PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN
L2-PROB3-PAG78

XAVIER AZNAR
HTTP://FISICAUNED.WORDPRESS.COM

Problema. Dos discos planos paralelos (de radio R) están uno sobre otro separados por una pequeña distancia; el espacio entre ellos está lleno con un cierto tipo de fluido. Los discos se aproximan a una velocidad constante u, desplazando el fluido. Determinar la resistencia a su movimiento.

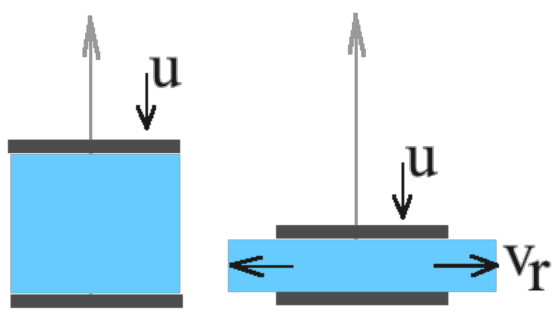

FIGURA 1. Esquema del problema

Demostración. Como vemos en la figura (1) el problema tiene simetría cilíndrica. Podemos considerar que la velocidad del fluido tiene únicamente componente radial, al ser *expulsado* el fluido de entre los discos en movimiento. Por tanto,

$$v_r \gg v_z \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} \gg \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Planteamos las ecuaciones de movimiento suponiendo el fluido incompresible

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

con las condiciones límite

$$\begin{aligned} v_r(z=0) &= v_z(z=0)=0 \\ v_r(z=h)=0 & \quad v_z(z=h)=-u \\ p(r=R) &= p_0 \end{aligned}$$

donde h es la separación entre los discos y p_0 es la presión atmosférica.

De la ecuación (3) tenemos que $p = p(r)$. Pero en la ecuación (2) el primer término depende sólo de r y el segundo sólo de z, por lo que la única solución es que los dos términos sean constantes. Integrando (2) tenemos

$$v_r = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}z^2 + az + b$$

Determinamos las constantes a partir de las condiciones límite

$$v_r(z=0)=0 \Rightarrow b=0$$

$$v_r(z=h)=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}h$$

De manera que al final tenemos

$$v_r = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}z(z-h) \tag{4}$$

Una vez obtenida v_r, podemos integrar (1)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_r(z)) &= \frac{dv_z}{dz} \\ -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_r(z)\,dz) &= dv_z \\ -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_0^h rv_r(z)\,dz &= \int_0^{-u} dv_z = -u \\ u &= -\frac{h^3}{12\eta}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right) \qquad (5) \end{aligned}$$

Y finalmente, obtenemos la presión integrando (5)

$$\begin{aligned} -\frac{12\eta u}{h^3}\int r\,dr &= \int d\left(r\frac{dp}{dr}\right) \\ -\frac{6\eta u}{h^3}r^2 &= r\frac{dp}{dr} \\ -\frac{6\eta u}{h^3}\int_r^R r\,dr &= \int_p^{p_0} dp = p_0 - p \\ p &= p_0 + \frac{3\eta u}{h^3}\left(R^2-r^2\right) \qquad (6) \end{aligned}$$

Una vez hemos solucionado las ecuaciones de movimiento, podemos obtener la fuerza de arrastre que experimentan los discos.

(FALTA EL CÁLCULO DE LA RESISTENCIA QUE SUFREN LOS DISCOS)

La resistencia total al disco móvil es [1]

$$F = \frac{3\pi\eta u R^4}{2h^3}$$

$\square$

[1] La fuerza de resistencia es igual a la integral de la parte de p que depende de r para toda la superficie del disco, aunque no entiendo porqué no se tiene en cuenta la parte constante de p.