1．判断下列命题是否为真

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(2) $\varnothing \in \varnothing$

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

解　(1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真，其余为假.

2.设 A = {1, 2, 3}, R = {<x,y> | x, y∈A 且 x+2y ≤ 6 }，

S = {<1,2>, <1,3>,<2,2>},

求:

(1) R 的集合表达式

(2) R^{-1}

(3) dom R, ran R, fld R

(4) R∘S, R^3

(5) r(R), s(R), t(R)

解：(1) R = {<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>}

(2) R^{-1}= {<1,1>, <2,1>, <1,2>, <2,2>, <1,3 >}

(3) domR = {1, 2, 3}, ranR = {1,2}, fldR = {1, 2, 3}

(4) R∘S = {<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>}

R^3={<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>}

(5)r(R) = {<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,3>}

s(R) = {<1,1>,<1,2>,<2,1>, <2,2>, <3,1>, <1,3>}

t(R) = {<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>}

3.设 A = {a,b,c,d}, R = {<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>},　求 R 的各次幂，分别用矩阵和关系图表示.

解：

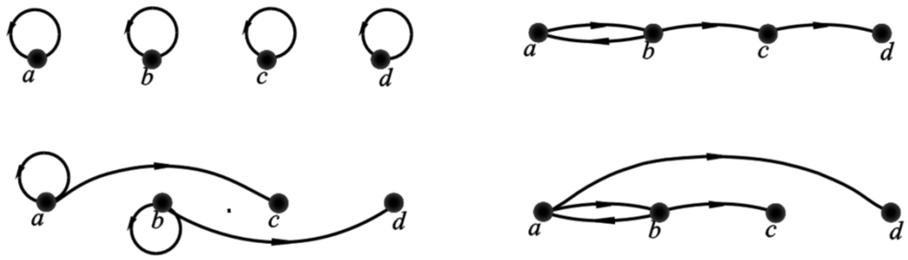
$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此 $M^4=M^2$，即 $R^4=R^2$．因此可以得到

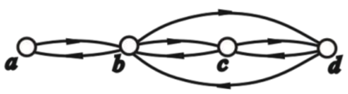
$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$



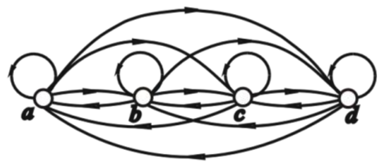
4.设 A={a,b,c,d}, R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>}, 画出 R 和 r(R), s(R), t(R)的关系图.

R

***r*(*R*)**

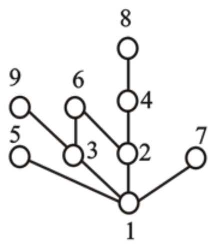


***s*(*R*)**

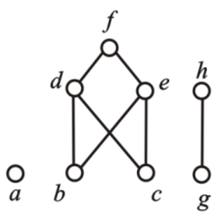


***t*(*R*)**

5.偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, *R* 整除>，画出哈斯图。



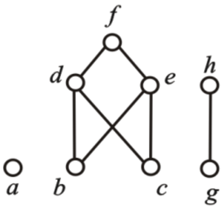
6. 已知偏序集〈A, R〉的哈斯图如下图所示, 试求出集合 A 和关系 R 的表达式.



解　*A*={ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* }

R={<*b*,*d*>,<*b*,*e*>,<*b*,*f*>,<*c*,*d*>,<*c*,*e*>,<*c*,*f*>,<*d*,*f*>,<*e*,*f*>,<*g*,*h*>}$\cup I_A$

7. 设偏序集〈*A*, ≼〉，求 *A* 的极小元、最小元、极大元、最大元，设 *B*=｛ *b*, *c*, *d* ｝，求 *B* 的下界、上界、下确界、上确界.



解

极小元：a, b, c, g；

极大元：a, f, h；

没有最小元与最大元.

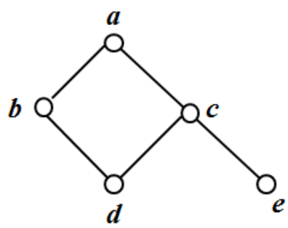
B 的下界和最大下界都不存在；

上界有 d 和 f,
最小上界为 d.

8. 设偏序集 $\langle A, R\rangle$ 的哈斯图如图所示.

(1) 写出 A 和 R 的集合表达式

(2) 求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元
解



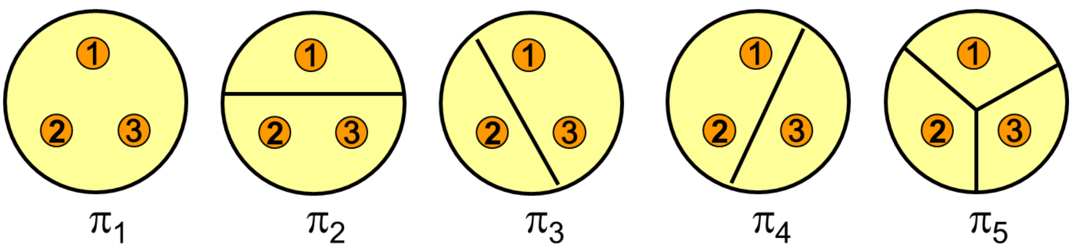
(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{<d,b>, <d,a>, <d,c>, <e,c>, <e,a>, <b,a>, <c,a>\} \cup I_A$

(2) 极大元和最大元是 a,
极小元是 d, e；
没有最小元.

9.给出 A＝{1, 2, 3}上所有的等价关系

解　先做出 A 的划分，从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1 对应 $\boldsymbol{E_A}$, π_5 对应 $\boldsymbol{I_A}$, π_2, π_3 和 π_4 分别对应 $\boldsymbol{R_2}, \boldsymbol{R_3}$ 和 $\boldsymbol{R_4}$.

$\boldsymbol{R_2}$**={<2,3>,<3,2>}**$\cup \boldsymbol{I_A}$

$\boldsymbol{R_3}$**={<1,3>,<3,1>}**$\cup \boldsymbol{I_A}$

$\boldsymbol{R_4}$**={<1,2>,<2,1>}**$\cup \boldsymbol{I_A}$

10.设 A={1,2,3,4}，在 $A\times A$ 上定义二元关系 R：

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解　A×A={<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>,<2,3>, <2,4>,<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>}

根据 <x,y> 中的 x+y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 将 A 划分成等价类：

A/R={{<1,1>}, {<1,2>,<2,1>},{<1,3>, <2,2>, <3,1>},{<1,4>,<2,3>,<3,2>,<4,1>}, {<2,4>, <3,3>, <4,2>},{<3,4>, <4,3>}, {<4,4>}}

11.设 R 是 A 上的二元关系，　设

$$S = \{<a,b> \mid \exists c(<a,c>\in R\wedge <c,b>\in R)\}.$$

证明如果 R 是等价关系，则 S 也是等价关系。

证　R 是 A 上的等价关系.

(1) 证自反　　任取 x,

$$x\in A \Rightarrow <x,x>\in R \Rightarrow \exists x\ (<x,x>\in R\wedge <x,x>\in R) \Rightarrow <x,x>\in S$$

(2) 证对称　　任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in S \Rightarrow \exists c(<x,c>\in R\wedge <c,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists c\ (<c,x>\in R\wedge <y,c>\in R) \Rightarrow <y,x>\in S$$

(3) 证传递　　任取$<x,y>$, $<y,z>$,

$$<x,y>\in S \wedge <y,z>\in S$$

$$\Rightarrow \exists c\ (<x,c>\in R\wedge <c,y>\in R) \wedge \exists d\ (<y,d>\in R\wedge <d,z>\in R)$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in S$$