数学笔记

BUPT　王玹

Chapter 1

无穷级数

例 1.0.1:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots=2\\
&(2)\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)
\end{aligned}
$$

(1) 称为数项级数, (2) 为函数项级数, 其中 $R_n(x)$ 还可继续写下去 $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$

但注意：有限和的运算律不一定适用于无穷和的运算

$$
\begin{aligned}
eg: 0 &= 0+0+0+\cdots\\
&=(1+-1)+(1+-1)+(1+-1)+\cdots\\
&=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\\
&=1
\end{aligned}
$$

显然不成立，因此级数不一定可以加括号。

1 常数项级数

1.1 概念、性质、判敛原理

定义 1.1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *记作 S ，而* $\sum_{k=1}^{n} u_k$*，为部分和数列，记作 S_n 若 S_n 有极限，则称级数收敛。*

S_n 与 u_n 关系 $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$

发散分为两种:

(1) 发散到无穷 (2) 振荡发散 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$

级数收敛时可定义余项: $R_n = S - S_n = \sum_{l=n+1}^{\infty}$ 且有 $\lim_{x\to\infty} R_n = 0$

本质: 在有限和基础上取极限

性质:

$$(1)\text{若}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛, 则}\sum_{n=1}^{\infty}ku_n\text{收敛且为倍数关系.}$$

$$(2)\text{任意删去改变有限项, 不改变敛散性.}$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}u_n = 0\ \lim_{n\to\infty}R_n = 0.$$

$$(4)\text{若}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛, 可加括号且结果不变}$$

(4) 的推论, 若加括号发散, 则原级数发散, 去括号收敛, 原级数收敛, 但收敛级数去括号后不一定收敛

定理 1.1.1 (Cauchy 收敛原理). *级数收敛的充要条件是*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, s.t. \forall p \in \mathbb{N}_+, \text{当}n > N\text{时恒有}$$
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|$ **也可表示为** $|S_{n+p} - S_n|$ **或** $|S_m - S_n|$

例 1.1.1:

证明 $\frac{1}{n^2}$ **收敛** $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$**(p 级数)**

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots < \frac{1}{n}$$
$$\forall\varepsilon > 0 \cdots \text{取}N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\text{即可}$$

例 1.1.2:

调和级数: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

若发散, $\exists\varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+,$ 找$m, n > N\ |S_m - S_n| > \varepsilon_0$

取$\varepsilon_0 = 1/2, m = 2n, |S_m - S_n| = |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

(1) 转化为已知的级数如: 调和级数, p 级数.

(2) 加括号后发散, 则原级数发散.

(3) 放缩 **不等式:** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)}$

1.2 正项级数

性质:

- 部分和数列 S_n 单调递增。

定理 1.1.2. *正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有上界。*

定理 1.1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *与* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *为两正项级数，且* $a_n \leqslant b_n$ *则*

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *收敛则* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *收敛*

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *发散则* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *发散*

例 1.1.3:

证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ **发散**

$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$ *而* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ *发散，故发散*

三角函数也常用比较判别法:

例 1.1.4:

证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{x}{n}}{2^n}$ **收敛**

只要 n *充分大，就可保证* $\sin\frac{x}{n}$ *为正，又* $\sin\frac{x}{n} < \frac{1}{2^n}$*，收敛*

需要讨论的情况:

例 1.1.5:

判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}(a>0)$ **是否收敛**

先看一般项是否 $\to 0$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ \infty & |a|>1 \end{cases}$$

则

(1) $0 < a \leqslant 1 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+a^n} \neq 0$ 发散

(2) $a > 1, \frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 为收敛等比级数

p 级数： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

.

$$p \leqslant 1 \Rightarrow n^p \leqslant n \quad \frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\text{发散}$$

.

$$p > 1\text{可通过图像得} \quad \frac{1}{n^p} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \quad \text{则有}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \\ &< 1 + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \\ &= 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) < 1 + \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

$$\text{为证明}\sum_{n=1}^{\infty} u_n\text{收敛，找}p > 1, u_n < \frac{1}{n^p}\text{即可}$$

定理 1.1.4 (比较审敛极限形式).

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n\text{均为正项级数，} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$$

(1)$0 < \ell < +\infty$同敛散

(2)$\ell = 0$，v_n收敛，u_n收敛

(3)$\ell = \infty v_n$发散，u_n发散

本质为比较阶数

为比较阶数，可使用 Taylor 展开

例 1.1.6:

判敛散（p275 例 1.7）

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\frac{1}{n} - ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

定理 1.1.5 (积分审敛). *$\sum u_n$ 为正项级数,若 $f(x)$ 在 $[N,+\infty]$ 减,$u_n=f(n)$,则 $\sum_{n=N}^{\infty}$ 和 $\int_N^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有相同敛散性*

比较审敛需要其他参考比较，下给出根据级数本身判敛

定理 1.1.6 (D'Alembert(达朗贝尔) 准则 (检比法)). *正项级数 $\sum a_n$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$*

(1) $\lambda<1$，*则收敛*

(2) $\lambda>1$，*则发散*

(3) $\lambda=1$，**无效**

例 1.1.7:
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n}\quad 收敛$$

D'Alembert 为充分条件而非必要

定理 1.1.7 (Cauchy 判敛 (检根法)).

$$利用\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lambda\quad 条件同 D'Alembert$$

一般 $n!$ 用比值，n^n,a^n 可用根值，且能用比值法一定能用根值法，而能用根值法不一定能用比值

可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r$$

补充 Stirling 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}$$

只可用根式不能用比的例子:

例 1.1.8:
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{na}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}a = a \qquad \begin{cases} 0<a<1 \\ a>1 \\ a=1 \end{cases}$$

其他例子

例 1.1.9:

用来证明部分极限

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0 \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!}=0$$

判对应级数收敛即可

有关 u_n, u_{n+1}, n 部分结论

- u_n 收敛，推 $\frac{1}{{u_n}^2}$ 收敛

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{u_n}^2}{u_n}=\lim u_n=0$$

-

$$\sum\sqrt{u_n u_{n+1}} \qquad \leqslant \frac{u_n+u_{n+1}}{2}$$

-

$$\sum\frac{\sqrt{u_n}}{n} \qquad =\sqrt{u_n}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\frac{u_n+\frac{1}{n^2}}{2}$$

- $\{nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，问 $\sum\frac{u_n}{n}$ 是否收敛

$$\frac{u_n}{n}=n\cdot u_n\cdot\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{M}{n^2}\ (M\text{是上界})$$

例 1.1.10:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$$

$$\text{考虑}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{x^{\varepsilon}}=0(\varepsilon>0)$$

$$\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}=\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{6}}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}<\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$$

例 1.1.11:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}/\frac{1}{n}=1$$

例 1.1.12:

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}(x>0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x \quad \text{讨论}x$$

1.3 交错级数

定义 1.1.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n>0)\text{or}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\text{称为交错级数}$$

定理 1.1.8 (Leibniz). *若*

(i) $u_n > u_{n+1}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$

则级数收敛且

$$s \leqslant u_1 \qquad |r_n| \leqslant u_{n+1}$$

1.4 任意项级数

定理 1.1.9. *若* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ *收敛，则* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *收敛*

定义 1.1.3 (绝对收敛、条件收敛). *若* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ *收敛，称* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *绝对收敛*

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ *发散，* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *收敛，称* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *条件收敛。*

补充:

构造：$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$ 和 $w_n=\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)$ 则若 u_n 绝对，则 v_n，w_n 均收敛。若 u_n 条件，则 v_n，w_n 均发散。进一步的：

$$v_n=\begin{cases}u_n & u_n>0\\ 0 & u_n\leqslant 0\end{cases} w_n=\begin{cases}0 & u_n>0\\ -u_n & u_n\leqslant 0\end{cases}$$

其中 v_n 称为 u_n 的正部，记为 u_n^+，w_n 称为 u_n 的负部，记为 u_n^-

定理 1.1.10 (绝对收敛性质). *若* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *绝对收敛，和为* S*，任意交换级数各项次序后得到的新级数* $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ *和仍为* S*。*

对于条件收敛级数，可以证明可以控制交换后的级数收敛于任意值或发散

例 1.1.13:

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ **敛散性**

考虑绝对值 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 1$则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$绝对收敛，$0 < p \leqslant 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$条件收敛

例 1.1.14:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$敛散

先考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} / \frac{2^{n^2}}{n^2} = \frac{2^{2n+1}}{n+1} = +\infty$$

故 $\frac{2^{n^2}}{n!} \nrightarrow 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$ 发散。

例 1.1.15:

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ **敛散性**

$$|u_n| = \frac{\alpha^n}{n^s} > 0, \quad \frac{|u_n + 1|}{|u_n|} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^s} \cdot \frac{n^s}{\alpha^n} = \alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \to \alpha$$

(1) $\alpha < 1$ 绝对收敛

(2) $\alpha > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(3) $\alpha < 1$ $s > 1$ 绝对收敛，$0 < s \leqslant 1$ 条件收敛

定理 1.1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *绝对收敛，按它们的各项相乘得到的所有可能的乘积项* $a_n b_m$ *按任何次序排列得到的级数* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *也句对收敛且和为* AB

最常用的排序为对角线排序：$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \cdots$

例 1.1.16:

$|x| < 1 \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 绝对收敛，和为 $\frac{1}{1-x}$，自己与自己相乘

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum \cdot \sum = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdots x^{n-1}$$

	1	x	x^2
1	1	x	x^2
x	x	x^2	
x^2	x^2		

得到了新级数

可以根据此方法构造新的绝对收敛级数

补充:

定理 1.1.12 (young 不等式)**.** $a, b > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (1 < p, q < +\infty)$ 则 $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

例 1.1.17:

$\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^3$ **收敛，** $u_n \geqslant 0$ **证** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^{\frac{3}{4}}}$ **收敛**

$$\begin{aligned} u_n \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} &\leqslant \frac{{u_n}^3}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{{u_n}^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}} \end{aligned}$$

说明：欲找到 $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1$ 得到 $q = \frac{3}{2}$，得到了 $\frac{{u_n}^3}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \right)^{\frac{3}{2}}$

2 函数项级数

2.1 基本概念和定理

定义 1.2.1. $u_1(x), u_2(x) \cdots u_n(x) \cdots$ 为定义在 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为定义在区间 I 上的无穷级数。

函数项级数

$$\begin{cases} \text{幂级数} \\ Taylor\text{级数} \\ Fourier\text{级数} \end{cases}$$

定义 1.2.2. *如果 $x_0 \subseteq I$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛, 称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点; 如果 $x_0 \subseteq I$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 发散, 称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点。*
$D = \{$收敛点全体$\} =$ 收敛域

定义 1.2.3. *在收敛域上, 级数的和是 x 的函数 $S(x)$, 称 $S(x)$ 为和函数, 余项 $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$。*

有限个函数和会保持个函数的性质, 但无限个函数和可能不会保持各函数性质

2.2 幂级数

定义 1.2.4. *称 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 为标准幂级数, 收敛域为 $(-1, 1)$。*

定理 1.2.1 (Abel 定理)**.** *$\sum a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x \neq 0)$ 处收敛。在满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 处绝对收敛, 反之发散。*

有推论:
若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不仅在 $x = 0$ 一点收敛, 也不在整个数轴上收敛, 则必有一个完全确定的正数 R 有如下性质:

- 当 $|x| < R$ 绝对收敛
- 当 $|x| > R$ 发散
- 当 $|x| = R$ 可能收敛可能发散

定义 1.2.5. *称上述 R 为幂级数的收敛半径, $(-R, R)$ 为收敛区间。*
规定若仅在 $x = 0$ 处收敛, 收敛区间为 $x = 0$
若对所有 x 收敛, $R = \infty$

定理 1.2.2. *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 所有 $a_n \neq 0$(没有缺项) 设 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ (或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)*

(1) 当 $\rho \neq 0$, $R = \frac{1}{\rho}$

(2) 当 $\rho = 0$, $R = +\infty$

(3) 当 $\rho = +\infty$, $R = 0$

上述没有缺项是针对直到无限项都有缺失如: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n-1}$, 有限项中的缺失不影响。

例 1.2.1:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ $x=-1$ **收敛，问** $x=2$ **敛散性**

$$t=x-1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{在} x=-2 \text{处收敛。则在} t=1 \text{处收敛，即在} x=2 \text{处收敛。}$$

例 1.2.2:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

再讨论端点，确定收敛域。

例 1.2.3:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$ **收敛域**

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2 \; R=\frac{1}{2}$$

又 $x=0$ *发散* $x=1$ *收敛，故收敛域* $(0,1]$

缺项情况:

例 1.2.4:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n}$

该情况下只能把 x 看成参数后讨论

D’ Alembert: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{1}{2}|x|^2$

则 $|x|<\sqrt{2}$ *收敛，* $|x|>\sqrt{2}$ *发散，端点发散。*

例 1.2.5:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!x^{2n}}{n!}$ **收敛半径**

令 $x^2=t$ *原式变为* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!t^n}{n!}$ *后再求解即可。或* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ *直接求解收敛域*

定理 1.2.3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *收敛半径分别为* R_1 R_2 *令* $R=minR_1,R_2$

(1) *加减法* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_n=a_n\pm b_n)$

(2) 乘法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n_1} + \cdots)$

运算后收敛半径不会继承

若： $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x$ 它们的收敛半径都为 $+\infty$

但 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$ 收敛半径为 $R = 1$

定义 1.2.6 (一致收敛). *若存在一函数 $S : D \to \mathbb{R}$ 有*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+,\ \text{当} n > N(\varepsilon) \text{时} \forall x \in D \text{恒有} \ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

称级数在 D 上一致收敛。

定理 1.2.4 (Cauchy 一致收敛原理). *充要条件：* $\forall \varepsilon, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+ s.t. \forall n, p \in \mathbb{N}_+$当$n > N(\varepsilon)$时$\forall x \in D$

$$|S_{n+p} - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Cauchy 一致收敛原理在使用中不便，但可据此推出更常用的 Weierstrass 准则 (M 准则)

定理 1.2.5 (Weierstrass 准则 (M 准则)). *如存在一收敛的级数* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_+\ \forall x \in D$ *有* $|u_n(x)| \leqslant M_n$ *那么* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *在 D 上一致收敛。*

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的优级级数或控制级数

定理 1.2.6 (连续性). $u_n \in C(1)$, $n \in \mathbb{N}_+$, *若* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *在区间上一致收敛于* $S : I \to \mathbb{R}$ $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x))$ *则* $S \subset C(1)$ 连续性

即为：

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)$$

极限与求和符号可以互换位置。

定理 1.2.7 (可积性). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows S : [a, b] \to \mathbb{R}$ *则 S 可积*

$$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t))dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt$$

定理 1.2.8 (可导性). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *在 I 处处收敛于 S 且* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ *在 I 上一致收敛于 $\sigma : I \to \mathbb{R}$ 则和函数 $S \in C^{(1)}(I)$ 且*

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sigma x$$

上述性质定理说明，在特定条件下可对级数逐项求极限、求导、积分

定理 1.2.9 (内闭一致收敛性). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *收敛半径为 R，$0 < R \leqslant \infty$，则它在收敛区间内任何闭子区间 $[a,b]$ 上都一致收敛。*

特别的，对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和函数 $S(x)$ 收敛半径为 R

(1) $S(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 连续

(2) $S(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 有连续导数，$S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

(3) $S(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 可积 $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 积分下限一般取中心点

推论：幂级数在收敛区间任意次可导、可积，且半径 R 不变

定理 1.2.10 (性质). *若 $[a,b] \subset (-R,R)$* $\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(b^{n+1} = a^{n+1})$

利用幂级数求简单级数的和：

例 1.2.6 (p297 5.):

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ **在** $[-q,q]$ **上收敛，求** $\ln(1+x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

积分一次有:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

在收敛域上求和函数：

(1) 求 $R \to D$

(2) 求 $(-R,R)$ 的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow[\text{逐项求导}]{\text{逐项积分}} \text{可求和级数} \xrightarrow[\text{积分}]{\text{求导}} \text{变回} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(3) 求收敛域边界级数

例 1.2.7:

求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

或:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\text{逐项积分}$$

例 1.2.8:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- *收敛域* $(-\infty, +\infty)$
- *设* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *则*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x)$$

对于函数 $S(x)$ *有*

$$\frac{d}{\mathrm{d}x} S(x) = S(x)$$

级数还可用来求极限:

例 1.2.9:

求极限 $\lim_{n} \to \infty \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n}\right)$

$$S_n = \frac{1}{a} + \cdots + \frac{n}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$$

作幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ *收敛半径为* 1, $x = \frac{1}{a}$

常用已知级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a x^{2n} = \frac{a}{1-x^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = ln(1+x)$$

还可利用函数项级数求某些数项级数的值

例 1.2.10:

求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$

利用幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n+1} \right)$$

带入 $x = \frac{1}{2}$ *即可*

例 1.2.11:

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$

出现 $n!$ *故联想到* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ (x \in \mathbb{R})$

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

积分得

$$\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n!} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$$

又 $\displaystyle\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x = 1$

幂级数应用

求某些无法用初等函数表示的积分

$$\begin{aligned}
&\int e^{x^2}\mathrm{d}x \\
=&\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)}{n!}\mathrm{d}x \\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}
\end{aligned}$$

2.3 Taylor 级数 (函数的幂级数展开)

定理 1.2.11. *设 $f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 类函数，则 f 可展开成 Taylor 级数的充要条件为*

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

且此展式唯一

求 $S(x)$在x_0 处的 n 阶导数

利用 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(x)}{n!}\Longrightarrow S^{(n)}(x)=a_n n!$

定理 1.2.12 (推论)**.** *$f(x)$在$U(x_0)$ 处有定义，是 C^∞ 类函数，$f^{(n)}$ 在 (x_0-R,x_0+R)***一致有界***，即 $\exists K>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$ 有 $\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant K$ 那么即可在 x_0 处展开为 Taylor 级数*

对于不好求是否一致有界的，可先写出级数，再求级数的收敛半径

例 1.2.12:

$f(x)=(a+x)^\alpha$

可求出 $(x+1)S'(x)=\alpha S(x)$ *且* $S(0)=1$ *得出*

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

牛顿二项式展开

特别的：当 $\alpha=-1,\ \pm\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \\
\sqrt{1+x}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \\
\frac{1}{1-x^2}&=(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}
\end{aligned}$$

此方法获取新级数后，要讨论收敛域（收敛区间端点）

例 1.2.13:
$\frac{x}{x^2-2x-3}$
将原式写成 $\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}+\frac{3}{4}\frac{1}{x-3}$
这种结构 $\longrightarrow \frac{首项}{1-公比}$ 等比级数结构

例 1.2.14:
将 $f(x)=\frac{x-1}{4-x}$ **展开成泰勒级数并求** $f^{(n)}(1)$

利用泰勒级数与高阶导数的关系

$$\frac{1}{4-x}=\cdots=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n}\qquad |4-x|<3$$
$$\frac{x-1}{4-x}=(x-1)\cdot\frac{1}{4-x}$$
$$a_n=\frac{f^{(n)}(x-x_0)}{n!}=\frac{1}{3^n}$$

例 1.2.15 (估计误差):
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}$ **求** $\sin\frac{\pi}{20}$ **近似，估计误差**

$$R_n(x)=\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{20})^5\cdots$$

$R_n(x)$ 交错级数，余项小于余项的有限项

$$R_n<\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{20})^5$$

定理 1.2.13 (Euler 公式). 对于复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n+iv_n$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，称1.2.13收敛且为 $u+iv$ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n+iv_n|$ 收敛，称其绝对收敛。则有

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

特别的
$$\left|e^{x+iy}\right|=|e^x(\cos x+i\sin y)|=e^x$$

对于非线性方程

例 1.2.16:

例 $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$

如果 y 为 x 的幂级数，可能有解 设 $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 代入，比较系数。

2.4 Fourier 级数

定理 1.2.14. *周期为 π 的周期函数，在周期内仅有有限个第一类间断点，若展开形式为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx + b_n \cos nx$ 的三角级数那么*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$$

级数连续部分收敛到 $f(x)$，间断点收敛到左右极限的平均值。

Fourier 级数不一定具有唯一性。

Fourier 级数是三角多项式对 f 的最佳均方逼近（L^2 范数）**奇偶函数的 Fourier 级数**

- 奇函数

$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$$

- 偶函数

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x$$
$$b_n = 0$$

非周期函数的周期性延拓

$f(x)$ 定义在 $[0, \pi]$ 延拓成 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $F(x)$ 再周期性延拓成周期为 2π 的函数即

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & [0, \pi] \\ g(x) & [-\pi, 0) \end{cases}$$

且 $F(x + 2\pi) = F(x)$

- 奇延拓 $g(x) = -f(-x)$ $\quad f(x) \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

- 偶延拓 $g(x) = f(-x)$ $\quad f(x) \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

因此:

~~只有周期函数才可展开成 Fourier 级数~~

~~在 $(0,\pi]$ 的展开式唯一~~

以 2l 为周期的 Fourier 展开

Scaling 变换

周期为 $2l$ 的函数:

$$\frac{z}{\pi}=\frac{x}{l}\Leftrightarrow z=\frac{\pi}{l}\cdot x$$

改变为周期为 2π 的函数 $F(z)$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

Chapter 2

多元函数微分学

1 n 维 Euclid 空间

定义 2.1.1 (点列的极限). *设 $\mathbf{x}_k$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列，其中 $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$，又设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一固定点，若当 $k \to \infty$ 时 $\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \to 0$，即*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = \mathbb{N}_+,\ \text{使得} \forall k > N,\ \text{恒有}\ \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < \epsilon$$

称点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 的极限存在，也称收敛于 $\mathbf{a}$

定义 2.1.2 (聚点). *E 为一点集 $\vec{P}$ 为任意点，若 $\vec{P}$ 的任意邻域总有无限多点属于点集 E，则称 $\vec{P}$ 为 E 的聚点*

说明:

- 内点一定是聚点
- 边界点可能是聚点
- E 的聚点可能属于 E 也可能不属于 E

定理 2.1.1 (Bolzano-Weierstrass 定理). *有界点列必有收敛子列.*

定义 2.1.3 (Cauchy 点列). *设 $\mathbf{x}_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列，若*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_+,\ \text{使得} \forall k > N,\ p \in \mathbb{N}_+ \text{恒有，}\ \|x_{k+p} - x_k\| < \epsilon$$

称其为 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点列或 Cauchy 点列.

定义 2.1.4. *A 聚点的集合称为 A 的**导集**，记作 A'. 集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 称为 A 的**闭包**. 若 $\mathbf{a} \in A$ 但 $\mathbf{a} \notin A'$ 称 a 为 A 的**孤立点**. 若 $A' \subseteq A$ 称 A 为**闭集**.*

例 2.1.1:

设 $f\left(xy, \dfrac{y^2}{x}\right) = y^2 + x^2$**，求** $f\left(\dfrac{v^2}{u}, uv\right)$

法一：求 $f(u,v)$

法二：令 $xy=\dfrac{v^2}{u}\quad \dfrac{y^2}{x}=uv\quad\Rightarrow\quad y=v\quad x=\dfrac{v}{u}$

2 多元函数的极限于连续

例 2.2.1:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$$

法一：

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|x^3|}{x^2}+\frac{|y^3|}{y^2}\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}\to 0$$

极坐标变换

$$x=\rho\cos\theta\quad y=\rho\sin\theta\quad\begin{cases}x\to 0\\ y\to 0\end{cases}\Rightarrow 0\neq\rho\to 0$$

$$f(x,y)=\left|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\right|<2\rho\to 0$$

采用极坐标变换是因为出现了 x^2+y^2 这样的结构

反例：$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x+y}$ 若采用极坐标，最后分母会存在 cos 可能为 0 使分式无意义，无法判断极限是否存在

例 2.2.2:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}$ **是否存在**

原式 $=\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x+y}$，取 $y=x^\alpha-x$ 为使 $x+y$ 仅剩一项方便约分

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^\alpha}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2-x^{3-\alpha})\tag{2.1}$$

与 α 有关，不存在

3 多元函数偏导数与全微分

3.1 多元数量值函数的偏导数

定义 2.3.1. *如果二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x,y 的偏导数都存在，称其可偏导。*

例 2.3.1:

求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x \\
&= \frac{x}{r}
\end{aligned}
$$

同理

$$
\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}
$$

一元函数和多元函数区别:

- 一元：可导 ⇒ 连续
- 多元：可导不一定连续，只在 x, y 方向上极限存在，其余方向不一定。

3.2 高阶偏导数

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{xx}
$$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}$ 混合偏导数 (注意下标顺序)

定理 2.3.1. *如果 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y \partial x}$ 在 D 上连续，二者相等。*

由于初等函数始终连续，因此可以随意选择求导顺序。

例 2.3.2:

$z=f(u), u=\varphi(u)+\int_x^y P(t)dt$，**确定** u **是** x,y **的函数，其中** f,φ **可微，** $P(t)$, $\varphi'(u)$ **连续，** $\varphi'(u)\neq 1$，**求** $P(y)\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\frac{\partial z}{\partial y}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + P(x) \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - P(y)
\end{aligned}
$$

可得

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P(x)}{1-\varphi'(u)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-P(y)}{1-\varphi'(u)}
$$

带入有 $P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

3.3 微分

偏微分:

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+o(\Delta x)$$
$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f_y(x,y)\Delta y+o(\Delta y)$$

等式左边称为偏增量。
全微分:

$$z=f(x,y)\qquad \Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)$$

对应的称为全增量

定义 2.3.2. *Δz 可表示为 $A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 其中 A,B 不依赖 $\Delta x,\Delta y$ 而与 x,y 有关 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\rho\to 0$，称 $dz=A\Delta x+B\Delta y$ 为在点 (x,y) 的全微分。*

可微 $\to$ 连续
可微 $\to$ 偏导数存在且 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$
如果偏导数连续则可微

习惯上记全微分 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ **二元全微分等于两偏微分之和，称为叠加原理（三元以上也适用）**

例 2.3.3:

$$f(x)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 连续且偏导数存在，偏导在 $(0,0)$ 不连续但在 $(0,0)$ 可微。

连续：易证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$
偏导数，用定义

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)\ f(0,0)}{x}=0$$
$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y,0)\ f(0,0)}{y}=0$$

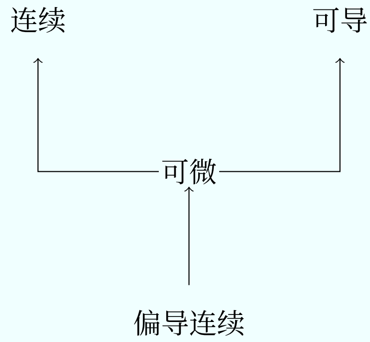
对于任意 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=0-$

$\dfrac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^3}$，由于 θ 是任意的，极限不存在，不连续同理有 $f_y(0,0)$ 不连续。
微分：

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\rho}=\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

偏导数连续仅仅是可微的充分条件!



例 2.3.4:
$f(x,y,z)=\dfrac{x\cos y+y\cos z+z\cos x}{1+\cos x+\cos y+\cos z}$ 求 $df(0,0,0)$

$$f(0,0,0)=\frac{x}{3+\cos x}\qquad f_x=\frac{1}{4}$$

则 $df|_{(0,0,0)}=\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}dy+\frac{1}{4}dz$

3.4 多元复合函数偏导数与微分

链式法则

最简单的情况 $z=f(u,v)$ $u=\Phi(t)$, $v=\Psi(t)$，t 有一增量Δt，f 可微

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho)$$

$$\Delta u\to 0\quad \Delta\to 0\ \Rightarrow\ \rho\to 0$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}=0$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dr] & \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & v \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

上述中间变量为一元函数，还可推广到多元函数

$$z = f(\Phi(x,y), \Psi(x,y))$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

例 2.3.5:

$w = f(x+y+z, xyz)$，f **有二阶连续偏导数，求** $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot yz$$

为表示方便引入记法：

$$f_1' = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} \qquad f_{12}'' = \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u \partial v}$$

类似的有 f_2'，f_{11}''，f_{22}''

例 2.3.6:

$u = f(x,y)$ **二阶偏导连续，求** $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$，$\theta = \arctan\frac{y}{x}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

全微分形式不变性

$z = f(u,v)$ 其中 u，v 满足 $u = \Phi(x,y)$，$v = \Psi(x,y)$

可以证明:

$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

两式相等相等，具有形式不变性。

例 2.3.7:

$e^{-xy} - 2z + e^z = 0$，**求** $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

两边取全微分 $-e^{-xy}d(xy)-2dz+e^{z}dz=0$

$$(e^{z}-2)dz=e^{xy}(y\mathrm{d}x+xdy)$$

$$dz=\frac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}\mathrm{d}x+\frac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}dy$$

例 2.3.8:

$f(x,y)|_{y=x^2}=1,\ f_1'(x,y)|_{y=x^2}=2x$ **求** $f_2'(x,y)|_{y=x^2}$

$f(x,x^2)=1$ 对 x 求导

$$f_1'(x,x^2)+2x\cdot f_2'(x,x^2)=0$$

$$f_1'(x,x^2)=2x$$

$$f_2'(x,x^2)=-1$$

例 2.3.9:

$z=f(x,y)$ **在** $(1,1)$可微，且$f(1,1)=1$, $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)}=2$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)}=3$. $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，**求** $\frac{d}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)|_{x=1}$

设

$$\phi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)|_{x=1}&=3\varphi^2(x)\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x}|_{x=1}\\&=3\left[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))\right]|_{x=1}\\&=51\end{aligned}$$

3.5 隐函数的导数

一个方程 $F(x,y)=0$ 时

定理 2.3.2. · $P(x_0,y_0)$ 某一邻域 (u_1) 内 $F(x,y)$ 有连续偏导数

· $F(x_0,y_0)=0$

· $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 P 的某一邻域 (u_2) 内恒能唯一确定一连续且有连续偏导数的函数 $y=f(x)$ 满足 $y_0=f(x_0)$ 且有

$$\frac{dy}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

说明：u_1 和 u_2 不一定相等，满足 $u_2\subset u_1$

对于三元函数 $F(x,y,z)=0$ 及以上，同样有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

例 2.3.10:

$x^2+y^2+z^2-4z=0$ **求** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

法一 隐函数求导

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

1) *对* x *求导*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2-z-x\left(2-\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(2-z)^2}=\frac{2-z-2x\cdot\frac{x^2}{2-z}}{(2-z)^2}$$

2) *直接对等式求导*

$$2+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{((2-z)^2+x^2)}{(2-z)^2}$$

法二 公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z-2}$$

继续求解即可

法三 全微分

$$dz=\frac{x}{2-z}\mathrm{d}x+\frac{y}{2-z}dy$$

例 2.3.11:

$F(x,y)$ **具有连续偏导，已知** $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$ **求** dz

令 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=G(x,y,z)=0$

$$G_x=F_1'\frac{1}{z}\qquad G_y=F_2'\frac{1}{z}$$

$$G_z=F_1'(-\frac{x}{z^2})+F_2'(\frac{y}{z^2})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$$

任意方向导数都存在也不一定可微

$$eg:\begin{cases}f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ f(x,y)=0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3.6 Taylor

$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续且有直到 $n+1$ 阶连续偏导数

$$
\begin{aligned}
&f(x+\Delta x,y+\Delta y)\\
=&f(x_0,y_0)+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\cdot\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots\\
+&\frac{1}{n!}\cdot\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)
\end{aligned}
$$

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)=\sum_{p=0}^{m}C_m^p\Delta x^p\Delta y^{m-p}\frac{\partial^m f(x_0,y_0)}{\partial x^p\partial y^{m-p}}$$

定义 2.3.3 (Hesse 矩阵). $\mathbf{H}_f(\vec{x_0}+\theta\Delta\vec{x})=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}\bigg|_{(\vec{x_0}+\theta\Delta\vec{x})}$

那么对于二阶 Taylor 工智可以写成矩阵形式

$$f(\vec{x}_0+\Delta\vec{x})=f(\vec{x}_0)+(\nabla f(\vec{x}_0),\Delta x)+\frac{1}{2!}(\Delta\vec{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_f(\vec{x}_0)\Delta\vec{x}$$

定义 2.3.4. *f 在 Ω 内连续，称其为 Ω 上的 $C^{(0)}$ 类函数，记为 $f\in C^{(0)}(\Omega)$，若 f 在 Ω 内有连续的 m 阶偏导数，称其为 $C^{(m)}$ 类函数。记作 $f\in C^{(m)}(\Omega)$*

定理 2.3.3 (极值的必要条件). 设 n 元函数 f 在 $\mathbf{x}_0$ 可微，且 $\mathbf{x}_0$ 为 f 的极值点，则必有 $\nabla f(\mathbf{x}_0)$

定理 2.3.4. *当 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 正定，取极小值，负定取极大值*

设 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)=\begin{pmatrix} A & B\\ B & C\end{pmatrix}$ 则有

- $A>0$, $AC-B^2>0$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 正定，取极小值
- $A<0$, $AC-B^2>0$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 负定，取极大值
- $AC-B^2<0$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 不定，不是极值
- $AC-B^2=0$ 临界状况，只根据二阶 Taylor 公式无法判断

定理 2.3.5 (Lagrange 乘数法). *$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$ 下取得极值，有*

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y(x_0,y_0)=0\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

记 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ $L(x,y,z)$ 无约束极值即为 $f(x,y)$ 取约束极值

对于多个约束，

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

3.7 几何应用

$$
\text{柱面}\begin{cases}\text{2圆柱面}\\ \text{抛物柱面}\end{cases}\quad \text{二次曲面}\begin{cases}\text{椭圆锥面}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2 \quad \text{椭球面}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ \text{单叶双曲面}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ \text{双叶双曲面}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ \text{椭圆抛物面}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z\\ \text{双曲抛物面}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z\end{cases}
$$

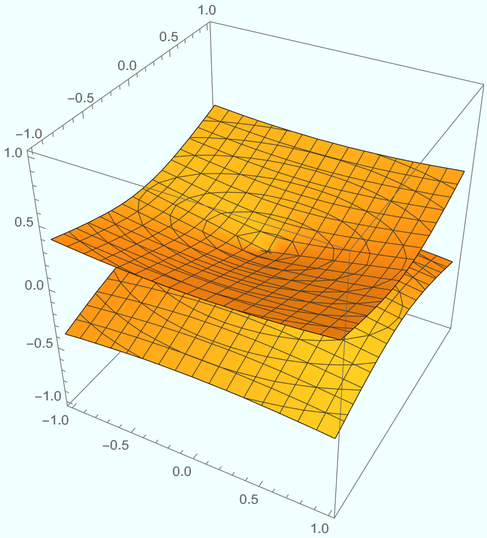


图 2.1: 椭圆锥面

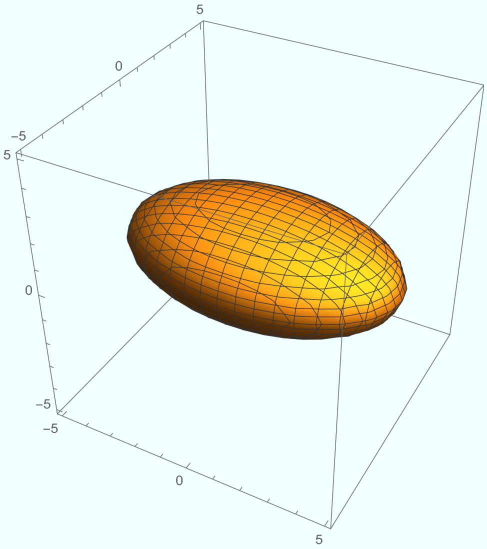


图 2.2: 椭球面

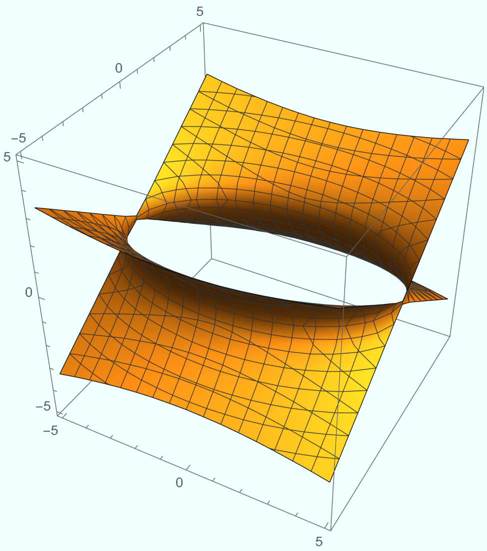


图 2.3: 单叶双曲面

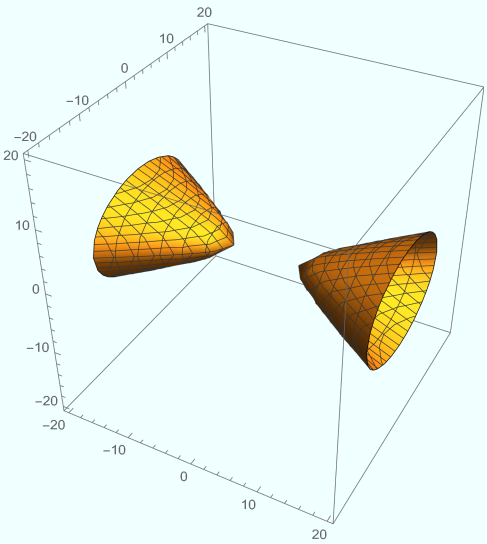


图 2.4: 双叶双曲面

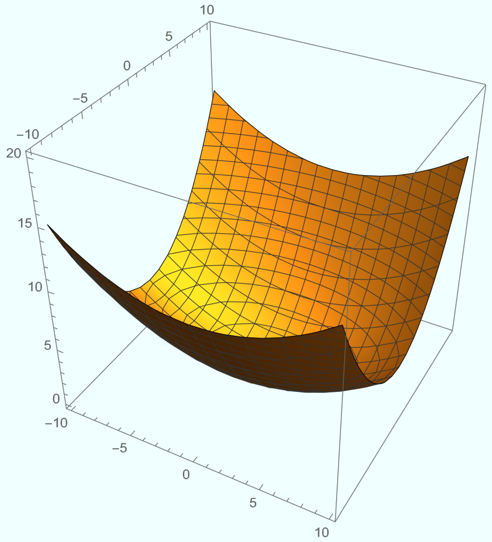


图 2.5: 单叶双曲面

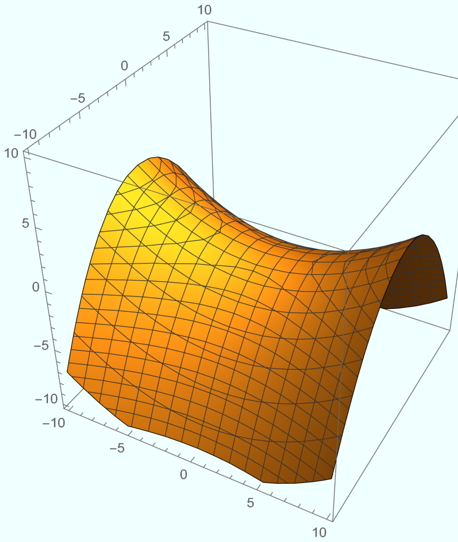


图 2.6: 双叶双曲面

对于空间曲面的一般方程 $F(x,y,z)=0$ F 对任意变量偏导连续且不同时为 0，其切平面

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$$

法线为 $\dfrac{x-x_0}{f_x}=\dfrac{y-y_0}{f_y}=\dfrac{z-z_0}{f_z}$
特别的当 $z=f(x,y)$ $\hat{n}=(f_x,f_y,1)$or $\hat{n}=(-f_x,-f_y,-1)$ **后者更常用**
切平面 $z-z_0=f_x\cdot(x-x_0)+f_y\cdot(y-y_0)$
右式为 z 的全微分，左式为**切平面**的改变量

4 重积分

4.1 基本概念

积分概念

$$\int_\Omega f(M)\,d\Omega=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}f(M)\Delta\Omega_i$$

估计二重积分的大小

利用几何意义

- 求积分域的大小 S_D
- 求 $f(x,y)$ 的最大最小值
- $f_{min}S_D\leqslant\iint\leqslant f_{max}S_D$

例 2.4.1:

不做计算估计 $\iint_D e^{(x^2+y^2)}\,d\sigma$ **的值，积分域为椭圆闭区域** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$
\begin{aligned}
S_\sigma &= ab\pi \\
0 \leqslant x^2+y^2 &\leqslant a^2 \\
1=e^0 \leq e^{x^2+y^2} &\leq e^{a^2} \\
\text{那么 } \sigma \leq \iint_D e^{(x^2+y^2)}\,d\sigma &\leq e^{a^2} \\
ab\pi \leq \iint_D e^{(x^2+y^2)}\,d\sigma &\leq ab\pi e^{a^2}
\end{aligned}
$$

例 2.4.2:

判断 $\iint_{\sigma\leq|x|+|y|\leq1}^{\ln\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x dy}$ **的正负**

当 $\sigma \leq |x|+|y| \leq 1$

$$0 < x^2+y^2 \leq (|x|+|y|)^2 \leq 1.$$

故 $\ln(x^2+y^2)<0$ *因此*

$$\iint_{\sigma\leq|x|+|y|\leq1}^{\ln\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x dy} < 0.$$

4.2 直角坐标重积分计算

例 2.4.3:

$\iint_D x^2e^{-y^2}\mathrm{d}x dy$ **其中** D **是以** $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ **为顶点的三角形**

由于 $\int e^{-y^2}$ *无法用初等函数表示，故要考虑积分次序*

$$
\begin{aligned}
\int_D x^2e^{-y^2}\mathrm{d}x dy &= \int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^{-y^2}\frac{y^3}{3}dy = \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}dy^2 = \frac{1}{6\left(1-\frac{2}{e}\right)}
\end{aligned}
$$

在化二重积分为二次积分时，为了计算简便，需要选择适当的二次积分的次序。这时，既要考虑积分区域 D 的形状，又要考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特性。必要时还可以交换积分序.

例 2.4.4:

计算积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$

注意到 $\int e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示，故先改变积分次序

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} e^{\frac{y}{x}}\, dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(e-e^{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e} \end{aligned}$$

定理 2.4.1. *如果闭区域 D 关于 x 轴对称，D_1 为 D 在 x 上方的部分*
如果函数 $f(x,y)$ 关于 y 为偶函数

$$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\, d\sigma.$$

如果函数 $f(x,y)$ 关于 y 为奇函数

$$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = 0.$$

....

例 2.4.5:
证明公式 $\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x f(y)\, dy = \int_a^b f(y)(b-y)\, dy$
将左式化为重积分，积分区域

$$D = \{(x,y)\,|a \le x \le b,\ a \le y \le x\}.$$

交换积分次序后

$$D = \{(x,y)\,|a \le y \le b,\ a \le x \le b\}.$$

于是

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x f(y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(y)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(y)(b-y)\, dy.$$

....

例 2.4.6:
$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$，求 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)dy$
由于 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(y)f(x)\mathrm{d}y$ 不能直接积分，故改变积分次序

$$令 I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \int_0^y f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^x f(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2I &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^x f(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \left[\left(\int_0^x + int_x^1\right) f(y)dy\right] \\
&= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y = A^2
\end{aligned}
$$

4.3 二重积分变换

定理 2.4.2. *设 $f(x,y)$ 在xoy 平面上的闭区域 D 上连续，变换 $T: x = x(u,v)$，$y = y(u,v)$ 将 uov 平面上的闭区域 D' 变为 xoy 平面上的 D 且满足*

- $x(u,v)$，$y(u,v)$ *在 D' 上具有一阶连续偏导数*
- *在 D' 上 Jaccobi* $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$
- *变换 $T: D \to D'$ 是一对一的*

则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f[x(u,v)\,y(u,v)] \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例 2.4.7:

计算 $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的区域

广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$$

其中 $a>0,\ b>0,\ r\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$

$D \to D' = \{(r,\theta)\,|0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = abr \neq 0$

$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \sqrt{1-r^2}abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\pi ab$

定理 2.4.3. *极坐标变换*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

例 2.4.8:

计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **其中** D **是由中心在原点，半径为** a **的圆周构成的闭区域**

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{q} e^{-r^2}r\mathrm{d}r\\ &= \pi\left(1-e^{-a^2}\right).\end{aligned}$$

由此可得一重要积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{2.2}$$

事实上当 D 为 $\mathbb{R}^2$ 时

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = 4\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \tag{2.3}$$

利用上例结果

$$4\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \lim_{a\to\infty}\pi\left(1-e^{-a^2}\right) = \pi \tag{2.4}$$

例 2.4.9:

设函数 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续且恒大于零，证明不等式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq (b-a)^2$$

左式先化为二重积分的形式

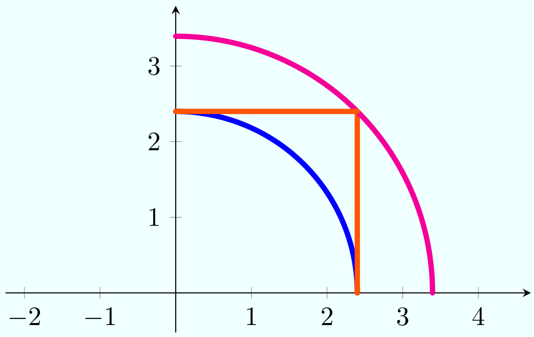
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)} = \mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理亦有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)} = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x &= \iint_D\left(\frac{f(x)}{f(y)}\frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_D \frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\geq \iint_D \frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2(b-a)^2.\end{aligned}$$

即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq (b-a)^2$



例 2.4.10:

求广义积分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}$

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left\{(x,y)\,|x^2+y^2 \le R^2\right\} \\
D_2 &= \left\{(x,y)\,|x^2+y^2 \le 2R^2\right\} \\
S &= \{(x,y)\,|0 \le x \le R,\ 0 \le y \le R\}
\end{aligned}
$$

并且对上述所有区域都有 $\{x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

显然有 $D_1 \subset S \subset D_2$，*且有* $e^{-x^2-y^2} > 0$

$$
\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_S e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

又

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_S e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^R e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_0^R e^{-y^2}\mathrm{d}y = \left(\int_0^R e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \int_0^R e^{-r^2} r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right).
\end{aligned}
$$

同理 $I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$

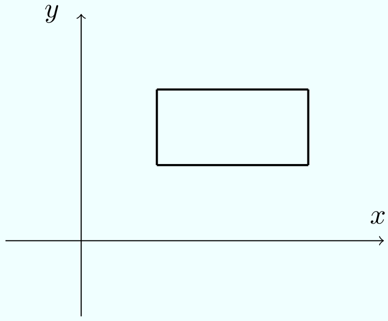
$$
I_1 < I < I_2 \ \Rightarrow\ \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) < \left(\int_0^R e^{-x^2}\mathrm{d}x\right) < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)
$$

$$
R \to \infty \quad \Rightarrow \quad I_1 \to \frac{\pi}{4},\ I_2 \to \frac{\pi}{4}
$$

故当 $R\to\infty$ *时* $I\to\frac{\pi}{4}$，*即* $\left(\int_{-}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi}{4}$ *所求广义积分* $\int_0^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

重要结论

此例用到了一重要结论：



当二重积分边界为常数，与 x, y 无关时， 此时

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_c^d g(y)\mathrm{d}y\int_a^b h(x)\mathrm{d}x\\&=\left(\int_c^d g(y)\mathrm{d}y\right)\cdot\left(\int_a^b h(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

其中 g，h 为将 $f(x,y)$ 中 x，y 分离得到的

同样的可以由乘积转化为重积分。