概率论与数理统计

概率论基本概念

条件概率

- 全概率公式：

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)=\sum_{j=1}^{n}P(B_n)P(A|B_n)$$

- 贝叶斯公式：

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

独立性

两事件独立性

- 已知事件B发生，不影响事件A的概率

  $$P(A|B)=P(A)$$

  这时称A、B独立

- **定义：** 若两事件满足 $P(AB)=P(A)P(B)$ 则称A、B相互独立。
- 充要条件：A、B为两事件，且$P(A)>0$ 若二者独立，则$P(B|A)=P(B)$
- 若A、B独立，则下列各对事件也相互独立

  $$A \text{ and } \overline{B} \qquad \overline{A} \text{ and } B \qquad \overline{A} \text{ and } \overline{B}$$

- 判断独立性三种方法
  1. 根据定义 $P(AB)=P(A)P(B)$
  2. 计算条件概率 $P(A)=P(A|B)$
  3. **根据实际意义**
- 和事件简单：互斥、互不相容时 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

  积事件简单：相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

- 实例：

  扑克牌中抽牌——放回抽取，抽取相互独立；不放回，抽取不独立，第一次回影响第二次抽取的结果

- 对比：

  独立——$P(AB)=P(A)P(B)$

  互斥——$AB=\varnothing$

三事件独立性

- 定义：满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \end{cases}$$

  称三事件为**两两独立**的事件

  满足

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

  称事件**相互独立**

  相互独立可以得到两两独立，反之不行

- 两两独立但不相互独立:

  下图折叠成三棱锥。 三棱锥的三个面分别涂着红、黄、蓝三种颜色， 第④个面同时包含红、黄、蓝三种颜色。

  抛掷这个三棱锥， 记

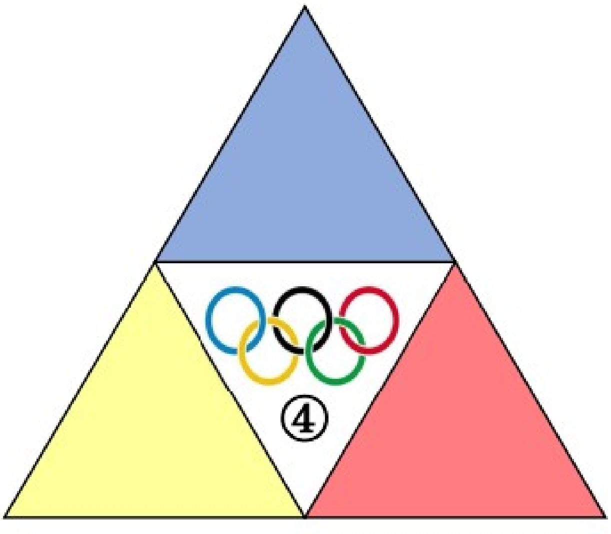
  A={向下的面中包含红色}，

  B={向下的面中包含黄色}，

  C={向下的面中包含蓝色}。

  可以验证

$$\begin{gathered} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C) \end{gathered}$$



- 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 为n 个事件，如果对于任意的$k(1<k\leq n)$ 和任意的 $1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k\leq n$ 有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

连续随机变量及其概率密度

- 分布函数$F(x)$ 和概率密度函数$f(x)$有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \mathrm{d}x$$

- **重要**：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

正态分布

- $\Phi(X)$ 为标准正态分布的分布函数
- 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 那么 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
- 由以上有 $F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
- 标准正态分布的**重要性**在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布。
- 3σ 准则：当 $X \sim N(0,1)$ 有

$$\begin{aligned} P(|X| \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826 \\ P(|X| \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544 \\ P(|X| \leq 3) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9974 \end{aligned}$$

- $X \sim N(0,1)$，若数 z_α 满足： $P\{X > z_\alpha\} = \alpha, 0 < \alpha < 1$ 称 z_α 为标准正态分布上的 α 分位点
- 由图形的对称性知： $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$

随机变量的函数的分布

- 求概率密度：已知 f_X 和 $Y = g(X)$，那么

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) = P(X < g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

求导可得概率密度函数

$$f_Y = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(g^{-1}(y))}{dy} = f_X(g^{-1}(y)) \cdot g^{-1\prime}(y)$$

多维随机变量及其分布

边缘分布

- 对于多元随机变量，其每个维度也为随机变量，也有各自的分布函数，称为**边缘分布函数**

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq +\infty) = F(x, +\infty) F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq +\infty, Y \leq y) = F(+\infty, y)$$

条件分布

- 条件分布是条件概率在另一种形式下的重复

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_i\}}{P\{Y = y_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

- 条件分布律是一种分布律，它具有分布律的一切性质
- 条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

- 称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y) dx$ 为 $Y = y$ 的条件下 X的**条件分布函数**
- 对于条件概率密度定义中，克服单点概率为零的困难：
  $P\{X \leq x | Y = y\} = \lim_{\epsilon \to 0^+} P\{X \leq x | y \leq Y \leq y + \epsilon\}$

$$P\{X \le x | y < Y \le y+\varepsilon\} = \frac{P\{X \le x, y < Y \le y+\varepsilon\}}{P\{y < Y \le y+\varepsilon\}} = \frac{\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x,y)dy\right)dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)dy}$$

$$= \frac{\varepsilon\int_{-\infty}^{x} f(x, y+\theta_1\varepsilon)dx}{\varepsilon \cdot f_Y(y+\theta_2\varepsilon)} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x, y+\theta_1\varepsilon)dx}{f_Y(y+\theta_2\varepsilon)} \to \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx}{f_Y(y)} (\varepsilon \to 0+)$$

二维正态分布

定义

- 概率密度

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in R \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0 \quad |\rho| \le 1$

- $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ 同时有 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，对于相关系数：正数正相关，负数负相关（可以认为正相关：X较大时，Y的趋势是取较大的数），0独立
- 若(X,Y)是连续型随机变量，对任意的 x, y ,有 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立，则称X和Y相互独立。
- 二维正态分布边缘分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- 二维正态分布条件分布 $Y = y$ 条件下 $X \sim N(\mu_3, \sigma_3^2)$ $X = x$ 条件下 $Y \sim N(\mu_4, \sigma_4^2)$ 其中

$$\mu_3 = mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\backslash\mathrm{qaud}\sigma_3 = \sigma_1(1-\rho^2)$$
$$\mu_4 = mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\backslash\mathrm{qaud}\sigma_4 = \sigma_2(1-\rho^2)$$

性质

- 线性性质：
  - 若常数 $a, b \quad a^2 + b^2 \ne 0$ 则 $aX + bY$ 服从一维正态
  - 常数 a, b, c, d 有 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \ne 0$ 则 $(aX + bY, cX + dY)$ 服从二维正态分布

独立性

- 两个随机变量相互独立时，它们的联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积。
- 若(X,Y)是连续型随机变量，对任意的 x, y ,有 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立，则称X和Y相互独立。