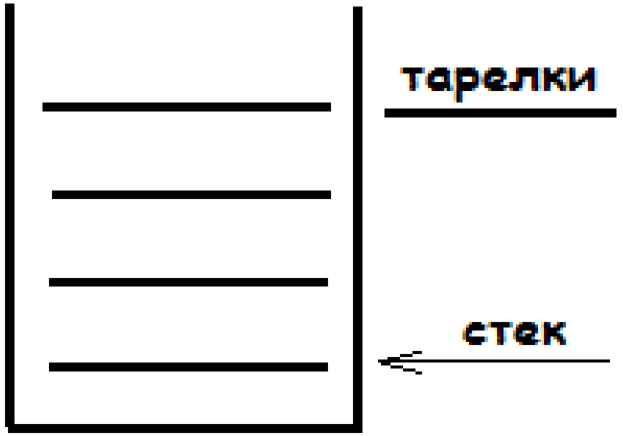
Лекция 10.
Рекурсия.
Бинарный поиск

Стек

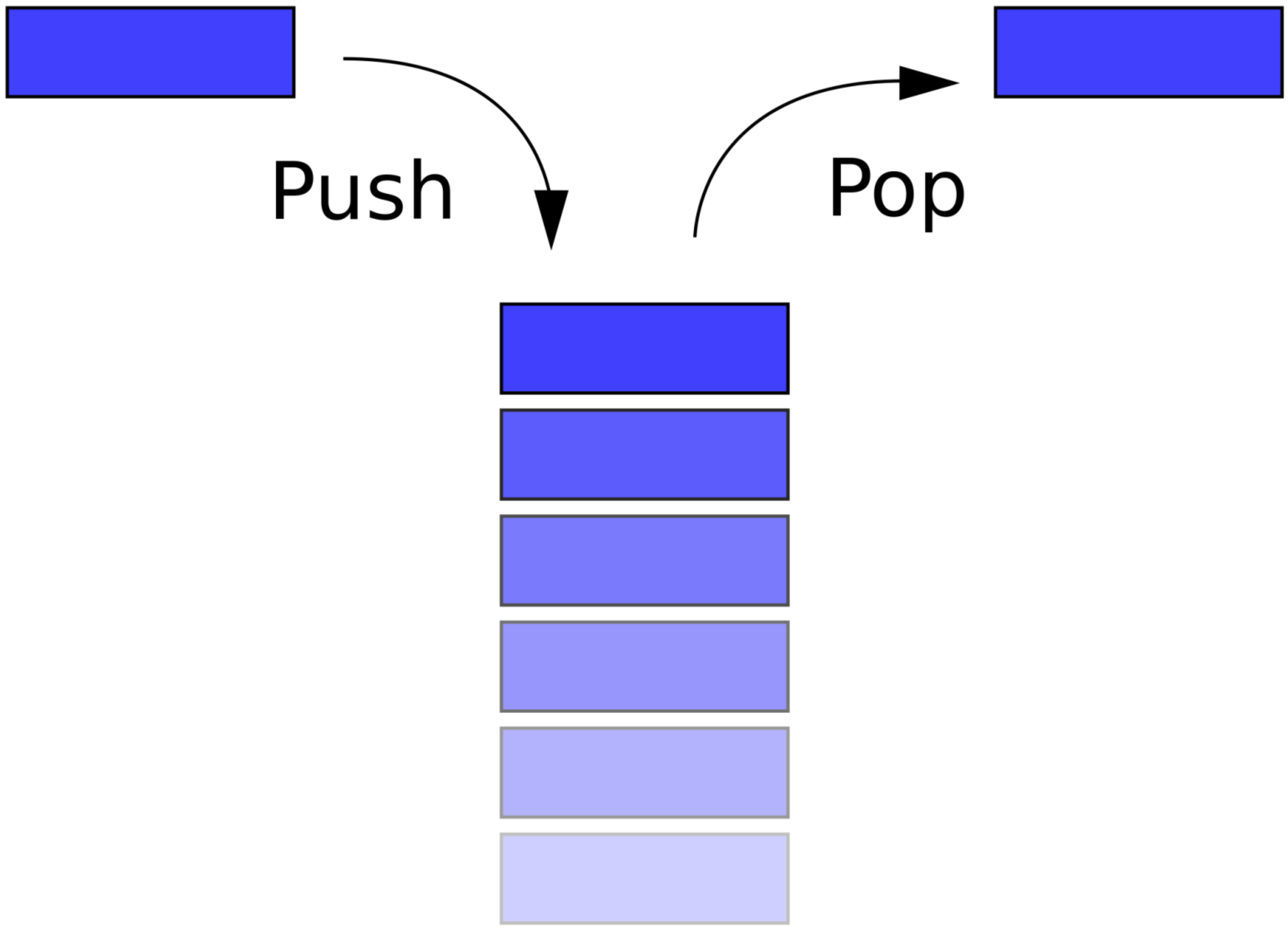
- **Стек** – это структура данных, которая работает по принципу «последний вошел – первый вышел» (**LIFO** - Last in, first out)
- **Пример в жизни:** стопка тарелок
- Верхнюю тарелку мы положили последней, но забираем первой



Стек

- Если рассматривать стек как класс, то это будет класс с тремя основными функциями:
- void Push(Element e);
  вставляет элемент в верхний конец стека
- Element Pop();
  вытаскивает верхний элемент из стека и возвращает его
- int Count { get; }
  выдает количество элементов в стеке

Стек



Стек

- Структура стека широко используется во многих известных алгоритмах
- Кроме того, последовательность исполнения функций тоже представляет собой стек, который называется **стеком вызовов**

Стек вызовов

- **Стек вызовов** – стек, который представляет собой порядок вызова функций друг из друга
- Каждый элемент стека хранит в себе:
  - Переданные в функцию аргументы
  - Локальные переменные
  - Адрес возврата в вызывающую функцию
- **Адрес возврата** – это адрес памяти, где находится код, который должен исполняться после завершения функции

Адрес возврата

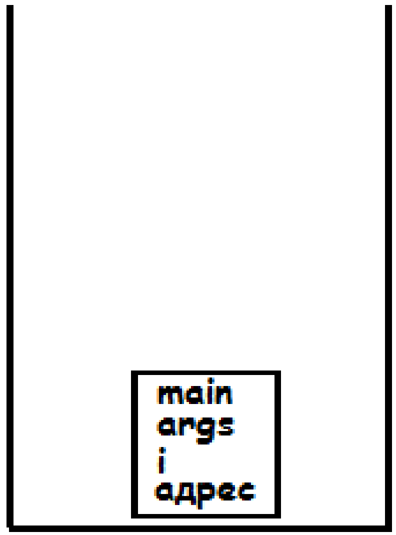
- **Адрес возврата** – это адрес памяти, где находится код, который должен исполняться после завершения функции

Адрес возврата указывает сразу за вызов функции

- ```
  public static int G()
  {
    return 3;
  }
  public static void Main(string[] args)
  {
    int i = 5;
    G();
  }
  ```
  ```

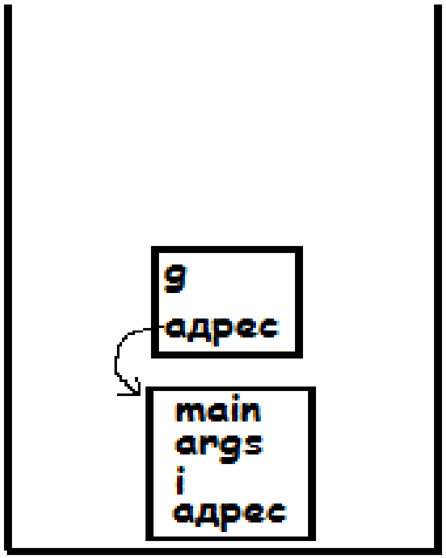
Стек

```
public static int F()
{
  return G() + 1;
}
public static int G()
{
  return 3;
}
public static void Main(string[] args)
{
  int i = 5;
  G();
  F();
}
```



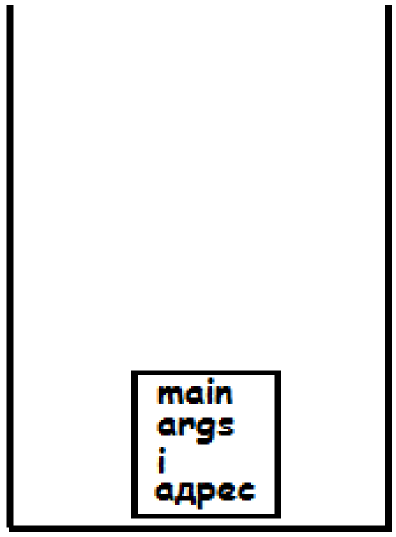
Стек

```
public static int F()
{
    return G() + 1;
}
public static int G()
{
    return 3;
}
public static void Main(string[] args)
{
    int i = 5;
    G();
    F();
}
```



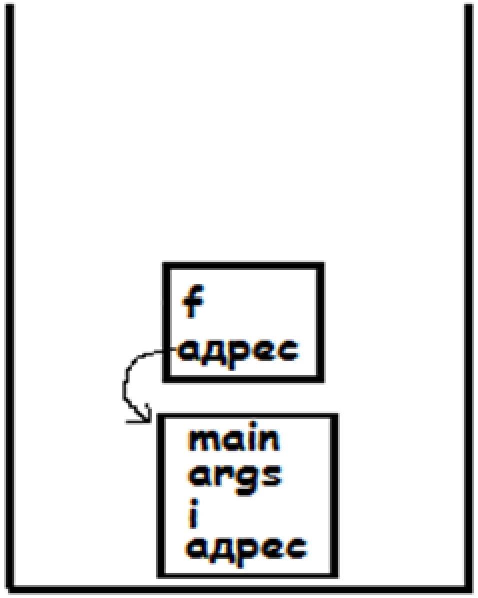
Стек

```
public static int F()
{
  return G() + 1;
}
public static int G()
{
  return 3;
}
public static void Main(string[] args)
{
  int i = 5;
  G();
  F();
}
```



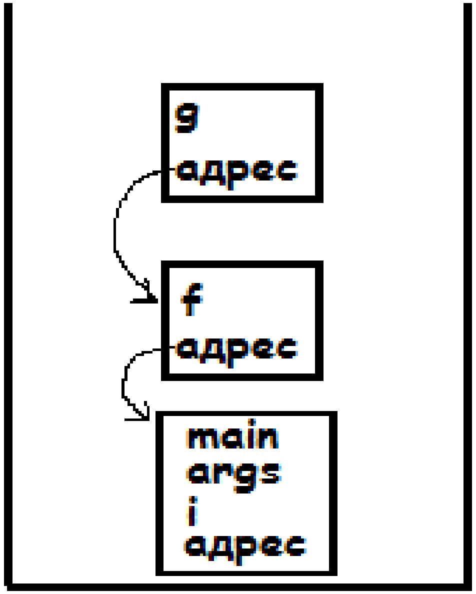
Стек

- ```
  public static int F()
  {
    return G() + 1;
  }
  public static int G()
  {
    return 3;
  }
  public static void Main(string[] args)
  {
    int i = 5;
    G();
    F();
  }
  ```


  ```

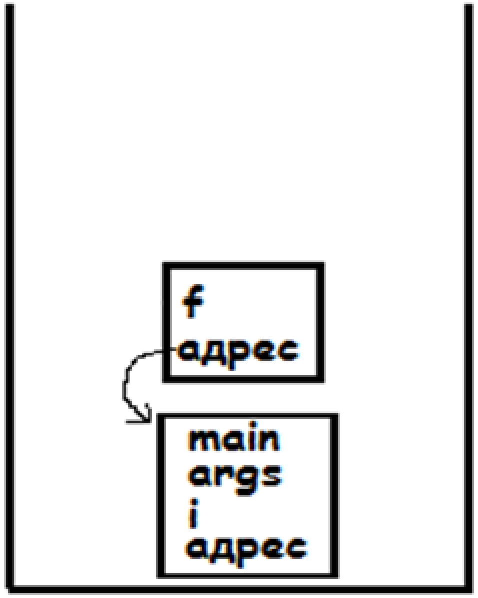
Стек

- ```
  public static int F()
  {
    return G() + 1;
  }
  public static int G()
  {
    return 3;
  }
  public static void Main(string[] args)
  {
    int i = 5;
    G();
    F();
  }
  ```


  ```

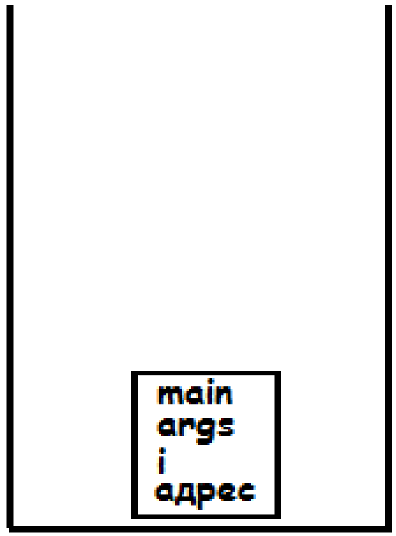
Стек

- ```
  public static int F()
  {
    return G() + 1;
  }
  public static int G()
  {
    return 3;
  }
  public static void Main(string[] args)
  {
    int i = 5;
    G();
    F();
  }
  ```


  ```

Стек

```
public static int F()
{
  return G() + 1;
}
public static int G()
{
  return 3;
}
public static void Main(string[] args)
{
  int i = 5;
  G();
  F();
}
```



Рекурсия

- **Рекурсия** – это вызов функцией самой себя
- Просто в стек добавляется еще один вызов функции (можно считать, что вызывается другая функция, но с таким же кодом)
- Пример:
- ```
  public static void F(int i)
  {
      Console.WriteLine(i);
      F(i + 1);
  }
  ```
- Эта функция упадет из-за переполнения стека (размер стека ограничен)
  ```

Рекурсия

- При написании рекурсивных функций важно, чтобы в какой-то момент рекурсия завершалась
- ```
  public static void F(int i)
  {
      if (i >= 10)
      {
        return;
      }
      Console.WriteLine(i);
      f(i + 1);
  }
  ```
- Такая функция уже не упадет
  ```

Рекурсия

- Предыдущий пример работает также как цикл от начального значения i до 10, но рекурсия значительно медленнее и требует больше памяти, чем цикл
- Поэтому при возможности следует избегать рекурсию

Зачем нужна рекурсия?

- Некоторые алгоритмы при помощи нее реализовать проще и быстрее
- Если производительность неважна, и глубина вызовов небольшая, то это вполне подходящий вариант

Вычисление факториала

- Рекурсия часто встречается и в математике

- **Факториал**: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdot n$
- Считается что $0! = 1$
- Можно заметить, что $n! = (n-1)! \cdot n$,
$(n-1)! = (n-2)! \cdot (n-1)$ и т.д.
- Это и есть рекурсивная формула

Вычисление факториала

- $n! = (n-1)! \cdot n \qquad 0! = 1$

- ```
  public static int Factorial(int n)
  {
      if (n == 0)
      {
          return 1;    // завершение рекурсии
      }
      return Factorial(n - 1) * n;
  }
  ```
  ```

Хвостовая рекурсия

- **Хвостовая рекурсия** – вариант рекурсии, при котором рекурсивный вызов функции происходит последней операцией в функции
- Такую рекурсию всегда можно преобразовать в цикл
- ```
  public static int Factorial(int n)
  {
      if (n == 0)
      {
          return 1;
      }
      return Factorial(n - 1) * n;
  }
  // это хвостовая рекурсия
  ```
  ```

Вычисление факториала без рекурсии

- ```
  public static int Factorial(int n)
  {
      int result = 1;  // переменная для накопления
                       // результата
      for (int i = 2; i <= n; ++i)
      {
          result *= i;
      }
      return result;
  }
  ```
- Работает быстрее и не падает при больших n
  ```

Задача «Возведение в степень»

- Написать рекурсивную функцию возведения целого числа в целую неотрицательную степень (упрощенный аналог Math.Pow)
- Нельзя использовать Math.Pow
- Когда закончите – напишите тут же нерекурсивную функцию

Задача на дом «Алгоритм Евклида»

- Задача про НОД
- Необходимо реализовать рекурсивную версию в виде функции

$$\text{НОД}(a, b) = \begin{cases} b, \text{если } a \,\%\, b = 0 \\ \text{НОД}(b, a \,\%\, b) \text{ иначе,} \end{cases}$$

- где x % y – остаток от деления x на y

Бинарный поиск – постановка задачи

- Есть массив, отсортированный по возрастанию (или убыванию)

0	1	2	3	4	5
1	2	5	7	10	12

- Хотим найти индекс, по которому лежит заданное число x. Если числа нет в массиве, то выдать -1

Бинарный поиск – пример решения

- Пусть есть отсортированный массив целых чисел int[] array

0	1	2	3	4	5
1	2	5	7	10	12

- Обозначим индексы границ массива:
  int left = 0;
  int right = array.Length – 1;

- В ходе алгоритма эти границы left и right будут изменяться

Бинарный поиск – пример решения

0	1	2	3	4	5
1	2	5	7	10	12

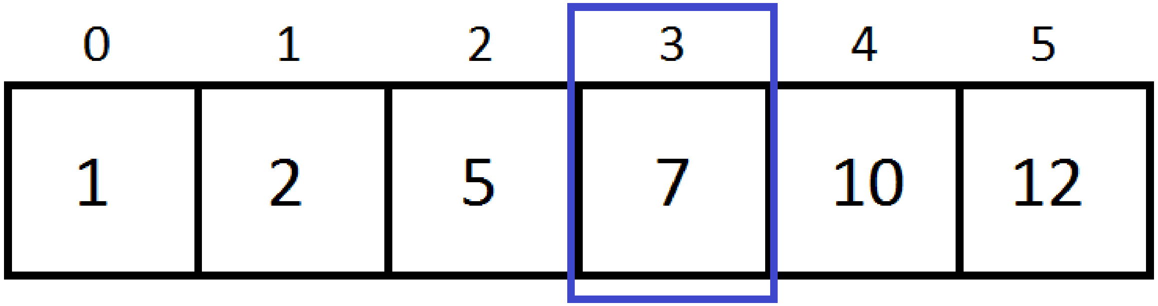
- ```
  int left = 0;
  int right = array.Length – 1;  // 5
  ```
- Допустим, ищем x = 7
- Вычисляем средний индекс:
  ```
  int middle = (right + left) / 2;  // (5 + 0) / 2 = 2
  ```
- Проверяем элемент по этому индексу.
  Получилось, что там 5 – оно меньше, чем x = 7
- Так как массив отсортирован, то правее среднего элемента лежат большие числа, а значит x надо искать там
  ```

Бинарный поиск – пример решения

0	1	2	3	4	5
1	2	5	7	10	12

- Значит, ищем правее, чем индекс middle = 2. Меняем left:
  left = middle + 1; // 3
- Опять вычисляем средний индекс:
  middle = (left + right) / 2; // (3 + 5) / 2 = 4
- Смотрим на элемент по этому индексу, там 10 – оно больше, чем x = 7
- Значит, надо искать левее, чем middle – меняем правую границы поиска:
  right = middle – 1; // 3

Бинарный поиск – пример решения



- Опять вычисляем средний индекс:
  middle = (left + right) / 2; // (3 + 3) / 2 = 3
- Смотрим на элемент по этому индексу, там 7
- Всё, нашли, результат алгоритма: 3

Бинарный поиск – идея алгоритма

- Сам алгоритм многошаговый, каждый шаг выглядит одинаково
- На каждом шаге у нас будут текущая левая и правая границы массива (left и right), внутри которых мы будем искать решение
- На каждом шаге вычисляем средний индекс:
  ```
  int middle = (right + left) / 2;    // деление целочисленное
  ```
- Далее смотрим на элемент array[middle]:
  - Если он – искомый, то всё, нашли
  - Если средний элемент больше искомого, то на следующем шаге ищем слева от среднего элемента (меняем right), иначе – справа от среднего (меняем left)

Бинарный поиск – алгоритм

1. Вычисляем средний индекс middle через left и right
2. Смотрим элемент по индексу middle. Если он равен x, то всё, нашли
3. Если x > a[middle], то ищем в правой части, положим left = middle + 1, и на шаг 1
4. Если x < a[middle], то ищем в левой части, положим right = middle – 1, и на шаг 1
5. Если left > right, то заканчиваем алгоритм, выдаем -1

Бинарный поиск

- Данный алгоритм очень эффективен – для массива из 1023 элементов нам достаточно 10 сравнений чтобы найти элемент
- Уже после первого сравнения остается 511 элементов, после второго – только 255

Рекурсивный вариант

- ```
  public static int BinarySearch(int[] a, int left, int right, int x)
  {
      if (left > right)
      {
          return -1;
      }
      int middle = (right + left) / 2;
      //… допишите, используя описание алгоритма
  }
  ```
  ```

Задача на курс «Бинарный поиск»

1. Доделать бинарный поиск с рекурсией
2. Реализовать вариант бинарного поиска без рекурсии