一、单项选择题(3 分×5)：

1. 已知四阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中第一行的元素分别为 $4,2,3,-3$，第四行的元素的余子式依次为 $1,x,2,-2$，则 x 等于(　　).

(A) 0； (B) 1； (C) 2； (D) 3.

2. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$，则下列说法正确的是(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$； (B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=A^2-B^2$；

(C) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$； (D) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

3. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}$(　　).

(A) 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$； (B) 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$；

(C) 不可逆； (D) 以上结论都不正确.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，则(　　)一定成立.

(A) $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$； (B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$； (C) $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}$； (D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性相关，则下列各结论中正确的是(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 中任意一个向量都可由其余向量线性表示；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 中任一部分组线性相关；

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 中任一部分组线性无关.

二、填空题(3 分×10)：

1. 在五阶行列式中，$a_{12}a_{54}a_{31}a_{23}a_{45}$ 的符号取________号.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，则 $|2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=$________，$|\boldsymbol{A}^{-1}|=$________

$|4\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{A}^{-1}|=$________.

3. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$ ________ ，元素 2 的代数余子式为________

4、对矩阵 A 施行一次初等列变换其结果等于在 A 的________的初等矩阵；对矩阵 A 施行一次初等行变换其结果等于在 A 的乘以相应的初等矩阵.

5. 设 $R(A)=r$，当____________时，齐次线性方程组 $A_{m\times n}x =$

且该方程组的基础解系有____________个解向量.

第三题	
得分	

三、计算题(45 分)：

1.（10 分）计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$.

解：

2.（10 分）解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解：

3.（10 分）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,3,-1)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,4,5,1)^{\mathrm{T}}$ 的秩，并指出该向量组的一个最大无关组.

解：

5 分）求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$ 的通解.

分	

四、证明（10 分）：

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.

证明：