

数学笔记

BUPT 王玓

Chapter 1

无穷级数

例 1.0.1:

$$(1) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 2$$

$$(2) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

(1) 称为数项级数, (2) 为函数项级数, 其中 $R_n(x)$ 还可继续写下去
 $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$

但注意: 有限和的运算律不一定适用于无穷和的运算

$$\begin{aligned} eg: 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 + -1) + (1 + -1) + (1 + -1) + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

显然不成立, 因此级数不一定可以加括号。

1 常数项级数

1.1 概念、性质、判敛原理

定义 1.1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 记作 S , 而 $\sum_{k=1}^n u_k$, 为部分和数列, 记作 S_n 若 S_n 有极限, 则称级数收敛。

S_n 与 u_n 关系 $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

发散分为两种:

- (1) 发散到无穷 (2) 振荡发散 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

级数收敛时可定义余项: $R_n = S - S_n = \sum_{l=n+1}^{\infty} u_l$ 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$

本质: 在有限和基础上取极限

性质:

- (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 收敛且为倍数关系.
 (2) 任意删去改变有限项, 不改变敛散性.
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.
 (4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 可加括号且结果不变

(4) 的推论, 若加括号发散, 则原级数发散, 去括号收敛, 原级数收敛, 但收敛级数去括号后不一定收敛

定理 1.1.1 (Cauchy 收敛原理). 级数收敛的充要条件是

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, s.t. \forall p \in \mathbb{N}_+, \text{当 } n > N \text{ 时恒有}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right|$ 也可表示为 $|S_{n+p} - S_n|$ 或 $|S_m - S_n|$

例 1.1.1:

证明 $\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (p 级数)

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots < \frac{1}{n}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \cdots \text{取 } N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \text{ 即可}$$

例 1.1.2:

调和级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

若发散, $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \text{找 } m, n > N |S_m - S_n| > \varepsilon_0$

$$\text{取 } \varepsilon_0 = 1/2, m = 2n, |S_m - S_n| = |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

- (1) 转化为已知的级数如: 调和级数, p 级数.
- (2) 加括号后发散, 则原级数发散.
- (3) 放缩 **不等式**: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(n+1)}$

1.2 正项级数

性质:

- 部分和数列 S_n 单调递增。

定理 1.1.2. 正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有上界。

定理 1.1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为两正项级数, 且 $a_n \leq b_n$ 则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

.....

例 1.1.3:

证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1} \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ 发散, 故发散}$$

三角函数也常用比较判别法:

.....

例 1.1.4:

证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{2^n}$ 收敛

只要 n 充分大, 就可保证 $\sin \frac{x}{n}$ 为正, 又 $\sin \frac{x}{n} < \frac{1}{2^n}$, 收敛

需要讨论的情况:

.....

例 1.1.5:

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ ($a > 0$) 是否收敛

先看一般项是否 $\rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ \infty & |a| > 1 \end{cases}$$

则

(1) $0 < a \leq 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} \neq 0$ 发散

(2) $a > 1$, $\frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 为收敛等比级数

p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$$p \leq 1 \Rightarrow n^p \leq n \quad \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ 发散}$$

$p > 1$ 可通过图像得 $\frac{1}{n^p} < \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^p}$ 则有

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \\ &< 1 + \int_1^2 \frac{dx}{x^p} + \int_2^3 \frac{dx}{x^p} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^p} \\ &= 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p} = 1 + \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) < 1 + \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

为证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 找 $p > 1, u_n < \frac{1}{n^p}$ 即可

定理 1.1.4 (比较审敛极限形式).

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 均为正项级数, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$$

(1) $0 < \ell < +\infty$ 同敛散

(2) $\ell = 0$, v_n 收敛, u_n 收敛

(3) $\ell = \infty$ v_n 发散, u_n 发散

本质为比较阶数

为比较阶数, 可使用 Taylor 展开

例 1.1.6:

判敛散 (p275 例 1.7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] = \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

定理 1.1.5 (积分审敛). $\sum u_n$ 为正项级数, 若 $f(x)$ 在 $[N, +\infty]$ 减, $u_n = f(n)$, 则 $\sum_{n=N}^{\infty}$ 和 $\int_N^{+\infty} f(x) dx$ 有相同敛散性

比较审敛需要其他参考比较, 下给出根据级数本身判敛

定理 1.1.6 (D' Alembert(达朗贝尔) 准则 (检比法)). 正项级数 $\sum a_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$

(1) $\lambda < 1$, 则收敛

(2) $\lambda > 1$, 则发散

(3) $\lambda = 1$, 无效

.....

例 1.1.7:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n} \quad \text{收敛}$$

D'Alembert 为充分条件而非必要

定理 1.1.7 (Cauchy 判敛 (检根法)).

利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ 条件同 D'Alembert

一般 $n!$ 用比值, n^n, a^n 可用根值, 且能用比值法一定能用根值法, 而能用根值法不一定能用比值

可以证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = r$$

补充 Stirling 公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

只可用根式不能用比的例子:

.....

例 1.1.8:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2 + (-1)^n}{2^n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2 + (-1)^n}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na}{n+1} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} a = a \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a > 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

其他例子

例 1.1.9:

用来证明部分极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n!} = 0$$

判对应级数收敛即可

有关 u_n, u_{n+1}, n 部分结论

· u_n 收敛, 推 $\frac{1}{u_n^2}$ 收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

·

$$\sum \sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$$

·

$$\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n} = \sqrt{u_n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{u_n + \frac{1}{n^2}}{2}$$

· $\{nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 问 $\sum \frac{u_n}{n}$ 是否收敛

$$\frac{u_n}{n} = n \cdot u_n \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{M}{n^2} \quad (M \text{ 是上界})$$

例 1.1.10:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$$

$$\text{考虑 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x^\varepsilon} = 0 (\varepsilon > 0)$$

$$\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} < \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$$

例 1.1.11:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}} / \frac{1}{n} = 1$$

.....

例 1.1.12:

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} (x > 0)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x \quad \text{讨论 } x$$

1.3 交错级数

定义 1.1.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n (u_n > 0) \text{ or } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \text{ 称为交错级数}$$

定理 1.1.8 (Leibniz). 若

$$(i) \quad u_n > u_{n+1}$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

则级数收敛且

$$s \leq u_1 \quad |r_n| \leq u_{n+1}$$

1.4 任意项级数

定理 1.1.9. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

定义 1.1.3 (绝对收敛、条件收敛). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。

补充:

构造: $v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$ 和 $w_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n)$ 则若 u_n 绝对, 则 v_n, w_n 均收敛。若 u_n 条件, 则 v_n, w_n 均发散。进一步的:

$$v_n = \begin{cases} u_n & u_n > 0 \\ 0 & u_n \leq 0 \end{cases} \quad w_n = \begin{cases} 0 & u_n > 0 \\ -u_n & u_n \leq 0 \end{cases}$$

其中 v_n 称为 u_n 的正部, 记为 u_n^+ , w_n 称为 u_n 的负部, 记为 u_n^-

定理 1.1.10 (绝对收敛性质). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 和为 S , 任意交换级数各项次序后得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 和仍为 S 。

对于条件收敛级数, 可以证明可以控制交换后的级数收敛于任意值或发散

.....
例 1.1.13:

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 敛散性

考虑绝对值 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 1$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 绝对收敛, $0 < p \leq 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 条件收敛

.....
例 1.1.14:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$ 敛散

先考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} / \frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{2^{2n+1}}{n+1} = +\infty$$

故 $\frac{2^{n^2}}{n!} \nrightarrow 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$ 发散。

.....
例 1.1.15:

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ 敛散性

$$|u_n| = \frac{\alpha^n}{n^s} > 0, \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^s} \cdot \frac{n^s}{\alpha^n} = \alpha \left(\frac{n}{n+1} \right)^s \rightarrow \alpha$$

(1) $\alpha < 1$ 绝对收敛

(2) $\alpha > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(3) $\alpha < 1$ $s > 1$ 绝对收敛, $0 < s \leq 1$ 条件收敛

定理 1.1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 按它们的各项相乘得到的所有可能的乘积项 $a_n b_m$ 按任何次序排列得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也绝对收敛且和为 AB

最常用的排序为对角线排序: $u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \cdots$

.....

例 1.1.16:

$|x| < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 绝对收敛, 和为 $\frac{1}{1-x}$, 自己与自己相乘

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum \cdot \sum = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdots x^{n-1}$$

	1	x	x^2
1	1	x	x^2
x	x	x^2	
x^2	x^2		

得到了新级数

可以根据此方法构造新的绝对收敛级数

补充:

定理 1.1.12 (young 不等式). $a, b > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (1 < p, q < +\infty)$ 则 $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

.....

例 1.1.17:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^3$ 收敛, $u_n \geq 0$ 证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^{\frac{3}{4}}}$ 收敛

$$\begin{aligned} u_n \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} &\leq \frac{u_n^3}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{u_n^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}} \end{aligned}$$

说明: 欲找到 $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1$ 得到 $q = \frac{3}{2}$, 得到了 $\frac{u_n^3}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{3}{2}}$

2 函数项级数

2.1 基本概念和定理

定义 1.2.1. $u_1(x), u_2(x) \cdots u_n(x) \cdots$ 为定义在 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的函数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为定义在区间 I 上的无穷级数。

函数项级数

$\left\{ \begin{array}{l} \text{幂级数} \\ \text{Taylor 级数} \\ \text{Fourier 级数} \end{array} \right.$

定义 1.2.2. 如果 $x_0 \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛, 称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点; 如果 $x_0 \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

发散, 称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点。

$D = \{\text{收敛点全体}\} = \text{收敛域}$

定义 1.2.3. 在收敛域上, 级数的和是 x 的函数 $S(x)$, 称 $S(x)$ 为和函数, 余项 $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ 。

有限个函数和会保持个函数的性质, 但无限个函数和可能不会保持各函数性质

2.2 幂级数

定义 1.2.4. 称 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 为标准幂级数, 收敛域为 $(-1, 1)$ 。

定理 1.2.1 (Abel 定理). $\sum a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x \neq 0)$ 处收敛。在满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 处绝对收敛, 反之发散。

有推论:

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不仅在 $x = 0$ 一点收敛, 也不在整个数轴上收敛, 则必有一个完全确定的正数 R 有如下性质:

- 当 $|x| < R$ 绝对收敛
- 当 $|x| > R$ 发散
- 当 $|x| = R$ 可能收敛可能发散

定义 1.2.5. 称上述 R 为幂级数的收敛半径, $(-R, R)$ 为收敛区间。

规定若仅在 $x = 0$ 处收敛, 收敛区间为 $x = 0$

若对所有 x 收敛, $R = \infty$

定理 1.2.2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 所有 $a_n \neq 0$ (没有缺项) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)

(1) 当 $\rho \neq 0$, $R = \frac{1}{\rho}$

(2) 当 $\rho = 0$, $R = +\infty$

(3) 当 $\rho = +\infty$, $R = 0$

上述没有缺项是针对直到无限项都有缺失如: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n-1}$, 有限项中的缺失不影响。

.....

例 1.2.1:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ $x = -1$ 收敛, 问 $x = 2$ 敛散性

$t = x - 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $x = -2$ 处收敛。则在 $t = 1$ 处收敛, 即在 $x = 2$ 处收敛。

.....

例 1.2.2:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

再讨论端点, 确定收敛域。

.....

例 1.2.3:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} (x - \frac{1}{2})^n$ 收敛域

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2 \quad R = \frac{1}{2}$$

又 $x = 0$ 发散 $x = 1$ 收敛, 故收敛域 $(0, 1]$

缺项情况:

.....

例 1.2.4:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n}$

该情况下只能把 x 看成参数后讨论

D' Alembert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{1}{2} |x|^2$

则 $|x| < \sqrt{2}$ 收敛, $|x| > \sqrt{2}$ 发散, 端点发散。

.....

例 1.2.5:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n}}{n!}$ 收敛半径

令 $x^2 = t$ 原式变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! t^n}{n!}$ 后再求解即可。或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$ 直接求解收敛域

定理 1.2.3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 收敛半径分别为 R_1 R_2 令 $R = \min R_1, R_2$

(1) 加减法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ($c_n = a_n \pm b_n$)

$$(2) \text{ 乘法 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots)$$

运算后收敛半径不会继承

若: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 - x$ 它们的收敛半径都为 $+\infty$

但 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$ 收敛半径为 $R = 1$

定义 1.2.6 (一致收敛). 若存在一函数 $S : D \rightarrow \mathbb{R}$ 有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+, \text{ 当 } n > N(\varepsilon) \text{ 时 } \forall x \in D \text{ 恒有 } |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

称级数在 D 上一致收敛。

定理 1.2.4 (Cauchy 一致收敛原理). 充要条件: $\forall \varepsilon, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+ \text{ s.t. } \forall n, p \in \mathbb{N}_+ \text{ 当 } n > N(\varepsilon) \text{ 时 } \forall x \in D$

$$|S_{n+p} - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Cauchy 一致收敛原理在使用中不便, 但可据此推出更常用的 Weierstrass 准则 (M 准则)

定理 1.2.5 (Weierstrass 准则 (M 准则)). 如存在一收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n, \forall n \in \mathbb{N}_+ \forall x \in D$

有 $|u_n(x)| \leq M_n$ 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 D 上一致收敛。

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的优级级数或控制级数

定理 1.2.6 (连续性). $u_n \in C(1), n \in \mathbb{N}_+$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在区间上一致收敛于 $S : I \rightarrow \mathbb{R}$

$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow S(x))$ 则 $S \in C(1)$ 连续性

即为:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$$

极限与求和符号可以互换位置。

定理 1.2.7 (可积性). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Rightarrow S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 则 S 可积

$$\int_a^x S(t) dt = \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt$$

定理 1.2.8 (可导性). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 I 处处收敛于 S 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 在 I 上一致收敛于 $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ 则和函数 $S \in C^{(1)}(I)$ 且

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sigma x$$

上述性质定理说明, 在特定条件下可对级数逐项求极限、求导、积分

定理 1.2.9 (内闭一致收敛性). $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 R , $0 < R \leq \infty$, 则它在收敛区间内任何闭子区间 $[a, b]$ 上都一致收敛。

特别的, 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和函数 $S(x)$ 收敛半径为 R

(1) $S(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 连续

(2) $S(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 有连续导数, $S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

(3) $S(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 可积 $\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 积分下限一般取中心点

推论: 幂级数在收敛区间任意次可导、可积, 且半径 R 不变

定理 1.2.10 (性质). 若 $[a, b] \subset (-R, R)$ $\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$

利用幂级数求简单级数的和:

.....
例 1.2.6 (p297 5.):

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $[-q, q]$ 上收敛, 求 $\ln(1+x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

积分一次有:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

在收敛域上求和函数:

(1) 求 $R \rightarrow D$

(2) 求 $(-R, R)$ 的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow[\text{逐项求导}]{\text{逐项积分}} \text{可求和级数} \xrightarrow[\text{积分}]{\text{求导}} \text{变回 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(3) 求收敛域边界级数

.....

例 1.2.7:

求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

或:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad \frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \text{ 逐项积分}$$

.....

例 1.2.8:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

· 收敛域 $(-\infty, +\infty)$

· 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x)$$

对于函数 $S(x)$ 有

$$\frac{d}{dx} S(x) = S(x)$$

级数还可用来求极限:

.....

例 1.2.9:

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n} \right)$

$$S_n = \frac{1}{a} + \cdots + \frac{n}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$$

作幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ 收敛半径为 1, $x = \frac{1}{a}$

常用已知级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^{2n} = \frac{a}{1-x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

还可利用函数项级数求某些数项级数的值

.....

例 1.2.10:

求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$

利用幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n+1} \right)$$

带入 $x = \frac{1}{2}$ 即可

.....

例 1.2.11:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$$

出现 $n!$ 故联想到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \ (x \in \mathbb{R})$

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

积分得

$$\int_0^1 xe^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$$

$$\text{又 } \int_0^1 xe^x dx = 1$$

幂级数应用

求某些无法用初等函数表示的积分

$$\begin{aligned} & \int e^{x^2} dx \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \end{aligned}$$

2.3 Taylor 级数 (函数的幂级数展开)

定理 1.2.11. 设 $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^∞ 类函数, 则 f 可展开成 Taylor 级数的充要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

且此展式唯一

求 $S(x)$ 在 x_0 处的 n 阶导数

$$\text{利用 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x)}{n!} \implies S^{(n)}(x) = a_n n!$$

定理 1.2.12 (推论). $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 处有定义, 是 C^∞ 类函数, $f^{(n)}$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 一致有界, 即 $\exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$ 有 $|f^{(n)}(x)| \leq K$ 那么即可在 x_0 处展开为 Taylor 级数

对于不好求是否一致有界的, 可先写出级数, 再求级数的收敛半径

.....
例 1.2.12:

$$f(x) = (a+x)^\alpha$$

可求出 $(x+1)S'(x) = \alpha S(x)$ 且 $S(0) = 1$ 得出

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

牛顿二项式展开

特别的: 当 $\alpha = -1, \pm \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\ \sqrt{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \\ \frac{1}{1-x^2} &= (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \end{aligned}$$

此方法获取新级数后, 要讨论收敛域 (收敛区间端点)

.....

例 1.2.13:

$$\frac{x}{x^2 - 2x - 3}$$

将原式写成 $\frac{1}{4} \frac{1}{1+x} + \frac{3}{4} \frac{1}{x-3}$

→ 这种结构 → $\frac{\text{首项}}{1 - \text{公比}}$ 等比级数结构

.....

例 1.2.14:

将 $f(x) = \frac{x-1}{4-x}$ 展开成泰勒级数并求 $f^{(n)}(1)$

利用泰勒级数与高阶导数的关系

$$\frac{1}{4-x} = \cdots = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n} \quad |4-x| < 3$$

$$\frac{x-1}{4-x} = (x-1) \cdot \frac{1}{4-x}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x-x_0)}{n!} = \frac{1}{3^n}$$

.....

例 1.2.15 (估计误差):

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$ 求 $\sin \frac{\pi}{20}$ 近似, 估计误差

$$R_n(x) = \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{20}\right)^5 \cdots$$

$R_n(x)$ 交错级数, 余项小于余项的有限项

$$R_n < \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{20}\right)^5$$

定理 1.2.13 (Euler 公式). 对于复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n + iv_n$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 称 1.2.13 收敛且为 $u + iv \sum_{n=1}^{\infty} |u_n + iv_n|$ 收敛, 称其绝对收敛。则有

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

特别的

$$|e^{x+iy}| = |e^x(\cos x + i \sin y)| = e^x$$

对于非线性方程

.....

例 1.2.16:

例 $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, x = 0, y = 0$

如果 y 为 x 的幂级数, 可能有解 设 $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 代入, 比较系数。

Fourier 级数

定理 1.2.14. 周期为 π 的周期函数, 在周期内仅有有限个第一类间断点, 若展开形式为

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx + b_n \cos nx$ 的三角级数那么

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

级数连续部分收敛到 $f(x)$, 间断点收敛到左右极限的平均值。

Fourier 级数不一定具有唯一性。

Fourier 级数是三角多项式对 f 的最佳均方逼近 (L^2 范数) 奇偶函数的 Fourier 级数

· 奇函数

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

· 偶函数

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = 0$$

非周期函数的周期性延拓

$f(x)$ 定义在 $[0, \pi]$ 延拓成 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $F(x)$ 再周期性延拓成周期为 2π 的函数即

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & [0, \pi] \\ g(x) & [-\pi, 0) \end{cases}$$

且 $F(x + 2\pi) = F(x)$

· 奇延拓 $g(x) = -f(-x)$ $f(x) \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

· 偶延拓 $g(x) = f(-x)$ $f(x) \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

因此:

只有周期函数才可展开成 Fourier 级数

在 $(0, \pi]$ 的展开式唯一

以 $2l$ 为周期的 Fourier 展开

Scaling 变换

周期为 $2l$ 的函数:

$$\frac{z}{\pi} = \frac{x}{l} \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{l} \cdot x$$

改变为周期为 2π 的函数 $F(z)$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Chapter 2

多元函数微分学

1 n 维 Euclid 空间

定义 2.1.1 (点列的极限). 设 \mathbf{x}_k 是 \mathbf{R}^n 中的一个点列, 其中 $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$, 又设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ 是 \mathbf{R}^n 中的一固定点, 若当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \rightarrow 0$, 即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = \mathbb{N}_+, \text{ 使得 } \forall k > N, \text{ 恒有 } \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < \epsilon$$

称点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 的极限存在, 也称收敛于 \mathbf{a}

定义 2.1.2 (聚点). E 为一点集 \vec{P} 为任意点, 若 \vec{P} 的任意邻域总有无无限多点属于点集 E , 则称 \vec{P} 为 E 的聚点

说明:

- 内点一定是聚点
- 边界点可能是聚点
- E 的聚点可能属于 E 也可能不属于 E

定理 2.1.1 (Bolzano-Weierstrass 定理). 有界点列必有收敛子列.

定义 2.1.3 (Cauchy 点列). 设 \mathbf{x}_k 是 \mathbf{R}^n 中的点列, 若

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \text{ 使得 } \forall k > N, p \in \mathbb{N}_+ \text{ 恒有, } \|x_{k+p} - x_k\| < \epsilon$$

称其为 \mathbf{R}^n 中的基本点列或 Cauchy 点列.

定义 2.1.4. A 聚点的集合称为 A 的**导集**, 记作 A' . 集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 称为 A 的**闭包**. 若 $\mathbf{a} \in A$ 但 $\mathbf{a} \notin A'$ 称 \mathbf{a} 为 A 的**孤立点**. 若 $A' \subseteq A$ 称 A 为**闭集**.

.....
例 2.1.1:

设 $f\left(xy, \frac{y^2}{x}\right) = y^2 + x^2$, 求 $f\left(\frac{v^2}{u}, uv\right)$

法一: 求 $f(u, v)$

法二: 令 $xy = \frac{v^2}{u}$ $\frac{y^2}{x} = uv \Rightarrow y = v \quad x = \frac{v}{u}$

2 多元函数的极限与连续

例 2.2.1:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

法一:

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

极坐标变换

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \neq \rho \rightarrow 0$$

$$f(x, y) = |\rho(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)| < 2\rho \rightarrow 0$$

采用极坐标变换是因为出现了 $x^2 + y^2$ 这样的结构

反例: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x+y}$ 若采用极坐标, 最后分母会存在 \cos 可能为 0 使分式无意义, 无法判断极限是否存在

例 2.2.2:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \frac{\ln(1+xy)}{x+y} \text{ 是否存在}$$

原式 = $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x+y}$, 取 $y = x^\alpha - x$ 为使 $x+y$ 仅剩一项方便约分

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{\alpha+2} - x^3}{x^\alpha} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - x^{3-\alpha}) \quad (2.1)$$

与 α 有关, 不存在

3 多元函数偏导数与全微分

3.1 多元数量值函数的偏导数

定义 2.3.1. 如果二元函数 $z = f(x, y)$ 对 x, y 的偏导数都存在, 称其可偏导。

例 2.3.1:

求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{r}\end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

一元函数和多元函数区别:

- 一元: 可导 \Rightarrow 连续
- 多元: 可导不一定连续, 只在 x, y 方向上极限存在, 其余方向不一定。

3.2 高阶偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy} \text{ 混合偏导数 (注意下标顺序)}\end{aligned}$$

定理 2.3.1. 如果 $z = f(x, y)$ 的两个混合偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y \partial x}$ 在 D 上连续, 二者相等。

由于初等函数始终连续, 因此可以随意选择求导顺序。

.....
例 2.3.2:

$z = f(u), u = \varphi(x) + \int_x^y P(t)dt$, 确定 u 是 x, y 的函数, 其中 f, φ 可微, $P(t), \varphi'(u)$ 连续, $\varphi'(u) \neq 1$, 求 $P(y) \frac{\partial z}{\partial x} + P(x) \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + P(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - P(y)\end{aligned}$$

可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P(x)}{1 - \varphi'(u)} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-P(y)}{1 - \varphi'(u)}$$

带入有 $P(y) \frac{\partial z}{\partial x} + P(x) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

3.3 微分

偏微分:

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = f_x(x, y) \Delta x + o(\Delta x)$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y) \Delta y + o(\Delta y)$$

等式左边称为偏增量。

全微分:

$$z = f(x, y) \quad \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

对应的称为全增量

定义 2.3.2. Δz 可表示为 $A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ 其中 A, B 不依赖 $\Delta x, \Delta y$ 而与 x, y 有关 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \rho \rightarrow 0$, 称 $dz = A\Delta x + B\Delta y$ 为在点 (x, y) 的全微分。

可微 \rightarrow 连续

可微 \rightarrow 偏导数存在且 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$

如果偏导数连续则可微

习惯上记全微分 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ 二元全微分等于两偏微分之和, 称为叠加原理 (三元上也适用)

.....
例 2.3.3:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 连续且偏导数存在, 偏导在 $(0, 0)$ 不连续但在 $(0, 0)$ 可微。

连续: 易证 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$

偏导数, 用定义

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

对于任意 $\frac{\partial f}{\partial x} = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_x(x, y) = 0 -$

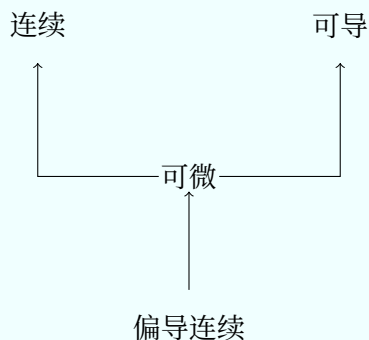
$\frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^3}$, 由于 θ 是任意的, 极限不存在, 不连续同理有 $f_y(0,0)$ 不连续。

微分:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\rho} = \frac{xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

偏导数连续仅仅是可微的充分条件!



例 2.3.4:

$$f(x,y,z) = \frac{x \cos y + y \cos z + z \cos x}{1 + \cos x + \cos y + \cos z} \text{ 求 } df(0,0,0)$$

$$f(0,0,0) = \frac{x}{3 + \cos x} \quad f_x = \frac{1}{4}$$

$$\text{则 } df|_{(0,0,0)} = \frac{1}{4}dx + \frac{1}{4}dy + \frac{1}{4}dz$$

3.4 多元复合函数偏导数与微分

链式法则

最简单的情况 $z = f(u,v)$ $u = \Phi(t)$, $v = \Psi(t)$, t 有一增量 Δt , f 可微

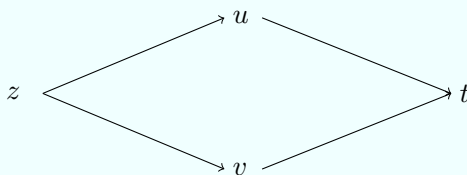
$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + o(\rho)$$

$$\Delta u \rightarrow 0 \quad \Delta v \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow 0$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\Delta t} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$



上述中间变量为一元函数，还可推广到多元函数

$$z = f(\Phi(x, y), \Psi(x, y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

.....

例 2.3.5:

$w = f(x + y + z, xyz)$, f 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot yz$$

为表示方便引入记法:

$$f'_1 = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \quad f''_{12} = \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v}$$

类似的有 f'_2, f''_{11}, f''_{22}

.....

例 2.3.6:

$u = f(x, y)$ 二阶偏导连续, 求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

全微分形式不变性

$z = f(u, v)$ 其中 u, v 满足 $u = \Phi(x, y), v = \Psi(x, y)$

可以证明:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

两式相等相等, 具有形式不变性。

.....

例 2.3.7:

$e^{-xy} - 2z + e^z = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

两边取全微分 $-e^{-xy}d(xy) - 2dz + e^z dz = 0$

$$(e^z - 2)dz = e^{xy}(ydx + xdy)$$

$$dz = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}dx + \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}dy$$

.....

例 2.3.8:

$f(x, y)|_{y=x^2} = 1$, $f'_1(x, y)|_{y=x^2} = 2x$ 求 $f'_2(x, y)|_{y=x^2}$

$f(x, x^2) = 1$ 对 x 求导

$$f'_1(x, x^2) + 2x \cdot f'_2(x, x^2) = 0$$

$$f'_1(x, x^2) = 2x$$

$$f'_2(x, x^2) = -1$$

.....

例 2.3.9:

$z = f(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 可微, 且 $f(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)} = 3$. $\varphi(x) = f(x, f(x, x))$,

求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)|_{x=1}$

设

$$\phi(1) = f(1, f(1, 1)) = f(1, 1) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\varphi^3(x)|_{x=1} &= 3\varphi^2(x)\frac{d\varphi}{dx}|_{x=1} \\ &= 3[f'_1(x, f(x, x)) + f'_2(x, f(x, x))(f'_1(x, x) + f'_2(x, x))]|_{x=1} \\ &= 51 \end{aligned}$$

3.5 隐函数的导数

一个方程 $F(x, y) = 0$ 时

定理 2.3.2. \cdot $P(x_0, y_0)$ 某一邻域 (u_1) 内 $F(x, y)$ 有连续偏导数

$$\cdot F(x_0, y_0) = 0$$

$$\cdot F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 P 的某一邻域 (u_2) 内恒能唯一确定一连续且有连续偏导数的函数 $y = f(x)$ 满足 $y_0 = f(x_0)$ 且有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

说明: u_1 和 u_2 不一定相等, 满足 $u_2 \subset u_1$

对于三元函数 $F(x, y, z) = 0$ 及以上, 同样有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

例 2.3.10:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

法一 隐函数求导

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2-z}$$

1) 对 x 求导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2-z-x(2-\frac{\partial z}{\partial x})}{(2-z)^2} = \frac{2-z-2x \cdot \frac{x^2}{2-z}}{(2-z)^2}$$

2) 直接对等式求导

$$2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + 2x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{((2-z)^2 + x^2)}{(2-z)^2}$$

法二 公式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z-2}$$

继续求解即可

法三 全微分

$$dz = \frac{x}{2-z} dx + \frac{y}{2-z} dy$$

例 2.3.11:

$F(x, y)$ 具有连续偏导, 已知 $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$ 求 dz

令 $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = G(x, y, z) = 0$

$$G_x = F'_1 \frac{1}{z} \quad G_y = F'_2 \frac{1}{z}$$

$$G_z = F'_1(-\frac{x}{z^2}) + F'_2(-\frac{y}{z^2})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zF'_1}{xF'_1 + yF'_2}$$

任意方向导数都存在也不一定可微

$$eg: \begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ f(x, y) = 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3.6 Taylor

$z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续且有直到 $n + 1$ 阶连续偏导数

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &= f(x_0, y_0) + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \cdot \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!} \cdot \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \end{aligned}$$

$$\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) = \sum_{p=0}^m C_m^p \Delta x^p \Delta y^{m-p} \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^p \partial y^{m-p}}$$

定义 2.3.3 (Hesse 矩阵). $\mathbf{H}_f(\vec{x}_0 + \theta \Delta \vec{x}) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \Big|_{(\vec{x}_0 + \theta \Delta \vec{x})}$

那么对于二阶 Taylor 公式可以写成矩阵形式

$$f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\nabla f(\vec{x}_0), \Delta x) + \frac{1}{2!} (\Delta \vec{x})^T \mathbf{H}_f(\vec{x}_0) \Delta \vec{x}$$

定义 2.3.4. f 在 Ω 内连续, 称其为 Ω 上的 $C^{(0)}$ 类函数, 记为 $f \in C^{(0)}(\Omega)$, 若 f 在 Ω 内有连续的 m 阶偏导数, 称其为 $C^{(m)}$ 类函数。记作 $f \in C^{(m)}(\Omega)$

定理 2.3.3 (极值的必要条件). 设 n 元函数 f 在 \mathbf{x}_0 可微, 且 \mathbf{x}_0 为 f 的极值点, 则必有 $\nabla f(\mathbf{x}_0)$

定理 2.3.4. 当 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 正定, 取极小值, 负定取极大值

设 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 则有

- $A > 0, AC - B^2 > 0$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 正定, 取极小值
- $A < 0, AC - B^2 > 0$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 负定, 取极大值
- $AC - B^2 < 0$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 不定, 不是极值
- $AC - B^2 = 0$ 临界状况, 只根据二阶 Taylor 公式无法判断

定理 2.3.5 (Lagrange 乘数法). $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下取得极值, 有

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

记 $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ $L(x, y, z)$ 无约束极值即为 $f(x, y)$ 取约束极值

对于多个约束,

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

3.7 几何应用

$$\begin{array}{l}
 \text{柱面} \left\{ \begin{array}{l} 2\text{圆柱面} \\ \text{抛物柱面} \end{array} \right. \quad \text{二次曲面} \left\{ \begin{array}{l} \text{椭圆锥面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 \quad \text{椭球面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \text{单叶双曲面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \text{双叶双曲面 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ \text{椭圆抛物面 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \\ \text{双曲抛物面 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \end{array} \right.
 \end{array}$$

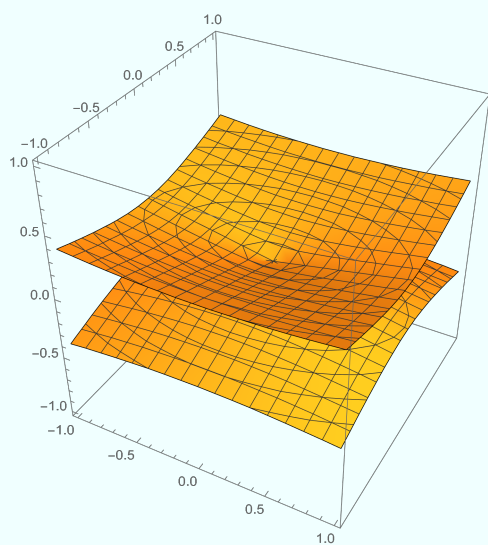


图 2.1: 椭圆锥面

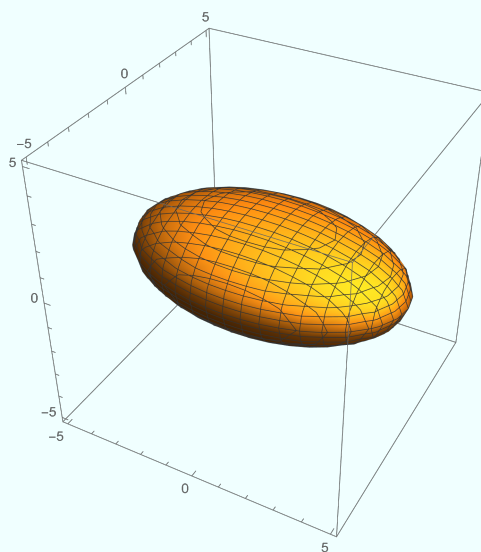


图 2.2: 椭球面

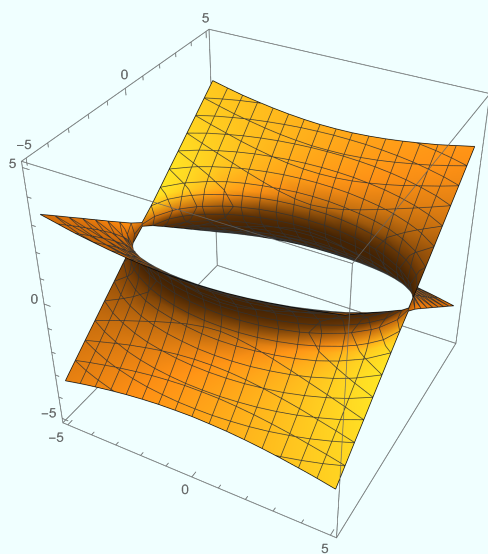


图 2.3: 单叶双曲面

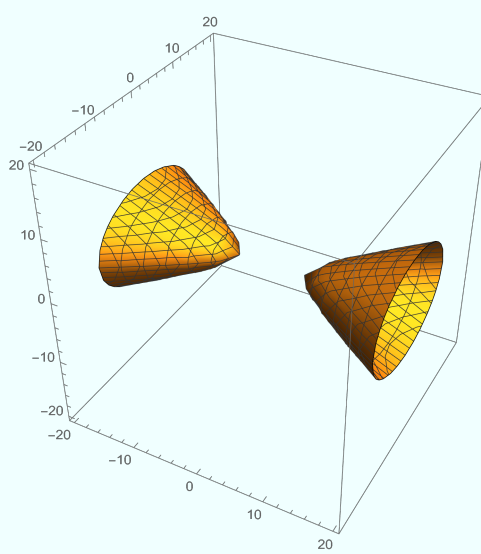


图 2.4: 双叶双曲面

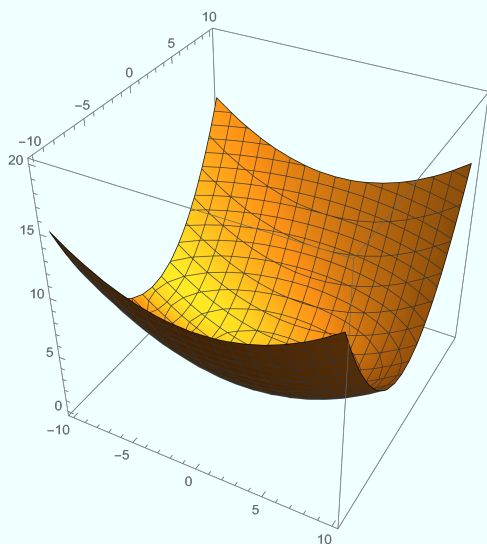


图 2.5: 单叶双曲面

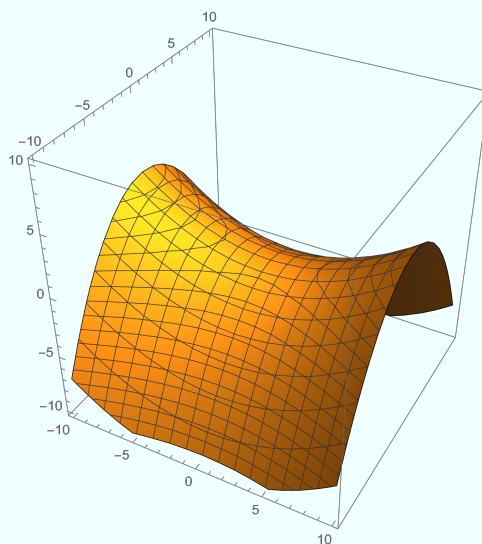


图 2.6: 双叶双曲面

对于空间曲面的一般方程 $F(x, y, z) = 0$ F 对任意变量偏导连续且不同时为 0, 其切平面

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

法线为 $\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = \frac{z - z_0}{f_z}$

特别的当 $z = f(x, y)$ $\hat{n} = (f_x, f_y, 1)$ or $\hat{n} = (-f_x, -f_y, -1)$ 后者更常用

切平面 $z - z_0 = f_x \cdot (x - x_0) + f_y \cdot (y - y_0)$

右式为 z 的全微分, 左式为切平面的改变量

4 重积分

4.1 基本概念

积分概念

$$\int_{\Omega} f(M) d\Omega = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} f(M) \Delta\Omega_i$$

估计二重积分的大小

利用几何意义

- 求积分域的大小 S_D
- 求 $f(x, y)$ 的最大最小值
- $f_{min} S_D \leq \iint \leq f_{max} S_D$

例 2.4.1:

不做计算估计 $\iint_D e^{(x^2+y^2)} d\sigma$ 的值, 积分域为椭圆闭区域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$S_\sigma = ab\pi$$

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$$

$$1 = e^0 \leq e^{x^2+y^2} \leq e^{a^2}$$

$$\text{那么 } \sigma \leq \iint_D e^{(x^2+y^2)} d\sigma \leq e^{a^2}$$

$$ab\pi \leq \iint_D e^{(x^2+y^2)} d\sigma \leq ab\pi e^{a^2}$$

.....

例 2.4.2:

判断 $\iint_{\sigma \leq |x|+|y| \leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy$ 的正负

当 $\sigma \leq |x| + |y| \leq 1$

$$0 < x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq 1.$$

故 $\ln(x^2 + y^2) < 0$ 因此

$$\iint_{\sigma \leq |x|+|y| \leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy < 0.$$

4.2 直角坐标重积分计算

.....

例 2.4.3:

$\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$ 其中 D 是以 $(0,0), (1,1), (0,1)$ 为顶点的三角形

由于 $\int e^{-y^2}$ 无法用初等函数表示, 故要考虑积分次序

$$\begin{aligned} \int_D x^2 e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} \frac{y^3}{3} dy = \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^2}{6} dy^2 = \frac{1}{6(1-\frac{2}{e})} \end{aligned}$$

在化二重积分为二次积分时, 为了计算简便, 需要选择适当的二次积分的次序。这时, 既要考虑积分区域 D 的形状, 又要考虑被积函数 $f(x, y)$ 的特性。必要时还可以交换积分序。

.....

例 2.4.4:

计算积分 $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$

注意到 $\int e^{\frac{y}{x}} dx$ 不能用初等函数表示, 故先改变积分次序

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x e^{\frac{y}{x}} dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x (e - e^x) dx = \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e} \end{aligned}$$

定理 2.4.1. 如果闭区域 D 关于 x 轴对称, D_1 为 D 在 x 上方的部分
如果函数 $f(x, y)$ 关于 y 为偶函数

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma.$$

如果函数 $f(x, y)$ 关于 y 为奇函数

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0.$$

.....
例 2.4.5:

证明公式 $\int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b f(y) (b - y) dy$

将左式化为重积分, 积分区域

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq x\}.$$

交换积分次序后

$$D = \{(x, y) | a \leq y \leq b, a \leq x \leq b\}.$$

于是

$$\int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(y) dx = \int_a^b f(y) (b - y) dy.$$

.....
例 2.4.6:

$\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$

由于 $\int_0^1 x \int_x^1 f(y)f(x) dy$ 不能直接积分, 故改变积分次序

$$\text{令 } I = \int_0^1 x \int_x^1 f(x)f(y) dy = \int_0^1 f(x)x \int_x^1 f(y) dy$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 \int_0^y f(x)f(y)x = \int_0^1 f(y) \int_0^y f(x)x \\ &= \int_0^1 f(x)x \int_0^x f(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2I &= \int_0^1 f(x)x \int_x^1 f(y) + \int_0^1 f(x)x \int_0^x f(y) \\ &= \int_0^1 f(x)x \left[\left(\int_0^x + \int_x^1 \right) f(y)dy \right] \\ &= \int_0^1 f(x)x \int_0^1 f(y) = A^2\end{aligned}$$

4.3 二重积分变换

定理 2.4.2. 设 $f(x, y)$ 在 xoy 平面上的闭区域 D 上连续, 变换 $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$ 将 uov 平面上的闭区域 D' 变为 xoy 平面上的 D 且满足

- $x(u, v), y(u, v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数
- 在 D' 上 Jaccobi $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$
- 变换 $T: D \rightarrow D'$ 是一一对应的

则有

$$\iint_D f(x, y) x = \iint_{D'} f[x(u, v) y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| v.$$

.....

例 2.4.7:

计算 $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} x$, 其中 D 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的区域
广义极坐标变换

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$$

其中 $a > 0, b > 0, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$D \rightarrow D' = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = abr \neq 0$$

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} x = \iint_{D'} \sqrt{1 - r^2} abrr\theta = \frac{2}{3}\pi ab$$

定理 2.4.3. 极坐标变换

$$\iint_D f(x, y) x = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) rr\theta.$$

.....

例 2.4.8:

计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} x$ 其中 D 是由中心在原点, 半径为 a 的圆周构成的闭区域

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-x^2-y^2} x &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \int_0^a e^{-r^2} r r \\ &= \pi \left(1 - e^{-a^2}\right).\end{aligned}$$

由此可得一重要积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} dx = \sqrt{\pi} \quad (2.2)$$

事实上当 D 为 \mathbb{R}^2 时

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \quad (2.3)$$

利用上例结果

$$4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \pi \left(1 - e^{-a^2}\right) = \pi \quad (2.4)$$

.....

例 2.4.9:

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且恒大于零, 证明不等式

$$\int_a^b f(x)x \int_a^b \frac{1}{f(x)} x \geq (b-a)^2$$

左式先化为二重积分的形式

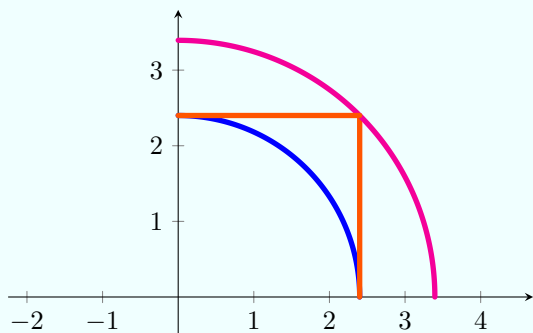
$$\int_a^b f(x)x \int_a^b \frac{1}{f(x)} x = x \int_a^b f(x)x \int_a^b \frac{1}{f(y)} = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} x$$

同理亦有 $\int_a^b f(x)x \int_a^b \frac{1}{f(x)} = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} x$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)x \int_a^b \frac{1}{f(x)} x &= \iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)} \frac{f(y)}{f(x)} \right) x \\ &= \iint_D \frac{f^2(x) + f^2(y)}{f(x)f(y)} x \\ &\geq \iint_D \frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)} x = 2 \iint_D x = 2(b-a)^2.\end{aligned}$$

即 $\int_a^b f(x)x \geq (b-a)^2$



例 2.4.10:

求广义积分 $\int_0^\infty e^{-x^2}$

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2R^2\}$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$$

并且对上述所有区域都有 $\{x \geq 0, y \geq 0\}$.

显然有 $D_1 \subset S \subset D_2$, 且有 $e^{-x^2-y^2} > 0$

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} x \leq \iint_S e^{-x^2-y^2} x \leq \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} x$$

又

$$\begin{aligned} I &= \iint_S e^{-x^2-y^2} x \\ &= \int_0^R e^{-x^2} x \int_0^R e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} x \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} x \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta \int_0^R e^{-r^2} r r = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

$$\text{同理 } I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} x = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

$$I_1 < I < I_2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2} x \right)^2 < \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow I_1 \rightarrow \frac{\pi}{4}, I_2 \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

故当 $R \rightarrow \infty$ 时 $I \rightarrow \frac{\pi}{4}$, 即 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ 所求广义积分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$