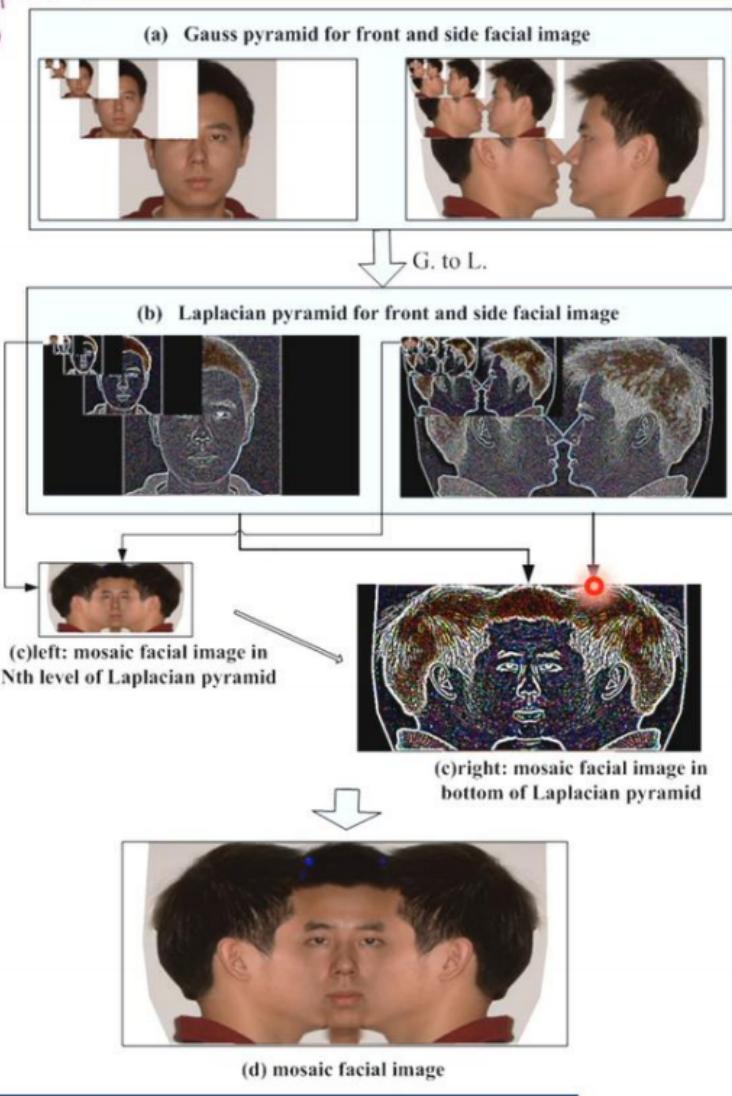


改变了  $P_u, P_v$  的方向，法向量N是u, v的叉乘，相应地也改变。

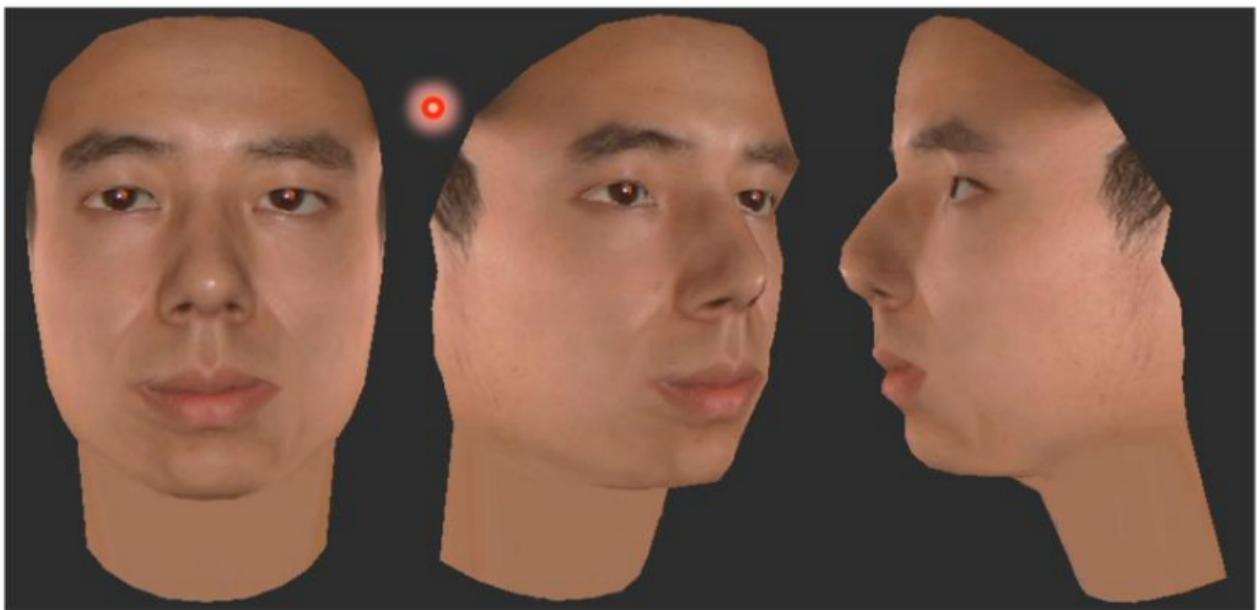
## 范例 真实感3D人脸绘制

### 范例： 真实感3D人脸绘制





把人脸图片做成了贴图



# 二维纹理映射的走样问题

## 了解

二维图像分辨率与纹理映射需要不匹配时出现走样。比如二维图像分辨率很高，显示空间一个像素对应很多纹理，如果只取一点就会突变、走样。

思路：对纹理图进行平滑；像素映射后对应的纹理区域取平均

# 8 透明与几何阴影

## 简单透明模型

### PPT里没有，新版PPT不知道

简单透明模型不考虑折射现象，可见透明面取其后相邻最近表面光强的线性组合。

算法：基于Z-Buffer，再设置透明光强、透明加权因子两个缓存器，在几何形态表示的多边形数据结构中标记“透明多边形”。

算法流程：筛选透明多边形、预处理非透明多边形、处理透明多边形、更新帧缓存

其实就是在帧缓存计算中分开来考虑非透明和透明物体，由于透明物体的计算是非透明物体叠加得到的，所以要先处理非透明物体，再计算透明物体，最后更新缓存。

## 几何阴影生成

几何阴影强化物体间的空间关系，增加绘制图形的立体感和场景真实感。

四种典型的几何阴影生成算法：

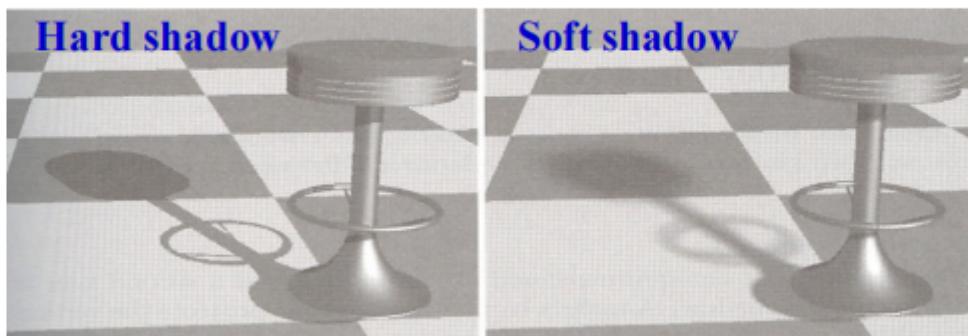
1. 投影多边形/扫描线方法
2. 阴影体算法
3. 从光源变换导出阴影多边形方法
4. 阴影Z缓冲器算法

没有占主导地位的阴影算法



## 阴影生成算法分类：

- **阴影空间(Shadow volume)** 几何形体技术，在方向光源的轮廓产生封闭容积，通过光线投影决定场景阴影。
- **阴影映射(Shadow map)** 一种图像空间技术，以光源为视点渲染场景深度信息，再利用深度值决定场景中处于阴影的部分。
- **软阴影(Soft Shadow)** 软阴影提升场景真实感效果。



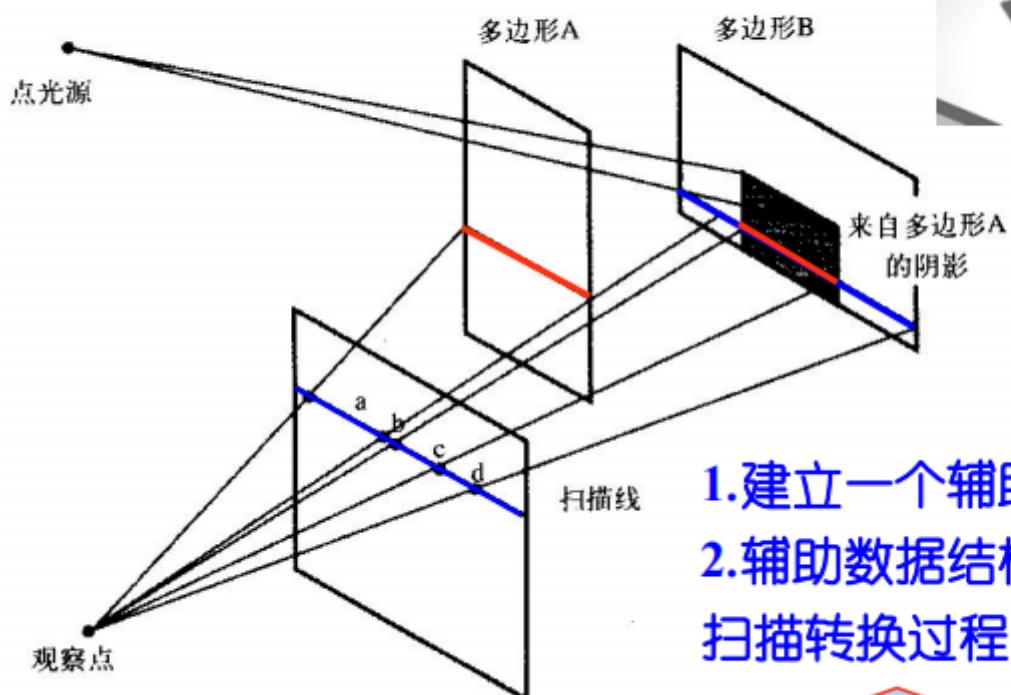
## 投影多边形/扫描线方法

属于阴影空间算法

拿一条扫描线去扫，计算出投影的位置。



## (一) 投影多边形/扫描线方法



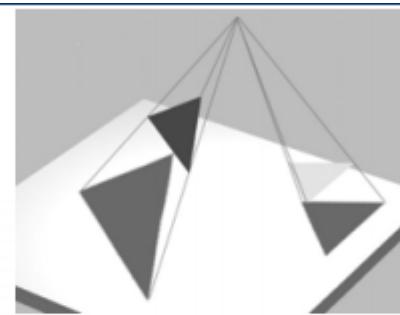
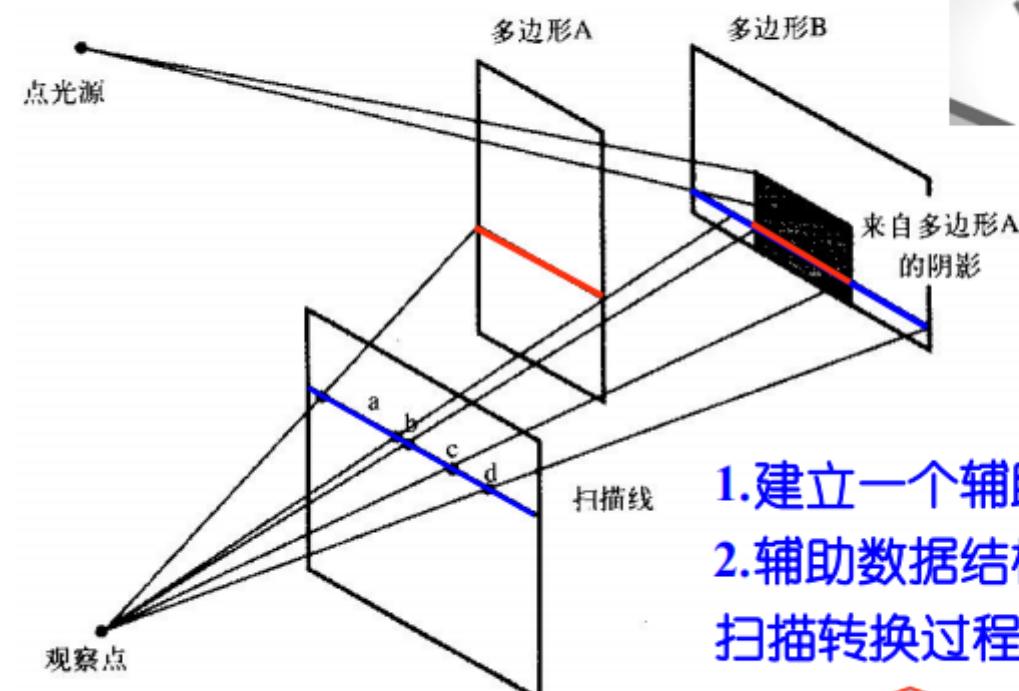
- 1.建立一个辅助数据结构；
- 2.辅助数据结构与一个常规  
扫描转换过程一起处理



先由点光源投射到多边形得到一条阴影线，再把线由观察点映射到屏幕



## (一) 投影多边形/扫描线方法

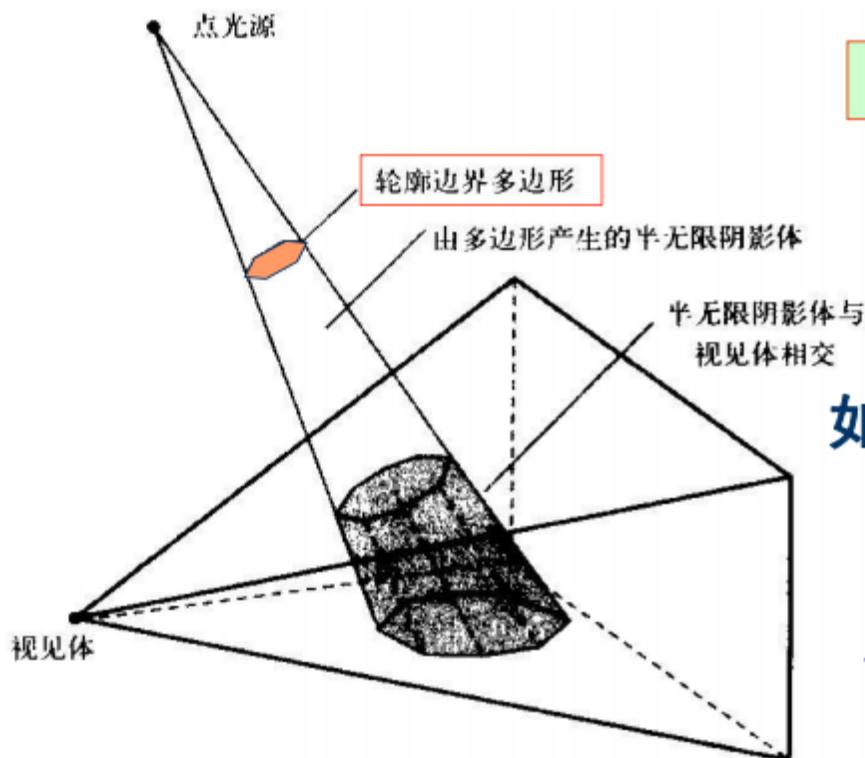


- 1.建立一个辅助数据结构；
- 2.辅助数据结构与一个常规  
扫描转换过程一起处理





## (二) 阴影体算法

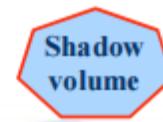


物体的轮廓边界

形成阴影体

如何确定阴影？

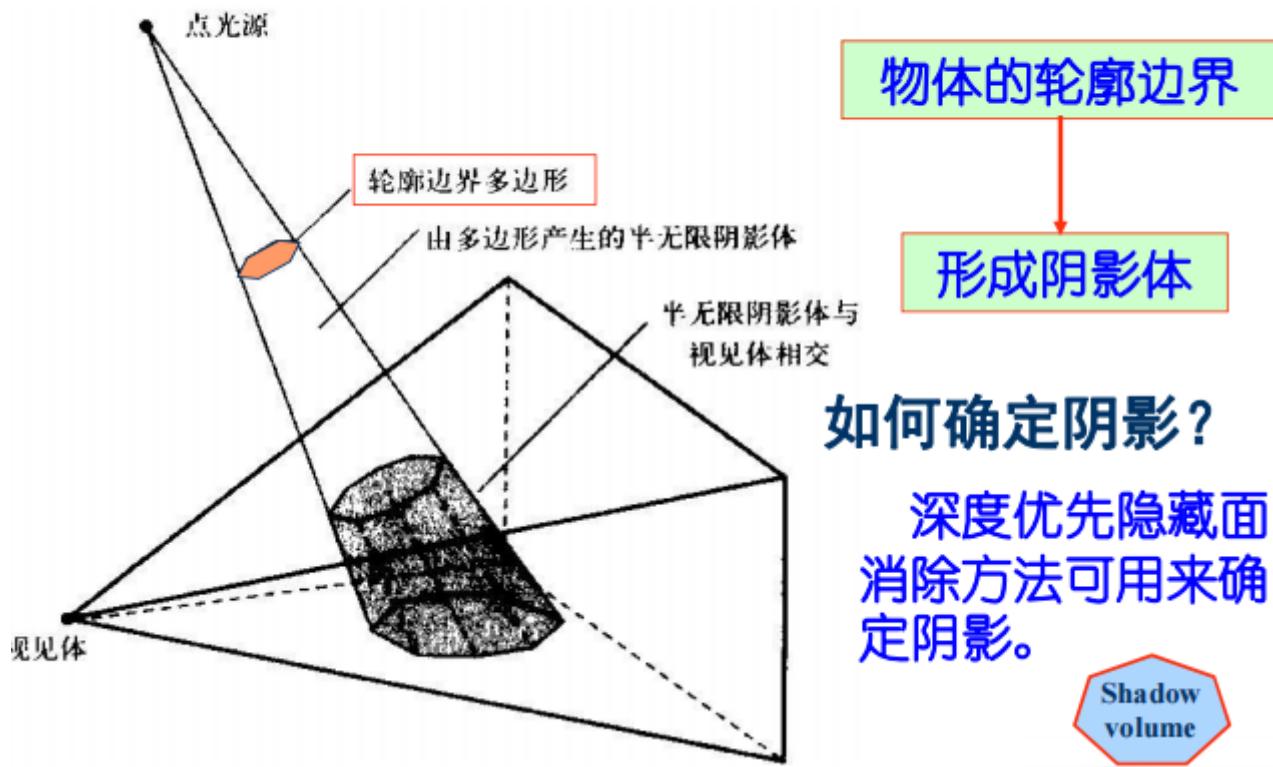
深度优先隐藏面  
消除方法可用来确  
定阴影。



3D计算机图形学 (COMP500127) : 刘跃虎

# 阴影体算法

## (二) 阴影体算法

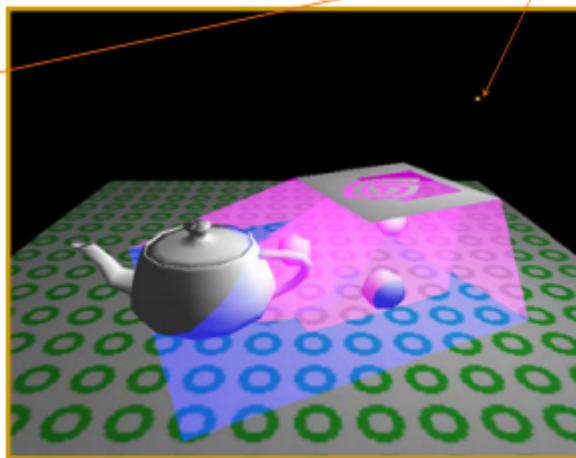
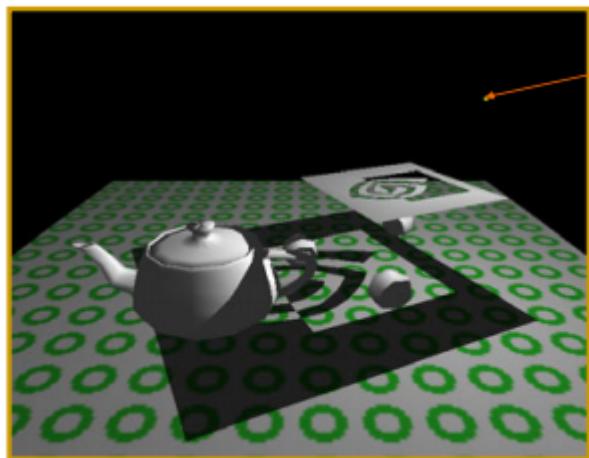


将多边形投影阴影体与视见体求交得到所见的阴影体，然后各多边形通过深度优先隐藏面消除方法确定实际显示的阴影（画家算法）



## 阴影体示例：

遮挡体和光源投射生成阴影体；  
在阴影体内的物体处于阴影状态

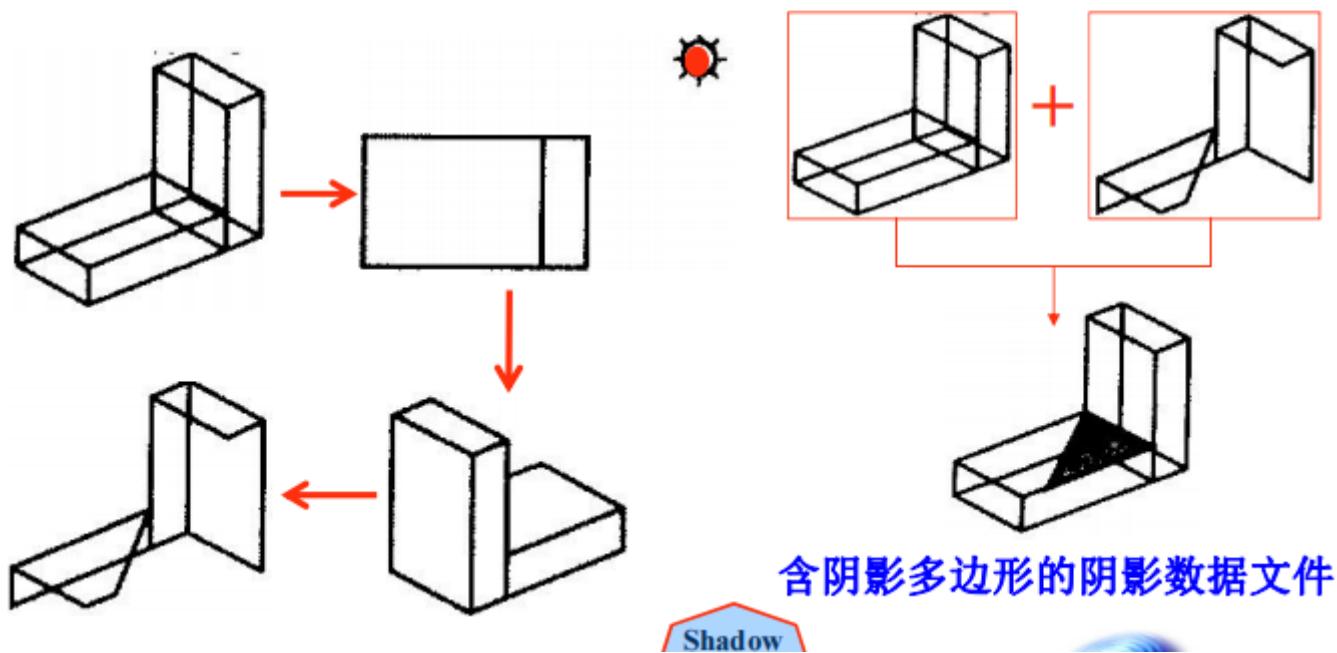


光源



### (三) 从光源变换导出阴影多边形

物体结构用阴影多边形增强，产生完整的阴影数据；再用常规消隐算法处理具有阴影的物体观察。



先对物体本身利用光源变换计算出阴影，使物体本身就带有阴影多边形，就可以不再考虑阴影，当作常规物体，用常规消隐算法处理后续观察。

### 阴影Z-Buffer算法

属于阴影映射算法



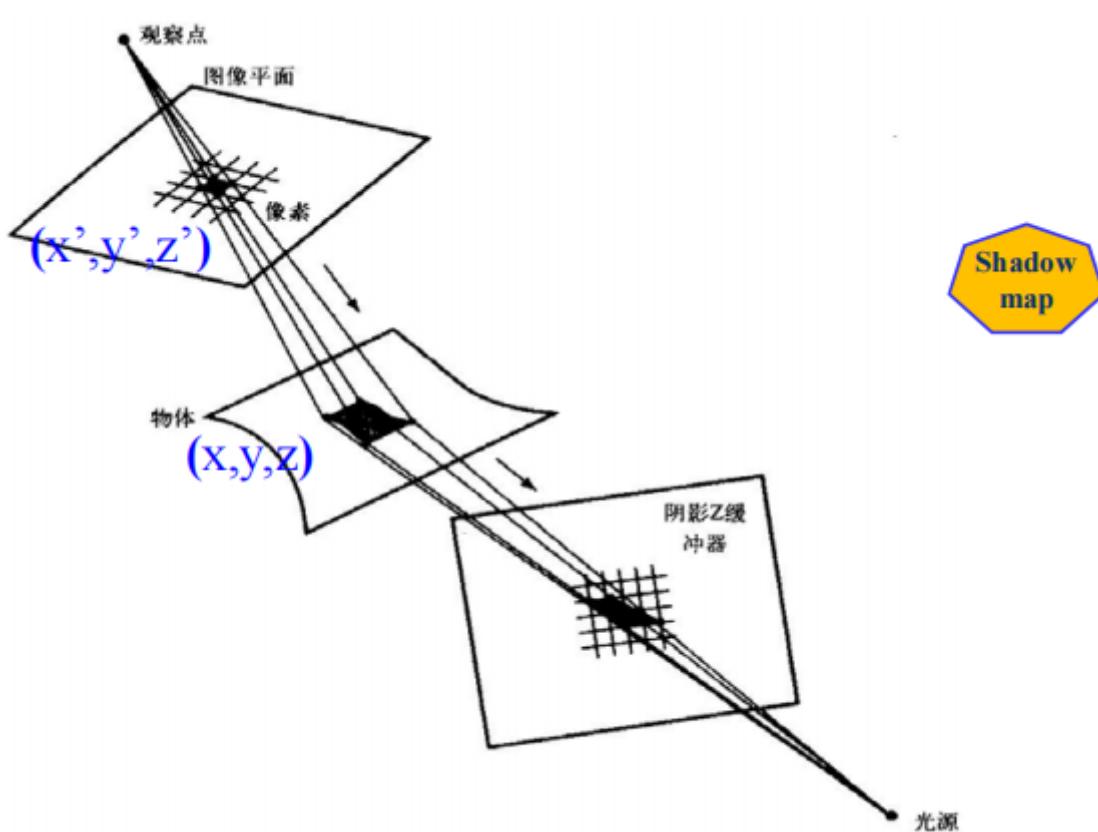
## (四) 阴影Z缓冲器方法

1978年Williams提出引入阴影Z缓冲器的**两阶段算法**:

- S1、以光源为观察点，阴影Z缓冲器存储深度信息。
- S2、采用**增强Z缓冲器**消隐算法按视线方向绘制场景。

如果点是可见的：

1. 把三维物体坐标 $(x, y, z)$ 影射至屏幕空间点 $(x', y', z')$ ；
2.  $(x', y')$ 索引阴影Z缓冲器，用 $z'$ 比较其深度值：如果 $z'$ 大于该值，则可断定该点处于阴影，否则按正常情况绘制。



先计算各阴影，将阴影最小深度记录在阴影Z-Buffer，然后进行后续Z-Buffer算法，在绘制点时还需要与

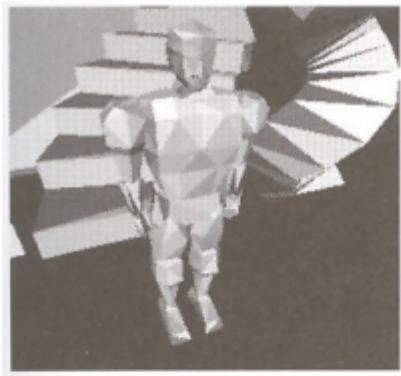
阴影Z-Buffer比较，判断是否在阴影中。

## 后续思考

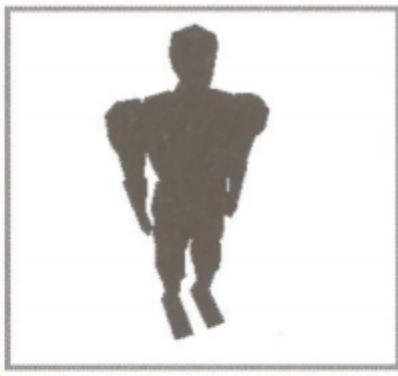


### 话题：曲面上的阴影

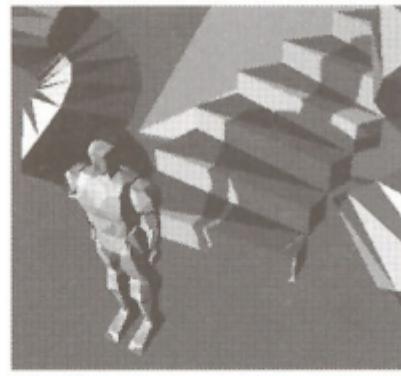
把平面阴影推广到曲面上的一种途径是把生成的阴影图像当成投影纹理。



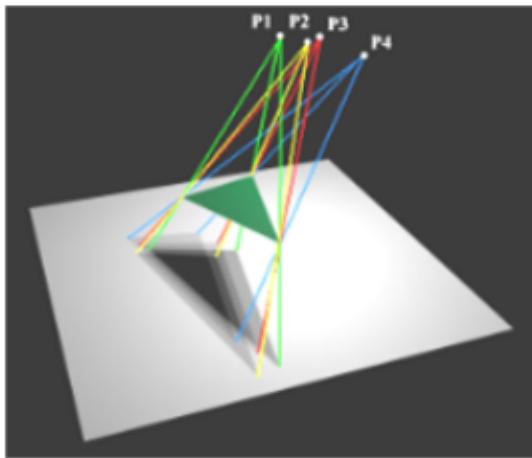
从光源观察的场景



阴影纹理



投影结果



从发射器到感应器的光线跟踪而言，阴影只是由于一个附近物体的靠近减少了照明显亮度产生的一个区域。

如果解决了全局照明的计算问题，就无需阴影的附加算法！

## 9 全局光照模型

除了简单光照模型中考虑环境光、漫反射、镜面反射光，还需要光的全局信息，即物体与物体之间的光的相互传播，得到整体照明效果。（不能光射到物体上就直接没了）

物体表面入射光的构成

光源直接照射  
其他物体的反射光、透射光

模拟光照全局交互方法：

1. 光线追踪法。光线追踪关注物体表面的完全**镜面**交互，从光源开始，跟踪每一条光的路径穿过环境，直到光线击中视点为止。
2. 辐射度方法。辐射度方法关注物体表面的完全**漫反射**交互，假设光能在所有方向上进行等量反射，形成一个以反射点为中心的半球。

# Whitted光线追踪方法

模拟物体表面间的镜面反射、规则投射和光源直射的全局光照效果。适用于光滑表面，用于非光滑表面的结果不理想。



## 9.1 光线追踪模型

### ◆自然光线传播过程

光源 → 物体表面 → 人眼

### ◆光线跟踪过程

光线传播的逆过程：

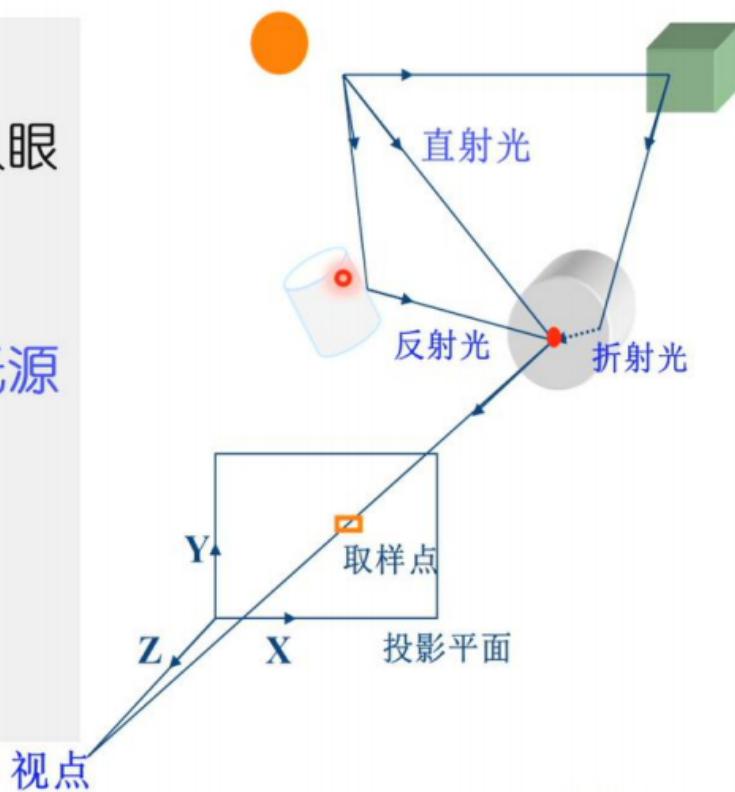
人眼 → 物体表面 → 光源

### ◆表面亮度

直射光强

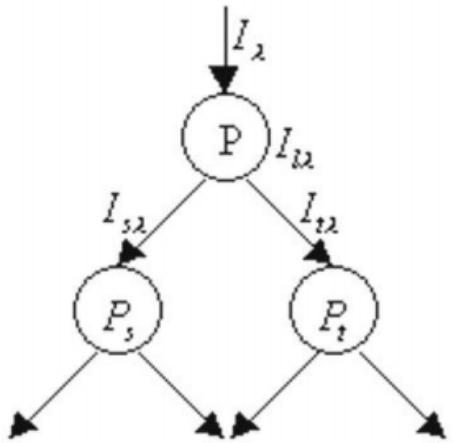
+ 反射光强

+ 折射光强





1、为了求 $I_t$ , 从P点发出反射光线和折射光线, 它分别交场景中的物体表面于 $P_s$ 和 $P_t$



$$I_\lambda = I_{\text{lu}} + K_s C_{s\lambda} I_{s\lambda} + K_t C_{t\lambda} I_{t\lambda}$$

2、 $P_s$ 和 $P_t$ 的亮度 $I_{sl}$ 和 $I_{tl}$ , 代入Whitted模型即可求出。

3、Whitted模型被递归调用, 从而需要重复下面的计算过程:计算局部光亮度、发出反射光线与透射光线。 •

一棵光线树

view1 4212

## 递归终止条件:

- 1、光线到达背景;
- 2、光线不与场景中任何物体相交;
- 3、被追踪光线达到了给定的层次;
- 4、由于 $K_s$ 和 $K_t$ 都小于1, 当光线经过反射和折射后, 其亮度会衰减。因此可预先设置一个阈值, 在进行光线追踪时, 若被追踪光线对像素亮度的贡献小于阈值时, 停止追踪。

光线树: 一条光线→点亮度→该点的折射光&反射光

```

Color RayTracing(Ray ray, int depth){
    // 1, 求ray与物体表面最近的交点P
    if(有交点){
        // 2, 用局部光照模型计算P点亮度Io
        color = Ic; // 这句好像没啥用
        if(depth < 最大追踪层次){
            // 3, 计算ray的反射光线
            Is = RayTracing(反射光线, depth+1);
            if(物体透明)
                // 4, 计算折射光线
                It = RayTracing(折射光线, depth+1);
            color = Io + Is + It;
        }
        else color = BLACK;
    }
    return color;
}

```

是一个逆向的光线追踪，从视点到光源，递归调用。

ING UNIVERSITY

## 分析与评述：

- (1) 光线追踪法适用于光滑反射表面，用于不很光滑表面时的绘制结果不理想；
- (2) 能够方便产生阴影、模拟镜面反射与折射现象；
- (3) 基本的光线追踪算法，每一条光线都要与所有物体表面求交、再排序全部交点才能确定可见点；
- (4) 求交运算效率直接影响追踪算法的实时性。

## 光线追踪的其它算法：

- 分布式光线追踪 (Distribution Ray Tracing) Cook[1984]

## 光线追踪算法的加速：

- 自适应深度控制法/包围盒及层次结构法

- 三维网格跨越法@Fujimoto1984/空间八叉树剖分法

**评述：**光线追踪法适用于光滑反射表面，用于不很光滑表面时的结果不理想。

**优点：**能够方便产生阴影、模拟镜面反射与折射现象。

- 直射光、反射光及折射光仅是入射光照的有限描述；
- 景物表面之间存在镜面反射、规则透射；
- 物体表面之间存在多重漫反射效果；
- 漫反射会产生颜色渗透现象；

热工程的辐射度方法  
用于描述上述现象

## 光能辐射度方法

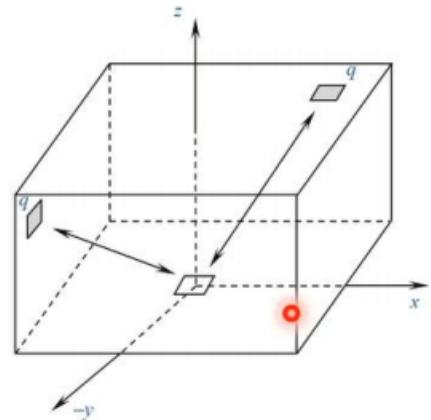
### 基本原理

1. 能量守恒：任一点的辐射度等于自身作为光源的辐射能量加上周围环境对其辐射能量之和；
2. 整个封闭空间的光能分布达到平衡状态；
3. 场景的色彩明暗变化反映了场景各面片辐射度的大小变化。

# 漫反射场景的光能辐射度方程

假定场景为一封闭的理想漫反射环境，景物表面剖分为互不重迭的小面片。对于场景中任一面片，满足：

$$B_i = E_i + K_i H_i$$



$B_i$  为面片向四周辐射的总辐射度

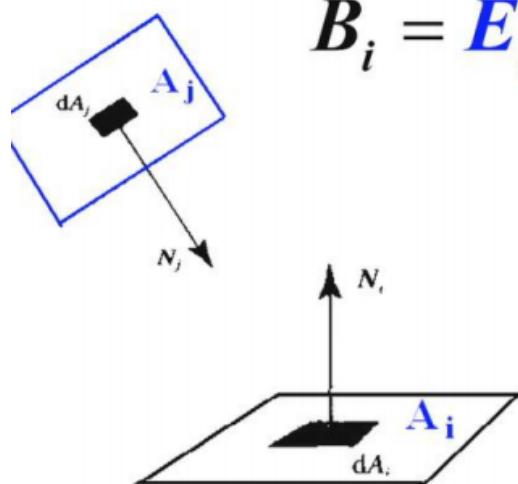
$E_i$  为面片向外均匀发射的光能

$K_i$  为面片的漫反射系数

$H_i$  为面片从周围景物面片接收的总光能

**定义：辐射度**是单位时间、单位面积上离开表面面片的能量，是其向外发射和反射能量之和。

## □ 面片*i* 的辐射度等式



$$B_i = E_i + K_i \sum_{j=1}^n B_j F_{ij}$$

形状因子

面片*j* 的辐射度

面片*i* 漫反射率

## 流程

1. 场景离散化：将物体分解为小面片

2. 面片间的形状因子计算
3. 根据光源属性和物体表面漫反射稀疏设定，进行全矩阵辐射度方程求解
4. 根据视点和视线方向变化，完成图形绘制

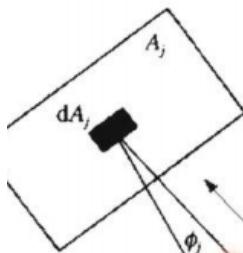
分解→形状因子计算→辐射度方程求解→图形绘制

## 形状因子的概念

描述面片之间的相对位姿关系

### □ 形状因子的定义

形状因子描述面片之间的相对位姿关系。



设  $dA_i$  与  $dA_j$  是  $A_i$  和  $A_j$  的两个微单元，其形状因子可定义为：

$$F_{dA_i dA_j} = \frac{\cos \phi_i \cos \phi_j}{\pi r_{ij}^2} hid(dA_i, dA_j) dA_j^S$$

$$F_{dA_i A_j} = \int_A \frac{\cos \phi_i \cos \phi_j}{\pi r_{ij}^2} hid(dA_i, dA_j) dA_j^S$$

$$F_{ij} \triangleq F_{A_i A_j} = \frac{1}{A_i^S} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \phi_i \cos \phi_j}{\pi r_{ij}^2} hid(dA_i, dA_j) dA_j^S dA_i^S$$

xier1\_d312  
A\_L\_A\_R

看不懂

性质

- 面片间形状因子与视点、光照、面片反射系数无关；
- 形状因子服从交换关系： $A_i^S F_{ij} = A_j^S F_{ji}$
- 对封闭环境，面片与面片间形状因子之和为1： $\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$
- 平面面片或凸曲面的自我形状因子  $F_{ii} = 0$

仅与位姿有关、可交换（对称？互逆？）、和为1、自我形状因子为0.

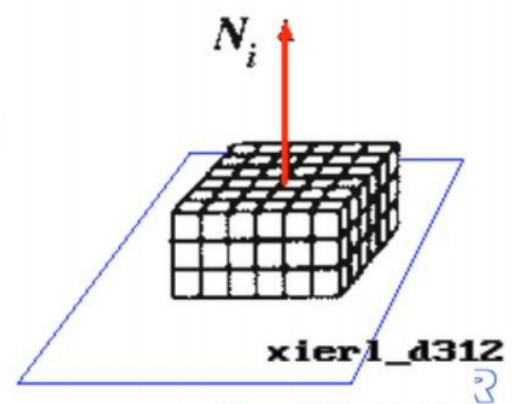
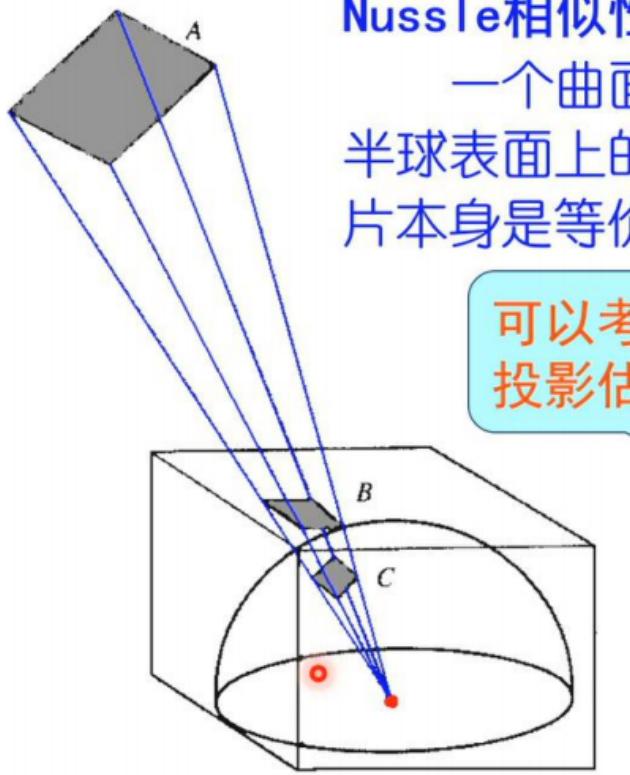
计算方法

## □ 形状因子的计算：半立方体方法

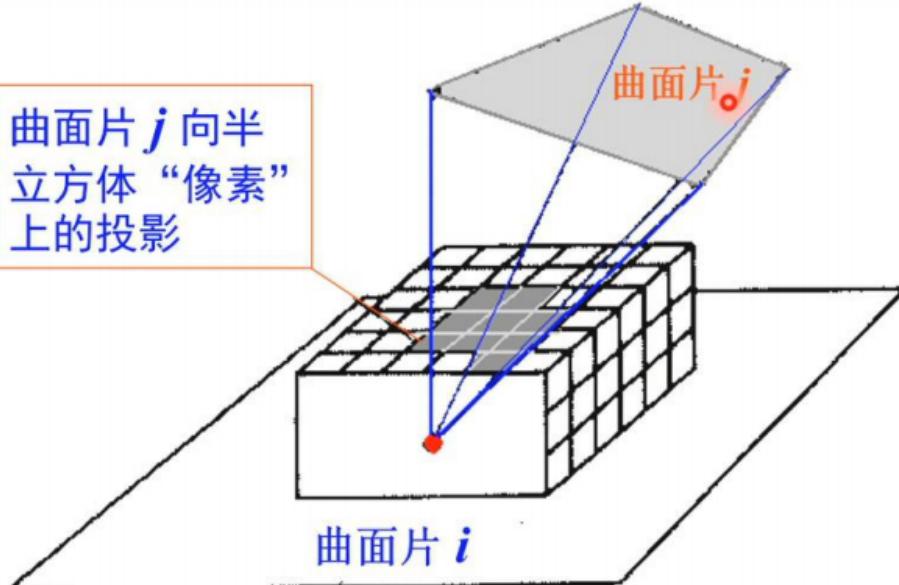
Nussle相似性理论：

一个曲面片 $J$ 向一个围绕单元曲面片 $dA_i$ 的半球表面上的投影，这样做的效果与考虑曲面片本身是等价的。

可以考虑用曲面片在半立方体表面上的投影估算任意曲面片 $J$ 的形状因子。



曲面片  $j$  向半立方体“像素”上的投影



- 1、将立方体各个表面划分成“像素”；
- 2、环境中任何其它曲面片都投影到整个半立方体上；
- 3、半立方体上的每个像素都可以看成是一个小面片；
- 4、形状因子的计算变为对同一定向平面投影及其求和运算。

xian1 4312

## 全矩阵辐射度方程求解的逐步求精算法

由辐射度等式可推出辐射度方程

### □ 面片 $i$ 的辐射度等式

$$B_i = E_i + K_i \sum_{j=1}^n B_j F_{ij}$$

形状因子

面片  $j$  的辐射度

面片  $i$  漫反射率

## □ 景物面片的辐射度方程

$$(I - \begin{bmatrix} K_1 F_{11} & K_1 F_{12} & \cdots & K_1 F_{1n} \\ K_2 F_{21} & K_2 F_{22} & \cdots & K_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_n F_{n1} & K_n F_{n2} & \cdots & K_n F_{nn} \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$

这个方程可以迭代求解



## □ 辐射度方程求解的逐步求精算法

$$(I - \begin{bmatrix} K_1 F_{11} & K_1 F_{12} & \cdots & K_1 F_{1n} \\ K_2 F_{21} & K_2 F_{22} & \cdots & K_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_n F_{n1} & K_n F_{n2} & \cdots & K_n F_{nn} \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} \quad (M_{ij})_{n \times n} (B_i)_{1 \times n} = (E_i)_{1 \times n}$$

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 - K_i F_{ij} & i=j \\ -K_i F_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

分析推论：

辐射度方程无法直接给出一个表达式解；

可以证明，辐射度方程存在唯一解（如M是对角占优矩阵）

Cohen (1988) 提出近似解即时显示的逐步求精迭代方法：

初始状态面片  $A_j$  的辐射度和待辐射度值面片可向外发射的光能值  $B_i^\theta = \Delta B_j^\theta = E_j$



设当前状态下面片 $A_j$ 具有的辐射度值 $B_j^k$ , 待辐射度值 $\Delta B_j^k$

**Step.1** 选择具有最大待辐射值的面片记为 $A_i$

$$\Delta B_i^k A_i^S = \max_{1 \leq j \leq n} (\Delta B_j^k A_j^S)$$

**Step.2** 将 $A_i$ 聚集光能向景物的所有其它面片辐射出去

$$\Delta Rad = \Delta B_i^k \cdot K_j F_{ij} = K_j \Delta B_i^k \frac{A_i^S}{A_j^S} F_{ij}$$

**Step.3**  $A_i$ 面片辐射后, 其它面片 $A_j$ 的辐射度值和待辐射复制更新为:

$$\begin{cases} B_j^{k+1} = B_j^k + \Delta Rad & j=1, 2, \dots, m; j \neq i \\ \Delta B_j^{k+1} = \Delta B_j^k + \Delta Rad & j=1, 2, \dots, n; j \neq i \\ \Delta B_i^{k+1} = 0 & j=i \end{cases}$$

xierl\_d312

## 局限性

1. 镜面物体不能用辐射度绘制处理
2. 使用辐射度方法前场景必须被离散化

## 材料散射属性模型BRDF

### 了解

BRDF: Bidirectional Reflectance Distribution Function 双向反射分布函数

反映物体**材质**对光的影响

BRDF模拟某材质物体表面对光的反射性质: 当一束光照射到物体表面, 从某一个视点观察该物体时, 有多少光进入眼睛?

BRDF描述反射方向的光亮度与入射光的辉度之比。使用测量方法建模一个未知反射属性的材料模型, 记录为高维向量的**测量BRDF数据集** (测量一个物体材质, 得到其BRDF数据)

对于一个方向的入射光，表面会将光反射到表面上半球的各个方向，不同方向反射的比例是不同的，我们用BRDF来表示指定方向的反射光和入射光的比例关系，BRDF定义为：

$$f(l, v) = \frac{dL_o(v)}{dE(l)}$$

其中 $f$ 就是BRDF， $l$ 是入射光方向， $v$ 是观察方向，也就是我们关心的反射光方向。

$dL_o(v)$ 是表面反射到 $v$ 方向的反射光的微分辐射率。表面反射到 $v$ 方向的反射光的辐射率为 $L_o(v)$ ，来自于表面上半球所有方向的入射光线的贡献，而微分辐射率 $dL_o(v)$ 特指来自方向 $l$ 的入射光贡献的反射辐射率。

$dE(l)$ 是表面上来自入射光方向 $l$ 的微分辐照度。表面接收到的辐照度为 $E$ ，来自上半球所有方向的入射光线的贡献，而微分辐照度 $dE(l)$ 特指来自于方向 $l$ 的入射光。

辐射率（出射）和辐照度（入射）的比值

## 三维曲线与曲面表示

### 曲线与曲面的参数表示

1. 显式表示  $y = f(x)$
2. 隐式表示  $f(x, y) = 0$
3. 参数表示  $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

### 样条spline

由多个曲线段连接而成的复合曲线

#### 插值样条曲线

给定一组有序控制点构造的一条顺序通过这些控制点的曲线

#### 逼近样条曲线

给定一组有序控制点构造的一条在某种意义上最接近控制点（不一定通过控制点）的曲线

##### 插值样条曲线：曲线通过每个控制点

##### 逼近样条曲线：曲线不一定通过每个控制点

### 样条曲线段的连续性条件

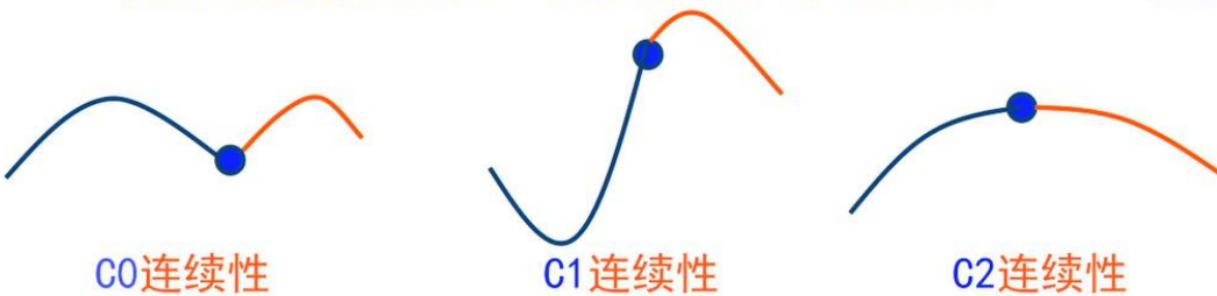
描述分段参数曲线从一段到另一段的平滑过渡。分为参数连续性和几何连续性。

# 设每一曲线段都以参数坐标函数形式描述

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) & u_1 < u < u_2 \\ z = z(u) \end{cases}$$



- ✓ 0阶参数连续性：连接点处的坐标值相等 **C0连续性**
- ✓ 1阶参数连续性：连接点处的一阶导数相等 **C1连续性**
- ✓ 高阶参数连续性：连接点处的n阶导数相等 **Cn连续性**



- ✓ 0阶几何连续性：连接点处的坐标值相等 **G0连续性**
- ✓ 1阶几何连续性：连接点处的一阶导数成比例 **G1连续性**
- ✓ 高阶几何连续性：连接点处的n阶导数成比例 **Gn连续性**

参数连续性是相等；几何连续性是成比例

## 典型三次插值样条曲线

插值样条用于建立运动路径或提供实体几何造型。

## 自然三次样条曲线

计算方法里学的那种插值样条曲线

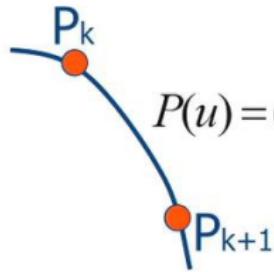
给定n+1个控制点，建立n个三次多项式曲线通过控制点，相邻曲线段具有连续的一阶、二阶导数。

1. 具有C<sub>2</sub>连续性
2. 适合控制点均匀分布的场合
3. 无局部控制性，即改变一个控制点就会改变整个三次样条插值函数

## Hermite样条曲线

由给定控制点和每个控制点的切向量确定

Hermite样条是一个分段三次多项式曲线，由给定控制点和每个控制点的切向量约束确定。



$$P(u) = (x(u), y(u), z(u))$$

$$P(0) = P_k$$

$$P(1) = P_{k+1}$$

$$P'(0) = DP_k$$

$$P'(1) = DP_{k+1}$$

# 1、Hermite曲线段的三次参数多项式表示

$$P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$P'(u) = 3au^2 + 2bu + c$$

3D计算机图形学 刘跃虎



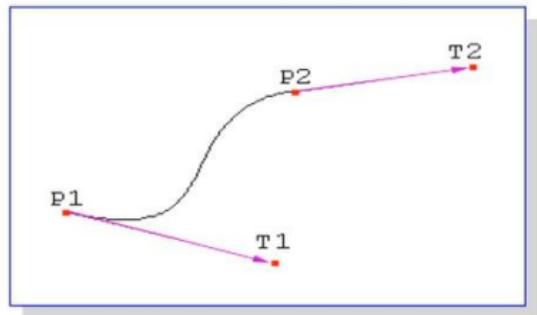
星期一 09:20:16

按 Esc 退出全屏

第十章 三维曲线与曲面表示

## Hermite曲线边界条件的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ DP_k \\ DP_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ DP_k \\ DP_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ DP_k \\ DP_{k+1} \end{bmatrix}$$

Hermite矩阵  $M_H$

xier1\_d312



## 2、Hermite曲线方程的特征矩阵表达

$$H(u) = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \bullet M_H \bullet \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ DP_k \\ DP_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$M_H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 3、Hermite曲线的基函数表达

$$H(u) = P_k(2u^3 - 3u^2 + 1) + P_{k+1}(-2u^3 + 3u^2)$$

$$DP_k(u^3 - 2u^2 + u) + DP_{k+1}(u^3 - u^2)$$



由函数和函数一阶导可以推得上面的式子  
具有局部控制性，端点可控、切向量可控。

### Cardinal样条曲线

与Hermite类似，但切向量是由相邻两个控制点计算得到

◆ Cardinal样条段端点处的切向量正比于相邻控制点形成的弦。

$$P'(0) = \frac{1-t}{2}(P_{k+1} - P_{k-1})$$

$$P'(1) = \frac{1-t}{2}(P_{k+2} - P_k)$$

## Cardinal曲线边界条件：

$$P(0) = P_k$$

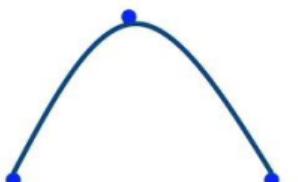
$$P(1) = P_{k+1}$$

$$P'(0) = \frac{1}{2}(1-t)(P_{k+1} - P_{k-1})$$

$$P'(1) = \frac{1}{2}(1-t)(P_{k+2} - P_k)$$



$t < 0$  较松曲线



$t > 0$  较紧曲线

$t$  是张量参数，控制样条与输入控制点间的松紧度。

控制点切向量正比于两个相邻控制点形成的弦，引入一个张量参数控制样条与输入控制点间的松紧度。

## Bezier曲线

Bezier 将函数逼近论与几何表示结合，使用一定数目控制点构造的参数曲线。

## 三次Bezier曲线的基函数表示与基本特性



### (1) 三次Bezier曲线的基函数表示

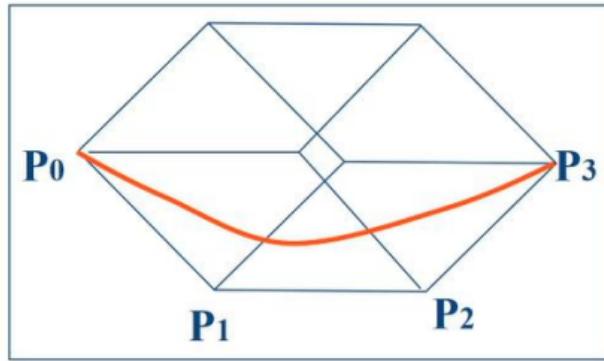
$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = t^3$$

3次Bernstein基函数



Bezier三次曲线方程的基函数形式：

$$P(t) = B_{0,3}(t)p_0 + B_{1,3}(t)p_1 + B_{2,3}(t)p_2 + B_{3,3}(t)p_3$$

注意到四个基函数相加有如下现象：

$$B_{0,3}(t) + B_{1,3}(t) + B_{2,3}(t) + B_{3,3}(t) = 1$$



## (1) 三次Bezier曲线的基函数表示

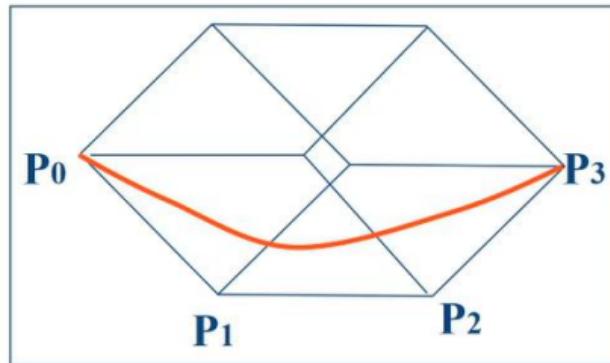
$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = t^3$$

3次Bernstein基函数



Bezier三次曲线方程的基函数形式：

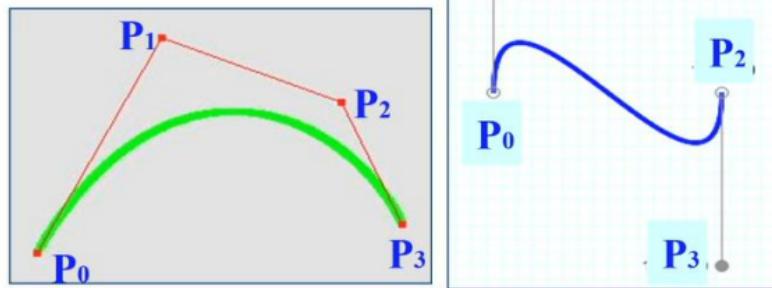
$$P(t) = B_{0,3}(t)p_0 + B_{1,3}(t)p_1 + B_{2,3}(t)p_2 + B_{3,3}(t)p_3$$

注意到四个基函数相加有如下现象：

$$B_{0,3}(t) + B_{1,3}(t) + B_{2,3}(t) + B_{3,3}(t) = 1$$



## 三次Bezier曲线



三次Bezier两个端点及其切向量计算：

$$P(0) = p_0 \quad P(1) = p_3$$

$$P'(0) = 3(p_1 - p_0) \quad P'(1) = 3(p_3 - p_2)$$

两个控制点（端点） $P_0$ 、 $P_3$ ，与两个不在曲线上的控制点 $P_1$ 、 $P_2$ ，间接确定三次Bezier曲线两个端点的切向量。



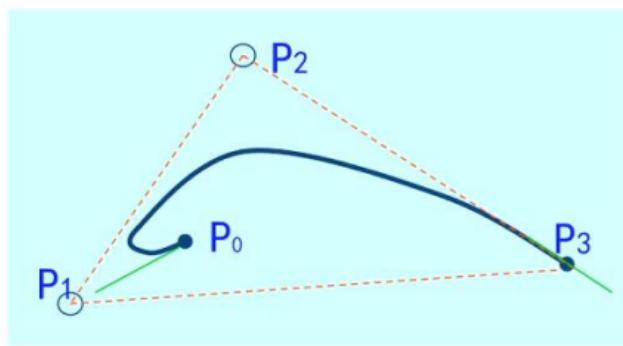
## ● 三次Bezier曲线的边界条件

$$P(0) = p_0$$

$$P(1) = p_3$$

$$P'(0) = 3(p_1 - p_0)$$

$$P'(1) = 3(p_3 - p_2)$$



## ● 三次Bezier曲线的样条特征矩阵：

$$P(u) = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \bullet M_{\text{Bez}} \bullet \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{Bez}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

xier1 4312

参数方程  $P(t)$ , 关于t的向量函数  $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$   $p_n$  是点坐标

三次Bezier曲线由四个控制点确定 (不多不少)

基本特性：

1. 两个端点分别是第一个控制点和最后一个控制点
2. 曲线端点切线沿与最近邻控制点的直线 (公式里就可以看出)
3. 端点的曲率 (二阶导)
4. 凸包性：曲线落在由控制点构成的凸多边形内
5. 几何不变性：Bezier曲线的形状和位置不随坐标变换而变换
6. 交互能力：Bezier曲线的形状的改变可以通过改变控制点的位置实现

### 3. 端点的曲率



$$P''(0) = n(n-1)[(p_2 - p_1) - (p_1 - p_0)]$$

$$P''(1) = n(n-1)[(p_{n-2} - p_{n-1}) - (p_{n-1} - p_n)]$$

### 三次Bezier曲线段拼接的复杂样条曲线构造

复杂曲线可由若干低次Bezier曲线连接而成

**G0连续(两曲线段拼接)**

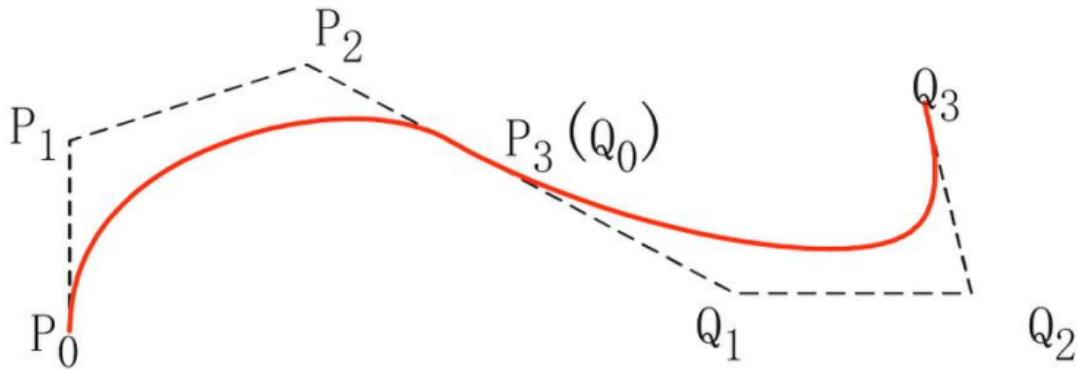
**G1连续(段拼点处切向量方向相同)**

**C1连续(段拼点处切向量方向相同、大小相等)**

**C2连续(段拼点处2阶导数的方向、大小都相同)**



### (3) 连接Bezier曲线段



在两条曲线段之间构造具有C1和C2连续的分段曲线：

分段曲线的 **C<sub>1</sub>** 连续性条件

$$P'_{z1}(1) = P'_{z2}(0) \Rightarrow (p_3 - p_2) = (Q_1 - Q_0)$$

分段曲线的 **C<sub>2</sub>** 连续性条件

$$P''_{z1}(1) = P''_{z2}(0) \Rightarrow (p_3 - 2p_2 + p_1) = (Q_2 - 2Q_1 + Q_0)$$

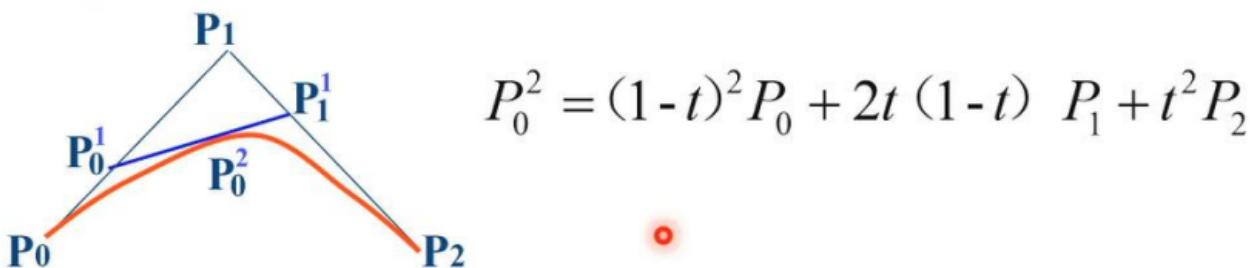
$$\bullet \quad Q_2 = p_1 - 2p_2 + 2Q_1$$



### 抛物线三切线定理

#### 抛物线三切线定理与曲线点坐标计算方程

$$\frac{P_0 P_0^1}{P_0^1 P_1} = \frac{P_1 P_1^1}{P_1^1 P_2} = \frac{P_0^1 P_0^2}{P_0^2 P_1^1} \Rightarrow \begin{aligned} P_0^1 &= (1-t) P_0 + t P_1 \\ P_1^1 &= (1-t) P_1 + t P_2 \\ P_0^2 &= (1-t) P_0^1 + t P_1^1 \end{aligned}$$



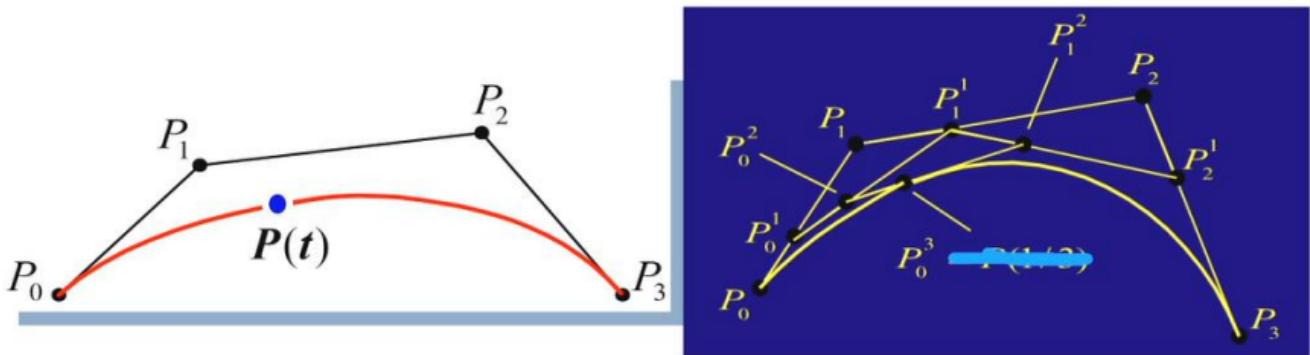
二次Bezier曲线



可以找出第三条切线和切点

### 三次Bezier曲线的几何作图法含义与曲线上的点的递推计算方法

利用三切线定理（得到了中间点）可以进行递推



$$P_0^2 = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

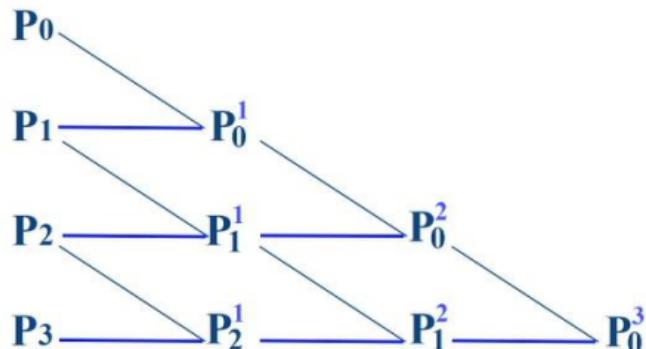
$$P_1^2 = (1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2 P_3$$

$$P_0^3 = (1-t)P_0^2 + tP_1^2$$

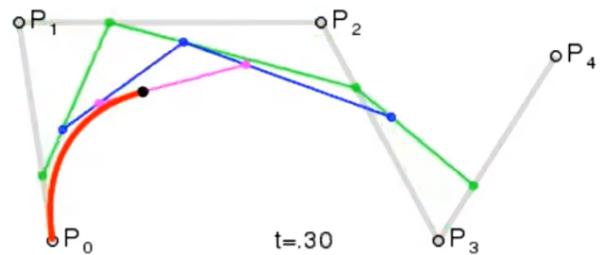
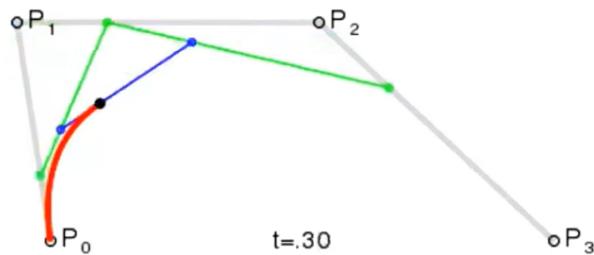
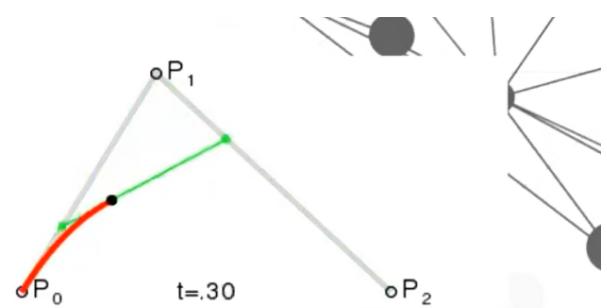
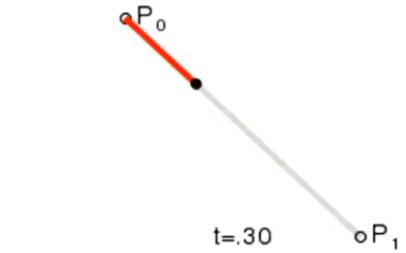
三次Bezier曲线

三次Bezier曲线的递推计算公式@de Casteljau

$$P_i^k = \begin{cases} P_i & k = 0 \\ (1-t) P_i^{k-1} + t P_{i+1}^{k-1} & k=1,2,3; i=0,1,2,3; \end{cases}$$



高次Bezier曲线上的点可以由低次Bezier曲线上的点推得  
这和几何作图方法有关系



图中线段上的点在线段中的占比都是t

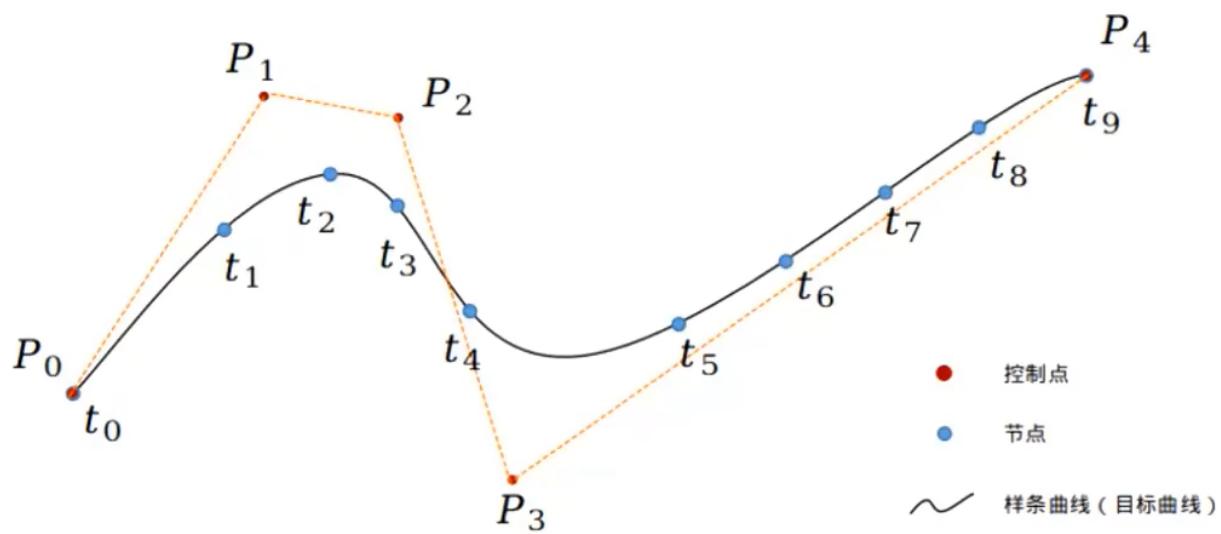
## 不足

1. 控制点数决定Bezier曲线的阶数，n较大时每个点对曲线的控制减弱
2. 不能做局部修改，改变一个点就会影响全局

因此提出B样条曲线

## B样条曲线

相较于Bezier，B样条的曲线多项式次数独立于控制点数目，B样条曲线多项式系数由少数几个控制点决定，具有局部控制性。

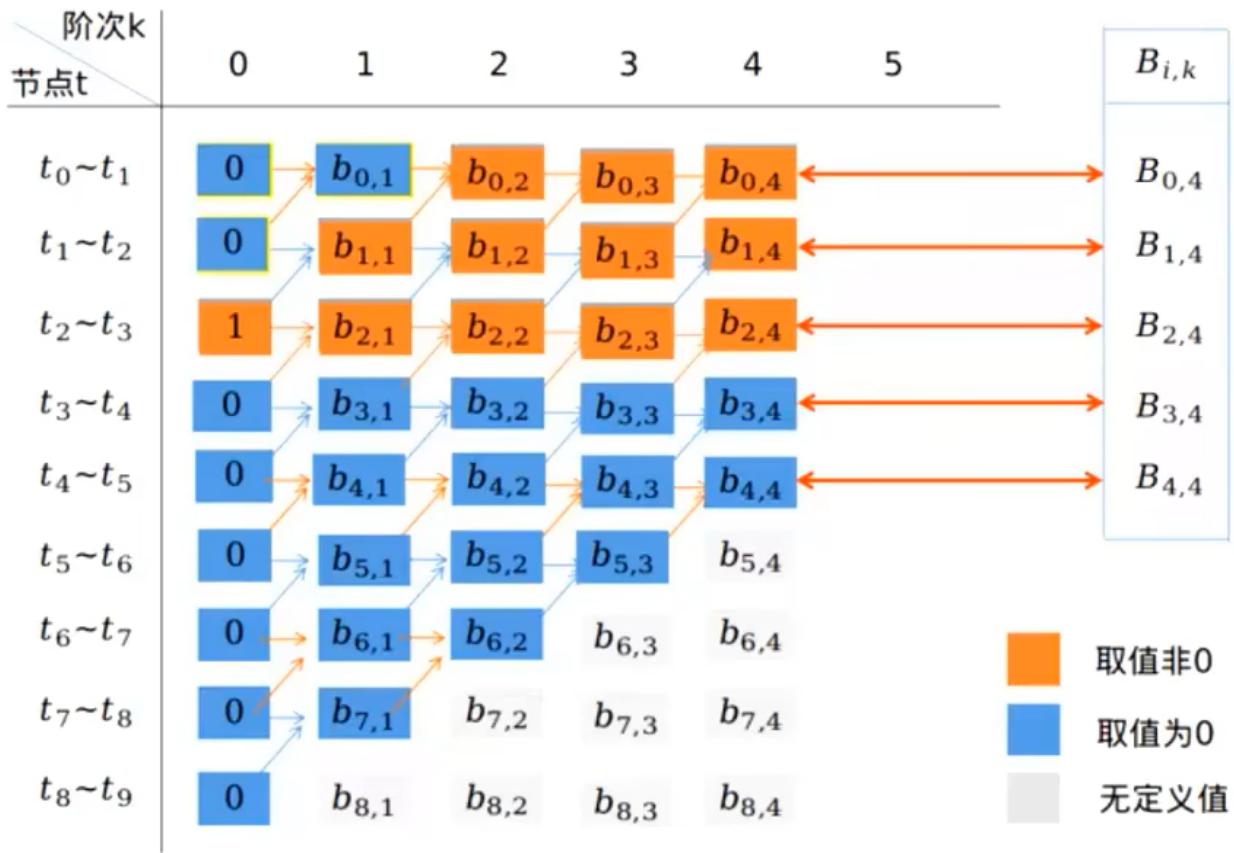


控制点有  $n+1 = 5$  个,  $n=4$ , 即  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$

节点规定为  $m+1 = 10$  个,  $m=9$ , 即  $t_0, t_1, \dots, t_9$ , 该节点将要生成的目标曲线分为了 9 份, 这里的  $t$  取值一般为 0-1 的一系列非递减数。如 0 代表起始位置, 1 代表末位置, 0.5 代表一半的位置。 $t_0, t_1, \dots, t_9$  组成的序列, 叫做节点表。如等分的节点表  $\{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1\}$ 。

次为  $k$ 。实际上有个必须要满足的关系式为  $m = n + k + 1$

控制点个数与函数的次独立。控制点  $n+1$  个, 节点  $m+1$  个, 将曲线分成  $m$  段, 段与段之间独立, 次是  $k$ , 即  $k$  次函数。



随着次数k递推上去

### 三次B样条基函数表示

## B样条曲线的基函数表示

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{i,k}(t) \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$$

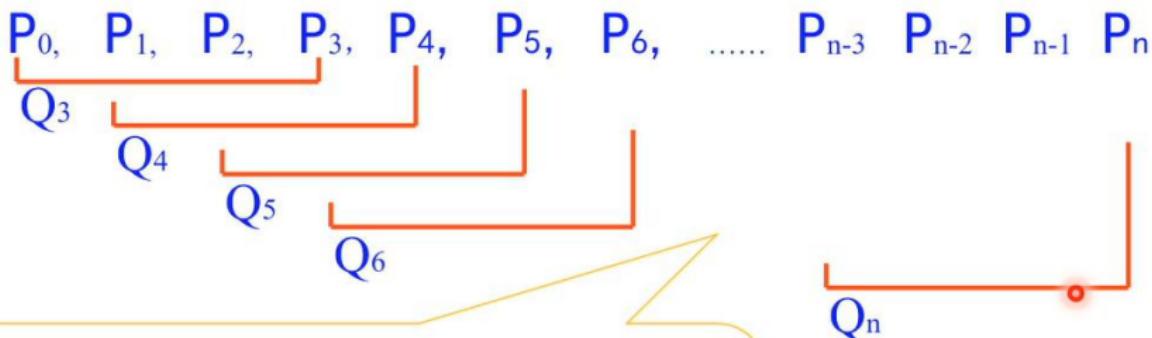
控制点

表示k阶B样条基函数

参数结点区域

## 例：三次B样条曲线

3次B样条曲线由n-2个三次B样条片段连接构成的曲线来逼近n+1个控制点



### 局部控制特性：

每个三次B样条片段由4个控制点定义

每个控制点最多影响4个B样条片段

控制点共享使片段之间保持C2连续性

xier1\_d312

三次B样条的基函数

$$B_{i-3,4} = 1/6(1-t)^3$$

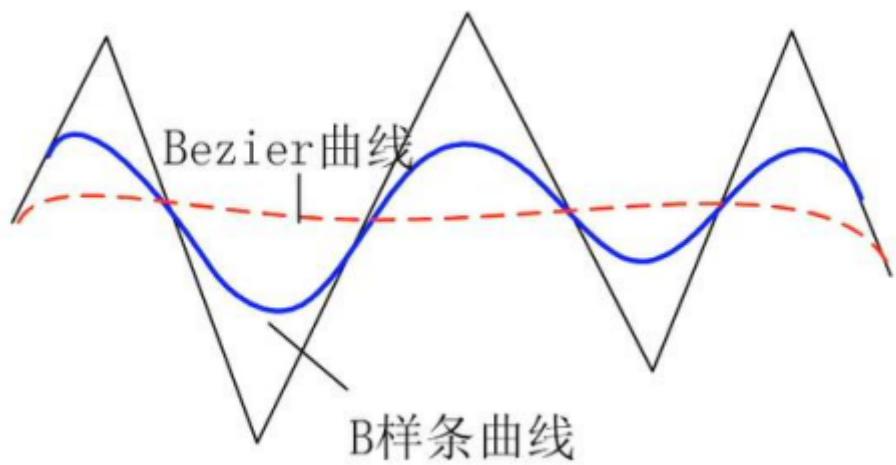
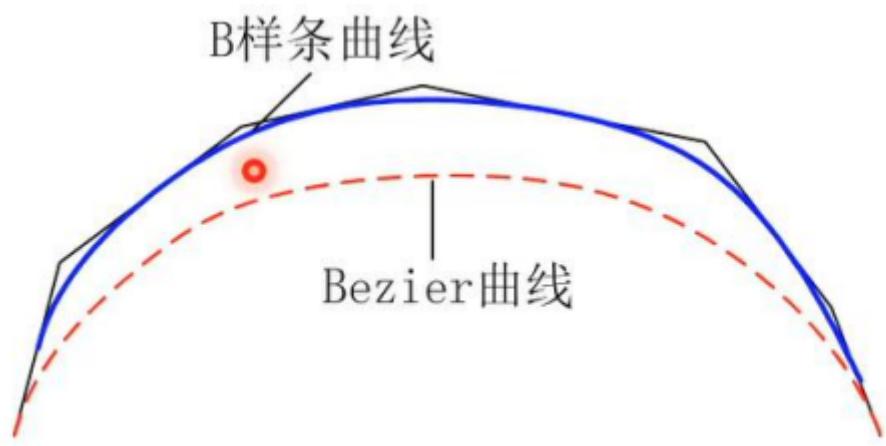
$$B_{i-2,4} = 1/6(3t^3 - 6t^2 + 4)$$

$$B_{i-1,4} = 1/6(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$$

$$B_{i,4} = 1/6t^3$$

## 三次B样条基本特性

1. 局部性：k次B样条曲线段只被相邻的k+1个顶点控制
2. 连续性：在n-k重节点连续性不低于2k-n次
3. 几何不变性
4. 凸包性

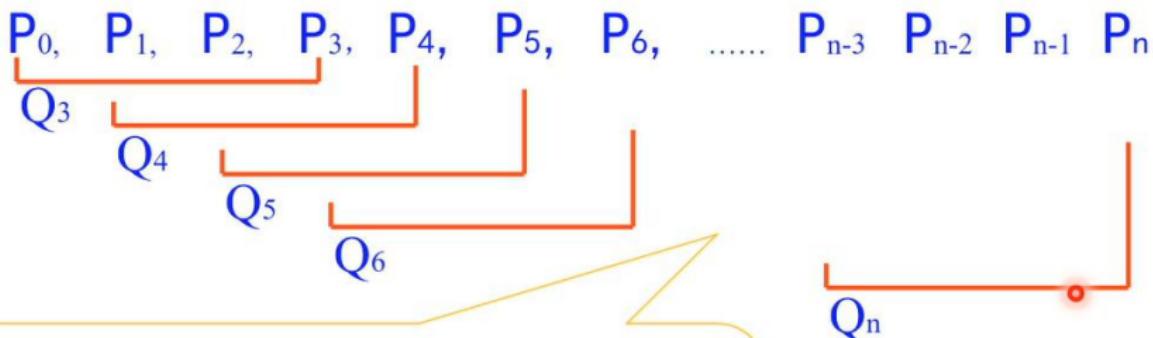


## 三次B样条曲线段拼接的复杂样条曲线构造



### 例：三次B样条曲线

3次B样条曲线由 $n-2$ 个三次B样条片段连接构成的曲线来逼近 $n+1$ 个控制点



#### 局部控制特性：

每个三次B样条片段由4个控制点定义

每个控制点最多影响4个B样条片段

控制点共享使片段之间保持C2连续性

xier1\_d312

## Bezier曲面

三维曲面在数学上被认为是两条曲线的笛卡尔积产生

(一个曲线想象成一根棍子，另一条曲线想象成一根轨道，棍子卡在轨道上滑画出一个面)

## 双三次Bezier曲面片的参数表示

双三次Bezier曲面片定义：

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v) \quad u, v \in [0, 1]$$

4x4空间控制点列  $P_{ij}$  中相邻两点形成特征网格，构成三次Bezier曲面的矩阵表示式：

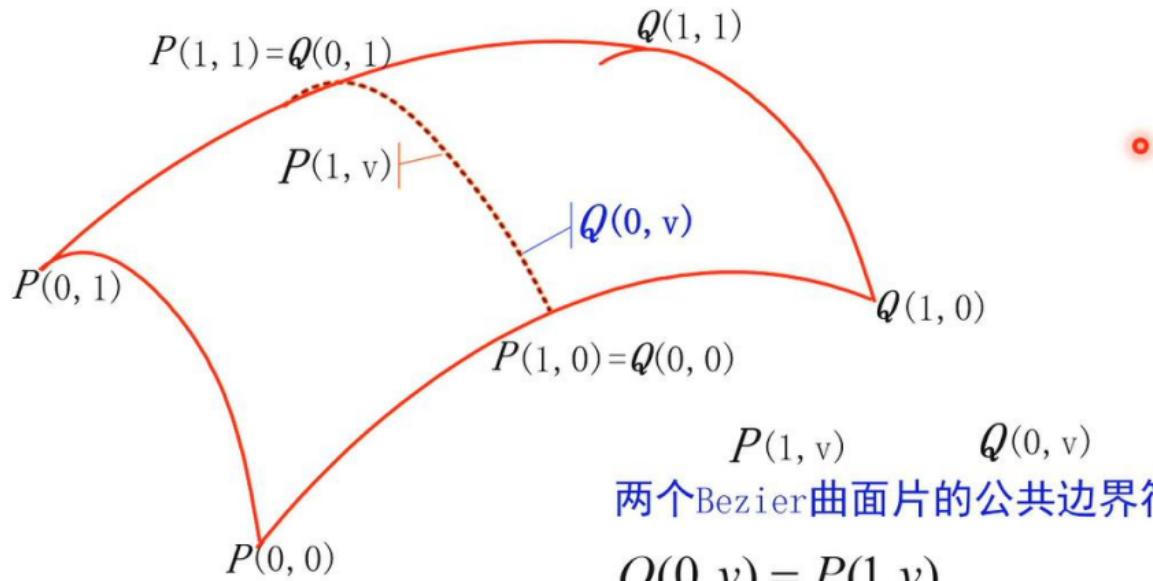
$$P(u, v) = [B_{0,3}(u), B_{1,3}(u), B_{2,3}(u), B_{3,3}(u)] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,3}(v) \\ B_{1,3}(v) \\ B_{2,3}(v) \\ B_{3,3}(v) \end{bmatrix}$$

两个Beziers曲线基函数构成基函数

## 曲面片的连接



## 三次Bezier曲面片的拼接



两个Beziers曲面片的公共边界符合

$$Q(0, v) = P(1, v)$$

$$Q_u(0, v) = \alpha(v) P_u(1, v)$$

$$Q_u(0, v) = \alpha(v) P_u(1, v) + \beta(v) P_v(1, v)$$