PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN
L1-PROB5-PAG30

XAVIER AZNAR
HTTP://FISICAUNED.WORDPRESS.COM

Problema. Determinar el flujo cerca de un punto de estancamiento.

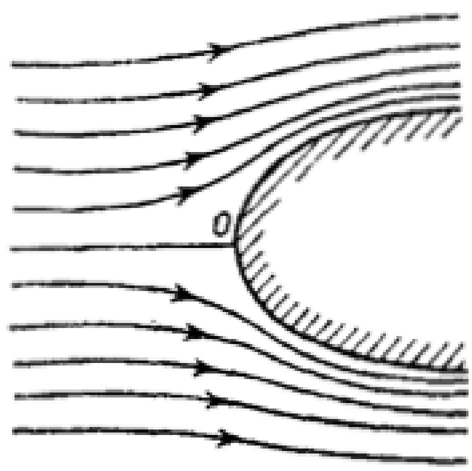

FIGURA 1. Punto de estancamiento

Demostración. Consideramos que el flujo es potencial de un fluido incompresible. En este caso, la ecuación de Euler (sólo en función de la velocidad) se verifica automáticamente, ya que por ser potencial $\mathbf{rot}\mathbf{v} = 0$. La ecuación de continuidad se transforma en $\Delta\phi = 0$, la ecuación de Laplace.

Por ser O un punto de estancamiento, las condiciones límites que debemos aplicacar son:

(1) $$v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0$$

(porque la velocidad normal a una superficie debe anularse para un fluido ideal).

(2) $$\frac{\partial\phi}{\partial x} = v_x = v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad (x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ Estancamiento}$$

Independientemente de la forma del cuerpo, en los alrededores del punto O de estancamiento, podemos aproximar ϕ por un plano, de manera que

(3) $$\phi \simeq \phi(0,0,0) + ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$$

El término constante no tiene ninguna influencia en la resolución de la ecuación de Laplace, por lo que lo hacemos cero.

Si introducimos ϕ en $\Delta\phi = 0$ tenemos

(4) $$A + B + C = 0$$

De las condiciones (2) obtenemos

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} = 0 = a \qquad \left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} = 0 = b$$

De la condición (1)

(5) $$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 = c + Ey + Fx = 0$$

que como debe verificarse para todo x, y, tenemos

(6) $$E = F = 0$$

(7) $$c = 0$$

De manera que, al final del día, tenemos

$$\phi = Ax^2 + By^2 - (A+B)\,z^2 + Dxy$$

El término xy puede siempre eliminarse mediante una rotación adecuada de los ejes x e y, así que

(8) $$\phi = Ax^2 + By^2 - (A+B)\,z^2$$

Si el flujo tiene simetría axial alrededor del eje z (flujo simétrico que rodea un cuerpo de revolución), entonces $A = B$, con lo que

(9) $$\phi = A\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$$

Finalmente, utilizamos

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

para encontrar las líneas de corriente y visualizar el flujo cerca del punto de estancamiento.

$$v_x = 2Ax \quad v_y = 2Ay \quad v_z = -4Az$$

que resultan:

$$x^2 z = c_1 \quad y^2 z = c_2$$

es decir, son hipérbolas cúbicas. □