

**Apuntes sobre la asignatura de  
Física de Fluidos en la UNED  
Resumen**

Xavi Aznar

<http://FisicaUNED.wordpress.com>



## Índice alfabético

### A

Ángulos de contacto, 125

### C

Capa límite, 79

Capa límite laminar, 79

Circulación de la velocidad, 17

Coefficiente de arrastre, 83

Coefficiente de barodifusión  $k_T D$ , 117

Coefficiente de difusión barométrica  $k_T D$ , 117

Coefficiente de difusión  $D = \frac{\alpha}{\rho} \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{T,p}$ , 117

Coefficiente de difusión térmica  $k_T$ , 117

Coefficiente de difusión térmica  $k_T D$ , 117

Coefficiente de tensión superficial  $\alpha$ , 122

Coefficiente de transferencia de masas  $D$ , 117

Coefficiente de transferencia térmica

$$\alpha = \frac{q}{T_1 - T_0}, 105$$

Coefficientes de viscosidad  $\eta, \zeta$ , 35

Concentración  $c$ , 110

Conducción térmica, 92

Conducción turbulenta  $\kappa_{turb}$ , 107

Conductividad térmica  $\kappa$ , 93

Conductividad termométrica  $\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}$ , 98

Conductividad termométrica turbulenta

$$\chi_{turb} \sim l \Delta u, 107$$

Constante de capilaridad  $a = \sqrt{\frac{2\alpha}{g\rho}}$ , 125

Convección, 12

### D

Densidad de flujo de difusión  $i$ , 112

Densidad de flujo de entropía  $j = \rho s \mathbf{v}$ , 7

Densidad de flujo másico  $j = \rho \mathbf{v}$ , 6

Densidad de flujo térmico debido a la conducción térmica  $\mathbf{q}$ , 93

Difusión, 111

### E

Ecuación de Bernoulli en un campo

$$\text{gravitatorio } \frac{1}{2} v^2 + w + gz = \text{const}, 14$$

Ecuación de Bernoulli  $\frac{1}{2} v^2 + w = \text{const}$ , 14, 22

Ecuación de continuidad  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho$ , 6

Ecuación de Euler (en la que interviene sólo la velocidad)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}), 8$$

Ecuación de Euler (versión termodinámica)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} w, 8$$

Ecuación de Euler

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p, 7$$

Ecuación de Fourier, 99

Ecuación de la conducción térmica

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, 99$$

Ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}, 36$$

Ecuación general de transferencia térmica, 94

Escala de un remolino  $\lambda$ , 62

Estela laminar, 48

Estela turbulenta, 71

### F

Fenómeno de separación, 70

Fluido ideal, 7

Fluido incompresible  $\rho = \text{const}$ , 22

Flujo estacionario, 13  
 Flujo irrotacional, 19  
 Flujo plano o bidimensional, 24  
 Flujo potencial, 19  
 Flujo rotacional, 19  
 Flujo turbulento estacionario, 68  
 Flujos semejantes, 43

Fórmula de Laplace

$$p_1 - p_2 = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), 123$$

Fórmula de Stokes (disco circular  $\parallel$  su plano)  $F = \frac{32}{3} \eta R u$ , 48

Fórmula de Stokes (disco circular  $\perp$  su plano)  $F_{\perp} = 16 \eta R u$ , 48

Fórmula de Stokes (elipsoide)  $F = 16 \eta R u$ , 48

Fórmula de Stokes (esfera)  $F = 6 \pi R \eta u$ , 48

Fórmula de Stokes (sin determinar a y b)  $F = 8 \pi a \eta u$ , 48

Fuerza de arrastre, 29

Fuerza de sustentación, 29, 50

Función de corriente  $\psi(x, y)$ , 24

## L

Ley de conservación de la circulación

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante}, 18$$

Ley de Kolmogorov-Obukhov

$$v_{\lambda} \sim (\epsilon \lambda)^{1/3}, 65$$

Ley de Loytsianski, 77

Ley de Semejanza, 43

Línea de corriente, 13

Línea de separación, 70

## N

Número de Froude  $F = \frac{u^2}{lg}$ , 43

Número de Nusselt  $N = \frac{\alpha l}{\kappa}$ , 105

Número de Prandtl  $P = \frac{\nu}{\chi}$ , 105

## O

Onda de gravedad, 29

Ondas de capilaridad, 128

## P

Parte fluctuante de la velocidad

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}, 61$$

Perfil logarítmico de velocidades, 87

Potencial de velocidad  $\phi$ , 22

Presión superficial, 122

Profundidad de penetración  $\delta$ , 53

Propiedades locales de la turbulencia, 65

Punto de estancamiento, 24

## R

Región de flujo turbulento, 70

Región turbulenta, 70

Remolinos, 61

## S

Subcapa viscosa, 86

## T

Tensor correlación triple  $B_{ikl}$ , 68

Tensor de correlación doble, 67

Tensor de densidad de flujo de impulso

$$\Pi_{ik}, 17$$

Tensor de masas asociadas  $m_{ik}$ , 29

Tensor de tensiones de la viscosidad  $\sigma'_{ik}$ , 34

Tensor de tensiones  $\sigma_{ik}$ , 34

Teorema de Joukowski, 75

Teorema de Kelvin

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante}, 18$$

Tiempo de relajación para la conducción térmica  $\tau$ , 103

Torbellinos turbulentos, 61

Turbulencia totalmente desarrollada, 61

## V

Velocidad media  $\mathbf{u} \equiv \bar{\mathbf{v}}$ , 61

Viscosidad cinemática  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , 36

Viscosidad dinámica  $\eta$ , 36

Viscosidad turbulenta  $\nu_{turb}$ , 64

## Fluidos ideales

### Consideraciones previas

El estudio del movimiento de los fluidos (líquidos y gases) se denomina *dinámica de fluidos*.

Los fenómenos en dinámica de fluidos son macroscópicos, por lo que se considera al fluido como un medio continuo. Un volumen infinitamente pequeño del fluido es *pequeño* comparado con el volumen de un cuerpo o del sistema que consideramos pero *grande* en comparación con la distancia entre las partículas del mismo.

La descripción matemática del estado del fluido se consigue mediante la distribución de velocidades  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  y dos magnitudes termodinámicas cualquiera, como la presión  $p$  y la densidad  $\rho$  del fluido

$$\text{Estado del fluido} = \begin{cases} \mathbf{v}(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z) & \text{Distribución de velocidades} \\ p(x, y, z, t) & \text{Presión} \\ \rho(x, y, z, t) & \text{Densidad} \end{cases}$$

Todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de **dos** de ellas junto con las ecuaciones de estado.

### 1.1. Ecuación de continuidad (B)

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la materia.

Empezamos considerando un volumen  $V_0$ . Si  $\rho$  es la densidad del fluido, la masa contenida en este volumen es

$$\int_{V_0} \rho dV$$

La masa de fluido que atraviesa una unidad de superficie  $d\mathbf{f}$  es  $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ , donde  $d\mathbf{f}$  es un vector normal a la superficie (apuntando hacia afuera) y  $|d\mathbf{f}| = n df$ , (con  $\mathbf{n}$  un vector unitario) y  $df$  igual al área de la superficie. De manera que integrando sobre toda la superficie que rodea  $V_0$  tenemos la masa total de fluido que la atraviesa

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

La disminución de la masa contenida en  $V_0$  debe ser igual a la que atraviesa la superficie, de manera que

$$(1.1.1) \quad -\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

Podemos transformar la integral de superficie en una integral de volumen

$$-\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$$

La derivada total se convierte en parcial al incluirla en la integral de volumen, por lo que

$$\int_{V_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

Pero como la integral debe ser cero para cualquier  $V_0$ , el integrando debe ser cero:

$$(1.1.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Desarrollando la divergencia, podemos escribir la **ecuación de continuidad** como

$$(1.1.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0$$

El vector

$$(1.1.4) \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

se denomina **densidad de flujo másico**: su dirección coincide con la del movimiento del fluido y su módulo es la cantidad de masa de fluido que circula por unidad de tiempo a través de una superficie perpendicular a la velocidad.

## 1.2. Ecuación de Euler (B)

La ecuación de Euler es la versión *para fluidos* de  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .

La fuerza total que **actúa**<sup>1</sup> sobre un volumen de fluido es<sup>2</sup>  $-\oint p d\mathbf{f}$  y transformando la integral de superficie en una integral de volumen tenemos  $-\int_{V_0} \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{f}$ .

Por otro lado, para *ma* escribimos  $\int_{V_0} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$ . Pero el problema es que esta derivada expresa la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula de fluido (que se mueve) y nosotros queremos magnitudes

---

<sup>1</sup>De aquí el signo menos.

<sup>2</sup> $p = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}} \Rightarrow \mathbf{F} = p\mathbf{S}$

que se refieren a puntos fijos en el espacio. Por tanto:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Esta expresión indica la variación de la velocidad entre dos puntos separados  $d\mathbf{r}$  (que es lo que se ha movido la partícula de fluido en un intervalo de tiempo  $dt$ ) y la velocidad en un punto fijo.

Así que solucionar este detalle, ya podemos escribir, para un elemento de volumen:

$$(1.2.1) \quad -\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Esta es la ecuación de movimiento del fluido: **ecuación de Euler**. Es una de las **ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos**.

Si el fluido está en un campo gravitatorio, sobre cualquier elemento de volumen actúa una fuerza adicional  $\rho g$ , donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse a la fuerza que actúa sobre cada elemento del volumen:

$$(1.2.2) \quad (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{g}$$

En todos los razonamientos hasta ahora no se ha tenido en cuenta la viscosidad o la conducción térmica del fluido. Un fluido de este tipo se denomina **fluido ideal**:

$$\text{Fluido ideal} \iff \nexists \begin{cases} \text{Viscosidad } \nu \\ \text{Conducción térmica} \end{cases}$$

En un fluido ideal no hay conductividad térmica, por lo que el movimiento a través del fluido es *adiabático*.

$$(1.2.3) \quad \text{Movimiento adiabático} \iff \frac{ds}{dt} = 0$$

donde  $s$  es la entropía de una partícula de fluido. Como antes, esta derivada se refiere a la partícula de fluido *en movimiento*, mientras que nosotros queremos expresar las ecuaciones respecto a puntos fijos del espacio:

$$(1.2.4) \quad \frac{ds}{dt} = \mathbf{v} \cdot \text{grad} s + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

Esta forma nos recuerda la ecuación (1.1.2), por lo que podemos escribir una *ecuación de continuidad para la entropía*:

$$(1.2.5) \quad \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0$$

donde  $\rho s \mathbf{v}$  se denomina **densidad de flujo de entropía**.

En general la entropía es constante en todo el fluido, por lo que si tiene un valor específico en un instante inicial, el valor se mantiene en cualquier instante posterior; esto significa que podemos simplificar la ecuación (1.2.5) y dejarla simplemente en

$$(1.2.6) \quad s = \text{constante}$$

En adelante, suponemos que la entropía es constante en todo el fluido. En este caso el movimiento del fluido se denomina **isoentrópico**.

**Ecuación de Euler (versión termodinámica).** Si suponemos que el movimiento es isoentrópico, por lo que podemos utilizar la relación termodinámica:

$$dw = Tds + Vdp$$

donde  $w$  es la entalpía por unidad de masa del fluido,  $V = 1/\rho$  el volumen específico y  $T$  la temperatura. Como  $s$  es constante, tenemos

$$dw = Vdp = \frac{dp}{\rho}$$

y por tanto

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} w$$

Así, la ecuación (1.2.1) puede escribirse como

$$(1.2.7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} w$$

que es la versión termodinámica de la ecuación de Euler.

**Ecuación de Euler (en función sólo de  $\mathbf{v}$ ).** Usando la relación proveniente del análisis vectorial:

$$\frac{1}{2} \text{grad} v^2 = \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$$

podemos escribir (1.2.7) en la forma

$$(1.2.8) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = -\text{grad} w$$

Tomando rotacionales a los dos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta que el rotacional de un gradiente es cero, tenemos una forma de la ecuación de Euler en la que interviene sólo la velocidad:

$$(1.2.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \mathbf{v}) = \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v})$$

**Condiciones límite para un fluido ideal.** Las ecuaciones de movimiento deben complementarse con las condiciones límite que debe satisfacer el fluido en las superficies que lo limitan.



En el caso de un fluido ideal, la condición límite indica que **el fluido no puede penetrar una superficie sólida**. De forma matemática, esta condición es

$$(1.2.10) \quad v_n = 0$$

Es decir, la componente de la velocidad normal a la superficie debe anularse si la superficie está en reposo. Si la superficie está en movimiento

$$v_n = v_{sup}$$

Si es una superficie entre dos fluidos inmiscibles:

$$p_1 = p_2$$

$$v_{n_1} = v_{n_2}$$

---

### Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

---

Ecuaciones de Euler  $(x, y, z)$        $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$

Ecuación de continuidad       $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho = 0$

Ecuación adiabática       $s = \text{constante}$

---

CUADRO 1. Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

### 1.3. Hidrostática (G)

Consideramos el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme. Como el fluido está en reposo,  $\mathbf{v} = 0$ , de manera que la ecuación de Euler (1.2.2) toma la forma

$$(1.3.1) \quad \text{grad} p = \rho \mathbf{g}$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido.

**Densidad constante en todo el fluido.** Suponemos que  $\rho$  es constante en todo el volumen (es decir, no hay compresión significativa del fluido)

debida a la gravedad). Tomando el eje  $z$  vertical y hacia arriba, tenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

De manera que

$$p = -\rho g z + \text{constante}$$

Si el fluido tiene una superficie libre a una altura  $h$ , donde se le aplica una presión externa  $p_0$  (igual en todos los puntos), esta superficie estará en el plano horizontal  $z = h$ . Estas condiciones límite nos permiten encontrar la constante, que resulta  $p_0 + \rho g h$ , y al final

$$(1.3.2) \quad p = p_0 + \rho g (h - z)$$

**Densidad no constante en el fluido (gran volumen).** En el caso de masas grandes de fluido  $\rho$  no puede suponerse constante.

Ahora suponemos que el fluido está tanto en equilibrio mecánico como térmico, por lo que la temperatura es igual en todos sus puntos. Usaremos la relación termodinámica:

$$dG = -s dT + V dp$$

donde  $G$  es el potencial termodinámico por unidad de masa (entalpía libre o potencial de Gibbs). Si  $T = \text{constante}$

$$dG = V dp = \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow \text{grad} G = \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

Así que ahora, la ecuación de Euler para una *gran* masa de fluido en reposo (1.3.1) puede escribirse como

$$\text{grad} G = \mathbf{g}$$

Si la gravedad  $\mathbf{g}$  es un vector constante dirigido hacia el eje  $z$  negativo,

$$\mathbf{g} = -\text{grad}(gz)$$

por lo que combinando las dos ecuaciones anteriores:

$$(1.3.3) \quad \text{grad}(G - gz) = 0 \Rightarrow G - gz = \text{constante}$$

donde  $gz$  es la energía potencial del elemento de masa del fluido en el campo gravitatorio.

**Dependencia sólo de  $z$ .** Como consecuencia de la ecuación (1.3.1) deducimos que si un fluido está en equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, la presión sólo puede ser función de la altura  $z$  (si la presión fuera diferente en distintos puntos a la misma altitud no estaría en

equilibrio). A partir de (1.3.1) vemos que

$$(1.3.4) \quad \rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz}$$

la densidad también es sólo una función de  $z$ .

$$p = p(z) \Rightarrow \rho = \rho(z) \Rightarrow T = T(z)$$

Es decir,

$$\text{Equilibrio mecánico en campo gravitatorio} \Rightarrow p, \rho, T = f(z)$$

**Masa muy grande de fluido (unidas por la atracción gravitatoria).**

En este caso consideramos una masa muy grande de fluido que se mantiene unido mediante la atracción gravitatoria (como una estrella). Si  $\phi$  es el potencial gravitatorio newtoniano, satisface la ecuación diferencial

$$(1.3.5) \quad \Delta\phi = 4\pi G\rho$$

donde  $G$  es la constante de la gravitación de Newton. La aceleración gravitatoria será  $\mathbf{g} = -\text{grad}\phi$ , por lo que la ecuación de Euler (1.3.1) en este caso queda:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = -\text{grad}\phi$$

Tomando la divergencia

$$(1.3.6) \quad \text{div} \left( \frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) = -\Delta\phi = -4\pi G\rho$$

Obtenemos la ecuación que nos da el equilibrio mecánico de la estrella (aunque no presupone la existencia de equilibrio térmico completo).

Si el cuerpo no está girando, será esférico y tanto las distribuciones de presión y densidad serán esféricas, por lo que la ecuación (1.3.6) quedará

$$(1.3.7) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G\rho$$

#### 1.4. Caso en que la convección está ausente (G)

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico.

Equilibrio mecánico  $\nRightarrow$  Equilibrio térmico

Si el fluido verifica la ecuación (1.3.1) pero el fluido no está en equilibrio térmico, el equilibrio mecánico sólo es estable si se dan ciertas condiciones.

En caso contrario, el equilibrio es inestable, de manera que se producen corrientes de fluido que tienden a mezclarlo, igualando la temperatura

hasta que se alcanza el equilibrio térmico; este movimiento se denomina **convección**. La condición para que el equilibrio mecánico sea estable es la ausencia de convección.

$$\text{Equilibrio estable} \iff \nexists \text{ convección}$$

Para que el equilibrio sea estable es necesario (pero no suficiente) que la fuerza sobre el elemento que se desplaza tienda a devolverlo a su lugar inicial. Es decir, que el fluido desplazado tiene que ser más pesado que el volumen que ha ocupado su lugar. Si  $V(p, s)$  es el volumen del elemento a una altura  $z$  (donde  $p$  y  $s$  son la presión y entropía de equilibrio a la altura  $z$ ) y el desplazamiento es adiabático, el elemento en su nueva posición tiene  $V(p', s)$ , con  $p' = p(z + \xi)$  (situación (1) en la figura (1)). El elemento de volumen en equilibrio en  $z + \xi$  es  $V(p', s')$  (con  $s' = s(z + \xi)$ ). Así, la condición de equilibrio es

$$V(p', s') - V(p', s) > 0$$

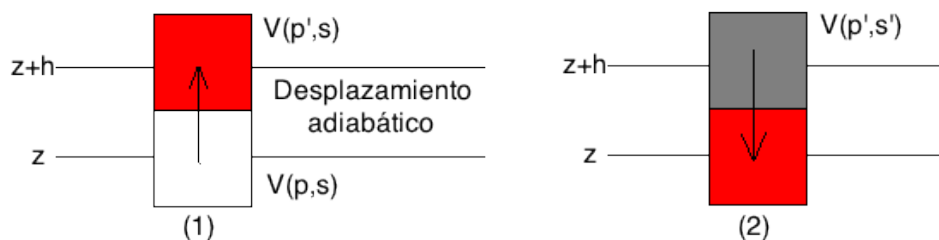


FIGURA 1. Condición de equilibrio: el elemento que ha sido desplazado (gris oscuro) debe ser más pesado que el elemento que lo desplaza (en rojo), de manera que tienda a devolverlo a su posición inicial, manteniendo el equilibrio y evitando las corrientes de convección.

Desarrollando en serie de potencias  $s' - s = \xi \frac{ds}{dz}$  de donde obtenemos

$$(1.4.1) \quad \left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

Las fórmulas de la termodinámica dan:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

en donde  $c_p$  es el calor específico a presión constante.  $c_p$  y  $T$  son positivos, de manera que (1.4.1) puede escribirse como

$$(1.4.2) \quad \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

La mayoría de las sustancias se dilatan cuando se calientan, es decir,  $(\partial V/\partial T)_p > 0$  así que la condición de ausencia de convección se reduce a

$$(1.4.3) \quad \frac{ds}{dz} > 0$$

que la entropía aumente con la altura.

A partir de aquí encontramos la condición para el gradiente de temperaturas. Desarrollando  $ds/dz$

$$\frac{ds}{dz} = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dz} > 0$$

Usando la expresión dada en (1.3.4)  $\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V}$  se obtiene

$$(1.4.4) \quad \frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

En resumen, un fluido en equilibrio mecánico verifica la ecuación (1.3.1). Si no está en equilibrio térmico, el equilibrio será estable en ausencia de convección. La convección se puede dar si

$$\begin{cases} T \Downarrow & \text{cuando } z \Uparrow \\ \frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \end{cases}$$

### 1.5. Ecuación de Bernoulli (G)

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se simplifican en el caso de un flujo estacionario. Un **flujo** es **estacionario** si la velocidad es constante en el tiempo en todo el fluido.

$$\text{Flujo estacionario} \iff \begin{matrix} \mathbf{v} \neq f(t) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) \end{matrix} \iff \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

En esta situación la ecuación de Euler (en versión termodinámica) *tuneada* con la relación del análisis vectorial (1.2.8) queda

$$(1.5.1) \quad \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = -\text{grad} w$$

Introducimos el concepto de **línea de corriente**: la tangente en cualquier punto a una línea de corriente indica la dirección de la velocidad en

ese punto. Estas líneas quedan determinadas por las ecuaciones diferenciales:

$$(1.5.2) \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

En flujo estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo y coinciden con la trayectoria de las partículas (cosa que no sucede en flujo no estacionario).

Hacemos el producto escalar de la ecuación (1.5.1) con un vector unitario  $\mathbf{l}$  tangente a la línea de corriente. La proyección del gradiente en una dirección es la derivada en esa dirección, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \text{grad } w &\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial l} \\ \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \perp \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \parallel \mathbf{l} &\Rightarrow \mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

Así que la ecuación (1.5.1) queda como

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0$$

De manera que

$$(1.5.3) \quad \frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante} \quad \text{a lo largo de una línea de corriente}$$

(La constante es diferente en cada línea de corriente). La ecuación anterior es la **ecuación de Bernoulli**.

**Flujo estacionario en un campo gravitatorio.** Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, tenemos que sumar la gravedad  $g$  al segundo miembro de la ecuación (1.5.1). Si la dirección de la gravedad es el eje  $z$ , entonces el ángulo formado por  $g$  y  $\mathbf{l}$  es la derivada  $-dz/dl$ , por lo que la proyección de  $g$  sobre  $\mathbf{l}$  es  $-g \frac{dz}{dl}$  y la ecuación de Bernoulli en un campo gravitatorio resulta:

$$(1.5.4) \quad \frac{1}{2} v^2 + w + gz = \text{constante}$$

## 1.6. Flujo de energía (B)

Seleccionamos un volumen fijo cualquiera y estudiamos cómo varía la energía del fluido con el tiempo. Si la energía del volumen seleccionado es  $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon$  (energía cinética e interna, donde  $\epsilon$  es la energía interna por unidad de masa), estamos interesados en calcular

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right)$$

Para ello, nos centraremos en cada término por separado.

**Término**  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

O utilizando la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación de Euler (1.2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p - \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}$$

Y ahora el último término lo modificamos:

$$(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2$$

Y para  $\operatorname{grad} p$  usamos la relación termodinámica  $dw = Tds + \frac{1}{\rho} dp$ , con lo que

$$\operatorname{grad} p = \rho \operatorname{grad} w - \rho T \operatorname{grad} s$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} w + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} w + \rho T \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s - \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s \end{aligned}$$

**Término**  $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon)$ . Utilizamos la relación termodinámica

$$d\epsilon = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Como  $\epsilon + \frac{p}{\rho}$  es la entalpía por unidad de masa

$$d(\rho \epsilon) = \rho d\epsilon + \epsilon d\rho = w d\rho + \rho T ds$$

y por tanto

$$\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} = w \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}$$

Utilizamos la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación adiabática general (1.2.4)<sup>3</sup> para obtener

$$\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} = -w \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho T \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} s$$

Combinando los resultados para los dos términos tenemos finalmente para la variación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = - \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right)$$

<sup>3</sup>La "ecuación de continuidad de la entropía".

o lo que es lo mismo

$$(1.6.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = -\operatorname{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \right)$$

Integrando esta expresión respecto al volumen considerado tenemos:

$$(1.6.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) dV &= - \int \operatorname{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \right) dV = \\ &= - \oint \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \cdot d\mathbf{f} \end{aligned}$$

Como vemos, el primer miembro es la variación de energía del fluido por unidad de tiempo mientras que el segundo término es la energía que sale del volumen. Por tanto,

$$(1.6.3) \quad \text{Densidad de flujo de energía} \quad \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right)$$

### 1.7. Flujo de impulso (B)

Hacemos los mismos razonamientos que en la sección anterior, pero interesándonos en la cantidad de movimiento del fluido. El impulso por unidad de volumen es  $\rho \mathbf{v}$ , de manera que buscamos  $\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t$  (usando notación tensorial):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Usamos la ecuación de continuidad (1.1.2) en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

y la ecuación de Euler (1.2.1) en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) \end{aligned}$$

Reescribimos el primer término del segundo miembro como

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

y finalmente

$$(1.7.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$



donde  $\Pi_{ik}$  es el tensor simétrico:

$$(1.7.2) \quad \Pi_{ik} = \delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

Como antes, integrando sobre todo el volumen considerado tenemos:

$$(1.7.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV &= - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = \\ &= - \oint \Pi_{ik} df_k \end{aligned}$$

El primer miembro es la variación de la componente  $i$  del impulso en el volumen, y por tanto, el segundo miembro es la cantidad de impulso que atraviesa la superficie por unidad de tiempo. Si escribimos  $df_k = n_k df$  donde  $\mathbf{n}$  es un vector normal a la superficie (apuntado hacia afuera),  $\Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k$ , o de forma vectorial:

$$(1.7.4) \quad \Pi = p \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$$

Así,  $\Pi_{ik}$  es la componente  $i$  de impulso que fluye a través del área perpendicular al eje  $k$  de la superficie por unidad de tiempo.  $\Pi_{ik}$  se denomina **tensor de densidad de flujo de impulso**.

### 1.8. Conservación de la circulación (G)

La integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

a lo largo de un contorno cerrado se denomina **circulación de la velocidad**.

Consideramos la circulación sobre contorno fluido en un instante determinado. Queremos saber qué ocurre a medida que pasa el tiempo. Como el contorno se ha tomado sobre partículas del fluido, el contorno se despalza con éstas, por lo que queremos averiguar:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Tomamos la derivada total porque debemos tener en cuenta tanto la variación de la velocidad como el de  $d\mathbf{l}$ , al desplazarse el contorno con las partículas. Así<sup>4</sup>:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d d\mathbf{l}}{dt}$$

Nos concentramos en el segundo término:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = \delta \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \Rightarrow \oint \delta \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = 0$$

<sup>4</sup>Utilizamos  $\delta$  para distinguir el diferencial de la derivada y no liarnos.

Pero la integral a lo largo de un camino cerrado de una diferencial total es cero, así que

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l}$$

Utilizando el teorema de Stokes  $\int_S \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ , de manera que:

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{f}$$

Finalmente, teniendo en cuenta  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad}w$ , y que el rotacional de un gradiente es cero<sup>5</sup> tenemos:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{f} = \int_S \mathbf{rot}(\mathbf{grad}w) \cdot d\mathbf{f} = 0$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$(1.8.1) \quad \Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante}$$

En un fluido ideal, la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno *fluido* cerrado es constante en el tiempo (Teorema de Kelvin o Ley de conservación de la circulación).

Hemos utilizado la ecuación de Euler 1.2.7, en la que interviene que el flujo es isoentrópico, por lo que **el resultado no es válido si el fluido no es isoentrópico**.

### 1.9. Flujo potencial (G)

Suponemos un flujo estacionario. Consideramos una línea de corriente de la que sabemos que, en un determinado punto tiene vorticidad cero  $\omega \equiv \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ . Si elegimos un camino cerrado alrededor de la línea de corriente, la circulación de la velocidad será

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_S \omega \cdot d\mathbf{f} = 0$$

Es decir, vemos que la circulación es cero. A medida que el contorno se mueve con el fluido siguiendo la línea de corriente, la ley de conservación de la circulación nos dice que este valor no se altera, por tanto, la vorticidad  $\omega$  también se mantendrá igual a cero a lo largo de toda la línea de corriente.

---

<sup>5</sup>Si el fluido ideal está sometido a un campo gravitatorio  $\mathbf{g}$  también se verifica la ley de conservación de la circulación, porque  $\mathbf{rot} \mathbf{g} = 0$ .

Por tanto, si  $\omega = \text{rot } \mathbf{v} = 0$  en un punto de la línea de corriente, es igualmente cero en toda la línea de corriente.

$$\omega(x) = 0 \Rightarrow \omega(x') = 0 \quad \forall x' \in \text{línea de corriente}$$

Consideramos un flujo estacionario incidiendo sobre un cuerpo. Como el flujo es uniforme en el infinito, su velocidad  $\mathbf{v}$  es una constante, de manera que  $\omega = 0$  en todas las líneas de corriente. Con el resultado anterior se concluye entonces que  $\omega = 0$  para todas las líneas de corriente del fluido, o lo que es lo mismo,  $\omega = 0$  en todo el fluido.

$$\begin{aligned} \text{Flujo estacionario} &\Rightarrow \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \omega(\infty) = 0 \quad \forall \text{ líneas de corriente} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega = 0 \quad \text{todo el fluido} \end{aligned}$$

Un flujo en el cual  $\omega = 0$  en todo el espacio se denomina **flujo potencial** o **flujo irrotacional**. Por el contrario, un flujo en el que  $\omega$  no es nula en todos los puntos se denomina **flujo rotacional**.

Si en un instante determinado tenemos un flujo potencial en todo el volumen del fluido. Entonces, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno cerrado cualquiera será cero. Por la ley de conservación de la circulación, también será cero en cualquier instante futuro, por lo que si existe un flujo potencial en un instante cualquiera, tendremos un flujo potencial en cualquier instante futuro.

Flujo potencial en  $t$  (en todo el fluido)

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const} \quad \forall \text{ contorno cerrado} \\ &\text{Flujo potencial } \forall t' > t \end{aligned}$$

De hecho, esto coincide con el hecho de que si  $\omega = 0$ , entonces la ecuación de Euler (en función sólo de la velocidad) 1.2.9 se satisface automáticamente.

**Todas estas conclusiones tienen validez limitada.**

El resultado de que la vorticidad  $\omega = 0$  para toda línea de corriente no es válida para líneas de corriente contenidas en la superficie de un sólido junto al cual circula un flujo. La presencia del cuerpo sólido impide construir un contorno cerrado alrededor de la línea de corriente. Las ecuaciones del movimiento admiten soluciones en las que se produce una separación en la superficie del cuerpo: algunas líneas de corriente que han seguido la superficie del cuerpo empiezan a separarse de ella y siguen dentro del fluido. El flujo se caracteriza por una superficie de discontinuidad tangencial que sale del cuerpo. En esta superficie una capa se desliza

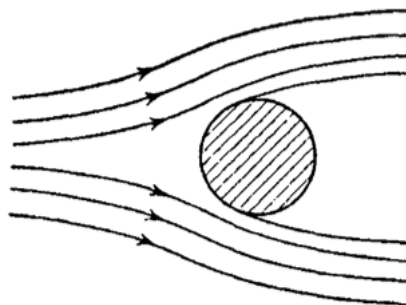


FIGURA 2. Separación sobre la superficie de un cuerpo sólido junto al que circula un flujo

sobre la otra. Desde el punto de vista matemático la discontinuidad en la componente tangencial corresponde a una superficie en la cual la vorticidad  $\omega$  es nula.

Si incluimos estos flujos discontinuos, la solución de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal la solución no es única; sin embargo todas las soluciones discontinuas no tienen significado físico ya que las discontinuidades tangenciales son inestables y el flujo se haría turbulento.

El problema físico real del flujo alrededor de un cuerpo tiene una solución única. Esta solución única viene determinada por las propiedades de la **capa límite**. Esta capa límite es una capa delgada de fluido que circula junto al cuerpo. Como los fluidos ideales no existen, todos tienen una cierta viscosidad, aunque sea pequeña. En esta capa cercana al cuerpo la viscosidad no puede despreciarse. En función de las características de esta capa, se selecciona una de las infinitas soluciones de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal. Así, siempre despreciaremos las soluciones que dan lugar a separación ya que si hay separación se producirá turbulencia.

El estudio de las soluciones de las ecuaciones de movimiento para un flujo estacionario continuo que circula junto a cuerpos en movimiento aporta resultados interesantes para cuerpos de forma *aerodinámica*. En estos casos el flujo difiere muy poco de un flujo potencial, excepto en una capa límite y en una *estela* estrecha detrás del mismo.

Otro caso en el que es importante el estudio del flujo potencial es cuando existen oscilaciones pequeñas de un cuerpo inmerso en un fluido. De hecho, si la amplitud  $a$  de las oscilaciones es pequeña comparadas con la dimensión  $l$  del cuerpo ( $a \ll l$ ), el flujo que circula junto al cuerpo es

potencial.

$$\text{Flujo potencial} \iff \begin{cases} \text{Formas aerodinámicas} & (\text{excepto en capa límite y estela}) \\ \text{Cuerpo oscilando} & a_{osc} \ll l_{cuerpo} \text{ (osc. pequeñas)} \end{cases}$$

La velocidad  $\mathbf{v}$  varía apreciablemente en una cantidad del mismo orden que la velocidad  $u$  del cuerpo oscilante a lo largo de una longitud del orden de la dimensión  $l$  del cuerpo  $\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \equiv \text{grad } \mathbf{v} \sim \frac{u}{l}$ . La magnitud de  $\mathbf{v}$  es del orden de  $u$  (a pequeñas distancias del cuerpo), de manera que

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \sim \frac{u^2}{l}$$

La derivada  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \omega u$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de las oscilaciones. Y como  $\omega \sim u/a$ , tenemos  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \frac{u^2}{a}$ . Como nos centramos en oscilaciones pequeñas,  $a \ll l$ ,  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  y puede despreciarse, por lo que la ecuación de Euler queda:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } w$$

Tomando el rotacional en ambos miembros

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } (\text{grad } w) = 0 \Rightarrow \text{rot } \mathbf{v} = \text{constante}$$

Pero en un movimiento oscilante el promedio temporal de la velocidad es cero, por lo que  $\text{rot } \mathbf{v} = \text{Vorticidad} = \omega = \text{constante} = 0$ . Por tanto, en primera aproximación

$$\text{Cuerpo oscilante} \iff \text{Flujo potencial}$$

**Propiedades del flujo potencial.** La ley de conservación de la circulación se basa en que el flujo es isoentrópico. Sólo el flujo isoentrópico puede ser potencial. Usando el teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

Para un flujo potencial  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  (vorticidad), por lo que

$$(1.9.1) \quad \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Es decir, la circulación alrededor de cualquier contorno cerrado es nula  $\Rightarrow$  no pueden existir líneas de corriente cerradas en un flujo potencial. Como la dirección de una línea de corriente es en todos los puntos la dirección de la velocidad, la circulación a lo largo de esta línea no puede ser cero (pues significaría que no hay flujo, que el fluido está estático).

Si tenemos un campo vectorial con un rotacional cero, la velocidad en el flujo potencial puede expresarse como gradiente de un escalar; en este

caso se denomina **potencial de velocidad**.

$$(1.9.2) \quad \mathbf{v} = \text{grad} \phi$$

Escribiendo la ecuación de Euler en la forma 1.2.8

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = \text{grad} w$$

y sustituyendo  $\mathbf{v} = \text{grad} \phi$  tenemos

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0$$

de donde

$$(1.9.3) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w = f(t)$$

donde  $f(t)$  es una función arbitraria del tiempo. Como la velocidad es la derivada espacial de  $\phi$  podemos sumar  $\phi$  a cualquier función del tiempo; cambiando  $\phi$  por  $\phi + \int f(t) dt$  tenemos cero en el segundo miembro de (1.9.3)

En el caso de un flujo estacionario (considerando  $\phi$  independiente del tiempo),  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ,  $f(t) = \text{constante}$  y entonces (1.9.3) se transforma en la **ecuación de Bernoulli**.

$$(1.9.4) \quad \frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante}$$

### 1.10. Fluidos incompresibles (G)

En muchos fluidos la densidad se puede considerar constante  $\rho = \text{const}$ , es decir, no se observa ninguna compresión/dilatación apreciable en todo el fluido. En este caso denominamos al **fluido incompresible**. En este caso las ecuaciones de la dinámica se simplifican mucho.

$$\text{Flujo incompresible} \iff \begin{cases} \nexists \text{ compresión} \\ \nexists \text{ dilatación} \end{cases} \iff \rho = \text{constante}$$

En esta situación las ecuaciones de la dinámica se simplifican mucho.

$$(1.10.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{g}$$

$$(1.10.2) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

En el caso de la ecuación de Euler podemos incluir  $\rho$  dentro del operador gradiente, mientras que en el caso de la ecuación de continuidad queda muy simplificada.

Como la densidad deja de ser una variable desconocida, las ecuaciones de la dinámica pueden considerarse como un conjunto de ecuaciones en el que sólo es necesario especificar la velocidad:

$$(1.10.3) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(1.10.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v})$$

En este caso la ecuación de Bernoulli también puede escribirse de manera más sencilla. La ecuación (1.10.1) difiere de la ecuación de Euler (1.2.7), en general, en que hay que escribir  $\operatorname{grad} (p/\rho)$  en lugar de  $\operatorname{grad} w$ . Por tanto, podemos escribir la ecuación de Bernoulli cambiando la entalpía en (1.5.4) por  $p/\rho$

$$(1.10.5) \quad \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante}$$

En el caso de un fluido incompresible también podemos escribir  $p/\rho$  en lugar de  $w$  en la expresión (1.6.3) que da el flujo de energía

$$(1.10.6) \quad \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right)$$

Sabemos de la termodinámica que la variación de la energía interna es:

$$d\epsilon = Tds - pdV$$

que en el caso de  $s = \text{const}$  y  $V = 1/\rho = \text{const}$  resulta en  $d\epsilon = 0 \Rightarrow \epsilon = \text{const}$ . Como los términos constantes en la energía no tienen importancia, podemos omitir  $\epsilon$  en  $w = \epsilon + p/\rho$ .

Las ecuaciones todavía se simplifican más en el caso de un flujo potencial de fluido incompresible.

$$\begin{array}{ll} \text{Flujo potencial} & \Longleftrightarrow \quad \omega = 0 = \operatorname{rot} \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi \\ \text{Fluido incompresible} & \Longleftrightarrow \quad \rho = \text{const} \\ & \Downarrow \\ \text{Ecuación de Euler} & \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \Rightarrow 0 = 0 \\ \text{Ecuación de continuidad} & \rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi \Rightarrow \Delta \phi = 0 \end{array}$$

Es decir, sólo tenemos que resolver la ecuación de Laplace para el potencial  $\phi$ .

$$(1.10.7) \quad \Delta \phi = 0$$

Debemos completar las ecuaciones anteriores con condiciones límite en las superficies en las que el fluido se encuentra con cuerpos sólidos:

$$v_n^{fluido} = v_n^{superficie} = \begin{cases} v_n^{fluido} = 0 & \text{Superficie fija} \\ v_n^{fluido} = v_n^{sup} = f(t) & \text{Superficie móvil} \end{cases}$$

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

En general la velocidad normal es la derivada en la dirección normal a la superficie del potencial  $\phi$ , por lo que en general las condiciones límite son una determinada función de las coordenadas y del tiempo en los límites.

En el caso del flujo potencial la velocidad está relacionada con la presión mediante la ecuación (1.9.3). En un fluido incompresible, podemos sustituir  $w$  por  $p/\rho$ , de manera que

$$(1.10.8) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

Observamos la siguiente propiedad de un flujo potencial de un fluido incompresible; si el cuerpo sólido está en movimiento a través del fluido y resulta en un flujo potencial, en un instante cualquiera sólo depende de la velocidad del cuerpo móvil (y no, por ejemplo, de su aceleración). La ecuación de Laplace para el potencial (1.10.7) no depende explícitamente del tiempo, que sólo entra en la solución a través de las condiciones límite (y éstas sólo contiene la velocidad del cuerpo). A partir de la ecuación de Bernoulli observamos que en el flujo estacionario de un fluido incompresible la presión máxima se presenta en puntos donde la velocidad se anula  $v = 0$

$$p = \rho \times const - \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow p^{max} = \rho \times const$$

Este punto normalmente está en la superficie del cuerpo a lo largo del cual se está moviendo el fluido (el punto O de la figura (3)) y se denomina **punto de estancamiento**. Si  $u$  es la velocidad de la corriente incidente (es decir, la velocidad  $u(\infty)$  y  $p_0 = p(\infty)$ ), la presión en el punto de estancamiento es

$$(1.10.9) \quad p_{max} = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2$$

**Flujo bidimensional.** Si la distribución de velocidades en un fluido móvil sólo depende de dos coordenadas y la velocidad en todas partes es paralela al plano  $xy$  entonces el flujo se denomina **bidimensional** o **flujo plano**. En este caso es conveniente expresar la velocidad en función de lo que se denomina **función de corriente**  $\psi(x, y)$ . A partir de la ecuación



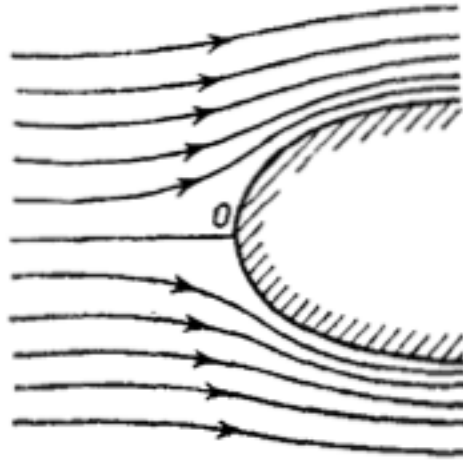


FIGURA 3. Punto de estancamiento

de continuidad  $\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$ , de manera que las componentes de la velocidad se pueden escribir como

$$(1.10.10) \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

De esta manera la ecuación de continuidad se satisface automáticamente. Por lo que entonces sólo nos queda obtener la ecuación de Euler (1.10.4) en función de la función de corriente:

$$(1.10.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = 0$$

Es decir, que si conocemos la función de corriente  $\psi$  podemos determinar inmediatamente la forma de las líneas de corriente en un flujo estacionario. La ecuación diferencial de la línea de corriente (en flujo bidimensional) es  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow v_y dx - v_x dy = 0$ , expresa el hecho de la dirección de la tangente a una línea de corriente es la dirección de la velocidad. Sustituyendo (1.10.10) tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0$$

de donde  $\psi = \text{constante}$ . Es decir, las líneas de corriente son la familia de curvas obtenidas haciendo la función de corriente  $\psi(x, y)$  igual a una constante arbitraria.

El flujo de masa  $Q$  entre dos puntos fijos en el plano  $xy$  viene dado por la diferencia de la función de corriente entre estos dos puntos, independientemente de cuál sea la curva que una los puntos. Si  $v_n$  es la

componente de la velocidad normal a la curva en un punto cualquiera, entonces:

(1.10.12)

$$Q = \rho \oint_A^B v_n dl = \rho \oint_A^B (-v_y dx + v_x dy) = \rho \int_A^B d\psi \Rightarrow Q = \rho (\psi_B - \psi_A)$$

Existen potentes métodos para resolver problemas de flujo potencial bidimensional en el caso de un fluido incompresible que rodea a cuerpos de diversos perfiles en los que interviene la teoría de funciones de variable compleja.

En cuanto a la condición para que un fluido pueda considerarse incompresible, está relacionada con la velocidad del sonido  $c$  en el fluido. Cuando la presión varía en  $\Delta p$ , la densidad lo hace en  $\Delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) \Delta p$ . Pero según la ecuación de Bernoulli, en flujo estacionario,  $\Delta p \sim \rho v^2$ , de manera que  $\Delta \rho \sim \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) \rho v^2$ . Más adelante veremos que  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{c^2}$ , de manera que al final

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1 \iff \text{Fluido incompresible (flujo estacionario)}$$

(1.10.13)  $v \ll c$

es decir, que considerar al fluido incompresible es equivalente a que la velocidad del fluido sea pequeña en comparación con la del sonido en el fluido. Pero esta condición sólo es suficiente en flujo estacionario. Cuando el flujo no es estacionario necesitamos una condición adicional. Si  $\tau$  y  $l$  es un tiempo y una longitud del orden de los tiempos y distancias en lo que la velocidad del fluido sufre una variación significativa. Entonces, el fluido (en flujo no estacionario) puede considerarse incompresible si además de (1.10.13) se cumple

$$\tau \gg \frac{l}{c}$$

(1.10.14)

La condición (1.10.14) indica que el tiempo  $\frac{l}{c}$  que tarda una señal sonora en recorrer la distancia  $l$  debe ser pequeño en comparación con el tiempo  $\tau$  durante el cual el flujo varía apreciablemente. De esta manera las interacciones en el fluido pueden considerarse instantáneas.

Si se satisfacen simultáneamente las condiciones (1.10.13) y (1.10.14) el fluido puede considerarse incompresible:

$$\text{Fluido incompresible} \iff \begin{cases} v \ll c \\ \tau \gg \frac{l}{c} \end{cases}$$

### 1.11. Fuerza de arrastre en un flujo potencial que rodea un cuerpo

En esta sección nos preocupamos del problema de un flujo potencial de un fluido incompresible que rodea un cuerpo sólido. Ésto es equivalente a un problema con el cuerpo en movimiento y el fluido en reposo. Lo único que tenemos que hacer es cambiar a un sistema de referencia en el que el fluido esté en reposo en el infinito. **A partir de ahora consideramos que es el cuerpo el que se mueve a través del fluido.**



FIGURA 4. a) Flujo alrededor de un cuerpo en reposo  
b) Cuerpo en movimiento a través de un fluido estático

El flujo potencial de un fluido incompresible satisface la ecuación de Laplace  $\Delta\phi = 0$ . Las soluciones que buscamos deben anularse en el infinito, ya que allí el fluido está en reposo. El origen de nuestro sistema de referencia está en algún punto en el interior del cuerpo. La solución de la ecuación de Laplace es de la forma  $\frac{1}{r}$  y derivadas espaciales de  $1/r$  de cualquier orden:

$$\phi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}} \frac{1}{r} + \dots$$

donde  $a, \mathbf{A}$  son independientes de  $r$ .

**La constante  $a$  debe ser cero.** Si  $\phi = -\frac{a}{r}$ , entonces  $\mathbf{v} = -\text{grad}_{\mathbf{r}} \frac{a}{r} = \frac{a}{r^3} \mathbf{r}$ . Pero en este caso, si calculamos el flujo de masa a través de una superficie cerrada, por ejemplo una esfera de radio  $R$  vemos que es  $\rho \frac{a}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi \rho a$ . Pero para un fluido incompresible, la cantidad de fluido que entra en la superficie debe ser igual a la que sale, es decir, que el flujo de masa debe ser cero. Por ello, la única solución es que  $a = 0$ .

**Velocidad a grandes distancias del cuerpo.** Como estamos buscando la velocidad a distancias grandes del cuerpo, podemos despreciar las derivadas de orden superior y quedarnos sólo con el primer término.

$$(1.11.1) \quad \phi = \mathbf{A} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{A}}{r^2} \cdot \mathbf{n}$$

y la velocidad resultante

$$(1.11.2) \quad \mathbf{v} = \text{grad}\phi = (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{A}}{r^3}$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unidad en la dirección de  $\mathbf{n}$ . El vector  $\mathbf{A}$  depende de la forma real y la velocidad del cuerpo y sólo puede determinarse resolviendo por completo la ecuación de Laplace a todas las distancias (con las condiciones límite apropiadas en la superficie del cuerpo).

**Relación de  $\mathbf{A}$  con el impulso y la energía del fluido.** La energía cinética del fluido (la energía interna de un fluido incompresible siempre es constante) es  $E = \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV$ , integrando para toda la región exterior al cuerpo. Elegimos una esfera de radio  $R$  y volumen  $V$  (después haremos tender  $R \rightarrow \infty$ ).

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad del cuerpo. Como  $\mathbf{u}$  es independiente de las coordenadas,  $\int u^2 dV = u^2 \int dV = u^2 (V - V_0)$ , donde  $V_0$  es el volumen del cuerpo. En cuanto al segundo término, escribimos  $\mathbf{v} = \text{grad}\phi$  y  $\mathbf{u} = \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$ , de manera que  $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \text{grad}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$

$$\int \text{grad}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV$$

Utilizamos la identidad vectorial

$$\text{div}(f\mathbf{A}) = \text{grad}f \cdot \mathbf{A} + f \text{div}\mathbf{A}$$

de manera que el integrando se transforma en

$$\text{div}[(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})] + (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

Pero  $\text{div}\mathbf{v} = 0$  (ecuación de continuidad) y  $\text{div}\mathbf{u} = 0$ ,  $\text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0$ . Así que

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int \text{div}[(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})] dV$$

Y utilizando el teorema de la divergencia, transformamos el segundo término en una integral de superficie.

$$\int \text{div}[(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})] dV = \oint_{S+S_0} (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{f}$$

Pero en la superficie del cuerpo, por las condiciones límite, las componentes normales de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$  son iguales, por lo que la integral  $\oint_{S_0}$  se anula. Para la superficie  $S$ , sustituimos las expresiones para  $\phi$  y  $\mathbf{v}$  que hemos

encontrado en (1.11.1) y (1.11.2), con lo que obtenemos:

$$\int v^2 dV = u^2 \left( \frac{4}{3} \pi R^3 - V_0 \right) + \int [3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^2 R^3)] do$$

donde hemos escrito  $df = \mathbf{n}R^2 do$  y  $do$  es un elemento de ángulo sólido.

Al final de la integración, obtenemos para la energía total del fluido

$$(1.11.3) \quad E = \frac{1}{2} \rho (4\pi \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - V_0 u^2)$$

Aunque no podemos obtener  $\mathbf{A}$  sin resolver la ecuación  $\Delta\phi = 0$ , sabemos que la ecuación es lineal en  $\phi$  y que las condiciones límite también son ecuaciones lineales en  $\phi$  y  $\mathbf{u}$ . Por tanto  $\mathbf{A}$  tiene que ser una función lineal de las componentes  $\mathbf{u}$ . Y la energía, como hemos visto en (1.11.3) es cuadrática de las componentes de  $\mathbf{u}$ , así que podemos escribir

$$(1.11.4) \quad E = \frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k$$

donde  $m_{ik}$  es el **tensor de masas asociadas**, simétrico y constante, cuyas componentes se pueden obtener a partir de  $\mathbf{A}$ .

Como  $E$  y  $\mathbf{P}$  (el impulso total del fluido) están relacionados mediante  $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$ <sup>6</sup>, entonces podemos escribir las componentes de  $\mathbf{P}$  como

$$(1.11.5) \quad P_i = m_{ik} u_k$$

Y combinando (1.11.3), (1.11.4) y (1.11.5) vemos que  $\mathbf{P}$  tiene que venir dado, en función de  $\mathbf{A}$  por

$$(1.11.6) \quad \mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0 \mathbf{u}$$

El impulso transmitido al fluido por el cuerpo por unidad de tiempo es  $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$ , es decir, la fuerza que actúa sobre el cuerpo

$$(1.11.7) \quad \mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

La componente de  $\mathbf{F}$  paralela a la velocidad del cuerpo se denomina **fuerza de arrastre** y la componente perpendicular **fuerza de sustentación**.

## 1.12. Ondas de gravedad

La superficie de un fluido en equilibrio en un campo gravitatorio es plana. Si una fuerza externa perturba la superficie y hace que se separe de la posición de equilibrio, aparece un movimiento en el fluido. Este movimiento se propaga por toda la superficie mediante lo que se denominan **ondas de gravedad** (ya que se deben a la acción del campo gravitatorio).

<sup>6</sup> $E = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow dE = \frac{1}{2} m 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot d(m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}$

Las ondas de gravedad afectan tanto a la superficie del fluido como a su interior, aunque su efecto es menor a medida que aumenta la profundidad.

Consideramos ondas de gravedad en las que la velocidad de las partículas del fluido móvil sea pequeña, de manera que

$$(1.12.1) \quad (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \iff a \ll \lambda$$

es decir, que la amplitud de las oscilaciones de la onda  $a$  debe ser pequeña comparada con su longitud de onda  $\lambda$ . En la sección (1.9), si despreciar el término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  es equivalente a suponer que tenemos un flujo potencial. Si además consideramos que el fluido es incompresible, podemos utilizar la ecuación de Laplace para el potencial (1.10.7) y (1.10.8), que relaciona la velocidad y la presión. En esta ecuación podemos despreciar el término  $\frac{1}{2}v^2$  porque contiene el cuadrado de la velocidad. Hacemos  $f(t) = 0$  e incluimos el término  $\rho g z$  introducido por el campo gravitatorio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + g z &= f(t) \\ \frac{1}{2}v^2 &\rightarrow 0 \\ f(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$(1.12.2) \quad p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Tomamos el eje  $z$  vertical, con el plano  $xy$  coincidiendo con la superficie de equilibrio del fluido y designamos  $\zeta$  la coordenada  $z$  de un punto de la superficie. Como en equilibrio  $\zeta = 0$ ,  $\zeta$  nos da el desplazamiento vertical de la superficie sobre sus oscilaciones. Si sobre la superficie actúa una presión constante  $p_0$

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Consideramos un potencial  $\phi' = \phi + \frac{p_0}{\rho} t$  de manera que  $\mathbf{v} = \text{grad} \phi = \text{grad} \phi'$ , pero nos permite eliminar el término  $p_0$  (y prescindimos de la prima en  $\phi$ ):

$$(1.12.3) \quad g \zeta + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} = 0$$

Como la amplitud de las oscilaciones de las ondas es pequeña, el desplazamiento  $\zeta$  también es pequeño. En el mismo orden de aproximación suponemos que la componente vertical de la velocidad de los puntos de la superficie en la superficie es  $v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ , pero a su vez,  $v_z = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta}$ , así que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta}$$

Si despejamos  $\zeta$  de la ecuación (1.12.3) y la introducimos en esta igualdad

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} \right) = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta}$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = 0$$

Como las oscilaciones  $\zeta$  son pequeñas,  $z = \zeta \sim z = 0$ , de manera que las ecuaciones que debemos resolver para determinar el movimiento de una superficie bajo la acción de un campo gravitatorio es:

$$(1.12.4) \quad \Delta \phi = 0$$

$$(1.12.5) \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0$$

Supondremos que la superficie del fluido es ilimitada y que  $\lambda$  es pequeña comparada con la profundidad del fluido, así que podemos omitir las condiciones límite en los bordes y en la parte inferior.

Consideramos una onda de gravedad que se propaga a lo largo del eje  $x$  y que es uniforme en la dirección  $y$  (por lo que todas las magnitudes son independientes de  $y$ ). Buscaremos una solución que sea una función periódica simple del tiempo y de la coordenada  $x$

$$\phi = f(z) \cos(kx - \omega t)$$

donde

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0$$

Esta ecuación tiene soluciones  $e^{kz}$  y  $e^{-kz}$ . Debemos eliminar la solución  $e^{-kz}$  porque haría crecer  $\phi$  en el interior del fluido ( $z < 0$ )<sup>7</sup>. Así que la solución es

$$(1.12.6) \quad f(z) = Ae^{kz} \Rightarrow \phi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

Si introducimos esta solución en la ecuación (1.12.5), que también debe satisfacerse, encontramos:

$$(1.12.7) \quad k - \frac{\omega^2}{g} = 0 \Rightarrow \omega^2 = kg$$

<sup>7</sup>Es decir, si consideramos que la solución general es de la forma  $f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$ , tenemos una condición límite que dice que como el fluido es infinitamente profundo,  $\phi(-\infty) = 0 \Rightarrow B = 0$ . O lo que es lo mismo, la perturbación de la superficie disminuye con la profundidad hasta disiparse completamente.

La ecuación (1.12.7) nos da la relación entre el número de onda y la frecuencia de la onda de gravedad.

Una vez obtenido el potencial  $\phi$ , encontramos la distribución de velocidades,

$$(1.12.8) \quad v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -Ake^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = Ake^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

Más adelante se demostrará que la velocidad de propagación  $U$  de la onda viene dada por  $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ ; en nuestro caso:

$$(1.12.9) \quad U = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \sqrt{kg}}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Como vemos, la velocidad de propagación aumenta con la longitud de onda  $\lambda$ .

### 1.13. Ondas de gravedad largas

No entiendo cómo se están considerando ondas de gravedad con longitud de onda grande respecto a la profundidad pero se pueden despreciar “los términos cuadráticos de la velocidad, puesto que se supone de nuevo que es pequeña la longitud de onda” (pag 47).

### 1.14. Ondas en un fluido incompresible

Existe un tipo de onda de gravedad que puede propagarse en el interior de un fluido incompresible. Estas ondas se deben a una inhomogeneidad del fluido producida por el campo gravitatorio. La presión (y la entropía  $s$ ) varían con la altura, por lo que cualquier desplazamiento de una partícula de fluido en altura destruye el equilibrio mecánico y produce un movimiento oscilante. El efecto, como el movimiento es adiabático, es que la partícula transporta con ella a su nueva posición toda su entropía anterior  $s$ , que no es la misma que la que corresponde al valor de equilibrio en la nueva posición.

Suponemos que la longitud de onda es pequeña en comparación con las distancias sobre las que el campo gravitatorio produce una variación notable de la densidad. También suponemos que el fluido es incompresible (podemos despreciar las variaciones producidas por la presión de la onda en la densidad). Toda la modificación de la densidad proviene de la dilatación térmica (que es la que origina la onda en este caso).

Vamos a escribir las ecuaciones hidrodinámicas para este movimiento. Utilizamos un sufijo  $_0$  para distinguir los valores de las magnitudes



correspondientes al equilibrio mecánico y una prima  $s'$  para marcar las desviaciones respecto al equilibrio.

La ecuación de conservación de la entropía  $s = s_0(z) + s'$  puede escribirse, hasta primer orden

$$(1.14.1) \quad \frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} s_0 = 0$$

En la ecuación de Euler despreciamos el término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  porque las oscilaciones son pequeñas<sup>8</sup>. La distribución de presión en el equilibrio viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p_0 + \mathbf{g} \\ (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \sim 0 &\downarrow \text{Oscilaciones pequeñas} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = 0 &\downarrow \text{Equilibrio} \\ \Rightarrow \text{grad} p_0 &= \rho_0 \mathbf{g} \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p' + \frac{\rho'}{\rho^2} \text{grad} p_0$$

Como la variación de la densidad se debe únicamente al cambio de entropía y no a la variación de presión, podemos escribir:

$$\rho' = \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s'$$

y así se obtiene entonces la ecuación de Euler en la forma:

$$(1.14.2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' - \text{grad} \frac{p'}{\rho_0}$$

Podemos incluir  $\rho_0$  bajo el operador gradiente porque siempre despreciamos la variación de la densidad de equilibrio en distancias del orden de la longitud de onda. Por esta misma razón podemos considerar constante la densidad en la ecuación de continuidad, de manera que

$$(1.14.3) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

Como solución de las ecuaciones (1.14.1)-(1.14.3) buscamos ondas planas, tanto para la velocidad como para  $s'$   $p'$

$$\mathbf{v} = \text{const} \times e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

<sup>8</sup>Supongo que se refiere a que la amplitud de la onda  $a$  es pequeña comparada con la longitud de onda  $\lambda$ , (1.12.1).

## Fluidos viscosos

### 2.1. Ecuación del movimiento de un fluido viscoso

Ahora nos concentramos en cómo influye la disipación de la energía debida a la viscosidad y la conductividad térmica en el movimiento del fluido. Como debemos tener en cuenta estos nuevos efectos, hay que introducir nuevos términos en la ecuación de Euler. La ecuación de continuidad sigue siendo válida, ya que en la deducción no influye si el fluido es viscoso o no.

En la sección (1.7) vimos que la ecuación de Euler puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

donde  $\Pi_{ik}$  es el tensor de densidad de flujos de impulso. La ecuación anterior representa una transferencia de impulso *completamente reversible* debida al transporte de las partículas de un lugar a otro y a las fuerzas de presión. La viscosidad es un rozamiento interno, por lo que la transferencia de impulso asociada será irreversible y sucede desde puntos en los que la velocidad es grande a donde la velocidad es pequeña.

Basándonos en esta idea, debemos añadir un término que tenga en cuenta esta transferencia irreversible de impulso debida a la viscosidad; para ello utilizaremos el *tensor de tensiones de la viscosidad*  $\sigma'_{ik}$ . De esta manera:

$$(2.1.1) \quad \Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k$$

donde  $\sigma_{ik}$  (sin la prima) es el *tensor de tensiones*  $\sigma_{ik}$ :

$$(2.1.2) \quad \sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

Este tensor tiene en cuenta el flujo de impulso que no es debido a la transferencia de impulso con la masa del fluido.

Como la viscosidad se origina porque diferentes partículas del fluido se mueven con velocidades diferentes en diferentes puntos del fluido,  $\sigma'_{ik}$  depende de las derivadas espaciales de la velocidad. Si las diferencias entre

estas velocidades son pequeñas, entonces podemos suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad sólo depende de las primeras derivadas de la velocidad. En primera aproximación

$$\sigma'_{ik} = f \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)$$

Además, no puede haber términos independientes de las derivadas de las velocidades porque  $\sigma'_{ik} = 0 \iff v = \text{constante}$ .  $\sigma'_{ik}$  también debe anularse cuando todo el fluido está en rotación uniforme. Es decir, si  $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$ ,  $\sigma'_{ik} = 0$ , lo que nos indica que  $\sigma'_{ik}$  debe contener combinaciones simétricas de  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ . El tensor más general de rango dos que satisface las condiciones anteriores es

$$\sigma'_{ik} = a \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

aunque suele escribirse de la forma

$$(2.1.3) \quad \sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

Los términos entre paréntesis se anulan para el caso  $i = k$ . Las constantes  $\eta$  y  $\zeta$  se denominan coeficientes de viscosidad.

$$(2.1.4) \quad \eta > 0 \quad \zeta > 0$$

La ecuación de Euler para fluidos viscosos la obtenemos añadiendo  $\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$  al segundo miembro:

$$(2.1.5) \quad \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)$$

En la mayor parte de los fluidos, los coeficientes de viscosidad no varían demasiado y en general suelen considerarse constantes, por lo que podemos sacarlos de las derivadas:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &+ \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) = \\ &- \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \end{aligned}$$

Usando que

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \text{div} \mathbf{v} \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \equiv \Delta v_i$$

podemos escribir la ecuación de forma vectorial como

$$(2.1.6) \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \right) = -\text{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad} (\text{div} \mathbf{v})$$

Esta ecuación se simplifica en el caso de fluidos incompresibles, donde  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ , por lo que el último término de (2.1.6) se anula.

$$(2.1.7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

Esta ecuación (2.1.7) es la ecuación de Navier-Stokes (ec. de Euler para un fluido viscoso incompresible).

El tensor de tensiones en un fluido incompresible queda:

$$(2.1.8) \quad \sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

Para un fluido incompresible, la viscosidad sólo depende de un coeficiente  $\eta$  (y la mayoría de los fluidos pueden considerarse como incompresibles). En cuanto al cociente

$$(2.1.9) \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

se denomina viscosidad cinemática ( $\eta$  se denomina viscosidad dinámica).

$$\begin{aligned} \eta &\neq f(p)|_T \\ \nu &= f\left(\frac{1}{p}\right)\bigg|_T \end{aligned}$$

Tomando rotacionales de la ecuación (2.1.7) podemos eliminar la presión y obtener una versión en función únicamente de la velocidad de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$(2.1.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) + \nu \Delta (\text{rot } \mathbf{v})$$

Además de las ecuaciones de movimiento, tenemos que fijarnos en las condiciones límite. En el fluido viscoso las fuerzas de atracción molecular entre las partículas del fluido y las de una superficie interaccionan, de manera que se crea una capa de fluido “pegada” a la superficie en las que la velocidad del fluido se anula.

$$(2.1.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} &= 0 \\ (\mathbf{v}_{\text{fluido}} &= \mathbf{v}_{\text{superficie}}) \end{aligned}$$

Es decir, **para el fluido viscoso deben anularse todas las componentes -tangencial y normal- de la velocidad del fluido**, mientras que para el

fluido ideal era suficiente que se anulara la velocidad normal a la superficie.

La fuerza que actúa sobre un elemento de superficie sólida  $df$  coincide con el flujo de impulso a través del elemento de superficie. Si  $df_k = n_k df$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector normal a la superficie y con la condición límite de  $\mathbf{v} = 0$  en la superficie

$$\Pi_{ik} df_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) df_k$$

entonces la fuerza  $\mathbf{P}$  que actúa sobre la superficie de área unidad es

$$(2.1.12) \quad P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k$$

El primer término es la presión ordinaria mientras que el segundo es la fuerza de rozamiento debida a la viscosidad que actúa sobre la superficie.

Si tenemos dos fluidos inmiscibles, las velocidades de los fluidos y las fuerzas que se ejercen deben ser iguales y opuestas entre sí.

En una superficie libre del fluido debe verificarse la condición

$$(2.1.13) \quad \sigma_{ik} n_k = \sigma'_{ik} n_k - p n_i = 0$$

En un flujo bidimensional podemos obtener la ecuación para las líneas de corriente sustituyendo  $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  en (2.1.10)

$$(2.1.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial x} - \nu \Delta^2 \psi = 0$$

## 2.2. Disipación de energía en un fluido incompresible

La viscosidad (rozamiento interno) produce disipación de energía (que se transforma en calor). Para un fluido incompresible, el cálculo de la disipación es el siguiente. Como la energía interna de un fluido incompresible es nula, la disipación de energía del fluido es igual a la variación de la energía cinética

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{cin} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

La derivada de  $v_i$  respecto al tiempo la obtenemos de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{cin}}{\partial t} &= -\rho v_i v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial p}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \\ &= -\rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

El último término lo obtenemos de

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \sigma'_{ik}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sigma'_{ik} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

de manera que

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} (\rho \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) p + \text{div} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Convertimos  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} (\rho \mathbf{v})$  en  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$  y aprovechamos que para un fluido incompresible  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ . Usando la relación:

$$\text{div} \left( \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right) + \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \text{div} \mathbf{v}$$

De manera que

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = -\text{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

$\rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right)$  es el flujo de energía de un fluido ideal (ver (1.10.6)). El segundo término  $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$  es el flujo de energía interna debido a procesos internos de rozamiento.

Si integramos (2.2.1) respecto a un volumen  $V$ , obtenemos (usando el teorema la divergencia):

$$(2.2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int E_{cin} dV = - \oint \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' \right] \cdot d\mathbf{f} - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV$$

La expresión entre corchetes es igual a la densidad de flujo de energía en el fluido; el primer término nos da la variación de la energía cinética del fluido contenido en  $V$  debida al flujo de energía a través de la superficie que limita a  $V$ . El segundo término es la disminución de la energía cinética debida a la disipación.

Si extendemos la integración a todo el fluido, el término entre corchetes se anula (porque  $\mathbf{v}$  se anula en el infinito). Así, finalmente la disipación de energía de un fluido viscoso es

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV$$

En fluidos incompresibles el tensor  $\sigma'_{ik}$  viene dado por (2.1.8)

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

y puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2$$

por lo que finalmente, podemos escribir la disipación de energía en un fluido incompresible como

$$(2.2.3) \quad \dot{E}_k = \frac{dE_k}{dt} = - \frac{1}{2} \eta \int \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV$$

Como la disipación hace que disminuya la energía mecánica ( $E_{kin} < 0$ ) pero el integrando en (2.2.3) es siempre positivo, llegamos a la conclusión que **el coeficiente de viscosidad  $\eta$**  es siempre positivo.

### 2.3. Flujo en una tubería (E)

EJEMPLO 1. Suponemos que el fluido está encerrado entre dos planos paralelos que se mueven con velocidad relativa constante  $u$ . Tomamos uno de ellos como plano  $xz$  con el eje  $x$  en la dirección de  $u$ . Todas las magnitudes dependen solamente de  $y$  y la dirección del fluido está dirigida en la dirección de  $x$ .

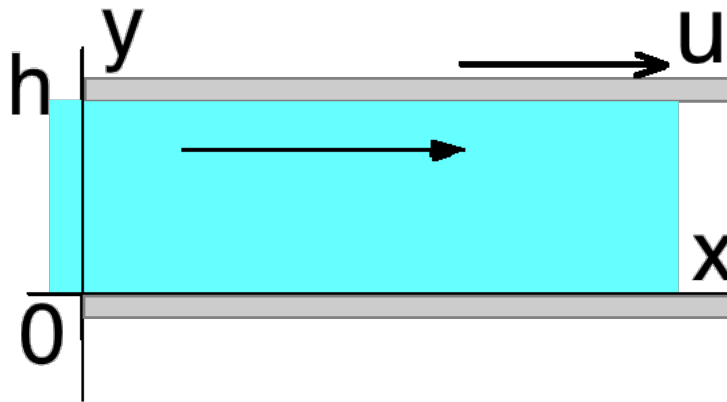


FIGURA 1. Flujo en una tubería

En este escenario la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, por lo que planteamos la ecuación de Navier-Stokes (2.1.7), obteniendo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 y} \quad (\text{componente } x) \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{componente } y) \end{aligned}$$

De la segunda, tenemos que la presión es constante, mientras que de la primera  $v_x = ay + b$ . Determinamos las constantes a partir de las condiciones límite:

$$v_x(y=0) = 0 \quad v_x(y=h) = u$$

así que la distribución de velocidades del fluido es lineal:

$$(2.3.1) \quad v = \frac{u}{h}y$$

La velocidad media del fluido

$$(2.3.2) \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dy = \frac{1}{2} u$$

Según (2.1.12)

$$\mathbf{P}_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k$$

(y  $\sigma_{ik}$  para un fluido incompresible:  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$ ) la componente normal de la fuerza sobre cualquiera de los planos es exactamente  $p$ . Mientras que la fuerza de rozamiento tangencial sobre el plano  $y = 0$  es

$$(2.3.3) \quad \sigma_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \eta \frac{u}{h}$$

**EJEMPLO 2.** Ahora consideramos el flujo estacionario entre dos planos paralelos **fijos** en presencia de un gradiente de presión, escogiendo las coordenadas igual que el ejemplo anterior.

De nuevo, la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, por lo que planteamos las ecuaciones de Navier-Stokes, que resultan

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} & (\text{componente } x) \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} & (\text{componente } y) \end{aligned}$$

A partir de la segunda ecuación, vemos que  $p = p_0 + f(x) = p(x)$ . De manera que, en la primera ecuación, el primer término sólo depende de  $x$ , mientras que el segundo sólo depende de  $y$ . Ésto sólo es posible si los dos términos son constantes. Es decir, que si  $\partial p / \partial x = \text{constante}$ ,  $p(x) = ax + b$ . En cuanto a la velocidad:

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + ay + b$$

Como siempre, determinamos las constantes a partir de las condiciones límite:

$$v_x(y=0) = 0 \quad v_x(y=h) = 0$$

con lo que obtenemos

$$a = -\frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) h$$

y la velocidad, al final

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) y(y-h)$$

que como vemos, tiene un perfil parabólico.

En este caso, como antes, calculamos la velocidad media del fluido

$$(2.3.4) \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dy = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$



Finalmente, calculamos la fuerza de rozamiento que actúa sobre uno de los planos fijos (el de la parte inferior, para  $y = 0$ ):

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} P_x &= -\sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{xy} &= -p\delta_{xy} + \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2}h \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3.** Flujo en una tubería de sección recta arbitraria (aunque la sección es la misma en toda la longitud de la tubería). La velocidad del flujo coincide con la dirección  $x$ , por lo que la velocidad será una función de  $y, z$ . La ecuación de continuidad se verifica de forma automática. En cuanto a las ecuaciones de Navier-Stokes tenemos que

$$\eta \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Como la presión no depende de  $y$  ni de  $z$  (como vemos de las dos últimas ecuaciones),  $p = p(x)$ . Pero el miembro de la derecha de la primera ecuación no depende de  $x$ , por lo que la única manera de satisfacer esta situación es que los dos miembros sean constantes. Así, por una parte, tenemos que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante} \Rightarrow p = ax + b$$

Si  $p_{ini}$  y  $p_{fin}$  son las presiones en los extremos de la tubería, y  $l$  es su longitud, podemos determinar estas constantes mediante las condiciones límite:

$$\begin{aligned} p(x=0) &= p_{ini} \Rightarrow b = p_{ini} \\ p(x=l) &= p_{fin} \Rightarrow a = \frac{p_{fin} - p_{ini}}{l} \end{aligned}$$

de manera que

$$p = \frac{\Delta p}{l}x + p_{ini}$$

En cuanto al perfil de velocidades, viene determinado por

$$\Delta v(y, z) = \text{constante}$$

Suponiendo que la sección recta de la tubería es circular, la resolvemos con la condición límite que  $v = 0$  para  $r = R$ . Utilizando coordenadas polares, tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}$$

Integrando, obtenemos:

$$(2.3.6) \quad v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + a \log r + b$$

Para que la velocidad del fluido en el centro de la tubería ( $r = 0$ ) sea finita,  $a = 0$ . En cuanto a  $v(r = R) = 0$  tenemos

$$(2.3.7) \quad v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

#### 2.4. Ley de semejanza (B)

Al estudiar el movimiento de fluidos viscosos podemos obtener algunos resultados importantes a partir de razonamientos sencillos que tienen que ver con las dimensiones de diversas magnitudes físicas.

Suponemos el caso de un flujo estacionario de un fluido incompresible. En las ecuaciones de Navier-Stokes sólo aparece la viscosidad cinemática  $\nu = \eta/\rho$  en representación de las características del fluido. Las funciones incógnitas que deben encontrarse resolviendo las ecuaciones son la velocidad  $\mathbf{v}$  y el cociente entre la presión y la densidad del fluido  $p/\rho$ . El flujo también depende -a través de las condiciones límite- de la forma y dimensiones del cuerpo que se mueve a través del fluido, así como de su velocidad. Como la forma del cuerpo es conocida, quedan determinadas todas sus propiedades geométricas mediante una sola dimensión lineal,  $l$ . Si la velocidad de la corriente principal es  $u$ , cualquier flujo queda determinado por tres parámetros:  $\nu, u, l$ , cuyas dimensiones son:

$$\begin{aligned} \nu &= \text{cm}^2/\text{s} \\ l &= \text{cm} \\ u &= \text{cm}/\text{s} \end{aligned}$$

A partir de estas tres cantidades, sólo podemos formar una magnitud adimensional  $ul/\nu$  que resulta ser el número de Reynolds  $R$ :

$$(2.4.1) \quad R = \frac{\rho ul}{\eta} = \frac{ul}{\nu}$$

Cualquier otro parámetro adimensional puede escribirse en función de  $R$ . El resto de dimensiones se expresarán en términos de  $l$  y las velocidades en función de  $u$ .

La distribución de velocidades solución de las ecuaciones de Navier-Stokes será de la forma

$$(2.4.2) \quad \mathbf{v} = u \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R\right)$$

Esta expresión nos indica que, para dos flujos diferentes del mismo tipo (flujo alrededor de esferas de distintos radios, con viscosidades diferentes), la distribución de velocidad resultante en términos de  $\mathbf{v}/u$  serán las mismas funciones del cociente  $\mathbf{r}/l$  si el número de Reynolds es el mismo

para cada flujo. Estos flujos que pueden obtenerse unos de otros simplemente cambiando la unidad de medida de las coordenadas de velocidades se llaman *semejantes*. **Dos flujos con los mismos números de Reynolds son semejantes.** Esto se denomina **Ley de Semejanza**.

Igual que se ha hecho con la velocidad en (2.4.2), podemos escribir una fórmula para distribución de presiones resultante de las ecuaciones de Navier-Stokes (con unidades de presión dividida por densidad). Esta magnitud puede ser, por ejemplo,  $u^2$ . Entonces,  $p/\rho u^2$  es una función de la variable adimensional  $r/l$  y del parámetro adimensional  $R$ :

$$(2.4.3) \quad p = \rho u^2 f\left(\frac{r}{l}, R\right)$$

Del mismo modo podemos aplicar estas consideraciones a magnitudes que caracterizan el flujo pero que no son funciones de las coordenadas, como por ejemplo, la fuerza de arrastre  $F$  que actúa sobre el cuerpo. Podemos decir que el cociente adimensional de  $F$  con alguna magnitud formada con  $\nu, u, l, \rho$  y que tenga las dimensiones de fuerza debe ser una función del número de Reynolds. Esta combinación puede ser:  $\rho u^2 l^2$ , de donde

$$(2.4.4) \quad F = \rho u^2 l^2 f(R)$$

Si la fuerza de la gravedad tiene un efecto importante sobre el flujo, entonces éste queda determinado por cuatro parámetros y no tres como en el caso anterior:  $l, u, \nu$  y  $g$  (la aceleración debida a la gravedad). Con estos parámetros podemos construir dos -en vez de sólo una- magnitudes independientes adimensionales, como por ejemplo el número de Reynolds y el número de Froude

$$(2.4.5) \quad F = \frac{u^2}{lg}$$

En estos casos, las ecuaciones (2.4.2) y (2.4.4) dependerá de los dos parámetros adimensionales,  $R$  y  $F$  (el número de Reynolds y el de Froude).

Finalmente, en el caso de flujos no estacionarios, además de las magnitudes  $\nu, u, l$  también debemos especificar un intervalo de tiempo característico  $\tau$ , que determina la variación del flujo con respecto al tiempo (por ejemplo, el periodo de oscilación). En flujos no estacionarios también podemos construir dos magnitudes adimensionales independientes, el número de Reynolds y el número de Strouhal:

$$(2.4.6) \quad S = \frac{u\tau}{l}$$

En estos casos tiene lugar un movimiento semejante *sólo si todos estos números tienen los mismo valores*.

Si las oscilaciones del fluido se presentan espontáneamente (y no bajo la acción de una fuerza excitadora externa) entonces el movimiento de un tipo determinado  $S$  será una función definida de  $R$

$$S = f(R)$$

## 2.5. Fórmula de Stokes

La ecuación de Navier-Stokes se simplifica mucho en el caso de flujos con números de Reynolds pequeños. Para un flujo estacionario de un fluido incompresible

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

El término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  es del orden de  $u^2/l$ .  $\frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$  es del orden de  $\frac{\eta u}{\rho l^2}$ , de manera el cociente de ambos

$$\frac{(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}}{\frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}} \sim \frac{\frac{u^2}{l}}{\frac{\eta u}{\rho l^2}} = \frac{ul}{\nu} = R$$

es precisamente el número de Reynolds. Por tanto, si el número de Reynolds es pequeño, podemos despreciar el término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  en la ecuación de Navier-Stokes, que se convierte en una ecuación lineal

$$(2.5.1) \quad \eta \Delta \mathbf{v} - \text{grad} p = 0$$

Esta ecuación junto con la ecuación de continuidad

$$(2.5.2) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

determinar por completo el movimiento.

Otra ecuación interesante en este caso es la que se obtiene al tomar el rotacional de (2.5.1):

$$(2.5.3) \quad \Delta \text{rot} \mathbf{v} = 0$$

**EJEMPLO.** Vamos a utilizar esta aproximación para obtener la solución del siguiente escenario. Consideramos una esfera en movimiento rectilíneo uniforme a través de un fluido viscoso. Esta situación es análoga a la de tener una esfera fija con un fluido con velocidad  $\mathbf{u}$  en el infinito. Hacemos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$  de manera que  $\mathbf{v}'$  sea cero en el infinito. Como  $\text{div} \mathbf{v} = \text{div} \mathbf{v}' = 0$ , podemos escribir  $\mathbf{v}'$  como el rotacional de un vector  $\mathbf{A}$ . El rotacional de un vector polar es un vector axial (y viceversa). Como la velocidad es un vector polar,  $\mathbf{A}$  tiene que ser axial. Pero  $\mathbf{v}$  (y por tanto, también  $\mathbf{A}$ ) sólo depende del radio vector  $\mathbf{r}$  (tomamos el origen en el centro de la esfera) y de la velocidad  $\mathbf{u}$ . Además,  $\mathbf{A}$  tiene que ser lineal de  $\mathbf{u}$ . El único vector axial que

puede construirse para un cuerpo con simetría esférica con dos vectores axiales es  $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ , por lo que  $\mathbf{A}$  tiene que ser de la forma  $f'(r) \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ , donde  $f'(r)$  es una función escalar de  $r$  y  $\mathbf{n}$  es un vector unidad en la dirección de  $\mathbf{r}$ .  $f'(r) \mathbf{n}$  puede escribirse como el gradiente de una función  $f(r)$ ,  $\text{grad} f(r)$  (porque el gradiente es la derivada en una dirección determinada). Así, al final del razonamiento, vemos que podemos escribir  $\mathbf{A}$  como  $\text{grad} f \times \mathbf{u}$ , y la velocidad  $\mathbf{v}'$  como

$$\mathbf{v}' = \text{rot} (\text{grad} f \times \mathbf{u})$$

La velocidad  $\mathbf{u}$  es constante, por lo que  $\text{grad} f \times \mathbf{u}$  puede escribirse, usando la identidad vectorial  $\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$ , como  $\text{rot}(f\mathbf{u})$  (ya que  $\text{rot} \mathbf{u} = 0$ ), de manera que

$$(2.5.4) \quad \mathbf{v} = \text{rot} \text{rot} (f\mathbf{u}) + \mathbf{u}$$

Para determinar  $f$ , usamos la ecuación (2.5.3) <sup>1</sup>,

$$\text{rot} \mathbf{v} = \text{rot} \text{rot} \text{rot} (f\mathbf{u}) = (\text{grad} \text{div} - \Delta) \text{rot} (f\mathbf{u}) = -\Delta \text{rot} (f\mathbf{u})$$

con lo que la ecuación (2.5.3) toma la forma

$$\Delta^2 \text{rot} (f\mathbf{u}) = 0$$

Ahora usamos, como antes, que  $\text{rot}(f\mathbf{u}) = \text{grad} f \times \mathbf{u}$  (porque  $\mathbf{u} = \text{constante}$ )

$$\Delta^2 (\text{grad} f \times \mathbf{u}) = (\Delta^2 \text{grad} f) \times \mathbf{u} = 0$$

de donde deducimos que

$$(2.5.5) \quad \Delta^2 \text{grad} f = 0$$

Realizando una primera integración,

$$\Delta^2 f = \text{constante}$$

Esta constante debe ser nula, ya que la velocidad  $\mathbf{v}$  debe anularse en el infinito (y todas sus derivadas también lo harán). La expresión  $\Delta^2 f$  contiene cuatro derivadas de  $f$ , mientras que la velocidad se da en función de las derivadas segundas de  $f$ , de manera que:

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \Delta f = 0 \Rightarrow \Delta f = \frac{2a}{r} + A$$

De nuevo, como la velocidad debe anularse en el infinito,  $A = 0$ . Finalmente (ignorando la constante aditiva, que no carece de importancia, puesto

<sup>1</sup>Usando la identidad vectorial  $\text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ , y recordando que  $\nabla^2 = \Delta$  y que  $\text{rot} \text{grad} = 0$ .

que las velocidad viene dada por las derivadas de  $f$ ):

$$(2.5.6) \quad f = ar + \frac{b}{r}$$

Sustituyendo en (2.5.4) se obtiene

$$(2.5.7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3}$$

Las constantes  $a$  y  $b$  se obtienen a partir de las condiciones límite en la superficie de la esfera

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(r=R) &= 0 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3} = 0 \end{aligned}$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo  $\mathbf{n}$ , los coeficientes de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$  deben anularse

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} &= 0 && \text{Coeficientes de } \mathbf{u} \\ -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} &= 0 && \text{Coeficientes de } \mathbf{n} \end{aligned}$$

De aquí tenemos

$$a = \frac{3R}{4} \quad b = \frac{R^3}{4}$$

y finalmente

$$(2.5.8) \quad f = \frac{3}{4}Rr + \frac{1}{4}\frac{R^3}{r}$$

$$(2.5.9) \quad \mathbf{v} = -\frac{3}{4}R \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} - \frac{1}{4}R^3 \frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r^3} + \mathbf{u}$$

o en componentes esféricas

$$(2.5.10) \quad \begin{aligned} v_r &= u \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ v_\theta &= -u \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \end{aligned}$$

Una vez tenemos la distribución de velocidades alrededor de la esfera, calculamos la presión

$$\begin{aligned} \text{grad} p &= \eta \Delta \mathbf{v} = \eta \Delta \text{rot rot}(f\mathbf{u}) = \\ &= \eta \Delta (\text{grad div}(f\mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f) \end{aligned}$$

pero  $\Delta^2 f = 0$ , y por tanto

$$\text{grad} p = \text{grad}(\eta \Delta \text{div}(f\mathbf{u})) = \text{grad}(\eta \mathbf{u} \cdot \text{grad} \Delta f)$$

por lo que, finalmente

$$(2.5.11) \quad p = \eta \mathbf{u} \cdot \text{grad} \Delta f + p_0$$

donde  $p_0$  es la presión del fluido en el infinito. Introduciendo  $f$  tenemos

$$(2.5.12) \quad p = p_0 - \frac{3}{2} \eta \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{r^2} R$$

Utilizando las fórmulas anteriores podemos calcular la fuerza  $\mathbf{F}$  ejercida sobre la esfera por el fluido móvil (o lo que es lo mismo, el arrastre sobre la esfera cuando se mueve a través del fluido). Tomamos coordenadas esféricas con el eje polar paralelo a  $\mathbf{u}$ ; por simetría, todas las magnitudes son funciones únicamente de  $r$  y del ángulo  $\theta$ . La fuerza  $\mathbf{F}$  es paralela a la velocidad  $\mathbf{u}$ . Puede determinarse el valor de la fuerza a través de la fórmula (2.1.12). Tomando las componentes normal y tangencial a la superficie de la fuerza ejercida sobre un elemento de superficie de la esfera y proyectando estas componentes en la dirección de  $\mathbf{u}$  tenemos

$$(2.5.13) \quad F = \oint (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df$$

donde la integración debe realizarse sobre la totalidad de la superficie de la esfera.

Sustituyendo las expresiones para la distribución de velocidades alrededor de la esfera (2.5.10) en las fórmulas

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \sigma'_{r\theta} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

encontramos que en la superficie de la esfera:

$$\sigma'_{rr} = 0 \quad \sigma'_{r\theta} = - \left( \frac{3\eta}{2R} \right) u \sin \theta$$

mientras que la presión (2.5.12) es

$$p = p_0 - \left( \frac{3\eta}{2R} \right) u \cos \theta$$

Así que al final, la integral (2.5.13) se reduce a

$$F = \left( \frac{3\eta u}{2R} \right) df$$

$$(2.5.14) \quad F = 6\pi R \eta u$$

Esta es la **fórmula de Stokes**<sup>2</sup> que proporciona la fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera que se mueve lentamente en un fluido. El arrastre es proporcional a la velocidad y a la dimensión lineal del cuerpo.

Esta dependencia del arrastre con la velocidad y la dimensión es válida para cuerpos que se mueven lentamente, aunque sean de otras formas. **La dirección del arrastre sobre un cuerpo de forma arbitraria no es la misma que la de la velocidad**; la forma general de la relación entre  $F$  y  $u$  puede escribirse como

$$(2.5.15) \quad F_i = a_{ik} u_k$$

en donde  $a_{ik}$  es un tensor simétrico de rango dos independiente de la velocidad. El hecho de que sea simétrico es válido sólo en la aproximación lineal respecto a la velocidad y es un caso particular de una ley general para el movimiento lento acompañado de procesos disipativos.

La solución obtenida para el flujo que rodea la esfera no es válida a grandes distancias de ella, aunque el número de Reynolds sea pequeño (a distancias mayores los términos que hemos despreciado son importantes y la aproximación deja de ser válida). Si incluimos el siguiente término del desarrollo en serie de potencias del número de Reynolds obtenemos una fórmula más exacta para el arrastre sobre la esfera

$$(2.5.16) \quad F = 6\pi\eta u R \left( 1 + \frac{3uR}{8\nu} \right)$$

## 2.6. Estela laminar

En un flujo estacionario, las propiedades del flujo a distancias elevadas *detrás* del cuerpo tiene unas características determinadas **independientemente** de la forma del cuerpo.

Llamamos  $U$  a la velocidad constante de la corriente incidente (con  $U$  en la dirección del eje  $x$  y el origen dentro del cuerpo). La velocidad del fluido real en un punto cualquiera puede escribirse como  $U + v$ , donde  $v$  se anula en el infinito.

A distancias grandes detrás del cuerpo, la velocidad  $v \neq 0$  sólo en una región estrecha cercana al eje  $x$ . Esta región se denomina **estela laminar** y en ella encontramos las líneas de corriente que pasan muy cerca del cuerpo. Por ello, el flujo es esencialmente rotacional.

<sup>2</sup>Fórmula de Stokes (sin determinar  $a$  y  $b$ )  $F = 8\pi a\eta u$ . . Fórmula de Stokes (elipsoide)  $F = 16\pi\eta Ru$ . . Fórmula de Stokes (disco circular  $\perp$  su plano)  $F_{\perp} = 16\pi\eta Ru$ . Fórmula de Stokes (disco circular  $\parallel$  su plano)  $F = \frac{32}{3}\pi\eta Ru$ .



La viscosidad sólo tiene influencia en las líneas de corriente que pasan cerca del cuerpo. Para el resto, como la vorticidad de la corriente incidente es cero, puede considerarse que permanece nula para el resto de la línea de corriente. Así, el flujo a grandes distancias del cuerpo puede considerarse como flujo potencial excepto en la estela.

A continuación se deducen las fórmulas que relacionan las propiedades del flujo en la estela con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

El impulso total transportado por el fluido a través de una superficie cerrada cualquiera que rodea el cuerpo es igual a la integral del tensor de densidad de flujo sobre esta superficie,  $\oint \Pi_{ik} df_k$ . Las componentes del tensor  $\Pi_{ik}$  son

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho(U_i + v_i)(U_k + v_k)$$

Escribimos la presión  $p$  como  $p = p_0 + p'$ , donde  $p_0$  es la presión en el infinito. La integral del término constante  $p_0\delta_{ik} + U_i U_k$  es cero, ya que la integral vectorial  $\oint df$  respecto a una superficie cerrada es nula. También se anula  $U_i \oint \rho v_k df_k$ ; como la masa total del fluido en el volumen es constante, el flujo de masa total  $\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$  a través de la superficie que rodea el volumen es cero<sup>3</sup>. Finalmente, cuando estamos lejos del cuerpo,  $v \ll U$ , por lo que despreciamos el término  $\rho v_i v_k$  en  $\Pi_{ik}$  en comparación con  $\rho U_k v_i$  si la superficie de integración está suficientemente lejos del cuerpo. Al final, el impulso total es

$$\oint (p'\delta_{ik} + U_k v_i) df_k$$

Ahora suponemos que el volumen del fluido que estamos estudiando está contenido entre dos planos infinitos ( $x = \text{constante}$ ), uno delante y otro detrás del cuerpo, aunque lejos de él. El flujo total del impulso sobre la superficie lateral es nula, pues en el infinito  $p' = v = 0$ , por lo que sólo tenemos que integrar sobre estos dos planos. Pero el flujo que obtenemos de esta manera es la diferencia entre el flujo de impulso que entra a través del plano delantero y el que sale a través del trasero. Pero esta diferencia es también la cantidad de impulso que pasa por unidad de tiempo desde el fluido hacia el cuerpo, es decir, la fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre dicho cuerpo.

<sup>3</sup> $U_i \oint \rho v_k df_k$  usando el teorema de Gauss se convierte en  $\mathbf{U} \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$ , y usando la ecuación de continuidad  $\mathbf{U} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ . Y como la masa total no varía, esta integral se anula.

Las componentes de la fuerza son:

$$\begin{aligned} F_x &= \left( \iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) (p' + \rho U v_x) dy dz \\ F_y &= \left( \iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_y dy dz \\ F_z &= \left( \iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_z dy dz \end{aligned}$$

Empezamos por el cálculo de  $F_x$ . Fuera de la estela tenemos un flujo potencial, por lo que es válida la ecuación de Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = \text{constante} = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 + \left( p' + \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

es decir, que el término entre paréntesis debe anularse. Si  $v \ll U$ , despreciamos el término  $\frac{1}{2} \rho v^2$  en comparación con  $\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}$ , con lo que tenemos

$$p' = -\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} = -\rho U v_x$$

Esto significa que el integrando de  $F_x$  se anula siempre (fuera de la estela). La integral será cero en el plano *antes* del cuerpo ( $x = x_2$ ) y en el plano posterior ( $x = x_1$ ) excepto en la zona de intersección del plano y la estela (por lo que sólo nos preocupa la sección recta de la estela). En la estela, la variación de la presión  $p'$  es del orden de  $\rho v^2$ , es decir, pequeña en comparación con  $\rho U v_x$ , con lo que también la despreciamos. Finalmente obtenemos la fuerza fuerza de arrastre sobre el cuerpo como

$$(2.6.1) \quad F_x = -\rho U \iint v_x dy dz$$

donde la integración se extiende al área de la sección recta de la estela *muy detrás* del cuerpo. Como es normal, la velocidad  $v_x$  de la estela es negativa: el fluido se mueve más lentamente que si estuviese ausente el cuerpo. Además, la integral para  $F_x$  nos da el déficit de caudal de fluido a través de la sección recta de la estela respecto al valor que tendría en ausencia del cuerpo.

Ahora vamos con la fuerza que tiende a mover transversalmente el cuerpo ( $F_y, F_z$ ). A estas fuerzas se las denomina **fuerza de sustentación**. En el exterior de la estela, como tenemos un flujo potencial, podemos escribir

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

de manera que también se anula la integral en el plano  $x = x_2$  donde no se corta la estela

$$\iint v_y dydz = \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} dydz = 0 \quad \iint \frac{\partial \phi}{\partial z} dydz = 0$$

ya que  $\phi = 0$  en el infinito.

Así, para la fuerza de sustentación

$$(2.6.2) \quad F_y = -\rho U \iint v_y dydz \quad F_z = -\rho U \iint v_z dydz$$

donde las integrales sólo deben realizarse en la sección recta de la estela.

Si el cuerpo tiene un eje de simetría y el flujo es paralelo a este eje, entonces el flujo que rodea al cuerpo también tiene simetría. En este caso, la sustentación es cero.

Volviendo a la estela, estimando el valor de los diferentes términos de las ecuaciones de Navier-Stokes muestra que el término  $\nu \Delta \mathbf{v}$  puede despreciarse a una distancia  $r$  del cuerpo tal que  $\frac{rU}{\nu} \gg 1$ . A estas distancias, el flujo dentro de la estela puede considerarse como flujo potencial. Sin embargo, no podemos despreciar este término dentro de la estela porque, incluso a estas distancias, las derivadas transversales  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial y^2$  y  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial z^2$  son grandes en comparación con  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial x^2$ .

El término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  en la ecuación de Navier-Stokes es del orden de  $(U + v) \partial v / \partial x \sim \frac{Uv}{x}$  en la estela. El término  $\nu \Delta \mathbf{v}$  es del orden de  $\nu \partial^2 / \partial y^2 \sim \frac{\nu v}{Y^2}$  donde  $Y$  es la anchura de la estela, es decir,  $\nu \Delta \mathbf{v}$  es del orden de magnitud de la distancia respecto al eje  $x$  en el cual a velocidad  $\mathbf{v}$  tiende a cero. Si estas dos magnitudes son comparables

$$(2.6.3) \quad Y \sim \sqrt{\frac{vx}{U}}$$

Esta cantidad es pequeña en comparación con  $x$  ya que inicialmente hemos supuesto que  $\frac{Ux}{\nu} \gg 1$ . Así, la anchura de la estela laminar aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia con respecto al cuerpo.

Si la región de integración tiene un área del orden de  $Y^2$ , podemos estimar la integral (2.6.1) como

$$F_X \sim \rho U v Y^2$$

y usando (2.6.3) tenemos

$$(2.6.4) \quad v \sim \frac{F_x}{\rho \nu} x$$

### 2.7. La viscosidad de las suspensiones (E)

Contiene una sección clasificada como “ejemplo” en la Guía de la Asignatura.

### 2.8. Soluciones exactas de las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido viscoso

Esta sección no aparece en la Guía de la Asignatura (la obviaamos).

### 2.9. Movimiento oscilante en un fluido (G) viscoso

Cuando un cuerpo sumergido en un fluido **viscoso** oscila, el flujo creado tiene una serie de propiedades características. Para estudiarlas, empecemos por un caso sencillo y después pasamos a un caso general.

EJEMPLO. Tenemos un fluido incompresible limitado por una superficie plana infinita que realiza una oscilación armónica simple en su propio plano, con frecuencia  $\omega$ . Consideramos la superficie sólida como el plano  $xy$  y la región del fluido como  $x > 0$ . Tomamos el eje  $y$  en la dirección de la oscilación. La velocidad  $u$  de la superficie oscilante es una función del tiempo de la forma  $A \cos(\omega t + \alpha)$ , aunque es más conveniente escribirla como la parte real de una magnitud compleja:

$$u = \text{re}(u_0 e^{-i\omega t})$$

La constante  $u_0 = A e^{-i\alpha}$  es en general compleja, pero siempre puede hacerse real mediante una selección adecuada del origen del eje temporal.

Siempre que en los cálculos intervengan sólo operaciones lineales respecto a la velocidad  $u$  podemos omitir el operador  $\text{re}()$  y proceder como si  $u$  fuese complejo, tomando la parte real del resultado final. Así,

$$(2.9.1) \quad u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}$$

La velocidad del fluido debe satisfacer la condición límite  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  para  $x = 0$ , es decir,  $v_x = v_z = 0$  y  $v_y = u$ .

A partir de la simetría del problema todas las magnitudes dependerán únicamente de  $x$  y de  $t$ .

De la ecuación de continuidad tenemos

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = 0$$

(ya que si  $v_x = \text{constante}$  y la condición límite es  $v_x(x=0) = 0$ ). Como todas las magnitudes son independientes de  $y$  y  $z$ ,

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0$$

(ya que  $v_x = 0$ ) de manera que la ecuación de movimiento (2.1.7) de Navier-Stokes (para fluido incompresible) queda

$$(2.9.2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

que es una ecuación lineal. La componente  $x$  es  $\partial p / \partial x = 0 \Rightarrow p = \text{constante}$ . Por la simetría del problema, la dirección de  $\mathbf{v}$  es  $y$ , de manera que

$$(2.9.3) \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

Buscamos una solución de esta ecuación que sea periódica en  $x$  y en  $t$  de la forma

$$v_y = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

con las condiciones límite  $v_y(x=0) = u$ . Sustituyendo en (2.9.3) tenemos la condición

$$i\omega = \nu k^2$$

de donde obtenemos

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \pm (i+1) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

con lo que la velocidad  $v_y$  es

$$(2.9.4) \quad v_y = u_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}x} e^{i(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}x - \omega t)}$$

Se ha tomado la solución para  $k$  como si tuviera una parte imaginaria positiva, ya que en caso contrario la velocidad aumentaría sin límite en el interior del fluido (cosa que no puede suceder).

La solución obtenida representa una onda transversal, con velocidad  $v_y$  perpendicular a la dirección de propagación. La propiedad más importante es que la onda se amortigua rápidamente en el fluido: decrece exponencialmente con la distancia  $x$  respecto a la superficie sólida.

Esto supone que, aunque pueden presentarse ondas transversales en un fluido viscoso, se amortiguan rápidamente en cuanto se alejan de la superficie del cuerpo cuyo movimiento genera las ondas.

La distancia a la que la amplitud decae en un factor de  $e$  se denomina *profundidad de penetración* de la onda. A partir de (2.9.4)

$$(2.9.5) \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

Por tanto, la profundidad de penetración aumenta con la viscosidad cinemática del fluido y disminuye con la frecuencia de la oscilación.

A continuación calculamos la fuerza de rozamiento por unidad de área sobre el plano que oscila. La dirección de esta fuerza coincide con el eje  $y$  y

es igual a la componente  $\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$  del tensor de tensiones; el valor de la derivada debe tomarse sobre la superficie, es decir, en  $x = 0$ . Sustituyendo (2.9.4) tenemos:

$$(2.9.6) \quad \sigma_{xy} = \eta u_0 (i-1) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = u_0 (i-1) \sqrt{\frac{\omega \eta^2}{2\nu}} = u_0 (i-1) \sqrt{\frac{\omega \eta \rho}{2}}$$

Si suponemos  $u_0$  real y tomando la parte real del resultado anterior (2.9.6) tenemos:

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega \eta \rho} u_0 \cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

Sin embargo, la velocidad de la superficie oscilante es

$$u = u_0 \cos \omega t$$

de manera que vemos que hay un cierto desfase entre la velocidad y la fuerza de rozamiento.

Podría calcularse el promedio temporal de la disipación de energía. Aunque puede realizarse el cálculo de manera general a partir de la ecuación (2.2.3), en este caso es más sencillo calcular el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento. La energía disipada por unidad de tiempo y por unidad de área del plano oscilante es igual al valor medio del producto de la fuerza  $\sigma_{xy}$  por la velocidad  $u_y$

$$(2.9.7) \quad -\overline{\sigma_{xy}} = \frac{1}{2} u_0^2 \sqrt{\frac{1}{2} \omega \eta \rho}$$

EJEMPLO. Podríamos solucionar el mismo escenario que en el ejemplo anterior pero para una oscilación del plano general de la forma  $u = u(t)$ . En este caso, la fórmula para la fuerza de rozamiento por unidad de área de superficie sería

$$(2.9.8) \quad \sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\eta \rho}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

EJEMPLO. Finalmente consideramos el caso general de un cuerpo oscilante de forma arbitraria. Anteriormente el término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  se anulaba, pero esto no sucede de manera general. Sin embargo, podemos considerar que este término es pequeño en comparación con los demás y que puede despreciarse. Más adelante determinaremos las condiciones en las que podemos hacer esta aproximación.

Como antes, empezamos a partir de la ecuación lineal (2.9.2). Tomamos el rotacional en ambos miembros, con lo que el término  $\nabla \times \text{grad} p = 0$ , con lo que tenemos

$$(2.9.9) \quad \frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta \text{rot } \mathbf{v}$$

es decir, que el  $\text{rot } \mathbf{v}$  satisface una ecuación térmica <sup>4</sup>. Como hemos visto en los ejemplos anteriores, la solución de una ecuación de este tipo da una disminución exponencial en la magnitud que la satisface. Por tanto podemos decir que la vorticidad ( $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$ ) disminuye hacia el interior del fluido. En otras palabras, el movimiento del fluido es rotacional en una determinada capa alrededor del fluido, mientras que a distancias mayores varía rápidamente para convertirse en un flujo potencial. La profundidad de penetración del flujo rotacional es del orden de  $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ . Tenemos dos casos límites en función de si  $\delta$  es grande o pequeño en comparación con la dimensión  $l$  del cuerpo oscilante.

**Caso 1.**  $\delta \gg l$  Esto implica que  $l^2\omega \ll \nu$ . En este caso, además, supondremos que el número de Reynolds es pequeño. Si  $a$  es la amplitud de las oscilaciones, la velocidad del cuerpo es del orden de  $a\omega$ . El número de Reynolds para el movimiento es  $\frac{\omega al}{\nu}$ . Así, suponemos

$$(2.9.10) \quad l^2\omega \ll \nu \quad \frac{\omega al}{\nu} \ll 1$$

Es decir, este es el caso de bajas frecuencias de oscilación (cosa que también significa que podemos desprestigiar la derivada  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  en la ecuación general del movimiento). El término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  puede desprestigiar porque hemos supuesto que el número de Reynolds es pequeño.

Como no tenemos el término  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ , el flujo se considera estacionario. Es decir, para  $\delta \gg l$  el flujo puede considerarse estacionario en cualquier instante. Esto significa que el flujo en dicho instante es el que aparecería si el cuerpo se estuviese moviendo uniformemente con su velocidad instantánea. Por ejemplo, si tuviéramos una esfera oscilando en las condiciones de este caso, la fuerza de arrastre sería la calculada por la fórmula de Stokes (2.5.14).

**Caso 2.**  $\delta \ll l$  Para que el término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  pueda desprestigiar también en este caso, es necesario que la amplitud de las oscilaciones sea pequeña en comparación con las dimensiones del

<sup>4</sup>Una *ecuación térmica* o *ecuación del calor* es una ecuación diferencial en derivadas parciales de la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0$$

Se llama *ecuación del calor* porque describe la distribución del calor (o de variaciones de temperatura) en una región a lo largo del tiempo.

cuerpo:

$$(2.9.11) \quad l^2 \omega \gg \nu \quad a \ll l$$

En este caso no es necesario que el número de Reynolds sea pequeño.

La desigualdad anterior se obtiene estimando el valor del término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$ . El operador  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})$  designa una derivación en la dirección de la velocidad. Pero cerca del cuerpo la velocidad es casi tangencial, y la velocidad tangencial sólo varía apreciablemente en distancias del orden de la dimensión del cuerpo  $l$ , así que

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \sim \frac{v^2}{l} \sim \frac{a^2 \omega^2}{l}$$

ya que la velocidad es del orden de  $a\omega$ . La derivada  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim v\omega \sim a\omega^2$ . Comparando las dos expresiones vemos que

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \iff a \ll l$$

Los términos  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  y  $\nu \Delta \mathbf{v}$  son aproximadamente del mismo orden. En las condiciones descritas por las ecuaciones (2.9.11) sólo tenemos una capa delgada cercana a la superficie del cuerpo en la que tenemos flujo rotacional. Fuera de esta capa tenemos un flujo potencial. Por tanto, excepto en esa capa fina, el flujo viene dado por las ecuaciones

$$(2.9.12) \quad \text{rot } \mathbf{v} = 0 \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

A partir de estas ecuaciones tenemos que  $\Delta \mathbf{v} = 0$  y la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación de Euler. Es decir, tenemos un flujo ideal en todo el fluido excepto en la capa superficial. Como esta capa es delgada, al resolver las ecuaciones de movimiento podríamos aplicar como condiciones límite las condiciones que deben verificarse en la superficie del cuerpo. Pero las soluciones para el fluido ideal no pueden satisfacer estas condiciones, así que sólo podemos aplicar la condición para la componente normal a la superficie de la velocidad del fluido. Aunque las ecuaciones (2.9.12) no pueden aplicarse en la capa superficial del fluido, la distribución de velocidades obtenida al solucionarlas verifica la condición límite para la componente normal de la velocidad, lo que significa que esta capa límite no tiene ninguna propiedad especial que afecte a la variación de



esta componente de la velocidad. En cuanto a la componente tangencial podríamos encontrarla solucionando las ecuaciones (2.9.12). Al hacerlo encontraríamos que tiene valores diferentes al de la velocidad tangencial del cuerpo (aunque deberían ser iguales). Esto significa que la velocidad tangencial debe variar rápidamente en la capa superficial.

### **2.10. Amortiguamiento de las ondas de gravedad (E)**

Esta sección trata sobre un ejemplo de la teoría, por lo que la saltamos.

## Turbulencia

### 3.1. Estabilidad del flujo estacionario

Para estudiar la turbulencia imaginamos que la solución será la superposición de una solución estacionaria  $\mathbf{v}_0(x, y, z)$  y una perturbación pequeña  $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1(t) \\ p &= p_0 + p_1\end{aligned}$$

donde la velocidad  $\mathbf{v}$  y la presión  $p$  resultante verifican las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \text{div} \mathbf{v} &= 0\end{aligned}$$

Las soluciones estacionarias  $\mathbf{v}_0$  y  $p_0$  satisfacen:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_0 &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p_0 + \nu \Delta \mathbf{v}_0 \\ \text{div} \mathbf{v}_0 &= 0\end{aligned}$$

Y la perturbación tiene que satisfacer (omitiendo los términos superiores al primer orden en  $\mathbf{v}_1$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_0 &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p_1 + \nu \Delta \mathbf{v}_1 \\ (3.1.1) \quad \text{div} \mathbf{v}_1 &= 0\end{aligned}$$

Junto con la condición límite

$$\mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{en las superficies sólidas}$$

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales para  $\mathbf{v}_1$  con coeficientes que son funciones únicamente de las coordenadas y no del tiempo. La solución general puede considerarse como una suma de soluciones particulares en la que  $\mathbf{v}_1$  depende del tiempo a través de funciones del tipo  $e^{-i\omega t}$ , con  $\omega \in \mathbb{C}$  en general. Las  $\omega$  no son arbitrarias, sino que quedan determinadas al solucionar (3.1.1). La parte imaginaria de

estas “frecuencias” nos permite discriminar:

$$(3.1.2) \quad \text{Im}(\omega) > 0 \Rightarrow \text{Perturbación} \uparrow \Rightarrow \text{Flujo inestable (turbulencia)}$$

$$\text{Im}(\omega) < 0 \Rightarrow \text{Perturbación} \downarrow \Rightarrow \text{Flujo estable}$$

Matemáticamente el tratamiento de la turbulencia es **muy complicado**.

Teóricamente el problema no se ha resuelto. Los resultados experimentales muestran que el flujo estacionario es estable para números de Reynolds pequeños, pero que más allá de un determinado número de Reynolds crítico el flujo es inestable respecto a perturbaciones infinitesimales.

$$\exists R_{cr} \text{ tal que } \forall R > R_{cr} \Rightarrow \text{flujo turbulento } (\nexists \text{ flujo estacionario estable})$$

### 3.2. Establecimiento de la turbulencia

Hemos visto que cuando  $R \rightarrow \infty$  el flujo es no estacionario (para todo  $R > R_{cr}$ ). Cuando  $R \gtrsim R_{cr}$  tenemos que la parte imaginaria de la frecuencia  $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ ,  $\gamma_1 > 0$  (pero  $\gamma_1 \ll \omega_1$ ). La función  $\mathbf{v}_1$  correspondiente a esta frecuencia es de la forma:

$$(3.2.1) \quad \mathbf{v}_1 = A(t) \mathbf{f}(x, y, z)$$

donde  $\mathbf{f}$  es una función compleja de las coordenadas y  $A(t)$  es una “amplitud compleja”:

$$(3.2.2) \quad A(t) = \text{constante} \times e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t}$$

La ecuación (3.2.2) sólo es válida durante un intervalo de tiempo corto ( $e^{\gamma_1 t} \uparrow$  rápidamente y (3.2.1) sólo es válida si  $|\mathbf{v}_1|$  es pequeño, ya que hemos supuesto que la solución será  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ ).

La amplitud del flujo no estacionario  $|A|$  no aumenta sin límite, sino que tiende a un valor finito. Para  $R \geq R_{cr}$ ,  $|A|$  es pequeño y podemos obtenerlo de la siguiente manera. Calculamos la  $\frac{d}{dt} |A|^2$ . Para valores pequeños de  $t$  la ecuación (3.2.2) todavía es válida y obtenemos  $\frac{d|A|}{dt} = 2\gamma_1 |A|$ . Esto es exactamente el primer término de un desarrollo en serie de potencias de  $A$  y  $A^*$ . Cuando aumenta  $|A|$  (pero mientras sigue siendo pequeño), debemos tener en cuenta también los siguientes términos del desarrollo (que son de tercer orden). De todas formas, no estamos interesados en el valor exacto del módulo de  $A$ , sino en su promedio temporal. Este promedio lo tomamos en tiempos grandes en comparación con el periodo  $\frac{2\pi}{\omega_1}$  del factor  $e^{-i\omega_1 t}$ . Como  $\omega_1 \gg \gamma_1$  este periodo es pequeño en comparación con el

tiempo  $\frac{1}{\gamma_1}$  que es el intervalo en el que el módulo de la amplitud varía de forma apreciable. Pese a todo, los términos de tercer orden deben incluir un factor periódico, con lo que se anularán al promediar. Así, incluimos el siguiente término, que resulta proporcional a  $A^2 A^{*2} = |A|^4$  (que no se anula al promediar):

$$(3.2.3) \quad \frac{d|A|^2}{dt} \simeq 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4$$

(con  $\alpha$  que puede ser tanto positivo como negativo). No hemos colocado barras sobre  $|A|^2$  o  $|A|^4$  porque el promedio se toma sobre un tiempo corto en comparación con  $\frac{1}{\gamma_1}$  (es decir,  $|A|$  no varía apreciablemente).

Solucionando (3.2.3) obtenemos

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{constante} \times e^{-2\gamma_1 t}$$

que tiende asintóticamente a

$$(3.2.4) \quad |A|_{max}^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha}$$

$\gamma_1 = \text{im}(\omega)$  es función del número de Reynolds, por lo que desarrollando para  $R \simeq R_{cr}$  tenemos

$$(3.2.5) \quad \gamma_1 \simeq \gamma_1(R_{cr}) + \text{constante} \times (R - R_{cr})$$

Pero hemos visto que, por definición de  $R_{cr}$ ,  $\gamma_1 = \text{im}(\omega) = 0$  si  $R = R_{cr}$  (ver (3.1.2)) así que al final del día, sustituyendo (3.2.5) en (3.2.4) tenemos

$$(3.2.6) \quad |A|_{max} \propto \sqrt{R - R_{cr}}$$

Resumiendo: la inestabilidad absoluta del flujo cuando  $R > R_{cr}$  conduce a un flujo periódico no estacionario. Para  $R \geq R_{cr}$ , este flujo periódico no estacionario puede representarse como la superposición de un flujo estacionario  $\mathbf{v}_0$  y un flujo periódico  $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$ , con una amplitud pequeña pero finita que aumenta proporcionalmente con  $\sqrt{R - R_{cr}}$ . Para este flujo la distribución de velocidades es de la forma

$$(3.2.7) \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{f}(x, y, z) e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)}$$

donde  $\mathbf{f}$  es una función compleja de las coordenadas y  $\beta_1$  es una fase inicial. Para valores grandes de  $R - R_{cr}$  la descomposición del flujo en  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}_1$  deja de tener sentido y hablamos de un flujo periódico de frecuencia  $\omega_1$ .

### 3.3. Estabilidad del flujo entre cilindros en rotación

Esta sección no aparece en la Guía de la Asignatura.

### 3.4. Estabilidad del flujo en una tubería (L)

Esta sección aparece marcada en la Guía de la Asignatura como *Lectura*.

### 3.5. Inestabilidad de las discontinuidades tangenciales (L)

Esta sección aparece marcada en la Guía de la Asignatura como *Lectura*.

### 3.6. Turbulencia totalmente desarrollada (B)

El flujo turbulento para números de Reynolds suficientemente grandes se caracteriza por:

- Variación **extremadamente** irregular:
  - en el espacio (de un punto a otro)
  - en el tiempo (en dos instantes de tiempo, en la misma posición)

Esta situación se denomina **turbulencia totalmente desarrollada**.

La velocidad fluctúa alrededor de un determinado valor medio. La amplitud de esta variación no es, en general, pequeña:

$$\frac{\Delta v}{v} \gg 1 \quad \text{Fluctuaciones grandes (en general)}$$

Las trayectorias de las partículas son **extremadamente** complicadas, por lo que se produce una mezcla amplia del fluido.

Pasado un intervalo de tiempo suficientemente grande, las velocidades y las coordenadas pasan por todos los valores posibles, por lo que las condiciones iniciales no tienen ninguna repercusión. La teoría que describa la turbulencia debe ser estadística, pero todavía no se ha completado su desarrollo.

**Velocidad media:**  $u \equiv \bar{v}$ : promedio de la velocidad en cada punto durante un intervalo largo de tiempo.

$v$       Variación extremadamente irregular

↓      Promedio (tiempo largo)

$u = \bar{v}$       Variación suave de un punto a otro

**Parte fluctuante de la velocidad:**  $v' = v - u$ : esta diferencia varía de forma turbulenta.

Consideramos que esta parte fluctuante de la velocidad está compuesta por una superposición de remolinos o torbellinos turbulentos de diferentes tamaños o distintas escalas:

$$\mathbf{v}' = \sum_{\lambda} \odot_{\lambda} = \sum_{\lambda \text{ grandes}} \odot_{\lambda} + \sum_{\lambda \text{ pequeños}} \odot_{\lambda} \quad (\text{Superposición de remolinos})$$

donde  $\odot_{\lambda}$  denota un remolino de dimensión  $\lambda$ . El tamaño o escala de un remolino  $\lambda$  es el orden de magnitud en el que la velocidad varía apreciablemente. Cuando el número de Reynolds  $R \uparrow$ , primero aparecen los remolinos grandes, y después los remolinos menores. Cuando  $R \rightarrow \infty$  encontramos remolinos de todos los tamaños en el flujo.

$$R \rightarrow \begin{cases} \uparrow & \Rightarrow \odot \text{ grandes} \\ \uparrow\uparrow & \Rightarrow \odot \text{ grandes} + \odot \text{ pequeños} \end{cases}$$

### Remolinos grandes.

- Juegan un papel importante en cualquier flujo turbulento.
- Tamaño del orden de la región en la que tiene lugar el flujo  $l$ .

$$\lambda(\odot_{\text{grande}}) \sim l$$

- Amplitud grande.
- Velocidad comparable con la variación de la velocidad media a lo largo de la distancia  $l$ , que denotamos por  $\Delta u$ .

$$v(\odot_{\text{grande}}) \sim \Delta u$$

- Frecuencia del orden de  $u/l$ , donde  $u$  es la velocidad media del flujo y  $l$  su dimensión. Esta frecuencia es el periodo con el que se reproduce la imagen del movimiento cuando se observa desde un sistema de referencia fijo. El remolino se mueve con el fluido a una velocidad del orden de  $u$ .

$$\omega(\odot_{\text{grande}}) = \frac{u}{l} \quad \text{Frecuencia de giro (sist. de ref. fijo)}$$

$$v(\odot_{\text{grande}}) \Rightarrow \sim u \quad \text{Velocidad con la que el } \odot \text{ se desplaza con el flujo}$$

### Remolinos pequeños.

- Los remolinos pequeños corresponden a frecuencias grandes.
- Se pueden considerar como una *estructura fina* sobre los remolinos turbulentos fundamentales grandes.
- Pequeña contribución a la energía cinética total.

### Conclusiones.

- Variación de la velocidad fluctuante de un punto a otro (separados una distancia  $d$ ) en un instante cualquiera:

$$d \sim l \Rightarrow \Delta v' = \Delta v'(\mathcal{O}_{grandes}) \sim \Delta u$$

$$d \ll l \Rightarrow \Delta v' = \Delta v'(\mathcal{O}_{pequeños}) \ll \Delta u$$

- Variación de la velocidad fluctuante (en un mismo punto) en diferentes instantes:

$$t \ll T \sim \frac{l}{u} \Rightarrow \Delta v' \sim 0$$

$$t \sim T \Rightarrow \Delta v' \sim \Delta u$$

La longitud  $\lambda$  es una dimensión característica del remolino. Por analogía con el número de Reynolds, que caracteriza el flujo y que también depende de  $l$ , definimos un número de Reynolds  $R_\lambda$  para caracterizar de manera cualitativa los remolinos.

$$R_\lambda = v_\lambda \frac{\lambda}{\nu}$$

donde  $\lambda$  es una magnitud del orden del tamaño del remolino,  $v_\lambda$  una magnitud del orden de la velocidad del remolino y  $\nu$  la viscosidad del fluido. Cuanto más pequeño es  $R_\lambda$ , más pequeño es el remolino que caracteriza (y viceversa).

Para **remolinos grandes**:

$$\left. \begin{array}{l} R \text{ grandes} \Rightarrow R_\lambda \text{ grandes} \\ R \text{ grandes} \Rightarrow \nu \text{ pequeñas} \end{array} \right\} \Rightarrow R_\lambda \text{ grandes} \Rightarrow \nu \simeq 0$$

De aquí deducimos que:

$$\mathcal{O}_{grandes}: \quad R_\lambda \text{ grande} \left\{ \begin{array}{ll} \nu \simeq 0 & \text{La viscosidad no tiene importancia} \\ \nu \simeq 0 \Rightarrow \epsilon \simeq 0 & \text{No hay disipación de energía} \end{array} \right.$$

Es decir, que el movimiento de los remolinos grandes viene dado por la ecuación de Euler:

$\mathcal{O}_{grandes}$  se rigen por la Ecuación de Euler

En los **remolinos pequeños** tenemos:

$$R \simeq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{O}_{pequeño} & \text{Tamaño} \sim \lambda_0 \\ \nu \text{ importante} & \text{Disipación de energía} \end{array} \right.$$

Así el proceso de disipación de la energía en un flujo turbulento es de los remolinos grandes a los pequeños, desde donde se disipa en forma de

calor:

$$E(\oslash_{gran}) \rightarrow E(\oslash_{peq}) \begin{cases} \text{Transferencia continua de energía} \\ \nu \simeq 0 \quad \text{No se produce disipación} \quad (\epsilon \simeq 0) \end{cases}$$

$$E(\oslash_{peq}) : E_{cin} \rightsquigarrow \text{calor} \begin{cases} \nu \text{ importante} \Rightarrow \text{Disipación de energía} \end{cases}$$

Como la viscosidad  $\nu$  sólo es importante en los remolinos pequeños,

$$\nu \text{ importante} \iff \oslash_{peq} \iff \text{Tamaño} \sim \lambda_0$$

ninguna magnitud de los remolinos  $\lambda \gg \lambda_0$  que describen los remolinos grandes puede depender de la viscosidad  $\nu$

$$\begin{aligned} \lambda \gg \lambda_0 &\Rightarrow \oslash_{gran} \neq f(\nu) \\ \oslash_{gran} &= f(\rho, l, \Delta u) \end{aligned}$$

La energía que se disipa en los remolinos pequeños proviene de los grandes, desde donde se transfiere de forma continua. A partir de las magnitudes que describen un remolino grande sólo podemos formar una combinación con las dimensiones ( $cm^2/s^3$ ) de la disipación media de energía por unidad de masa del fluido y unidad de tiempo  $\epsilon$ :

$$(3.6.1) \quad \epsilon \sim \frac{(\Delta u)^3}{l} \quad \text{Disipación de energía en flujo turbulento}$$

En algunos aspectos el movimiento turbulento puede describirse como un fluido con una **viscosidad turbulenta**  $\nu_{turb}$ . De nuevo, la única combinación posible con las magnitudes  $\rho, l$  y  $\Delta u$  con la dimensiones de viscosidad es

$$(3.6.2) \quad \nu_{turb} \sim l \Delta u \quad \text{Viscosidad turbulenta}$$

El cociente entre la *viscosidad turbulenta* y la viscosidad “normal”  $\nu_{turb}/\nu \sim R$  aumenta con el número de Reynolds.

Finalmente, la disipación de energía expresada a través de esta viscosidad turbulenta es

$$(3.6.3) \quad \epsilon \sim \nu_{turb} \left( \frac{\Delta u}{l} \right)^2$$

$\nu$  se relaciona con  $\epsilon$  a través de las derivadas espaciales de la verdadera velocidad.  $\nu_{turb}$  se relaciona con  $\epsilon$  a través del gradiente de la velocidad media  $\sim \frac{\Delta u}{l}$ .

A través de razonamientos de semejanza puede obtenerse el orden de magnitud de la variación de la presión en el flujo turbulento

$$(3.6.4) \quad \Delta p \sim \rho (\Delta u)^2$$



### 3.7. Turbulencia local

Ahora nos concentramos en obtener las propiedades locales de la turbulencia, en regiones para las que el  $\lambda \ll l$ . En esta región suponemos:

- Flujo lejos ( $d \gg \lambda$ ) de superficies sólidas.
- Turbulencia isótropa a pequeña escala  $\Rightarrow$  magnitudes  $\neq f$  (dirección), en particular, no dependen de la dirección de la velocidad media  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}$ .

Nos concentramos en el estudio de las partículas en la región turbulenta, no al movimiento de la región como un todo (que se debe a los remolinos grandes).

Podemos obtener resultados importantes acerca de las propiedades locales de la turbulencia realizando únicamente razonamientos de semejanza.

¿Qué parámetros pueden intervenir en el flujo turbulento de regiones  $\lambda_0 \gg \lambda \gg l$ ?

$$\lambda_0 \gg \lambda \gg l \quad \text{Parámetros} \quad \left\{ \begin{array}{l} \checkmark \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \quad \text{Dimensión del remolino} \\ \rho \quad \text{Densidad del fluido} \\ \epsilon \quad \text{Disipación de la energía} \end{array} \right. \\ \times \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l \quad \text{Dimensión global del flujo} \\ \Delta u \quad \text{Velocidad global del flujo} \\ \nu \quad \text{Viscosidad} \quad (\lambda \gg \lambda_0 \Rightarrow \nu \simeq 0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$v_\lambda$  es la variación de la velocidad en la turbulencia en distancias del orden  $\lambda$ .  $v_\lambda$  sólo puede formarse de una forma a partir de  $\rho, \epsilon$  y  $\lambda$ :

$$(3.7.1) \quad v_\lambda \sim (\epsilon \lambda)^{\frac{1}{3}} \quad \text{Ley de Kolmogorov-Obukhov}$$

$v_\lambda$  es también la velocidad de los remolinos turbulentos de tamaño del orden  $\lambda$

$$v_\lambda \sim v(\oslash_\lambda)$$

Ahora  $v_\tau$  es la variación de la velocidad en un punto a lo largo de un intervalo  $\tau$ , con  $\tau \ll T \sim \frac{l}{u}$ ,  $T$  característico del flujo global). Como tenemos un flujo neto, cualquier parte del fluido se desplaza en el intervalo  $\tau$  una distancia del orden de  $\tau u$ , donde  $u$  es la velocidad media. Si hacemos  $\lambda \sim \tau u$  en (3.7.1)

$$(3.7.2) \quad v_\tau \sim (\epsilon \tau u)^{1/3}$$

Ahora  $v'_\tau$  es la variación de la velocidad de una parte del fluido que se mueve en el espacio.  $v'_\tau$  sólo puede ser función de las propiedades locales del fluido:  $\rho, \epsilon$  y  $\tau$ , de manera que

$$(3.7.3) \quad v'_\tau \sim (\epsilon \tau)^{1/2}$$

Esta velocidad  $v'_\lambda \propto \tau^{1/2}$  es menor que  $v_\lambda \propto \tau^{1/3}$ :

$$\tau \ll T \Rightarrow v'_\lambda < v_\lambda$$

Usando (3.6.1) obtenemos

$$(3.7.4) \quad v_\lambda \sim \Delta u \left( \frac{\lambda}{l} \right)^{1/3}$$

y análogamente

$$(3.7.5) \quad v_\tau \sim \Delta u \left( \frac{\tau}{T} \right)^{1/3}$$

donde  $T \sim l/u$ .

¿Cuándo empieza a ser importante la viscosidad?  $\lambda_0$  es el orden del tamaño de los  $\odot_{peq}$  y determina lo que se denomina *escala interna* de la turbulencia. Para determinar  $\lambda_0$  construimos el número de Reynolds  $R_\lambda \sim v_\lambda (\lambda/l)$ . Usando  $v_\lambda = \Delta u (\lambda/l)^{1/3}$  tenemos

$$R_\lambda \sim \Delta u \frac{\lambda^{4/3}}{\nu l^{1/3}}$$

En función del número de Reynolds  $R \sim l\Delta u/\nu$  del flujo como un todo tenemos

$$R_\lambda \sim R \left( \frac{\lambda}{l} \right)^{4/3}$$

El orden de magnitud de  $\lambda_0$  viene dado cuando  $R \sim 1$

$$(3.7.6) \quad \lambda_0 \sim \frac{l}{R^{3/4}}$$

Obtenemos el mismo resultado a partir de la única combinación de  $\rho, \epsilon$  y  $\nu$  que tiene unidades de longitud

$$\lambda_0 \sim \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

y usando  $\epsilon \sim (\Delta u)^3/l$ . Para la velocidad  $v_{\lambda_0}$

$$(3.7.7) \quad v_{\lambda_0} \sim \frac{\Delta u}{R^{1/4}}$$

Es decir:

$$R \uparrow \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 & \downarrow \\ v_{\lambda_0} & \downarrow \end{cases}$$

El orden de magnitud de la frecuencia  $\omega_\lambda$  de los remolinos

$$(3.7.8) \quad \omega_0 \sim \frac{u}{\lambda_0} \sim \frac{u}{l} R^{3/4}$$

Esta  $\omega_0$  marca el extremo superior del espectro de frecuencias de la turbulencia. El extremo inferior (correspondiente a remolinos grandes) es del orden de  $u/l$ .

$$\omega_0 - \omega_{inferior} \propto R^{3/4} \Rightarrow \text{Rango de frecuencias } \uparrow \text{ con } R$$

El número de grados de libertad por unidad de volumen  $n$  tiene dimensiones de  $1/cm^3$ . La única combinación posible de  $\rho, \epsilon$  y  $\nu$  (que determina el límite inferior del tamaño de los remolinos grandes) es

$$(3.7.9) \quad n \sim \left( \frac{\epsilon}{\nu^3} \right)^{3/4} = \frac{1}{\lambda_0^3} \sim \frac{R^{9/4}}{l^3}$$

Y el número de grados total, multiplicando por el volumen del flujo turbulento ( $\sim l^3$ ) es

$$(3.7.10) \quad N = R^{9/4}$$

Finalmente, estudiamos el flujo en regiones de  $l \ll \lambda_0$ . Aquí el flujo es regular y varía suavemente, por lo que podemos desarrollar  $v_\lambda$  en serie de potencias de  $\lambda$ . Si nos quedamos con el primer término  $v_\lambda \simeq \text{constante} \times \lambda$ . La constante es del orden de magnitud  $v_{\lambda_0}/\lambda_0$  porque para  $\lambda \simeq \lambda_0$  debemos obtener  $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$ . Usando (3.7.6) y (3.7.7) obtenemos

$$(3.7.11) \quad v_\lambda \sim \Delta u R^{1/2} \frac{\lambda}{l}$$

Esta expresión se puede obtener también igualando dos expresiones para la disipación de energía  $\epsilon$ : la expresión  $\frac{(\Delta u)^3}{l}$  que determina  $\epsilon$  en función de magnitudes características de los remolinos grandes y la expresión  $\nu \left( \frac{v_\lambda}{\lambda} \right)^2$  que determina  $\epsilon$  en función del gradiente de velocidades ( $\sim v_\lambda/\lambda$ ) para los remolinos en los que se produce disipación de energía.

### 3.8. Correlación de velocidades (G)

La ley de Kolmogorov (3.7.1) determina cualitativamente la *correlación de velocidades* en la turbulencia local, es decir, la relación entre las velocidades que existen entre dos puntos vecinos. En esta sección se definen algunas magnitudes que permiten caracterizar cuantitativamente esta correlación, como por ejemplo el tensor de correlación doble (de la velocidad entre dos puntos):

$$(3.8.1) \quad B_{ik} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})}$$

Como la turbulencia local es isótropa el tensor  $B_{ik}$  no puede depender de la dirección espacial. Es decir, en la expresión del tensor  $B_{ik}$  sólo puede aparecer el radio vector  $r$ . La forma más general para un tensor de este tipo es

$$(3.8.2) \quad B_{ik} = A(r) \delta_{ik} + B(r) n_i n_k$$

Tomamos los ejes de manera que uno de ellos apunte en la dirección de  $n$ , de manera que la componente de la velocidad será  $v_r$ . La componente  $B_{rr}$  es el valor medio del cuadrado de la velocidad relativa de las dos partículas a lo largo de la línea que las une. Del mismo modo  $B_{tt}$  es el valor medio del cuadrado de la velocidad transversal, mientras que  $B_{rt}$  es el valor medio del producto de ambas componentes de la velocidad. Como  $n_r = 1$ ,  $n_t = 0$ :

$$(3.8.3) \quad B_{rr} = A + B \quad B_{tt} = A \quad B_{rt} = 0$$

En función de la distancia a la que se encuentren las partículas tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Distancias grandes} \quad r \gg \lambda_0 &\iff B_{tt} = \frac{4}{3} B_{rr} \\ \text{Distancias pequeñas} \quad r \ll \lambda_0 &\iff B_{tt} = 2 B_{rr} \end{aligned}$$

Para distancias pequeñas, además,  $B_{tt}$  y  $B_{rr}$  pueden expresarse por separado en función de la disipación de energía media  $\epsilon$ .

$$(3.8.4) \quad \begin{aligned} \text{Distancias pequeñas} \quad &\iff \begin{aligned} B_t &= \frac{2}{15} \frac{\epsilon r^2}{\nu} \\ B_{rr} &= \frac{1}{15} \frac{\epsilon r^2}{\nu} \end{aligned} \end{aligned}$$

También podemos obtener la correlación triple:

$$(3.8.5) \quad B_{ikl} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2l} - v_{1l})}$$

así como una relación entre las componentes de los tensores  $B_{ik}$  y  $B_{ikl}$ .<sup>1</sup>

### 3.9. Región de turbulencia y el fenómeno de separación (G)

El flujo turbulento es, en general, rotacional.

En el flujo turbulento *estacionario* (el que rodea a los cuerpos) podemos encontrar dos regiones separadas; una con flujo rotacional ( $\omega \neq 0$ ) y otra con flujo potencial ( $\omega = 0$ ).

El flujo turbulento se puede considerar como el movimiento de un fluido ideal  $\Rightarrow$  satisface las ecuaciones de Euler  $\Rightarrow$  se cumple la Ley de

---

<sup>1</sup>No entro en detalles porque no sé hasta qué punto todo esto es útil/relevante durante el curso.

TURBULENCIA 3.9 REGIÓN DE TURBULENCIA Y EL FENÓMENO DE SEPARACIÓN  
(G)

Conservación de la Circulación de la Velocidad. Es decir, si la vorticidad  $\omega = 0$  en un punto de la línea de corriente,  $\omega = 0$  para toda la línea de corriente (y viceversa). Esto demuestra que podemos tener dos regiones separadas, una con flujo rotacional y otra con flujo potencial en el flujo turbulento siempre que las líneas de corriente de una zona no traspasen a la otra.

Flujo turbulento estacionario = movimiento fluido ideal

↓

Fluido ideal  $\Rightarrow$  satisface Ec. Euler

↓

Ec. Euler  $\Rightarrow$  Ley de Conservación de la Circulación

Si  $\omega = 0$  en  $x_1$  de la  $\Rightarrow$ ,  $\omega = 0 \forall x_i$  en la  $\Rightarrow$   
( $\Rightarrow$  línea de corriente)

⇓

Flujo turbulento estacionario  $\rightarrow$  Dos regiones separadas  $\begin{cases} \omega = 0 & \text{Flujo potencial} \\ \omega \neq 0 & \text{Flujo rotacional} \end{cases}$

El intercambio de fluido entre la región de flujo turbulento rotacional y el espacio que la rodea es unidireccional: el fluido puede entrar procedente de la zona de flujo potencial, pero no puede abandonarla.

Flujo de fluido: zona potencial  $\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$  zona rotacional

Estos razonamientos no demuestran nada, pero los resultados experimentales confirman la existencia de zonas separadas en el flujo turbulento rotacional.

Aunque en las dos regiones el flujo es turbulento, la naturaleza de la turbulencia es diferente en las dos regiones.

**Flujo turbulento: región potencial.** El flujo potencial satisface la ecuación de Laplace  $\Delta\phi = 0$ .

EJEMPLO. Suponemos flujo periódico en plano  $xy \Rightarrow e^{ik_1x + ik_2y}$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -(k_1^2 + k_2^2) \phi = -k^2 \phi$$

$$\Delta\phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = k^2 \phi \Rightarrow \phi(z) \sim e^{-kz} \quad (z > 0)$$

### TURBULENCIA 3.9 REGIÓN DE TURBULENCIA Y EL FENÓMENO DE SEPARACIÓN (G)

Es decir, si el flujo periódico es plano, se produce atenuación en la dirección perpendicular al plano. Cuanto mayor es  $k$  (es decir, cuanto menor sea el periodo del flujo periódico), mayor atenuación se produce en la dirección perpendicular.

$$k \uparrow (\tau \downarrow) \Rightarrow \text{amortiguación} \uparrow \text{ en dirección } \perp$$

Cuando el movimiento no es estrictamente periódico, los resultados permanecen cualitativamente válidos.

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos que fuera de la región de flujo rotacional los remolinos turbulentos se amortiguan. Los remolinos con periodos bajos ( $\odot_{peq}$ ) se amortiguan rápidamente  $\Rightarrow \odot_{peq}$  no penetran una gran distancia en la zona potencial. En la región potencial sólo tienen importancia los remolinos grandes, que se amortiguan en distancias del orden de la dimensión (transversal) de la región rotacional, que coincide con la escala de la turbulencia  $l$ .

Para distancias mayores no existe prácticamente turbulencia  $\Rightarrow$  flujo laminar.

En cuanto a la disipación de energía en flujo turbulento, hemos visto que se produce en los remolinos pequeños, mientras que en los grandes apenas hay disipación (y por tanto, es aplicable la ecuación de Euler). Por tanto, la disipación de energía se produce de forma principal en la zona de flujo turbulento rotacional y escasamente fuera de ella.

$$\begin{aligned} \epsilon(\text{flujo turbulento}) &\rightarrow \begin{cases} \epsilon_{\text{reg.rotacional}} \sim \epsilon(\odot_{peq}) \\ \epsilon_{\text{reg.no rotacional}} \sim \epsilon(\odot_{gran}) \simeq 0 \end{cases} \\ &\Downarrow \\ \epsilon(\text{flujo turbulento}) &\simeq \epsilon_{\text{reg.rotacional}} \end{aligned}$$

Para simplificar, a partir de ahora llamaremos al flujo turbulento rotacional *región de flujo turbulento* o *región turbulenta*.

La región turbulenta debe estar limitada en alguna dirección por parte de la superficie del cuerpo, alrededor del cual tiene lugar el flujo. La línea que limita esta parte de la superficie se denomina **línea de separación**. A partir de esta línea comienza la superficie de separación entre el fluido turbulento y el resto del mismo. La formación de una región turbulenta en el flujo que rodea un cuerpo se denomina **fenómeno de separación**.

La forma de la región turbulenta queda determinada por las propiedades del flujo en el cuerpo principal del fluido (no en la vecindad inmediata de la superficie). Una teoría completa de la turbulencia (que no existe todavía) permitiría determinar la forma de la región turbulenta utilizando

las ecuaciones del movimiento para un fluido ideal, dada la posición de la línea de separación en la superficie del cuerpo. La posición real de la línea de separación está determinada por las propiedades del flujo en la proximidad inmediata de la superficie (conocida como **capa límite**), donde la viscosidad juega un papel determinante.

### 3.10. Chorro turbulento (?)

Esta sección no aparece en la Guía de la Asinatura.

### 3.11. Estela turbulenta (E)

Para  $R \gg R_{cr}$  tenemos una región larga de flujo turbulento detrás del cuerpo = *estela turbulenta*. Para  $d \gg l$  ( $l$  es del orden de las dimensiones del cuerpo) podemos determinar las propiedades de la estela:

- forma  $a(x)$ ,  $a$  es la anchura de la estela.
- velocidad del fluido  $u(x)$ .

$U$  es la velocidad del chorro incidente, de dirección paralela al eje  $x$ . La velocidad del fluido en un punto cualquiera (promediada respecto a las fluctuaciones de las turbulencias) es  $U + u$ .  $a$  es la anchura media de la estela, que dependerá de  $x$ .

- Si  $\nexists$  sustentación, para  $d \gg l$ , estela tiene simetría axial  $\Rightarrow$  sección recta de la estela circular  $\Rightarrow a = \text{radio de la estela}$ .
- Si  $\exists$  sustentación  $\nexists$  simetría de la estela a ninguna distancia.

La velocidad longitudinal es del orden de  $U$ , mientras que la transversal es del orden de  $u \Rightarrow$  el ángulo entre las líneas de corriente y el eje  $x$  es  $\sim u/U$ :

$$\begin{aligned} v_x &\sim U \\ v_\perp &\sim u \end{aligned} \Rightarrow \angle(\vec{v}, x) \sim \frac{u}{U}$$

La estela termina en aquellas líneas de corriente del movimiento turbulento de rotación que no puede atravesar, por lo que el ángulo entre el límite de la estela y el eje  $x$  también es del orden de  $u/U$ :

$$(3.11.1) \quad \frac{da}{dx} \sim \frac{u}{U}$$

Usamos  $F_x = -\rho U \iint v_x dy dz$  (ecuación 2.6.1) y  $F_y = -\rho U \iint v_\perp dy dz$  (ecuación 2.6.2) para estimar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. La región de integración es del orden de  $a^2$ , de manera que:

$$(3.11.2) \quad F \sim \rho U u a^2 \Rightarrow u \sim \frac{F}{\rho U a^2}$$

donde  $F$  es del orden de la fuerza de arrastre o sustentación. Sustituyendo en (3.11.1) e integrando  $\frac{da}{dx} \sim \frac{F}{\rho U a^2}$

$$(3.11.3) \quad a \sim \left( \frac{Fx}{\rho U^2} \right)^{1/3}$$

E introduciendo este valor en la estimación de  $u$  a partir de (3.11.2) y (3.11.3)

$$(3.11.4) \quad u \sim \left( \frac{FU}{\rho x^2} \right)^{1/3}$$

El flujo en cualquier sección recta de la estela está caracterizado por el número de Reynolds  $R \sim au/\nu$  de manera que sustituyendo (3.11.2) y (3.11.3) tenemos

$$R \sim \frac{F}{\nu \rho U a} \sim \left( \frac{F^2}{\rho^2 U x \nu^3} \right)$$

que no es constante a lo largo de la estela. De hecho, a grandes distancias  $R$  se hace tan pequeño que el flujo en la estela deja de ser turbulento y recuperamos la estela laminar.

Es decir:

$$\begin{aligned} a &\propto x^{1/3} \\ u &\propto \frac{1}{x^{2/3}} \\ R &\propto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

La velocidad media disminuye cuando nos alejamos del cuerpo.

$$u \rightarrow 0 \iff d \rightarrow \infty \text{ (nos alejamos del cuerpo)}$$

$u_x$  disminuye más rápidamente fuera de la estela ( $\sim 1/x^2$ ) que en su interior, de manera que lejos de la estela  $\sim 0 \Rightarrow u_x$  disminuye desde un valor máximo en el eje de la estela hasta anularse en el exterior de la estela.

$$u_x = \left\{ \begin{array}{ll} u_x = \text{máx}(u_x) & \text{en eje de la estela} \\ u_x \downarrow & \text{dentro de la estela} \\ u_x \Downarrow & \text{fuera de la estela} \end{array} \right\} \Rightarrow u_x \simeq 0 \text{ fuera de la estela}$$

$u_{y,z} = u_{\perp}$  en los límites de la estela son del mismo orden de magnitud que en el interior, disminuyendo rápidamente cuando nos alejamos de la estela una distancia determinada del cuerpo.

$$u_{\perp} = \left\{ \begin{array}{ll} u_{\perp}^{\text{dentro estela}} \simeq u_{\perp}^{\text{fuera estela}} & \text{Límites de la estela} \\ u_{\perp}^{\text{fuera estela}} \Downarrow & \text{Cuando nos alejamos de la estela} \end{array} \right.$$



### 3.12. Teorema de Joukowski (E)

Los resultados de la sección anterior no son válidos en algunos casos excepcionales de interés, como por ejemplo, al estudiar la estela del ala de un avión. En estos casos el espesor de la estela formada detrás de un cuerpo es muy pequeño en comparación con su anchura. Este tipo de estela se forma en el flujo que rodea a cuerpo con espesor (dirección  $y$ ) es pequeño en comparación con su anchura (dirección  $z$ ), independientemente del valor que tome la longitud del cuerpo en la dirección de  $x$ .

En este caso, la componente  $u_y$  de la velocidad perpendicular al plano de la estela turbulenta no desciende apreciablemente a distancias del orden del espesor de la estela, sino que es del orden de la envergadura. Además, consideramos que la fuerza de sustentación no es cero (ya que entonces la velocidad transversal sería prácticamente cero).

Ala  $\equiv$  envergadura (longitud en  $z$ )  $\gg$  otras dimensiones

$$u_y \text{ (general)} \quad \Downarrow \quad \leftrightarrow \quad d \sim \text{espesor del cuerpo } l_y$$

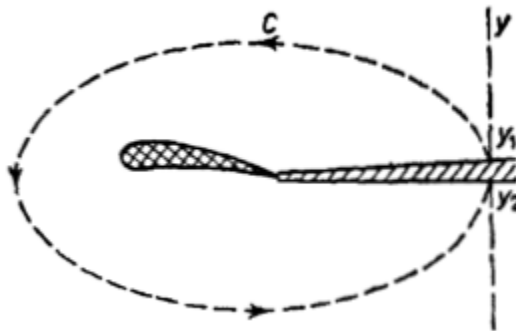
$$u_y \text{ (en la estela)} \approx u_y \text{ (fuera de la estela)} \quad \leftrightarrow \quad d \sim \text{envergadura del ala} \Rightarrow u_y \text{ no } \Downarrow !$$

$$F_y \neq 0 \quad F_y = -\rho U \iint u_y dy dz$$

La fuerza de sustentación vertical  $F_y$  viene dada por (2.6.2):

$$(3.12.1) \quad F_y = -\rho U \iint u_y dy dz$$

donde integramos en todo el plano transversal al cuerpo. Como el espesor es pequeño (dirección  $y$ ) y la velocidad  $u_y$  dentro de la estela no es grande en comparación con su valor fuera, realizamos la integración sobre  $y$  a toda la región exterior a la estela (ver figura 3.12)



$$F_y \approx \int_{-\infty}^{\infty} u_y dy \approx \int_{-\infty}^{y_2} u_y dy + \int_{y_1}^{\infty} u_y dy$$

$$\text{Fuera de la estela} \Rightarrow \text{Flujo potencial} \Rightarrow u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \phi(\infty) = 0$$

$$F_y \approx \phi(y_2) - \phi(y_1) = \phi_2 - \phi_1$$

Pero una discontinuidad en la componente normal a la superficie de la estela significaría que fluye cierta cantidad de fluido dentro de la estela. Pero en esta aproximación despreciamos el espesor de la estela, de manera que el flujo de entrada debe ser nulo. Por tanto, sustituimos la estela por una superficie de discontinuidad tangencial. La presión también tiene que ser continua en la estela. En primera aproximación, la presión viene dada por la ecuación de Bernoulli,  $\rho U u_x = U \frac{\partial \phi}{\partial x}$ , de manera que  $\partial \phi / \partial x$  también tiene que ser continua. Sin embargo,  $\partial \phi / \partial z$  (la velocidad a lo largo del ala) es en general discontinua.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ continua} \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 \begin{cases} \text{sólo depende de } z \\ \text{no depende de } x \end{cases}$$

De esta manera, la fuerza de sustentación es

$$(3.12.2) \quad F_y = -\rho U \int (\phi_2 - \phi_1) dz$$

Esta integral se realiza sobre la anchura  $z$  de la estela (ya que  $\phi_2 - \phi_1 = 0$  fuera de la estela).

Podemos reescribir la fórmula anterior usando las propiedades de la integral del gradiente de un escalar, de manera que

$$\oint \mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{l} = \oint (u_y dy + u_x dx)$$

tomado a lo largo de un contorno que parte del punto  $y_1$ , rodea el cuerpo y termina en el punto  $y_2$ , pasando a través de todos los puntos de la región de flujo potencial. Como la estela es delgada, podemos cerrar el contorno mediante un segmento corto que va de  $y_2$  a  $y_1$  (sin que varíe el valor de la integral, excepto en valores de orden superior). De esta manera, si  $\Gamma$  es la circulación de la velocidad alrededor del contorno cerrado  $C$  que encierra el cuerpo:

$$(3.12.3) \quad \Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \phi_2 - \phi_1$$

y por tanto la fuerza de sustentación

$$(3.12.4) \quad F_y = -\rho U \int \Gamma dz \quad \text{Teorema de Joukowski}$$

El Teorema de Joukowski establece la relación entre la fuerza de sustentación y la circulación de la velocidad.

### 3.13. Turbulencia isótropa (B)

Consideramos el siguiente escenario: un flujo turbulento completamente homogéneo e isótropo, en el que la velocidad media se anula en todo el fluido. Esta situación se da, por ejemplo, si agitamos violentamente un recipiente y luego lo abandonamos. De manera progresiva, el flujo en su interior irá disminuyendo. Estamos interesados en cómo se disipa la turbulencia isótropa (esta ley es válida únicamente en el caso de turbulencia isótropa).

Aislamos una parte suficientemente grande del volumen y consideramos el momento angular  $M$  contenido en este volumen.  $M$  será un valor aleatorio, en general, diferente de cero. Este valor no es constante, ya que la región seleccionada del fluido interacciona con las regiones circundantes. Sin embargo, el intervalo de tiempo  $T$  en el que  $M$  varía apreciablemente, al ser un efecto superficial, debe aumentar con  $L$ , donde  $L$  es la dimensión de la región seleccionada. Como  $L$  (y por tanto, también  $T$ ) puede ser tan grande como queramos, podemos considerar que el momento angular  $M$  se conserva.

$$M \neq \text{constante} \text{ pero } T \propto L \Rightarrow \text{Si } L \uparrow \Rightarrow T \uparrow \Rightarrow M \simeq \text{constante}$$

Suponemos que el volumen elegido está rodeado por paredes fijas; las condiciones límite en la superficie de un volumen muy grande no tienen ningún efecto sobre las propiedades del flujo en el que estamos interesados.

$$M_{ik} = \rho \int (x_i v_k - x_k v_i) dV$$

Transformamos la integral de la siguiente manera:

$$\int x_k v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_l} (x_i x_k v_l) dV - \int x_i x_k \frac{\partial v_l}{\partial x_l} dV - \int x_i v_k dV$$

La primera integral del segundo miembro se anula al convertirse en una integral de superficie, ya que las componentes de velocidad normales en las paredes que limitan el fluido son nulas, de modo que  $v_k df_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = 0$ .

$$\int \frac{\partial}{\partial x_l} (x_i x_k v_l) dV = \oint (x_i x_k v_l) dS = 0 \Leftrightarrow v_k df_k = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) df = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_n = 0$$

La segunda integral es cero si el fluido es incompresible

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \equiv \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = 0 \Rightarrow \int x_i x_k \frac{\partial v_l}{\partial x_l} dV = 0$$

de manera que al final:

$$\int x_k v_i dV = - \int x_i v_k dV$$

Con lo que podemos calcular el momento cinético a partir de

$$M_{ik} = 2\rho \int x_i v_k dV$$

La suma de las componentes al cuadrado de  $M_{ik}$  es igual al doble del valor absoluto del cuadrado del vector momento cinético

$$\mathbf{M} = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV$$

$$M^2 = 4\rho^2 \left( \int x_i v_k dV \right)^2 = 4\rho^2 \iint x_i x'_i v_k v'_k dV dV' = -2\rho^2 \iint (x_i - x'_i)^2 v_k v'_k dV dV'$$

Primero hemos utilizado que la integral al cuadrado puede escribirse como una integral doble. Después hemos transformado esta integral doble aprovechando que las integrales que contienen  $x_i^2$  o  $x_i'^2$  se anulan, ya que

$$\begin{aligned} \iint dV dV' v_k v'_k (x_i - x'_i)^2 &= \iint dV dV' v_k v'_k (x_i^2 - 2x_i x'_i + x_i'^2) \\ \iint x_i'^2 v_k v'_k dV dV' &= \int x_i'^2 v'_k dV' \int v_k dV \end{aligned}$$

y la integral  $\int v_k dV = 0$  es el momento lineal ( $p = \int \rho v_k dV$ ), que para un fluido incompresible, dentro de un recipiente de paredes fijas, tiene que ser cero.

Así que

$$\iint dV dV' v_k v'_k (x_i - x'_i)^2 = -2 \iint dV dV' x_i x'_i v_k v'_k$$

y el momento al cuadrado

$$(3.13.1) \quad M^2 = -2\rho^2 \iint dV dV' v_k v'_k (x_i - x'_i)^2$$

El factor  $v_k v'_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$  es el producto escalar de las velocidades en dos puntos con coordenadas  $x_k$  y  $x'_k$ , que están separados una distancia  $r = \sqrt{(x_k - x'_k)^2}$ . Promediando este producto respecto a todas las posiciones de los puntos  $x_k$  y  $x'_k$  (para un  $r$  dado) dentro del volumen, al ser el flujo isótropo,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$  sólo puede ser función de  $r$ . Esta función tiene que disminuir rápidamente con la distancia, pues las velocidades de dos puntos

a una distancia grande, en un flujo turbulento, son estadísticamente independientes  $\Rightarrow$  el valor medio de su producto se convierte en el producto de los valores medios de las velocidades individuales, que es cero, ya que la velocidad media en cualquier punto del flujo considerado. Así

$$(3.13.2) \quad M^2 = \rho^2 \int f dV$$

donde  $f = -2 \int \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'} r^2 dV'$ .

$$f \Downarrow \text{ si } r \Uparrow \Rightarrow \int \text{ converge}$$

Así, cuando  $L$  en la región considerada tiende a  $\infty$ ,  $f$  tiende a un límite dado. Como el flujo es homogéneo,  $f$  es constante en todas las partes del fluido, de manera que

$$M^2 = \rho^2 f V$$

El momento angular aumenta proporcionalmente con la raíz cuadrada del volumen del fluido y no con el volumen del fluido. Esto se debe a que el momento angular total es la suma de un gran número de componentes estadísticamente independientes (los momentos angulares de las partículas del fluido) con valores medios no nulos.

En el caso de la turbulencia isótropa el hecho de que  $M$  sea constante implica

$$(3.13.3) \quad \int \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'} r^2 dV' = \text{constante}$$

que es la *ley de Loytsianski*.

El integrando de (3.13.3) es notablemente diferente de cero en una región cuyas dimensiones son del orden de la escala  $l$  de la turbulencia,  $\sim v^2 l^2 l^3 = v^2 l^5$ , lo que implica

$$(3.13.4) \quad v^2 l^5 = \text{constante}$$

A partir de esta relación podemos obtener cómo disminuye la turbulencia isótropa con el tiempo. Para ello, estimamos la derivada temporal de la energía cinética por unidad de volumen del fluido. Por una parte debe ser del orden  $(\rho v^2)/t$ . Además, debe ser igual a la energía disipada por unidad de volumen y por unidad de tiempo, que según la fórmula  $\epsilon \sim (\Delta u)^3/l$  (3.6.1) será  $\rho \epsilon \sim \rho v^3/l$ . Si estas dos expresiones son comparables, tenemos

$$(3.13.5) \quad l \sim vt$$

Sustituyendo (3.13.5) en (3.13.4) tenemos que

$$(3.13.6) \quad v \sim \text{constante}/t^{5/7}$$

y para  $l$

$$(3.13.7) \quad l = \text{constante} \times t^{2/7}$$

es decir, que la escala o dimensión externa de la turbulencia aumenta proporcionalmente a  $t^{2/7}$ .

En función de estos dos resultados, el número de Reynolds  $R \sim vl/\nu \sim t^{-3/7}$ , por lo que pasado tiempo suficiente,  $R$  es tan pequeño que empieza a ser importante la viscosidad. Entonces, la disipación de energía  $\epsilon = \frac{1}{2}\nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \sim \frac{\nu v^2}{l^2}$  (2.2.3) por un lado y por otro  $\epsilon \sim v^2/t$ , por lo que comparando

$$(3.13.8) \quad l \sim \sqrt{\nu t}$$

y utilizando (3.13.4)

$$(3.13.9) \quad v = \frac{\text{constante}}{t^{5/4}}$$

Todas estas fórmulas nos dan una idea sobre cómo disminuye la turbulencia isótropa en el periodo final, cuando el efecto de la viscosidad es importante.

## Capas límite

### 4.1. Capa límite laminar (B)

Cuando tenemos números de Reynolds muy grandes podemos considerar que la situación equivale a tener viscosidades pequeñas, lo que permite considerar el fluido como ideal. Sin embargo esta aproximación **no puede usarse nunca** cuando el flujo se produce cerca de paredes sólidas. En este caso las condiciones límite para un fluido ideal hacen que se anule la componente normal de la velocidad, aunque la componente tangencial no tiene porqué anularse. Pero en el caso de un fluido viscoso la velocidad junto a la pared sólida debe anularse por completo.

$$\begin{array}{rcl}
 R \uparrow \equiv \nu \downarrow \sim 0 & \iff & \text{fluido} \simeq \text{ideal} \\
 \text{Condiciones límite} & = & \begin{cases} v_{\perp} = 0, v_{\parallel} \neq 0 & \text{Fluido ideal} \\ v_{\perp} = v_{\parallel} = 0 & \text{Fluido viscoso} \end{cases} \\
 & \Downarrow & \\
 \text{Fluido} & = & \begin{cases} \text{Ideal} & (\text{lejos de las paredes sólidas}) \\ \text{Viscoso} & (\text{capa delgada junto a la pared}) \end{cases}
 \end{array}$$

Así, para números de Reynolds grandes, podemos considerar el fluido como ideal en todo el volumen *excepto* en una capa delgada junto a la pared, donde la velocidad tiene que disminuir hasta anularse por completo (debido a las condiciones límite para fluidos viscosos). Esta capa se denomina **capa límite** y se caracteriza por unos gradientes de velocidad considerables.

El flujo en la capa límite puede ser tanto **laminar** como **turbulento**.

Cerca de una pared sólida la velocidad disminuye porque no podemos despreciar la viscosidad, aunque el número de Reynolds  $R$  sea grande. Como hemos dicho, en esta capa los gradientes de velocidad son grandes, por lo que, matemáticamente, *compensan* que la viscosidad sea pequeña, haciendo que los términos de la viscosidad en las ecuaciones de movimiento

no sean despreciables

$$\left. \begin{array}{l} \nu \sim 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \gg 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nu \Delta \mathbf{v} \approx 0$$

Para calcular las ecuaciones del movimiento del fluido en la capa límite laminar consideramos, por simplicidad un flujo bidimensional (en el plano  $xz$ , con el flujo en la dirección de  $x$ ). La distribución de velocidades es independiente de  $z$  y la velocidad no tiene componente  $z$ . Las ecuaciones de movimiento son, suponiendo flujo estacionario:

$$(4.1.1) \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$$

$$(4.1.2) \quad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right)$$

$$(4.1.3) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Como la capa límite es delgada, el flujo debe ser principalmente paralelo a la superficie por lo que  $v_y \ll v_x$ . En el eje  $y$  la variación de la velocidad es rápida, con variaciones apreciables en distancias del orden del espesor de la capa  $\delta$ , mientras que en el eje  $x$  la variación es lenta y apreciable en distancias del orden de  $l$  (dimensión del cuerpo).

$$\text{Variación de } \mathbf{v} = \begin{cases} \frac{\partial v_y}{\partial y} \text{ rápidamente} & d \sim \delta \quad (\text{espesor de la capa}) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} \text{ lentamente} & d \sim l \quad (\text{dimensión del cuerpo}) \end{cases}$$

$$\text{Capa delgada} \leftrightarrow \delta \ll l \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} \gg \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Por tanto, podemos despreciar  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$  en la ecuación (4.1.1). Comparando (4.1.1) y (4.1.2) vemos que la derivada  $\frac{\partial p}{\partial y}$  es pequeña en comparación con  $\frac{\partial p}{\partial x}$  (su cociente es del orden de  $v_y/v_x$ ) por lo que, en el nivel de aproximación en el que estamos,

$$(4.1.4) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Es decir, no hay gradiente de presión vertical en la capa límite. Por tanto, la presión en la capa límite es  $p(x)$  igual a la de la corriente principal (que suponemos que es una función determinada para poder resolver el flujo en la capa límite). Como suponemos que conocemos la distribución de presión en el fluido, podemos escribir en la ecuación (4.1.1)  $\frac{\partial p(x)}{\partial x}$  en vez de  $\frac{\partial p}{\partial x}$ . Pero fuera de la capa límite el fluido todavía puede considerarse como flujo potencial, de manera que podemos utilizar la ecuación de Bernoulli  $p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{constante}$  para expresar la derivada  $\partial p/\partial x$  en función de la



velocidad  $U(x)$  de la corriente principal.

$$\begin{aligned} \text{Fuera de la capa límite} &\leftrightarrow \text{Fluido ideal} \Rightarrow \text{Ec. de Bernoulli} \Rightarrow \\ \Rightarrow p + \frac{1}{2}\rho U^2 &= \text{constante} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -U \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned}$$

Así, tenemos que la ecuación de movimiento queda:

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} \\ (4.1.5) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Aunque estas ecuaciones ha sido deducidas en el caso particular de una pared plana, son válidas en cualquier caso general siempre que tengamos un flujo bidimensional.

Vamos a comprobarlo para el caso de un flujo transversal que rodea un cilindro de longitud infinita y sección recta arbitraria. Ahora  $x$  es la distancia medida a lo largo de la circunferencia de la sección recta desde un punto de la misma e  $y$  es la distancia a la superficie.

Llamamos  $U_0$  a una velocidad característica del problema, como la velocidad de la corriente principal en el infinito. En lugar de las coordenadas  $x, y$  y de las velocidades  $v_x, v_y$  introducimos unas variables adimensionales

$$(4.1.6) \quad x = lx' \quad y = \frac{ly'}{\sqrt{R}} \quad v_x = U_0 v'_x \quad v_y = \frac{U_0 v'_y}{\sqrt{R}}$$

(y por tanto  $U = U_0 U'$ ), donde  $R = \frac{U_0 l}{\nu}$ . Con estas nuevas variables, las ecuaciones (4.1.5) toman la forma

$$\begin{aligned} v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y} - \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} &= U' \frac{dU'}{dx'} \\ (4.1.7) \quad \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} &= 0 \end{aligned}$$

En estas ecuaciones (y en las condiciones límite que hay que aplicar) no interviene la viscosidad  $\nu$ , por lo que las soluciones son independientes del número de Reynolds. Así, si se modifica el número de Reynolds, el flujo de la capa límite sólo sufre una transformación de semejanza, mientras que las velocidades y las distancias varían como  $1/\sqrt{R}$ .

Las velocidades adimensionales obtenidas al solucionar (4.1.7) tienen que ser del orden de la unidad, ya que no pueden depender de  $R$ . Lo mismo se puede decir del espesor  $\delta$  de la capa límite en función de las coordenadas  $x', y'$ . A partir de la forma de las ecuaciones (4.1.6) llegamos

a la conclusión de que

$$(4.1.8) \quad v_y \sim \frac{U_0}{\sqrt{R}}$$

es decir, el cociente entre las velocidades transversales y longitudinales es inversamente proporcional a  $\sqrt{R}$ , mientras que el espesor de la capa límite  $\delta$

$$(4.1.9) \quad \delta \sim \frac{l}{\sqrt{R}}$$

Ahora aplicamos las ecuaciones correspondientes a la capa límite en el caso del flujo plano paralelo a lo largo de una lámina plana. Esta placa corresponde a los valores  $x > 0$  (infinitamente larga). La velocidad de la corriente principal en este caso es  $U = \text{constante}$ . Las ecuaciones (4.1.5) ahora tienen la forma

$$(4.1.10) \quad \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones límite en la superficie de la placa exigen que todas las componentes de la velocidad se anulen en la superficie de la placa

$$v_x = 0 = v_y \iff y = 0, x \geq 0$$

A medida que nos alejamos de la superficie de la placa, la velocidad debe tender a la velocidad  $U$  del flujo incidente, es decir

$$v_x = U \iff y \rightarrow \pm\infty$$

En la solución de las ecuaciones de la capa límite hemos visto que  $v_x/U$  y  $v_y\sqrt{\frac{l}{U\nu}}$  sólo pueden ser función de  $x' = x/l$  y  $y' = y\sqrt{\frac{U}{l\nu}}$ . Sin embargo, en el problema considerado la placa tiene una extensión infinita y no existe ninguna longitud característica  $l$ . Por tanto,  $v_x/U$  sólo puede depender de una combinación de  $x'$  e  $y'$  en la que no intervenga  $l$ , por ejemplo  $y'/\sqrt{x'} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ . Del mismo modo, el producto  $v'_y\sqrt{x'}$  debe ser una función de  $y'/\sqrt{x'}$ . Por tanto podemos buscar una solución de la forma

$$(4.1.11) \quad v_x = Uf\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) \quad v_y = \sqrt{\frac{U\nu}{x}}f_1\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right)$$

donde  $f$  y  $f_1$  son funciones adimensionales. Utilizando la segunda ecuación de (4.1.10) podemos expresar  $f_1$  en función de  $f$ . Así, el problema se reduce a determinar una sola función  $f$  que depende de una sola variable  $\xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ .

A partir de ahora sólo nos preocupamos de la distribución longitudinal de velocidades  $v_x$  (ya que  $v_y$  es pequeña). A partir de la ecuación (4.1.11) podemos obtener un resultado importante, incluso sin determinar la forma exacta de  $f$ . La velocidad  $v_x$  aumenta desde cero (en la superficie de la placa) hasta una fracción dada de la velocidad de la corriente  $U$  para un valor concreto de  $f$ , es decir  $y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \text{constante}$ . Así, el orden de magnitud del espesor de la capa límite en el flujo a lo largo de la placa viene dado por

$$(4.1.12) \quad \delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

Por tanto, cuando nos alejamos del borde de la placa, el espesor de la capa  $\delta$  aumenta proporcionalmente al cuadrado de la distancia al borde.

Si obtenemos  $f$  por integración numérica,  $f$  tiende rápidamente al valor límite (que es la unidad).

La fuerza de rozamiento por unidad de área de superficie de la placa es

$$(4.1.13) \quad \sigma_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 0,332 \sqrt{\frac{\eta \rho U^3}{x}}$$

Si la placa tiene una longitud  $l$  entonces la fuerza de rozamiento total (por unidad de longitud en  $z$ ) sobre ella (teniendo en cuenta que la placa tiene dos caras) es

$$F = 2 \int_0^l \sigma_{xy} dx$$

Sustituyendo (4.1.13) tenemos

$$(4.1.14) \quad F = 1,328 \sqrt{\eta \rho l U^3}$$

Este resultado sólo es aplicable a placas bastante largas en las que el número de Reynolds  $Ul/\nu$  es bastante grande. Suele expresarse en función del *coeficiente de arrastre*:

$$(4.1.15) \quad C = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 2l}$$

Según (4.1.14) esta magnitud puede expresarse en función del número de Reynolds como

$$(4.1.16) \quad C = \frac{1,328}{\sqrt{R}}$$

Las fórmulas cuantitativas obtenidas sólo son válidas para el flujo a lo largo de una placa plana. Pero los cualitativos, como (4.1.8) y (4.1.9) son

válidos para el flujo que rodea a un cuerpo de forma cualquiera. En estos casos  $l$  es la dimensión del cuerpo en la dirección del flujo.

#### 4.2. Flujo cerca de la línea de separación (E)

(Pendiente)

#### 4.3. Estabilidad del flujo en una capa laminar (L)

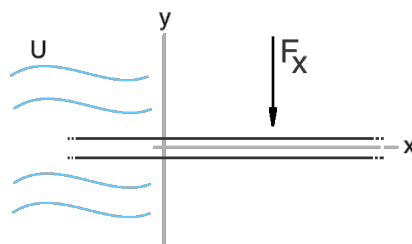
Esta sección está indicada como *sólo de lectura* en la Guía de la Asignatura.

#### 4.4. Perfil logarítmico de velocidades (G)

Consideramos un flujo turbulento plano paralelo a lo largo de una superficie plana ilimitada. El término de “turbulento plano paralelo” lo aplicamos al promedio temporal del flujo. Tomamos el sentido del flujo como eje  $x$  y el plano de la superficie como plano  $xz$ , de manera que la distancia a la superficie viene dado por la distancia en  $y$ . Las componentes  $y, z$  de la velocidad media son cero,

$$u_x = u \quad u_y = u_z = 0$$

Tampoco existe ningún gradiente de presiones y todas las magnitudes dependen únicamente de  $y$  (ver figura (4.4)).



Llamamos  $\sigma$  a la fuerza de rozamiento por unidad de área de la superficie (que coincide con la dirección  $x$ ).  $\sigma$  coincide con el impulso transmitido por el fluido a la superficie por unidad de tiempo. La componente  $x$  del impulso tiene el sentido negativo del eje de las  $y$  y da la cantidad de impulso transmitido desde las capas de fluido más alejadas de la superficie a aquellas que están más próximas.

El hecho de que tengamos este flujo de impulso es el que provoca que tengamos un gradiente en la dirección  $y$  de la velocidad media  $u$ . En el caso de números de Reynolds grandes la viscosidad  $\nu$  no tiene importancia excepto para distancias en  $y$  pequeñas. Por tanto, el gradiente de velocidades  $\frac{du}{dy}$  depende sólo de los parámetros constantes  $\rho, \sigma$  y de la distancia  $y$ .

Para obtener las dimensiones de la derivada  $du/dy$ ,  $1/s$  sólo tenemos una combinación posible de los parámetros anteriores  $\sqrt{\sigma/\rho y^2}$ , de manera que

$$(4.4.1) \quad \frac{du}{dy} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}}{by}$$

donde  $b$  es una constante numérica que no puede calcularse teóricamente y que experimentalmente resulta valer:

$$(4.4.2) \quad b = 0,417$$

Introducimos la magnitud  $v_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$  que tiene dimensiones de  $cm/s$ , de manera que

$$(4.4.3) \quad \sigma = \rho v_*^2$$

y  $v_*$  actúa como una velocidad característica del flujo turbulento. Entonces (4.4.1) se transforma en

$$(4.4.4) \quad \frac{du}{dy} = \frac{v_*}{by} \Rightarrow u = \frac{v_*}{b} (\log y + c)$$

$c$  es una constante de integración, pero no podemos utilizar las condiciones límites *normales* en la superficie ( $y = 0$ ), ya que el primer término de (4.4.4) se haría infinito. El problema está en que la ecuación (4.4.4) no puede aplicarse a distancias muy pequeñas de la superficie, ya que a estas distancias la viscosidad no puede despreciarse. Tampoco existen condiciones en el infinito, ya que para  $y = \infty$  la ecuación (4.4.4) también se hace  $\infty$ . Esto se debe a que la superficie plana es infinita y por tanto, su influencia se extiende hasta distancias infinitamente grandes. A diferencia de lo que sucede en otros casos, para este flujo no existe ningún parámetro constante característico de longitud que nos proporcione una escala externa de la turbulencia. Así, esta escala vendrá dada por la propia distancia  $y$ : la escala del flujo turbulento a una distancia  $y$  de la superficie es del orden de  $y$ . La velocidad fluctuante de la turbulencia es del orden de  $v_*$ . Podríamos deducirlo también a partir de razonamientos dimensionales, ya que  $v_*$  es la única magnitud con dimensiones de velocidad que puede formarse a partir de  $\sigma, \rho$  y  $y$ . Aunque la velocidad media disminuye con  $y$ , la velocidad fluctuante permanece con el mismo orden de magnitud a toda distancia de la superficie. Este resultado está de acuerdo con la regla general de que el orden de magnitud de la velocidad fluctuante está determinado por la variación  $\Delta u$  de la velocidad media (obtenido en la sección (3.6)). En este caso no tenemos ninguna longitud característica respecto a la que se pueda calcular la variación de la velocidad media;  $\Delta u$

se define entonces como la variación de  $u$  cuando se modifica apreciablemente la distancia  $y$ . Según la fórmula (4.4.4) la variación de  $y$  produce un cambio en la velocidad  $u$  que es del orden de  $v_*$ .

A distancias suficientemente pequeñas la viscosidad empieza a ser importante. Llamamos  $y_0$  al orden de magnitud de esta distancia. La escala de la turbulencia a esta distancia es del orden de  $y_0$  y la velocidad del orden de  $v_*$ . Por tanto, el número de Reynolds que caracteriza al flujo a distancias del orden de  $y_0$  es  $R \sim v_* y_0 / \nu$ . La viscosidad empieza a ser importante cuando  $R \sim 1$ , por lo que

$$(4.4.5) \quad y_0 \sim \frac{\nu}{v_*}$$

A una distancia  $y \ll y_0$  el flujo está determinado por el rozamiento viscoso ordinario. Por tanto, podemos obtener la distribución de velocidades a partir de la forma correspondiente al rozamiento viscoso:

$$(4.4.6) \quad \sigma = \rho \nu \frac{du}{dy} \Rightarrow u = \frac{\sigma y}{\rho \nu} = \frac{v_*^2}{\nu} y$$

Por tanto, vemos que junto a la pared sólida existe una capa delgada de fluido donde la velocidad varía linealmente con  $y$ ; la velocidad es pequeña en esta capa, variando desde 0 (en la superficie) hasta valores del orden de  $v_*$  para  $y \sim y_0$ . A esta capa la denominamos **subcapa viscosa**.

El flujo considerado es turbulento y por tanto el nombre de *subcapa laminar* es inadecuado.

La componente longitudinal  $v'_x$  de la velocidad fluctuante en la subcapa es del mismo orden de magnitud que la velocidad media, proporcional a  $y$  ( $\sim v_*^2 \frac{y}{y_0}$ ). Por tanto,  $\frac{\partial v'_y}{\partial y} = -\frac{\partial v'_x}{\partial x}$  es proporcional a  $y$ , y por la misma razón, la componente transversal  $v'_y$  de la velocidad fluctuante varía como  $y^2$  ( $\sim v_*^2 \frac{y^2}{y_0^2}$ ). De la linealidad de las ecuaciones de movimiento en la subcapa viscosa (siendo pequeños los términos no lineales en comparación con los términos de viscosidad) se deduce que los periodos de los remolinos turbulentos son los mismos a través de todo el espesor de la subcapa. Multiplicando estos periodos por la velocidad fluctuante, tenemos que las distancias longitudinales recorridas por las partículas del fluido en su movimiento fluctuante son proporcionales a  $y$  en orden de magnitud y que las distancias transversales son proporcionales a  $y^2$  ( $\sim y^2/y_0$ ).

En lo que sigue se prescinde de la *subcapa viscosa*; su presencia sólo es importante a la hora de seleccionar un valor para la constante de integración de la ecuación (4.4.4), de manera que la velocidad resulte del orden de  $v_*$  a distancias del orden de  $y_0$ . Para lograrlo,  $c = -\log y_0$ , de

manera que

$$(4.4.7) \quad u = \frac{v_*}{b} \log \frac{y}{y_0} = \frac{v_*}{b} \log \left( \frac{v_*}{\nu} y \right)$$

Esta fórmula determina (donde es aplicable) la distribución de velocidades de la corriente turbulenta que fluye a lo largo de la superficie. Esta distribución se conoce como **perfil logarítmico de velocidades**.

El argumento de la fórmula (4.4.7) debería incluir un coeficiente numérico. Sin embargo, en las fórmulas que deduciremos sólo se necesita *exactitud logarítmica*, por lo que el argumento del logaritmo se supone grande y despreciamos todos los términos proporcionales a las potencias inferiores del argumento, además de aquellos en los que aparece el logaritmo elevado a potencias inferiores en el término principal. Introducir un coeficiente numérico en el argumento de (4.4.7) es equivalente a sumar un término de la forma *constante*  $\times v_*$ , donde *constante* es del orden de la unidad. Este término no contiene el logaritmo y podemos despreciarlo. Sin embargo, el argumento del logaritmo en las fórmulas deducidas no es tan grande como para que su logaritmo sea también grande, por lo que la exactitud de las fórmulas no es muy alta.

Podemos mejorar la exactitud de las fórmulas añadiendo el coeficiente numérico en el argumento del logaritmo, pero su valor no puede calcularse teóricamente y debe determinarse experimentalmente. Por ejemplo:

$$(4.4.8) \quad u = v_* \left( 2,40 \log \left( \frac{v_*}{\nu} y \right) + 5,84 \right)$$

Finalmente vamos a calcular la disipación de energía  $\epsilon$  por unidad de masa del fluido.  $\sigma$  es el valor medio de la componente  $\Pi_{ik}$  del tensor densidad de impulso  $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k - \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$ . Fuera de la subcapa viscosa el término de viscosidad puede omitirse, de manera que  $\sigma = \rho \overline{v_x v_y}$ . Si introducimos la velocidad fluctuante  $\mathbf{v}'$  podemos escribir  $v_x = u + v'_x$ ; la velocidad  $v_y$  es la velocidad fluctuante  $v'_y$  (ya que su valor medio es cero). Así obtenemos

$$\sigma = \rho \overline{v_x v_y} = \rho \overline{v'_x v'_y} + \rho u \overline{v'_y} = \rho \overline{v'_x v'_y}$$

La densidad de flujo de energía en la dirección  $y$  podemos escribirla como  $(p + \frac{1}{2} \rho v^2) v_y$ , donde de nuevo hemos omitido el término de la viscosidad. Reescribimos el segundo término como

$$v^2 = (u + v'_x)^2 + v_y'^2 + v_z'^2$$

y promediando se obtiene

$$\overline{p v'_y} + \frac{1}{2} \left( \overline{v_x'^2 v'_y} + \overline{v_y'^3} + \overline{v_z'^2 v'_y} \right) + \rho u \overline{v'_x v'_y}$$

De esta expresión sólo tenemos que quedarnos con el último término. La razón es que la velocidad fluctuante es del orden de  $v_*$  y por tanto, dentro de la exactitud logarítmica, es pequeña en comparación con  $u$ . Las fluctuaciones turbulentas de la presión  $p$  son del orden de  $\rho v_*^2$  (ver 3.6.4), por lo que, con la misma exactitud, podemos despreciar el término correspondiente en el flujo de la energía. Así, para la densidad de flujo de energía media tenemos

$$\overline{\rho u v'_x v'_y} = u \sigma$$

Cuando nos acercamos a la superficie este flujo disminuye debido a que la energía se disipa. La disminución de flujo de energía al aproximarse a la superficie en una distancia  $dy$  es  $\frac{\sigma(du/dy)}{dy}$ . Esta es la cantidad de energía convertida en calor en una capa de fluido de espesor  $dy$  y de área unidad. Por tanto, se llega a la conclusión de que la disipación de energía por unidad de masa es  $(\sigma/\rho) \frac{du}{dy}$ , o sea,

$$(4.4.9) \quad \epsilon = \frac{v_*^3}{by} = \frac{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{3/2}}{by}$$

#### 4.5. Flujo turbulento en tuberías (L)

Esta sección está marcada como de “lectura” en la Guía de la Asignatura.

El flujo a lo largo de una superficie rugosa, la velocidad se hace pequeña ( $\sim v_*$ ) a distancias  $y \sim d$ , en lugar de  $y \sim y_0$ , como sucedía en el caso del flujo a lo largo de una superficie lisa. La distribución de velocidades viene dada por una fórmula que se obtiene a partir del perfil logarítmico de las velocidades (4.4.7), sustituyendo  $d$  por  $y/v_*$ :

$$(4.5.1) \quad u = \frac{v_*}{b} \log\left(\frac{y}{d}\right)$$

#### 4.6. Capa límite turbulenta (E)

La distribución de velocidades logarítmica obtenida es válida en todo el espacio en el caso del flujo turbulento plano paralelo. Esto se debe a que hemos considerado un flujo a lo largo de una superficie de área infinita. Si el cuerpo es finito, sólo tendríamos un perfil logarítmico para las velocidades a distancias cortas de la superficie (en la capa límite). Hay que tener en cuenta que una capa límite turbulenta puede existir tanto en el caso de un fluido que se mueve turbulentamente dentro de la corriente principal como en el caso de un flujo laminar.

La disminución de la velocidad media, tanto en la capa límite turbulenta como en la laminar se debe, en último término, a la viscosidad del



fluido. Sin embargo, el efecto de la viscosidad aparece en la capa límite turbulenta de un modo poco usual. La manera en que se produce la variación de la velocidad media en la capa no depende por sí misma directamente de la viscosidad; la viscosidad aparece en la expresión correspondiente al gradiente de velocidades sólo en la capa viscosa. Sin embargo, el espesor total de la capa límite está determinado por la viscosidad y se anula cuando ésta es cero. Si la viscosidad fuera exactamente nula, no existiría capa límite.

Aplicamos el resultado de la sección 4.5 a una capa límite turbulenta formada en el flujo a lo largo de una placa plana delgada. En el límite de la capa turbulenta, la velocidad del fluido es casi igual a la velocidad de la corriente principal  $U$ . Para determinar esta velocidad en el límite podemos utilizar la fórmula del perfil logarítmico de las velocidades (4.4.7) con exactitud logarítmica, poniendo el espesor  $\delta$  de la capa límite en lugar de  $y$ . Igualando ambas expresiones:

$$(4.6.1) \quad U = \frac{v_*}{b} \log \frac{v_* \delta}{\nu}$$

En este caso  $U$  es un parámetro constante para el flujo. Sin embargo, el espesor  $\delta$  varía a lo largo de la placa, y por tanto,  $v_*$  es también una función con variación lenta de  $x$ . La fórmula (4.6.1) no es adecuada para determinar estas funciones; necesitamos otra ecuación que relacione  $v_*$  y  $\delta$  con  $x$ .

Vamos a utilizar los mismos argumentos que para deducir la fórmula (3.11.3) para la anchura de la estela turbulenta. Como en aquel caso, tenemos

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} \sim \begin{cases} \text{eje } y & \sim v_* \sim (\text{velocidad fluctuante}) \\ \text{eje } x & \sim U \sim (\text{velocidad en el límite de la capa}) \end{cases}$$

De manera que

$$(4.6.2) \quad \delta \sim \frac{v_* x}{U}$$

Las fórmulas (4.6.1) y (4.6.2) determinan, en conjunto,  $v_*$  y  $\delta$  como funciones de la distancia. Sin embargo, estas funciones no pueden escribirse explícitamente. Por tanto, expresamos  $\delta$  en función de una magnitud auxiliar. Como  $v_*$  es una magnitud que varía lentamente con  $x$ , a partir de (4.6.2) vemos que el espesor de la capa  $\delta$  varía de la misma forma que  $x$ . Recordamos que el espesor de la capa límite laminar aumenta con  $\sqrt{x}$ , es decir, más lentamente que en la capa límite turbulenta.

El siguiente paso es determinar la dependencia de la fuerza de rozamiento  $\sigma$  por unidad de superficie respecto a  $x$ . Esta relación viene dada por

$$\sigma = \rho v_*^3 \quad U = \frac{v_*}{b} \log \left( \frac{v_*^2 x}{U \nu} \right)$$

La última se obtiene sustituyendo (4.6.2) en (4.6.1) y es válida dentro de la exactitud logarítmica. Introducimos el coeficiente de arrastre  $c$  por unidad de área de la placa) definido como

$$(4.6.3) \quad c = \frac{2\sigma}{\rho U^2} = 2 \left( \frac{v_*}{U} \right)^2$$

Eliminando  $v_*$  de entre las dos ecuaciones, obtenemos -hasta la exactitud logarítmica-  $c$  en forma de función implícita de  $x$ :

$$(4.6.4) \quad \sqrt{\frac{2b^2}{c}} = \log(cR_x) \quad \text{donde } R_x = \frac{Ux}{\nu}$$

Para aumentar la exactitud de la esta fórmula podemos añadir una constante numérica al logaritmo. La fórmula queda entonces como

$$(4.6.5) \quad \frac{1}{\sqrt{c}} = 1,7 \log(cR_x) + 3,0$$

El coeficiente de arrastre dado por (4.6.5) es una función lentamente decreciente con la distancia  $x$ .

Finalmente podemos expresar el espesor de la capa límite en función de  $c(x)$ . Tenemos que  $v_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = U \sqrt{\frac{c}{2}}$ . Sustituyendo en (4.6.2) obtenemos

$$(4.6.6) \quad \delta = \text{constante} \times x \sqrt{c}$$

Esta fórmula puede escribirse con el signo de igualdad solamente en los casos de una capa límite turbulenta bajo un flujo laminar, que es cuando  $\delta$  tiene un significado exacto (como siempre, la región turbulenta se distingue nítidamente de la región laminar). El factor constante en (4.6.6) debe determinarse a partir de los resultados experimentales.

#### 4.7. Crisis de arrastre o resistencia (L)

Esta sección está marcada como de “lectura” en la Guía de la Asignatura.

#### 4.8. Flujo que rodea a cuerpos con forma aerodinámica (L)

Esta sección está marcada como de “lectura” en la Guía de la Asignatura.

#### **4.9. Arrastre inducido (?)**

Esta sección no aparece en la Guía de la Asignatura.

#### **4.10. La sustentación de un ala delgada (?)**

Esta sección no aparece en la Guía de la Asignatura.

## Conducción térmica en los fluidos

### 5.1. Ecuación general de la transferencia de calor (B)

Un sistema completo de ecuaciones para la dinámica de fluidos debe contener cinco ecuaciones. Si en el fluido se producen fenómenos de conducción térmica estas cinco ecuaciones son:

- ecuación de continuidad
- ecuación de Navier-Stokes
- ✗ la ecuación de conservación de la entropía deja de ser válida, ya que ahora se producen en el interior del fluido *procesos irreversibles de disipación de energía*.
- ✓ ley de conservación de la energía

Sin embargo, aunque no podemos utilizar la ecuación de conservación de la entropía, sí que podemos utilizar la ley de conservación de la energía, que sigue siendo válida. Para un fluido ideal la ley de conservación de la energía es

$$(5.1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = -\text{div} \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \right]$$

Como vemos, el primer término expresa la variación respecto al tiempo de la energía contenida en la unidad de volumen, mientras que el segundo miembro es la divergencia de la densidad de flujo de energía.

Aunque la ley de conservación de la energía sigue siendo válida, la densidad de flujo de energía tiene ahora una forma diferente. Además del flujo  $\rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right)$  debido a la transferencia simple de masa por el movimiento del fluido, tenemos otro flujo debido a los procesos de rozamiento interno dado por el vector  $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$  (o en coordenadas  $v_i \sigma'_{ik}$ ). Además, si la temperatura no es constante en todo el volumen del fluido, debemos añadir la transferencia de calor por **conducción térmica**. En esta transferencia de calor no interviene movimiento macroscópico y se produce incluso si el

fluido está en reposo.

$$\text{Densidad de flujo de energía} \Rightarrow \begin{cases} \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) & \text{Transf. de masa} \\ \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' & \text{Rozamiento interno} \\ (T \neq \text{cte} \forall V) & \textbf{conducción térmica} \end{cases}$$

Llamamos  $\mathbf{q}$  a la densidad de flujo térmico debido a la conducción térmica. El flujo está relacionado con la variación de la temperatura a través del fluido. Cuando el gradiente de temperatura en el fluido no es muy grande (que es lo habitual), esta relación puede escribirse de manera simple. En este caso podemos desarrollar  $\mathbf{q}$  como una serie de potencias del gradiente de la temperatura y quedarnos sólo con el primer término del desarrollo. El término constante es cero, ya que  $\mathbf{q}$  debe anularse cuando  $\text{grad}T$  se anule (si no hay gradiente de temperatura, no puede haber conducción térmica). Así que:

$$(5.1.2) \quad \mathbf{q} = -\kappa \text{grad}T$$

La constante  $\kappa$  es la *conductividad térmica* y siempre es positiva, por lo que el flujo de calor por conducción térmica y el gradiente de temperatura siempre tienen sentidos opuestos. En general la conducción térmica depende tanto de la temperatura como de la presión

$$\kappa = \kappa(T, p)$$

Así que el flujo de energía total en un fluido cuando existe viscosidad y conducción térmica es

$$\rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \kappa \text{grad}T$$

con lo que la ley general de la conservación de la energía resulta:

$$(5.1.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = -\text{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \kappa \text{grad}T \right)$$

Aunque podemos usar esta ecuación para completar el conjunto de ecuaciones que necesitamos para un fluido viscoso, usaremos una forma alternativa transformada gracias a las ecuaciones de movimiento. Para ello, calculamos la derivada temporal de la energía contenida por unidad de volumen del fluido a partir de las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

CONDUCCIÓN TÉRMICA EN LOS FLUIDOS 5.1 ECUACIÓN GENERAL DE LA  
TRANSFERENCIA DE CALOR (B)

La derivada  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  la obtenemos a partir de la ecuación de continuidad y  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = & -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \\ & + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \epsilon \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Utilizando la relación termodinámica

$$d\epsilon = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

tenemos

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$$

Sustituyendo esta expresión e introduciendo la función entalpía  $w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = & - \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + \\ & + \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Ahora, gracias a la relación termodinámica  $dw = Tds + \frac{dp}{\rho}$  transformamos el  $\mathbf{grad} p$  en

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{grad} w - \rho T \mathbf{grad} s$$

así que el último término del segundo miembro de la ecuación anterior puede escribirse como

$$v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \sigma'_{ik}) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \sigma') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Sustituyendo estas expresiones y sumando y restando  $\operatorname{div}(\kappa \mathbf{grad} T)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = & -\operatorname{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) - \mathbf{v} \cdot \sigma' - \kappa \mathbf{grad} T \right) + \\ (5.1.4) \quad & + \rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \operatorname{div}(\kappa \mathbf{grad} T) \end{aligned}$$

Comparando esta expresión para la derivada temporal de la energía contenida en el volumen unidad con (5.1.3) tenemos

$$(5.1.5) \quad \rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\kappa \mathbf{grad} T)$$

que se denomina *ecuación general de transferencia térmica*. Si no existe viscosidad ni conducción térmica, el segundo miembro es cero y obtenemos de nuevo la ecuación de conservación de la entropía (1.2.4) correspondiente a un fluido ideal.

El primer miembro de la ecuación (5.1.5) es exactamente la derivada temporal total de la entropía  $\frac{ds}{dt}$ , multiplicada por  $\rho T$ .  $\frac{ds}{dt}$  da la variación respecto al tiempo de la entropía de una masa unitaria de fluido cuando se mueve a lo largo del espacio, y por tanto,  $T \frac{ds}{dt}$  es la cantidad de calor que gana dicha unidad de masa por unidad de tiempo. Por tanto,  $\rho T \frac{ds}{dt}$  es la cantidad de calor que gana por unidad de volumen. Por tanto, la cantidad de calor adquirido por unidad de volumen de fluido es

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div}(\kappa \mathbf{grad} T)$$

El primer término es la energía disipada en calor debido a la viscosidad, mientras que el segundo es el calor conducido hacia el interior del volumen.

Si desarrollamos el término  $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$  en (5.1.5) usando la definición del tensor de tensiones  $\sigma'_{ik}$  dado en (2.1.3). Tenemos

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

Podemos escribir el primer término en la forma equivalente:

$$\frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2$$

y el segundo como

$$\zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \zeta (\text{div} \mathbf{v})^2$$

Con lo que la ecuación (5.1.5) se convierte en

$$\begin{aligned} \rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s \right) &= \text{div}(\kappa \mathbf{grad} T) + \\ (5.1.6) \quad &+ \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\text{div} \mathbf{v})^2 \end{aligned}$$

Es decir, la entropía del fluido aumenta como resultado de los procesos irreversibles de conducción térmica y de rozamiento interno.

Las fórmulas que hemos obtenido hasta ahora se refieren a la entropía de cada elemento de volumen del fluido. Sin embargo, estudiamos la entropía del volumen completo, que es igual a la integral

$$\int \rho s dV$$

La variación temporal de la entropía total por unidad de tiempo es

$$\frac{d}{dt} \int \rho s dV = \int \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} dV$$

Utilizando la ecuación de continuidad y la ecuación (5.1.6) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} = -s \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s + \frac{1}{T} \operatorname{div}(\kappa \mathbf{grad} T) + \\ &+ \frac{\eta}{2T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2\end{aligned}$$

Los dos primeros términos del segundo miembro dan  $-\operatorname{div}(\rho s \mathbf{v})$ . La integral de volumen de  $\rho s \mathbf{v}$  se transforma en la integral de flujo de la entropía  $\rho s \mathbf{v}$  sobre la superficie. Si consideramos un volumen no limitado del fluido en reposo y en el infinito, la superficie puede hacerse tender a infinito. El integrando de la integral de superficie es entonces 0 y por tanto la integral se anula. La integral del tercer término del segundo miembro se transforma de la siguiente manera:

$$\int \frac{1}{T} \operatorname{div}(\kappa \mathbf{grad} T) dV = \int \operatorname{div} \left( \frac{\kappa \mathbf{grad} T}{T} \right) dV + \int \frac{\kappa (\mathbf{grad} T)^2}{T^2} dV$$

Suponiendo que la temperatura del fluido tiende con suficiente rapidez a un valor constante en el infinito, podemos transformar la primera integral en otra extendida a una superficie infinitamente remota sobre la cual  $\mathbf{grad} T = 0$ , por lo que se anula toda la integral.

El resultado es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int \rho s dV &= \int \frac{\kappa (\mathbf{grad} T)^2}{T^2} dV + \int \frac{\eta}{2T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV + \\ (5.1.7) \quad &+ \int \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dV\end{aligned}$$

El primer término del segundo miembro es la variación respecto al tiempo del aumento de entropía debido a la conducción térmica, y los otros dos términos dan la variación respecto al tiempo del aumento debido al rozamiento interno. Como la entropía sólo puede aumentar, la suma del segundo miembro de (5.1.7). El integrando de cada una de las integrales puede ser no nulo aunque se anulen las otras dos integrales, lo que implica que el segundo coeficiente de viscosidad  $\zeta$  es positivo, igual que  $\kappa$  y  $\eta$  (que ya sabíamos que eran positivos).

Al deducir la fórmula (5.1.2) se ha supuesto tácitamente que el flujo térmico depende únicamente del gradiente de temperaturas y no del gradiente de presiones. Si  $q$  tuviera un término proporcional a  $\mathbf{grad} p$ , la expresión (5.1.7) para la variación respecto al tiempo de la entropía debería incluir otro término que tuviera el producto de  $\mathbf{grad} p$  por  $\mathbf{grad} T$  en el integrando. Como este término puede ser positivo o negativo, la derivada



respecto al tiempo de la entropía no sería necesariamente positiva, así que no puede darse esta situación.

Un detalle final a tener en cuenta es que, cuando un sistema no está en equilibrio térmico -como un fluido con gradientes de velocidad y de temperaturas- las definiciones normales de las magnitudes termodinámicas dejan de tener significado y debemos definirlas de nuevo. En general, elegimos  $\rho$ ,  $\epsilon$  y  $\mathbf{v}$  como antes, donde  $\rho$  y  $\rho\epsilon$  son la masa y la energía interna por unidad de volumen, mientras que  $\mathbf{v}$  es el impulso de la unidad de masa de fluido. El resto de magnitudes se definen como si fueran las mismas funciones de  $\rho$  y  $\rho\epsilon$  en equilibrio térmico. Sin embargo, la entropía  $s = s(\rho, \epsilon)$  deja de ser la *verdadera entropía*, por lo que la integral

$$\int \rho s dV$$

deja de ser una magnitud que debe aumentar estrictamente con el tiempo. Sin embargo, en el caso de gradientes de velocidades y de temperatura pequeños,  $s$  es la misma entropía *verdadera* en la aproximación que hemos utilizado.

Como vemos entonces de obtener la ecuación (5.1.7), los tres coeficientes  $\eta$ ,  $\kappa$  y  $\zeta$  que aparecen en las ecuaciones del movimiento de un fluido conductor viscoso determinan completamente las propiedades mecánicas del fluido en la aproximación considerada.

## 5.2. Conducción térmica en un fluido incompresible (B)

La ecuación general de la conducción térmica (en la forma (5.1.5) o (5.1.6)) puede simplificarse en algunos casos.

Si la velocidad del fluido es pequeña comparada con la velocidad  $c$  del sonido, las variaciones de presión que se producen en el fluido son tan pequeñas (así como el resto de variaciones de las magnitudes termodinámicas producidas por la variación de la presión) que pueden despreciarse.

$$v \ll c \Rightarrow \frac{p}{\Delta p} \simeq 0 \Rightarrow \text{Pueden despreciarse}$$

Sin embargo, si el fluido se calienta no uniformemente ya no puede considerarse como incompresible.

Fluido calentado **no-uniformemente**  $\iff$  No es **incompresible**

Como  $\rho = \rho(T)$  y al calentarse no uniformemente,  $T = T(x, y, z)$ , **las variaciones en la densidad no pueden despreciarse** (incluso cuando la

velocidad del fluido es pequeña). En esta situación no podemos considerar la densidad del fluido como constante  $\rho \neq \text{constante}$ ; ahora debemos considerar la presión  $p = \text{constante}$  (y no la densidad).

Así tenemos

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{grad} s = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \text{grad} T$$

Como  $T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = c_p$  (calor específico a presión constante) obtenemos

$$T \frac{\partial s}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad T \text{grad} s = c_p \text{grad} T$$

La ecuación (5.1.5) se transforma en

$$(5.2.1) \quad \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} T \right) = \text{div} (\kappa \text{grad} T) + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Ahora para poder considerar la densidad constante en las ecuaciones de movimiento en el caso de un fluido caliente de modo no uniforme es necesario:

- que la velocidad del fluido sea pequeña en comparación con la del sonido
- que las diferencias de temperatura en el interior del fluido sean pequeñas

Esta segunda condición significa que los valores reales de la diferencia de temperatura son pequeños, no el gradiente de temperaturas. En este caso puede considerarse *incompresible* en el sentido normal (y la ecuación de continuidad sigue siendo  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ ). Suponiendo que las diferencias de temperaturas son pequeñas, también podemos despreciar la variación con la temperatura de  $\eta$ ,  $\kappa$  y  $c_p$ , suponiéndolas constantes. Si escribimos  $\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$  como en la ecuación (5.1.6), obtenemos la ecuación de la transferencia térmica en un fluido incompresible de la forma:

$$(5.2.2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2$$

donde  $\nu = \eta/\rho$  es la viscosidad cinemática y donde hemos escrito  $\kappa$  en función de la *conductividad termométrica*:

$$(5.2.3) \quad \chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}$$

Si el fluido incompresible está en reposo, toda la transferencia de energía se debe a conducción térmica, por lo que podemos eliminar de la ecuación (5.2.2) todos los términos en los que interviene la velocidad:

$$(5.2.4) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de la conducción térmica* o *ecuación de Fourier*.

Podríamos haber obtenido la misma ecuación (5.2.4) a partir de la ley de conservación de la energía. La cantidad de calor absorbido en un volumen de fluido por unidad de tiempo es igual al flujo térmico total que entra en el volumen por unidad de tiempo a través de la superficie que lo limita. Esto define una especie de *ecuación de continuidad* para la cantidad de calor: la cantidad de calor absorbida por unidad de tiempo y unidad de volumen es igual a la divergencia de la densidad de flujo térmico cambiada de signo. Expresando esta igualdad de forma matemática obtenemos

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{q} = \kappa \Delta T$$

que como vemos, es la ecuación (5.2.4).

La aplicabilidad de la ecuación (5.2.4) queda fuertemente limitada, ya que para los fluidos sumergidos en un campo gravitatorio, incluso un gradiente de temperatura muy pequeño, resulta en un movimiento considerable del fluido (*convección*). Así que sólo podemos tener un fluido en reposo con una distribución de temperaturas no uniforme únicamente si el sentido del gradiente de temperaturas es opuesto al de las fuerzas gravitatorias o si el fluido es muy viscoso.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{No aplicable en campos gravitatorios} \Rightarrow (\text{convección}) \\ \text{(incluso } \text{grad} T \simeq 0 \Rightarrow \text{movimiento considerable)} \\ \text{Excepto si:} \\ \quad \blacktriangleright \text{grad} T \text{ sentido opuesto a las fuerzas gravitatorias} \quad \text{ó} \\ \quad \blacktriangleright \text{fluido muy viscoso} \end{array} \right.$$

El estudio de la ecuación de conducción térmica (5.2.4) es interesante ya que también describe la conducción térmica en sólidos.

Si la distribución de temperaturas no-uniforme se mantiene constante en el tiempo (mediante una fuente externa de calor) la ecuación de conductividad térmica se transforma en

$$(5.2.5) \quad \Delta T = 0$$

Es decir, que la distribución de temperaturas estacionarias en un medio en reposo satisface la ecuación de Laplace.

En el caso más general, cuando no podemos considerar  $\kappa$  constante, en lugar de (5.2.5) tenemos:

$$(5.2.6) \quad \text{div} (\kappa \text{grad} T) = 0$$

Si el fluido tiene fuentes o focos externos de calor, la ecuación térmica debe contener otro término. Llamamos  $Q$  a la cantidad de calor generada por estas fuentes por unidad de volumen y unidad de tiempo.  $Q$  es, en general, una función del tiempo y de las coordenadas. En este caso, la ecuación de conducción térmica (también llamada *ecuación de balance térmico*) es

$$(5.2.7) \quad \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + Q$$

A continuación nos preocupamos de las condiciones límite de la ecuación de conducción térmica que son válidas entre dos medios. En primer lugar, las temperaturas de ambos medios deben ser iguales en su frontera:

$$(5.2.8) \quad T_1 = T_2$$

Además, el flujo térmico que sale de un medio debe ser igual al que entra en el otro. Tomando un sistema de coordenadas en el que la frontera esté en reposo, podemos escribir esta condición como

$$\kappa_1 \mathbf{grad} T_1 \cdot d\mathbf{f} = \kappa_2 \mathbf{grad} T_2 \cdot d\mathbf{f}$$

para cada elemento de superficie  $d\mathbf{f}$ . Si escribimos  $\mathbf{grad} T \cdot d\mathbf{f} = \frac{\partial T}{\partial n} df$ , donde  $\frac{\partial T}{\partial n}$  es la derivada de  $T$  a lo largo de la normal a la superficie, tenemos la condición límite de la forma

$$(5.2.9) \quad \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}$$

Si en la superficie de separación existen focos externos de calor que generan una cantidad de calor  $Q^{(s)}$  por unidad de área y unidad de tiempo, entonces la ecuación (5.2.9) debe sustituirse por

$$(5.2.10) \quad \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = Q^{(s)}$$

En los problemas en los que interviene una distribución de temperaturas en presencia de focos térmicos, la intensidad de estos focos se expresa como función de la temperatura  $Q = Q(T)$ . Si  $Q(T)$  aumenta lo suficientemente rápido puede que no sea posible establecer una distribución de temperaturas estacionaria en un cuerpo cuyas fronteras se mantienen en condiciones fijas (por ejemplo, una temperatura dada). La pérdida de calor a través de una superficie externa del cuerpo es proporcional a cierto valor medio de la diferencia de temperaturas  $T - T_0$  entre el cuerpo y el medio externo, independientemente de la ley de generación térmica dentro del cuerpo. Así, si  $Q(T)$  aumenta suficientemente rápido, la pérdida de calor puede que no sea suficiente para obtener un estado de equilibrio.

Esta imposibilidad para establecer un estado de equilibrio es la base de la *teoría térmica de las explosiones*.

### 5.3. Conducción térmica en un medio infinito (E)

Consideramos la conducción térmica de un medio infinito en reposo. Suponemos que inicialmente la distribución de temperaturas ( $t = 0$ ) es

$$T = T_0(x, y, z)$$

donde  $T_0$  es una función determinada de las coordenadas. Nuestro problema es averiguar la distribución de temperaturas en todos los instantes siguientes.

Empezamos desarrollando la función  $T$  como una integral de Fourier respecto a las coordenadas

$$(5.3.1) \quad T = \int T_k(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{k} \quad d^3\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z$$

donde los coeficientes del desarrollo vienen dados por

$$T_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T(x', y', z', t') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') dV' \quad dV' = dx' dy' dz'$$

Sustituyendo (5.3.1) en la ecuación de la conducción térmica para el fluido en reposo (5.2.4), tenemos

$$\int \left( \frac{dT_k}{dt} + k^2 \chi T_k \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{k} = 0$$

de donde obtenemos  $T_k$  en función del tiempo:

$$\frac{dT_k}{dt} + k^2 \chi T_k = 0 \rightarrow T_k = T_{0k} \exp(-k^2 \chi t)$$

Reintroduciendo este resultado en (5.3.1) tenemos

$$(5.3.2) \quad T = \int T_{0k} \exp(-k^2 \chi t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{k}$$

Como tenemos que obtener  $T(t = 0) = T_0(x, y, z)$ , resulta evidente que los coeficientes  $T_{0k}$  son los coeficientes del desarrollo de la función  $T_0(x, y, z)$  como una integral de Fourier:

$$T_{0k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int T_0(x', y', z') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') dV'$$

Finalmente, sustituyendo en (5.3.2), obtenemos

$$T = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint T_0(x', y', z') \exp(-k^2 \chi t) \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) dV' d^3\mathbf{k}$$

La integral extendida a  $k$  es el producto de tres integrales simples, cada una de ellas de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-k_x^2 \chi t) \exp(ik_x(x-x')) dk_x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-k_x^2 \chi t) \cos(k_x(x-x'))$$

la integral análoga sustituyendo el coseno por el seno es cero, pues la función seno es impar. Utilizando la fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) \cos(\beta x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

tenemos, al final

$$(5.3.3) \quad T(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int T_0(x', y', z') \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{4\chi t} [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]\right) dV'$$

Esta fórmula nos da la solución completa al problema.

Si la distribución de temperaturas inicial es función de una sola coordenada,  $x$ , entonces podemos integrar respecto a  $y', z'$  en (5.3.3):

$$(5.3.4) \quad T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(x') \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right) dx'$$

Si suponemos que en el instante  $t = 0$  la temperatura es cero en todo el espacio excepto en una capa delgada situada en  $x = 0$ , en donde es infinita, de modo que la cantidad de calor total (proporcional a  $\int T_0(x) dx$ ) es finita. Dicha distribución puede representarse mediante la función delta:  $T_0 = \text{const} \times \delta(x)$ . La integración de (5.3.4) equivale a sustituir  $x'$  por cero:

$$(5.3.5) \quad T(x, t) = \text{const} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right)$$

Del mismo modo, si en el instante inicial se concentra una cantidad finita de calor en un punto (el origen), la distribución de temperaturas con el tiempo viene dada por

$$(5.3.6) \quad T(r, t) = \text{const} \times \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right)$$

donde  $r$  es la distancia desde el origen. Al pasar el tiempo, la temperatura decrece de forma proporcional a  $t^{-3/2}$  en  $r = 0$ , mientras que la temperatura en el espacio contiguo aumenta del mismo modo. La región donde la temperatura es apreciablemente distinta de cero se extiende. El modo de

esta expansión viene determinado, principalmente, por el factor exponencial en (5.3.6). El orden de magnitud de esta región viene dado por

$$(5.3.7) \quad \frac{l^2}{\chi t} \sim 1 \Rightarrow l \sim \sqrt{\chi t}$$

Otra forma de interpretar la fórmula (5.3.7) es suponiendo que  $l$  es el orden de magnitud de las dimensiones del cuerpo. Entonces podemos decir que, si el cuerpo se calienta de un modo no uniforme, el orden de magnitud  $\tau$  del tiempo requerido para que la temperatura sea más o menos la misma en todo el cuerpo es

$$(5.3.8) \quad \tau \sim \frac{l^2}{\chi}$$

El tiempo  $\tau$  puede denominarse **tiempo de relajación para la conducción térmica**, y es proporcional al cuadrado de la dimensión del cuerpo e inversamente proporcional a la conductividad termométrica.

El proceso de conducción térmica descrito por las fórmulas que hemos obtenido tiene la propiedad de que el efecto que produce una perturbación cualquiera se propaga instantáneamente a través de todo el espacio. En la fórmula (5.3.5) vemos que el calor procedente de una fuente puntual se propaga de tal manera que incluso un instante después del momento inicial, la temperatura sólo se anula en el infinito. Esta propiedad es válida también para un medio en el que la conductividad termométrica varíe con la temperatura  $\chi(T)$ , siempre y cuando no se anule en algún punto.

#### 5.4. Conducción térmica en un medio finito (E)

La idea general de esta sección es que la conducción térmica en un medio finito es igual a la conducción térmica en un medio infinito con la elección adecuada de condiciones límite. Estas condiciones límite se eligen de manera que el problema sea equivalente a calcular la conducción térmica como si el medio fuera infinito.

La sección plantea diferentes problemas con distribuciones de temperaturas iniciales diferentes, dedicándose a solucionarlos.

#### 5.5. Ley de semejanza para la transferencia térmica (B)

La transferencia térmica en un fluido es más compleja que en un sólido, ya que el fluido puede estar en movimiento. Un cuerpo caliente sumergido en un fluido móvil se enfría más rápidamente que si estuviera el

fluido en reposo (ya que aquí la transferencia térmica se realizaría únicamente por conducción). El movimiento de un fluido que se calienta de forma no uniforme se denomina **convección**.

Suponemos que las diferencias de temperaturas en el fluido son pequeñas para que puedan suponerse independientes de la temperatura, pero grandes para que podamos despreciar con ellas las variaciones de temperatura producidas por el calor procedente de la disipación de energía debida al rozamiento interno. En esta situación, podemos despreciar el término de viscosidad en la ecuación (5.2.2), dejando

$$(5.5.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} T = \chi \Delta T$$

donde  $\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p}$  es la conductividad termométrica. Esta ecuación, junto con la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad determina completamente la convección en las condiciones consideradas.

A partir de ahora sólo estamos interesados en el **flujo convectivo estacionario**<sup>1</sup>. En este caso, **todas las derivadas temporales son nulas** y tenemos las siguientes ecuaciones fundamentales:

$$(5.5.2) \quad \mathbf{v} \cdot \text{grad} T = \chi \Delta T$$

$$(5.5.3) \quad (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$(5.5.4) \quad \text{div}(\mathbf{v}) = 0$$

Este sistema de ecuaciones tiene como incógnitas  $\mathbf{v}$ ,  $T$  y  $p/\rho$ , con dos constantes  $\nu$  y  $\chi$ . La solución de estas ecuaciones depende, a través de las condiciones límite, de una cierta longitud característica  $l$  del cuerpo, de la velocidad  $U$  del fluido y de la diferencia  $T_1 - T_0$  entre la temperatura del fluido y del cuerpo.

La temperatura viene determinada por la ecuación (5.5.2), que es lineal y homogénea en  $T$ . Eso significa que puede multiplicarse por una constante y seguirá satisfaciendo las ecuaciones. Es decir, que *la unidad de medida de la temperatura puede escogerse arbitrariamente*. Así que la mediremos en *grados*, que es la unidad normal de temperatura.

Tenemos cinco parámetros disponibles en este problema de convección:

$$\nu = \chi = \frac{cm^2}{s} \quad U = \frac{cm}{s} \quad l = cm \quad T_1 - T_0 = \text{grados}$$

A partir de estas cantidades podemos formar dos combinaciones adimensionales independientes: el número de Reynolds  $R = Ul/\nu$  y el número de

<sup>1</sup>Para que la convección sea estacionaria, es necesario que los cuerpos sólidos en el fluido contengan fuentes de calor que mantengan su temperatura constante.



Prandtl:

$$(5.5.5) \quad P = \frac{\nu}{\chi}$$

Cualquier otra combinación adimensional puede expresarse en función de  $R$  y  $P$ .

El **número de Prandtl** es una constante del material y no depende de las propiedades del flujo. Para los gases  $P \sim 1$ , mientras que para los fluido su valor varía mucho más. Si el fluido es muy viscoso,  $P$  puede ser muy grande.

Llegamos a la conclusión de que en la convección estacionaria, las distribuciones de temperatura y de velocidad son de la forma

$$(5.5.6) \quad \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R, P\right) \quad \frac{\mathbf{v}}{U} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R\right)$$

La función adimensional que da la distribución de temperaturas depende de los parámetros  $R$  y  $P$ , mientras que la distribución de velocidades sólo depende de  $R$ , ya que está determinada por (5.5.3), (5.5.4) en las que no interviene la conductividad. **Dos flujos convectivos son semejantes si sus números de Reynolds y de Prandtl son iguales.**

La transferencia térmica entre cuerpos sólidos y el fluido está caracterizada normalmente por el *coeficiente de transferencia térmica*  $\alpha$ , definido por

$$(5.5.7) \quad \alpha = \frac{q}{T_1 - T_0}$$

en donde  $q$  es la *densidad de flujo térmico* a través de la superficie y  $T_1 - T_0$  es la diferencia de temperaturas característica entre el cuerpo sólido y el fluido. Si se conoce la distribución de temperaturas en el fluido, el coeficiente de transferencia térmica se encuentra calculando la densidad de flujo térmico  $q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n}$  en el límite del fluido (tomándose la derivada a lo largo de la normal a la superficie). El coeficiente de transferencia térmica  $\alpha$  **no es una magnitud adimensional**. Una magnitud adimensional que caracteriza la transferencia térmica se denomina *número de Nusselt*:

$$(5.5.8) \quad N = \frac{\alpha l}{\kappa}$$

A partir de razonamientos de semejanza, en el caso de un tipo determinado de flujo convectivo, el número de Nusselt es una función definida únicamente a partir de los números de Reynolds y de Prandtl

$$(5.5.9) \quad N = f(R, P)$$

Esta función es muy simple en el caso de la convección para números de Reynolds suficientemente pequeños. Estos corresponden a velocidades también pequeñas. Por tanto, en primera aproximación, podemos despreciar el término de velocidad de la ecuación (5.5.2), de modo que la distribución de temperaturas está determinada por la ecuación  $\Delta T = 0$ , es decir, la ecuación ordinaria de conducción térmica estacionaria en un medio en reposo. El coeficiente de transferencia térmica no puede depender entonces de la velocidad ni de la viscosidad, por lo que en este caso

$$(5.5.10) \quad N = \text{constante}$$

y al calcular la constante del fluido puede suponerse que está en reposo.

### 5.6. Transferencia térmica en una capa límite (G)

La distribución de temperaturas en un fluido con números de Reynolds grande presenta propiedades similares a las de la distribución de velocidades. Valores muy grandes de  $R$  son equivalentes a viscosidades muy pequeñas.

$$R \sim \infty \Rightarrow \nu \sim 0$$

Pero como  $P = \nu/\chi$  **no** es pequeño, la conductividad termométrica  $\chi$  debe ser también pequeña, como  $\nu$ .

$$P = \frac{\nu}{\chi} \sim 0 \quad (\nu \sim 0) \Rightarrow \chi \sim 0$$

Esto corresponde al hecho de que, para velocidades suficientemente elevadas, el fluido pueda considerarse como un fluido ideal (sin rozamiento interno ni conducción térmica).

Sin embargo estas suposiciones no son válidas en una capa límite, ya que ahí se produce una rápida disminución de la velocidad y una rápida variación de la temperatura del fluido (hasta igualar la temperatura de la superficie sólida).

$$\text{Capa límite} \iff \text{Rápida variación} \begin{cases} \text{velocidad} \\ \text{temperatura} \end{cases}$$

En el flujo que rodea a un cuerpo (con  $R$  grande) el calentamiento del fluido se produce casi exclusivamente en la estela, mientras que fuera la temperatura del fluido no varía. Por tanto, cuando  $R$  es grande, los procesos de conducción térmica en la corriente principal pueden despreciarse y la variación de la temperatura del fluido sólo ocurre en la región alcanzada por el fluido que ha sido calentado en la capa límite. En la sección (3.9) vimos que las líneas de corriente procedentes de la capa límite entran en

la corriente principal únicamente más allá de la línea de separación, en donde pasan a la región de la estela turbulenta. Sin embargo, de la estela no *salen* líneas de corriente. Así que el fluido que rodea la superficie del cuerpo caliente, pero que está dentro de la capa límite, pasa a la estela y se queda ahí. Por tanto, el calor es distribuido a través de las regiones en donde la vorticidad es nula.

En la región turbulenta, se produce intercambio de calor debido a la mezcla intensiva de fluido (característica del flujo turbulento). Este mecanismo de transferencia térmica se denomina *conducción turbulenta* y se caracteriza por el coeficiente  $\kappa_{turb}$ , del mismo modo que se definió una viscosidad turbulenta  $\nu_{turb}$  (en la sección (3.6)). La conductividad termométrica turbulenta se define, en órdenes de magnitud, por la misma fórmula que  $\nu_{turb}$  (3.6.2):  $\chi_{turb} \sim l\Delta u$ . Así, los procesos de transferencia térmica en el flujo laminar y turbulento son fundamentalmente distintos:

$$\begin{aligned} \text{Flujo laminar} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \nu \sim 0 \\ \chi \sim 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{No transferencia térmica} \\ \downarrow \\ \text{Temperatura del fluido constante} \end{array} \right. \\ \\ \text{Flujo turbulento} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Transmisión de calor} \\ \downarrow \\ \text{Rápidamente se iguala la } T \text{ en la corriente} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cuando hablamos de temperatura de un fluido en movimiento turbulento nos referimos al promedio temporal de la temperatura del fluido, ya que la temperatura real (y la velocidad del fluido) varía de forma irregular respecto al tiempo.

Empezamos considerando la transferencia térmica en una capa límite laminar. Las ecuaciones del movimiento (4.1.10) se ven inalteradas. Ahora introducimos una simplificación similar al caso de la ecuación (5.5.2). La ecuación (teniendo en cuenta que todas las magnitudes son independientes de la coordenada  $z$ )

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

En el segundo miembro podemos despreciar la derivada  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  en comparación con  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ , con lo que

$$(5.6.1) \quad v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Comparando esta ecuación con la primera de (4.1.10) vemos que si el número de Prandtl es del orden de la unidad, entonces el orden de magnitud  $\delta$  del espesor de la capa en el que la velocidad  $v_x$  disminuye y la temperatura  $T$  varía vendrá dado de nuevo por las fórmulas obtenidas en la sección (4.1). Es decir, será inversamente proporcional a  $\sqrt{R}$ . El flujo térmico  $q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n}$  es igual en orden de magnitud a  $\kappa (T_1 - T_0) / \delta$ . De aquí llegamos a la conclusión de que  $q$  (y por tanto el número de Nusselt) es proporcional a  $\sqrt{R}$ . La dependencia de  $N$  con  $P$  no está determinada, por lo que

$$(5.6.2) \quad N = \sqrt{R} f(P)$$

A partir de esta expresión se deduce, en particular, que el coeficiente de transferencia térmica  $\alpha$  es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la dimensión del cuerpo.

Consideramos a continuación la transferencia térmica en una capa límite turbulenta. Como en la sección (4.4) consideramos una corriente turbulenta infinita plano-paralela que fluye a lo largo de una superficie plana infinita. El gradiente de temperaturas  $dT/dy$  en este flujo puede determinarse a partir del mismo razonamiento dimensional que el que hemos utilizado para hallar el gradiente de velocidades  $du/dy$ .  $q$  es la densidad de flujo térmico a lo largo del eje  $y$  producida por el gradiente de temperaturas. Este flujo es una constante (independiente de  $y$ ) como el flujo del impulso  $\sigma$  y puede considerarse como un parámetro conocido que determina las propiedades del flujo. Además, tenemos como parámetros la densidad  $\rho$  y el calor específico  $c_p$  por unidad de masa. En lugar de  $\sigma$  utilizaremos como parámetro  $v_*$ ;  $q$  y  $c_p$  tienen las dimensiones  $\text{erg}/\text{cm}^2\text{s} = \text{g}/\text{s}^3$  y  $\text{erg}/\text{g} \cdot \text{grado} = \text{cm}^2/\text{s}^2\text{grado}$ . La viscosidad y la conductividad térmica no pueden aparecer explícitamente en  $dT/dy$  cuando  $R$  es suficientemente grande.

Debido a la homogeneidad de las ecuaciones respecto a la temperatura, podemos variar  $T$  en un factor cualquiera sin que dejen de verificarse estas ecuaciones. Cuando la temperatura se modifica de esta manera, el flujo debe cambiar en el mismo factor. Por tanto  $q$  y  $T$  tienen que ser proporcionales. A partir de las magnitudes  $q, v_*, \rho, c_p$  y  $y$  podemos formar únicamente la magnitud proporcional a  $q$  que tenga las dimensiones de  $\text{grado}/\text{cm}$ ,  $\frac{q}{\rho c_p v_* y}$ . Por tanto,

$$\frac{dT}{dy} = \beta \frac{q}{\rho c_p v_* y}$$

donde  $\beta$  es una constante numérica que debe determinarse experimentalmente. Integrando

$$(5.6.3) \quad T = \frac{\beta q}{b\rho c_p v_*} (\log y + c)$$

Así vemos que la temperatura, como la velocidad, varía logarítmicamente. La constante de integración  $c$  debe determinarse a partir de las condiciones límite de la subcapa viscosa, como en el caso de la deducción del perfil logarítmico de la velocidad (4.4.7). La diferencia de temperatura entre el fluido y la pared (que tomamos como  $T = 0$ ) se compone de la variación de temperatura a través de la capa turbulenta y la variación correspondiente a través de la subcapa viscosa. La ley logarítmica (5.6.3) está determinada únicamente por la primera de ellas. Por tanto, si escribimos (5.6.3) como  $T = \frac{\beta q}{b\rho c_p v_*} (\log (\frac{yv_*}{\nu}) + constante)$ , incluyendo en el argumento del logaritmo un factor igual al espesor  $y_0$ , entonces la constante (multiplicada por el coeficiente) debe ser la variación de temperatura a través de la subcapa viscosa. Esta variación depende de  $\nu$  y  $\chi$ . Como la constante es adimensional, debe ser una cierta función de  $P$ , que es la única combinación de las magnitudes  $\nu, \chi, \rho, v_*$  y  $c_p$  ( $q$  no puede aparecer porque  $T$  debe ser proporcional a  $q$ , que ya aparece en el coeficiente). Así, al final, la distribución de temperaturas es

$$(5.6.4) \quad T = \frac{\beta q}{b\rho c_p v_*} \left( \log \left( \frac{yv_*}{\nu} \right) + f(P) \right)$$

Podemos utilizar esta fórmula para calcular la transferencia térmica en el caso de un flujo turbulento en una tubería, a lo largo de una placa plana, etc...

### 5.7. Calentamiento de un cuerpo en un fluido móvil (L)

Esta sección está marcada como de *sólo lectura* en la *Guía de la Asignatura*.

### 5.8. Convección libre (L)

Esta sección está marcada como de *sólo lectura* en la *Guía de la Asignatura*.

## Difusión

### 6.1. Ecuaciones de la dinámica de fluidos para una mezcla (B)

Hasta ahora hemos supuesto que el fluido es completamente homogéneo. Si se trata de una mezcla de fluidos, entonces las ecuaciones de la dinámica de fluidos deben modificarse considerablemente.

Empezamos analizando mezclas de sólo dos componentes. La composición de la mezcla se describe mediante la concentración  $c$ , definida como el cociente de masa de un componente respecto a la masa total del fluido en un volumen determinado.

A medida que transcurre el tiempo, la distribución de la concentración a través del fluido, en general, variará. Esta variación puede producirse de dos maneras. La primera se da cuando existe movimiento macroscópico del fluido. En este caso, cualquier porción pequeña del fluido se mueve como un todo, sin que varíe su composición, lo que da lugar a una mezcla puramente mecánica del fluido; aunque la composición del mismo no se modifica, la concentración del fluido en un punto cualquiera del espacio varía con el tiempo. Si ignoramos cualquier proceso de conducción térmica y de rozamiento interno, esta variación de concentración es un proceso termodinámico reversible y no da como resultado ninguna disipación de energía (ver figura (1)).

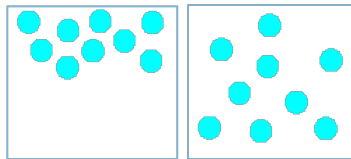


FIGURA 1. Variación de la concentración: mezcla mecánica del fluido (no se produce disipación de energía si despreciamos el rozamiento interno y la conducción térmica)

El segundo proceso por el que puede variar la concentración es mediante la transferencia molecular de los componentes de una parte del

fluido a otra. En este caso se iguala la concentración por intercambio directo de cada parte pequeña de fluido. Este proceso se denomina **difusión**. La difusión es un proceso irreversible y, como la conducción térmica y la viscosidad es una de las fuentes de disipación de energía en una mezcla de fluidos.

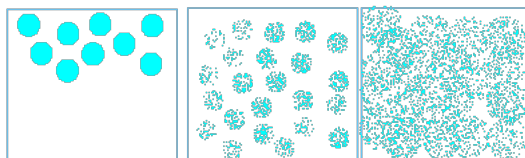


FIGURA 2. Variación de la concentración: difusión (se produce intercambio directo de partículas entre cada una de las pequeñas partes en las que hemos dividido el fluido). La difusión es un proceso irreversible y es uno de los métodos -junto a la conducción y a la viscosidad- por el que se produce disipación de energía en una mezcla.

Llamamos  $\rho$  a la densidad total del fluido. La ecuación de continuidad para la masa total del fluido es, como siempre

$$(6.1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Esto significa que la masa total del fluido en un volumen cualquiera puede variar únicamente por el movimiento del fluido que entra o sale de dicho volumen. Estrictamente hablando, incluso el concepto de velocidad debe *redefinirse* cuando estamos hablando de mezclas de fluidos. Escribiendo la ecuación de continuidad como en (6.1.1) hemos definido la velocidad del mismo modo que antes, como el impulso total de la unidad de masa del fluido.

En el caso de una mezcla, tampoco es necesario modificar la ecuación de Navier-Stokes, así que nos encargaremos de deducir el resto de ecuaciones necesarias para describir la dinámica del fluido.

Si no hay difusión, la composición de un fluido permanece sin variación durante su movimiento. Esto significa que la derivada total de  $c$  debe ser cero, es decir:

$$\frac{dc}{dt} = 0 = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} c = 0$$

Esta ecuación la podemos reescribir, usando (6.1.1) como:

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c \mathbf{v}) = 0$$

es decir, como una ecuación de continuidad para uno de los componentes de la mezcla (donde  $\rho c$  es la masa del componente de la mezcla por unidad

de volumen). La ecuación anterior, de forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho c dV = - \oint \rho c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

De esta forma se ve claramente que la variación respecto al tiempo de un componente cualquiera de la mezcla en el volumen es igual a la cantidad del componente que se transporta a través de la superficie que rodea al volumen (debido al movimiento del fluido).

Cuando se produce difusión, además del flujo  $\rho c \mathbf{v}$  del componente en cuestión, existe otro flujo que es el resultado de la transferencia de los componentes, aunque el fluido como un todo esté en reposo. Sea  $\mathbf{i}$  la densidad de este flujo de difusión, es decir, la cantidad de componente transportado por difusión a través del área unidad por unidad de tiempo. Entonces tenemos, para la variación de la cantidad de componente respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho c dV = - \oint \rho c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} - \oint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{f}$$

o en forma diferencial

$$(6.1.2) \quad \frac{\partial (\rho c)}{\partial t} = -\text{div}(\rho c \mathbf{v}) - \text{div}(\mathbf{i})$$

Como antes, usando (6.1.1) podemos reescribir la ecuación anterior como una ecuación de continuidad

$$(6.1.3) \quad \rho \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} c \right) = -\text{div}(\mathbf{i})$$

Para deducir la siguiente ecuación repetimos los argumentos utilizados en la sección (5.1), aunque ahora las magnitudes termodinámicas correspondientes al fluido también son funciones de la concentración. Al calcular la derivada  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right)$  ahora debemos tener en cuenta que las identidades termodinámicas correspondientes a la energía y a la entalpía tienen un término adicional en el que interviene la diferencia de concentración.

$$\begin{aligned} d\epsilon &= Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \mu dc \\ dw &= Tds + \frac{1}{\rho} dp + \mu dc \end{aligned}$$

donde  $\mu$  es un potencial químico. De acuerdo con estas ecuaciones aparece un término adicional  $\rho \mu \frac{\partial c}{\partial t}$  en la derivada  $\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$ . Escribiendo la segunda relación termodinámica de la forma

$$dp = \rho dw - \rho T ds - \rho \mu dc$$



vemos que el término  $-\mathbf{v} \cdot \text{grad} p$  tendrá un término adicional  $\rho \mu \mathbf{v} \cdot \text{grad} c$ .

Así que tenemos que sumar  $\rho \mu \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} c \right)$  a la expresión (5.1.4). Mediante la ecuación (6.1.3), ésta puede escribirse como  $-\mu \text{div}(\mathbf{i})$ . El resultado es

$$(6.1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = -\text{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{q} \right) + \rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} s \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \text{div}(\mathbf{q}) - \mu \text{div}(\mathbf{i})$$

Hemos sustituido  $-\kappa \text{grad} T$  por un flujo térmico  $\mathbf{q}$  que puede depender no sólo del gradiente de temperaturas, sino también del gradiente de concentraciones. La suma de los dos últimos términos del segundo miembro puede escribirse

$$\text{div} \mathbf{q} - \mu \text{div} \mathbf{i} = \text{div}(\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) + \mathbf{i} \cdot \text{grad} \mu$$

La expresión  $\rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{q}$  que es el operando del operador divergencia en (6.1.4) es, por definición de  $\mathbf{q}$ , el flujo de energía total del fluido. El primer término es el flujo de energía reversible debido simplemente al movimiento del fluido como un todo, mientras que la suma  $-\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{q}$  es el flujo irreversible. Cuando no existe ningún movimiento macroscópico, el flujo de viscosidad  $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}'$  es cero, y el flujo térmico es simplemente  $\mathbf{q}$ .

La ecuación de conservación de la energía es

$$(6.1.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = -\text{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{q} \right)$$

Restando de (6.1.4), obtenemos la ecuación

$$(6.1.6) \quad \rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \text{div}(\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) - \mathbf{i} \cdot \text{grad} \mu$$

que es una generalización de la ecuación general de transferencia térmica (5.1.5).

Así hemos obtenido un sistema completo de ecuaciones de la mecánica de fluidos para una mezcla. El número de ecuaciones en este caso es una más que en el caso de un fluido simple, puesto que tenemos una incógnita adicional: la concentración  $c$ . Las ecuaciones son:

- ecuación de “continuidad” (6.1.1)
- ecuación de Navier-Stokes
- ecuación de “continuidad” para un componente de la mezcla, (6.1.2)
- variación de la entropía (6.1.6)

Las ecuaciones (6.1.2) y (6.1.6), tal y como están expresadas, determinan únicamente la forma de las ecuaciones correspondientes a la dinámica

del fluido, puesto que en ellas intervienen los flujos indeterminados  $i$  y  $q$ . Estas ecuaciones se hacen determinadas únicamente cuando se sustituyen  $i$  y  $q$  por expresiones en función de los gradientes de concentración y de la temperatura. Las expresiones correspondientes se obtendrán en la siguiente sección (sección 6.2).

En el caso de la variación respecto al tiempo de la entropía total del fluido, un cálculo semejante al de la sección (5.1), pero sustituyendo (6.1.6) en lugar de la ecuación general de transferencia térmica (5.1.5), da el resultado:

$$(6.1.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = - \int \frac{(\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) \cdot \text{grad} T}{T^2} dV - \int \frac{\mathbf{i} \cdot \text{grad} \mu}{T} dV + \dots$$

en donde se han omitido, por brevedad, los términos de viscosidad.

## 6.2. Coeficientes de transferencia de masa y de difusión térmica (B)

El flujo de difusión  $i$  y el flujo térmico  $q$  se deben a la presencia de gradientes de concentración y de temperatura en el fluido. Pero eso no significa que  $i$  dependa sólo del gradiente de concentraciones o que  $q$  sólo dependa del gradiente de temperaturas. Al contrario, cada uno de estos flujos depende de los **dos** gradientes.

Si los gradientes de concentración y de temperaturas son pequeños, podemos suponer que  $i$  y  $q$  son funciones lineales de  $\text{grad} \mu$  y  $\text{grad} T$ . Por tanto, escribimos  $i$  y  $q$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= -\alpha \text{grad} \mu - \beta \text{grad} T \\ \mathbf{q} &= -\delta \text{grad} \mu - \gamma \text{grad} T + \mu \mathbf{i} \end{aligned}$$

Existe una relación simple entre los coeficientes  $\beta$  y  $\delta$  que una consecuencia de un *principio de simetría para los coeficientes cinéticos*. Este principio de simetría tiene la forma siguiente.

Consideramos un sistema cerrado cualquiera y sean  $x_1, x_2, \dots$  algunas de las magnitudes que caracterizan el estado del mismo. Sus valores de equilibrio se determinan por el hecho de que, en el equilibrio estadístico, la entropía  $S$  del sistema completo debe ser un máximo, es decir, debemos tener que  $X_a = 0$  para todo  $a$ , en donde  $X_a$  designa la derivada

$$(6.2.1) \quad X_a = - \frac{\partial S}{\partial x_a}$$

Supongamos que el sistema está en un estado próximo al equilibrio. Esto significa que todos los valores  $x_a$  difieren muy poco de sus valores de equilibrio y que las derivadas  $X_a$  son pequeñas. Se producirán progresos en

el sistema que tenderán a llevarlos hacia el equilibrio. Las magnitudes  $x_a$  son funciones del tiempo y su variación respecto al mismo viene dada por las derivadas temporales  $\dot{x}_a$ ; expresaremos estas últimas como funciones de  $X_a$ , y desarrollaremos estas funciones en serie. Deteniéndonos en los términos de primer orden tenemos

$$(6.2.2) \quad \dot{x}_a = - \sum_b \gamma_{ab} X_b$$

El principio de simetría para los coeficientes cinéticos establece que los  $\gamma_{ab}$  (denominados *coeficientes cinéticos*) son simétricos respecto al sufijo  $a$  y  $b$ .

$$(6.2.3) \quad \gamma_{ab} = \gamma_{ba}$$

La variación respecto al tiempo de la entropía  $S$  es

$$(6.2.4) \quad \dot{S} = - \sum_a X_a \dot{x}_a$$

Ahora suponemos que los valores propios  $x_a$  son diferentes en distintos puntos del sistema, es decir, que cada elemento de volumen tiene sus propios valores  $x_a$ . Esto es, supongamos que las magnitudes  $x_a$  son funciones de las coordenadas. Entonces, en la expresión dada para  $\dot{S}$ , además de sumar respecto de  $a$ , debemos integrar respecto al volumen del sistema

$$(6.2.5) \quad \dot{S} = - \int \sum_a X_a \dot{x}_a dV$$

Normalmente es cierto que los valores  $\dot{x}_a$  en un punto determinado cualquiera dependen únicamente de los valores de  $X_a$  en dicho punto. En este caso podemos escribir la relación existente entre  $\dot{x}_a$  y  $X_a$  para cada punto del sistema y obtendremos las mismas fórmulas que antes.

En el problema que estamos considerando, tomaremos como valores de las  $\dot{x}_a$  las componentes de los vectores  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{q} - \mu\mathbf{i}$ . Entonces, los valores de  $X_a$ , en comparación con (6.1.7) y con (6.2.5), son las componentes de los vectores  $\frac{1}{T}\mathbf{grad}\mu$  y  $\frac{1}{T^2}\mathbf{grad}T$ . Los coeficientes cinéticos  $\gamma_{ab}$  son los coeficientes de estos vectores en las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= -\alpha T \left( \frac{\mathbf{grad}\mu}{T} \right) - \beta T^2 \left( \frac{\mathbf{grad}T}{T^2} \right) \\ \mathbf{q} - \mu\mathbf{i} &= -\delta T \left( \frac{\mathbf{grad}\mu}{T} \right) - \gamma T^2 \left( \frac{\mathbf{grad}T}{T^2} \right) \end{aligned}$$

Mediante la simetría de los coeficientes cinéticos debemos tener  $\beta T^2 = \delta T$ , o sea que  $\delta = \beta T$ . Esta es la relación requerida.

Por lo tanto podemos escribir los flujos  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{q}$  como

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= -\alpha \mathbf{grad} \mu - \beta \mathbf{grad} T \\ (6.2.6) \quad \mathbf{q} &= -\beta T \mathbf{grad} \mu - \gamma \mathbf{grad} T + \mu \mathbf{i}\end{aligned}$$

con sólo tres coeficientes independientes,  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ . Es conveniente eliminar  $\mathbf{grad} \mu$  de la expresión del flujo térmico, sustituyéndolo por  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{grad} T$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned}(6.2.7) \quad \mathbf{i} &= -\alpha \mathbf{grad} \mu - \beta \mathbf{grad} T \\ (6.2.8) \quad \mathbf{q} &= \left( \mu + \frac{\beta T}{\alpha} \right) \mathbf{i} - \kappa \mathbf{grad} T\end{aligned}$$

donde

$$(6.2.9) \quad \kappa = \gamma - \frac{\beta^2 T}{\alpha}$$

Si el flujo de difusión  $\mathbf{i}$  es cero, tenemos una *conducción térmica pura*. Para que esto sea así,  $T$  y  $\mu$  deben satisfacer la ecuación  $\alpha \mathbf{grad} \mu + \beta \mathbf{grad} T = 0$ , o sea,  $\alpha d\mu + \beta dT = 0$ . La integración de esta ecuación da una relación de la forma  $f(c, T) = 0$  que no contiene las coordenadas explícitamente. (El potencial químico es una función de la presión, lo mismo que de  $c$  y de  $T$ , pero en equilibrio la presión es constante). Esta relación determina la dependencia de la concentración con la temperatura, que debe ser válida si no existe flujo de difusión. Además, para  $\mathbf{i} = 0$  tenemos a partir de (6.2.8)

$$\mathbf{q} = -\kappa \mathbf{grad} T$$

de modo que  $\kappa$  es precisamente la conductividad térmica.

Pasamos ahora a las variables normales,  $p$ ,  $T$  y  $c$ . Tenemos

$$\mathbf{grad} \mu = \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T} \mathbf{grad} c + \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{c,p} \mathbf{grad} T + \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_{c,T} \mathbf{grad} p$$

En el último término podemos sustituir la derivada  $\left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_{c,T}$  por  $\left( \frac{\partial V}{\partial c} \right)_{p,T}$  siendo  $V$  el volumen específico. Sustituyendo en (6.2.7) y (6.2.8) y poniendo

$$\begin{aligned}(6.2.10) \quad D &= \frac{\alpha}{\rho} \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{T,p} \\ \rho k_T \frac{D}{T} &= \alpha \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{c,p} + \beta\end{aligned}$$

$$(6.2.11) \quad k_p = p \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial c} \right)_{p,T}}{\left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T}}$$

obtenemos

$$(6.2.12) \quad \mathbf{i} = -\rho D \left( \mathbf{grad} c + \frac{k_T}{T} \mathbf{grad} T + \frac{k_p}{p} \mathbf{grad} p \right)$$

$$(6.2.13) \quad \mathbf{q} = \left( k_T \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T} - T \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p,c} + \mu \right) \mathbf{i} - \kappa \mathbf{grad} T$$

El coeficiente  $D$  se denomina *coeficiente de difusión* o *coeficiente de transferencia de masas*.  $D$  da el flujo de difusión cuando está presente un solo gradiente de concentración. El flujo de difusión debido al gradiente de temperatura viene dado por el *coeficiente de difusión térmica*  $k_T D$ . La magnitud adimensional  $k_T$  es el *coeficiente de difusión térmica*.

El último término en (6.2.12) únicamente es necesario tenerlo en cuenta cuando existe un gradiente de presiones considerable en el fluido (producido por un campo externo, por ejemplo). El coeficiente  $k_T D$  puede denominarse *coeficiente de barodifusión* o *coeficiente de difusión barométrica*. Debe señalarse que, según la fórmula (6.2.11) la magnitud adimensional  $k_p$  queda totalmente determinada únicamente por las propiedades termodinámicas.

En un fluido simple no existe difusión (como es normal). De aquí que resulte claro que  $k_T$  y  $k_p$  deben anularse en cada uno de los casos límite  $c = 0$  y  $c = 1$ .

La condición de crecimiento de la entropía determina ciertas restricciones en los coeficientes de las fórmulas (6.2.7) y (6.2.8). Sustituyendo estas fórmulas en la expresión (6.1.7) para la variación respecto al tiempo de la entropía tenemos

$$(6.2.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \rho s dV = \int \frac{\kappa (\mathbf{grad} T)^2}{T^2} dV + \int \frac{\mathbf{i}^2}{\alpha T} dV + \dots$$

Es evidente a partir de esta expresión que además de la condición  $\kappa > 0$  que ya conocemos, debemos tener también  $\alpha > 0$ . Recordando que la derivada  $\left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T}$  es siempre positiva, encontramos que el coeficiente de difusión debe ser positivo:  $D > 0$ . Sin embargo las magnitudes  $k_T$  y  $k_p$  pueden ser tanto positivas como negativas.

En vez de perder el tiempo obteniendo las largas expresiones obtenidas mediante la sustitución de las expresiones para  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{q}$  en (6.1.3) y (6.1.6), nos centramos en el caso en el que no existe un gradiente de presiones significativo, mientras que la concentración y la temperatura del fluido varía tampoco que los coeficientes en las ecuaciones (6.2.12) y (6.2.13) pueden considerarse constantes, aunque sean en general funciones de  $c$  y  $T$ . Además, suponemos que no existe movimiento macroscópico

en el fluido, excepto el que pueda generarse por los gradientes de temperatura y concentración. La velocidad de estos movimientos es proporcional a los gradientes; así los términos (6.1.3) y (6.1.6) en los que interviene la velocidad son magnitudes de segundo orden y pueden despreciarse. El término  $-\mathbf{i} \cdot \text{grad}\mu$  en (6.1.6) es también de segundo orden. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} \mathbf{i} &= 0 \\ \rho T \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div} (\mathbf{q} - \mu \mathbf{i}) &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{q}$  obtenidos en las expresiones (6.2.12) y (6.2.13) (sin el término  $\text{grad}p$ ) y transformando la derivada  $\partial s/\partial t$  del modo siguiente <sup>1</sup>:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_{c,p} \frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{\partial s}{\partial c} \right)_{T,p} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_p}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p,c} \frac{\partial c}{\partial t}$$

obtenemos

$$(6.2.15) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D \left( \Delta c + \frac{k_T}{T} \Delta T \right)$$

$$(6.2.16) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k_T}{c_p} \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T} \frac{\partial c}{\partial t} = \chi \Delta T$$

Este sistema de ecuaciones lineales determina las distribuciones de temperatura y concentración dentro del fluido.

**Caso importante: concentración pequeña.** Cuando la concentración tiende hasta cero, el coeficiente de difusión tiende hacia una constante finita, pero el coeficiente de difusión térmica tiende a cero. Por tanto, en este caso  $k_T$  es pequeño y podemos despreciar el término  $k_T \Delta T$  en (6.2.15), que se transforma entonces en la ecuación de difusión

$$(6.2.17) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c$$

Las condiciones límites correspondientes a la solución de (6.2.17) son diferentes en los diferentes casos. En la superficie de un cuerpo insoluble en el fluido la componente normal del flujo de difusión  $\mathbf{i} = -\rho D \text{grad}c$  debe anularse, es decir, podemos tener  $\partial c/\partial n = 0$ . Pero si existe difusión desde un cuerpo que se disuelve en el fluido, se establece rápidamente un equilibrio cerca de su superficie y la concentración en el fluido junto al cuerpo

<sup>1</sup>

$$\left( \frac{\partial s}{\partial c} \right)_{p,T} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial c \partial T} = - \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p,c}$$

es la concentración de saturación  $c_0$ ; la difusión hacia fuera de esta capa tiene lugar más lentamente que el proceso de disolución. La condición límite en dicha superficie es, por tanto  $c = c_0$ . Finalmente, si una superficie sólida absorbe la sustancia que se difunde y que incide sobre ella, la condición límite es  $c = 0$ ; un ejemplo de esta situación es el estudio de las reacciones químicas que se producen en la superficie de un sólido. Como la ecuación de la difusión pura (6.2.17) y la conducción térmica (5.2.4) tienen exactamente la misma forma, podemos aplicar inmediatamente todas las fórmulas deducidas en las secciones (5.3) y (5.4), sustituyendo simplemente  $T$  por  $c$  y  $\chi$  por  $D$ . La condición límite para una superficie térmicamente aislada corresponde a la de una superficie insoluble, mientras que una superficie mantenida a una temperatura constante corresponde a una superficie soluble a partir de la cual tiene lugar la difusión.

En particular podemos escribir, por analogía con (5.3.6) la solución siguiente de la ecuación de difusión:

$$(6.2.18) \quad c(r) = \frac{M}{8\rho(\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)$$

Esta expresión nos da la distribución del soluto en un instante cualquiera si en el instante  $t = 0$  está todo concentrado en el origen (y siendo  $M$  la cantidad total de soluto).

### 6.3. Difusión de partículas suspendidas en un fluido (G)

Las partículas suspendidas en un fluido, debido al movimiento molecular del fluido se mueven de un modo irregular que se conoce como *movimiento browniano*. Suponemos una de las partículas está en el origen en el instante inicial. El movimiento siguiente puede considerarse como una difusión en la que la concentración se representa por la probabilidad de hallar la partícula en un elemento de volumen particular determinado. Por tanto, para determinar esta probabilidad podemos utilizar la solución (6.2.18) de la ecuación de difusión. La posibilidad de emplear este procedimiento se debe a que en el caso de difusión en disoluciones débiles (es decir, cuando  $c \ll 1$ , que es cuando se puede utilizar la ecuación de difusión (6.2.17)), las partículas del soluto difícilmente se influyen entre sí y por tanto el movimiento de cada partícula puede considerarse independiente.

Llamamos  $w(r, t) dr$  a la probabilidad de hallar la partícula a una distancia comprendida entre  $r$  y  $r + dr$  a partir del origen en el instante  $t$ . Poniendo en (6.2.18)  $\frac{M}{\rho} = 1$  y multiplicando por el volumen  $4\pi r^2 dr$  de la

capa esférica tenemos

$$(6.3.1) \quad w(r, t) dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) r^2 dr$$

Deteminamos la distancia cuadrática media respecto al origen en el instante  $t$ . Tenemos:

$$(6.3.2) \quad \overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 w(r, t) dr$$

El resultado, usando (6.3.1), es

$$(6.3.3) \quad \overline{r^2} = 6Dt$$

Es decir, la distancia media recorrida por la partícula durante un tiempo cualquiera es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo.

El coeficiente de difusión para las partículas suspendidas en un fluido puede calcularse a partir de lo que se denomina su *movilidad*. Supongamos que actúa sobre las partículas una cierta fuerza externa constante  $f$  (la fuerza de gravedad, por ejemplo). En un estado estacionario la fuerza que actúa sobre cada partícula debe estar equilibrada por la fuerza de arrastre o de rozamiento ejercida sobre la partícula. Cuando la velocidad es pequeña, la fuerza de rozamiento es proporcional a ella y vale  $v/b$ , siendo  $b$  una constante. Igualando esta expresión a la fuerza externa  $f$  tenemos

$$(6.3.4) \quad v = bf$$

es decir, la velocidad adquirida por la partícula bajo la acción de la fuerza externa es proporcional a esta fuerza. La constante  $b$  se denomina *movilidad* y puede calcularse, en principio, a partir de las ecuaciones de la dinámica de fluidos. Por ejemplo, en el caso de partículas esféricas de radio  $R$ , la fuerza de arrastre es  $6\pi\eta Rv$  (ver fórmula de Stokes, (2.5.14)) y por tanto la movilidad es

$$(6.3.5) \quad b = \frac{1}{6}\pi\eta R$$

En el caso de partículas no esféricas, el arrastre depende de la dirección del movimiento; puede escribirse en forma  $a_{ik}v_k$ , siendo  $a_{ik}$  un tensor simétrico (ver (2.5.15)). Para calcular la movilidad hemos de promediar respecto a todas las orientaciones de la partícula; si  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  son los valores principales del tensor simétrico  $a_{ik}$ , tendremos entonces:

$$(6.3.6) \quad b = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right)$$



La movilidad  $b$  está relacionada con el coeficiente de difusión  $D$ . Para deducir esta relación escribimos el flujo de difusión  $i$ , que contiene el término normal  $-\rho D \text{grad} c$  debido al gradiente de concentración (suponemos que la temperatura es constante) y también un término en el que interviene la velocidad adquirida por la partícula debida a las fuerzas externas. Este último término es  $\rho c v$ . Así

$$(6.3.7) \quad i = -\rho D \text{grad} c + \rho c v$$

en donde hemos usado la expresión (6.3.4). En un estado de equilibrio termodinámico no existe difusión y el flujo  $i$  debe ser nulo. La distribución de equilibrio de la concentración de partículas suspendidas en un fluido, en un campo externo, viene determinada por la fórmula de Boltzmann, de manera que  $c = \text{constante} \times e^{-U/kT}$ , donde  $U$  es la energía potencial de la partícula en el campo externo. Como  $f = -\text{grad} U$ , encontramos que el gradiente de concentraciones de equilibrio debe ser  $\text{grad} c = \frac{cf}{kT}$ . Sustituyendo esta expresión en (6.3.7) e igualando  $i$  a cero tenemos

$$(6.3.8) \quad D = kTb$$

Esta es la *relación de Einstein* entre el coeficiente de difusión  $D$  y la movilidad  $b$ .

Sustituyendo (6.3.5) en (6.3.8) encontramos la expresión para el coeficiente de difusión para partículas esféricas:

$$(6.3.9) \quad D = \frac{kT}{6\pi\eta R}$$

Además del movimiento de traslación browniano y la difusión de partículas suspendidas, podemos considerar también su difusión y movimiento browniano de rotación. Así como el coeficiente de difusión de traslación se calcula en función de la fuerza de arrastre de rozamiento, el coeficiente de difusión por rotación puede expresarse en función de las fuerzas que actúan sobre una partícula que realiza un movimiento de rotación en el fluido.

## Fenómenos superficiales

### 7.1. Fórmula de Laplace (B)

En este capítulo estudiaremos los fenómenos que se producen cerca de la superficie que separa dos medios continuos. Si la superficie de separación es curva, las presiones cerca de la misma en ambos medios son diferentes. Para determinar la diferencia de presiones (denominada *presión superficial*) escribimos a continuación la condición de que los medios estén en equilibrio termodinámico conjuntamente, teniendo en cuenta la superficie de separación.

Suponemos que la superficie sufre un desplazamiento infinitesimal. En cada punto de la superficie no desplazada dibujemos la normal. La longitud del segmento de la normal, comprendida entre los puntos en que corta a la superficie desplazada y no desplazada se designa por  $\delta\zeta$ . Entonces un elemento de volumen comprendido entre ambas superficies es  $\delta\zeta df$ , donde  $df$  es un elemento de superficie. Sean  $p_1$  y  $p_2$  las presiones en los dos medios y admitimos que  $\delta\zeta$  es positivo si el desplazamiento de la superficie es hacia el medio 2 (por ejemplo). Entonces el trabajo necesario para realizar la variación de volumen anterior es

$$\int (-p_1 + p_2) \delta\zeta df$$

El trabajo total  $\delta R$  realizado en el desplazamiento de la superficie se obtiene sumando a este trabajo el conectado con la variación de área de la superficie. Esta parte del trabajo es proporcional a la variación  $\delta f$  del área de la superficie y puede ponerse como  $\alpha\delta f$ , en donde  $\alpha$  se denomina *coeficiente de tensión superficial*. Así el trabajo total es

$$(7.1.1) \quad \delta R = - \int (p_1 - p_2) \delta\zeta df + \alpha\delta f$$

La condición de equilibrio termodinámico exige que  $\delta R = 0$ .

A continuación suponemos que  $R_1$  y  $R_2$  son los radios principales de curvatura en un punto determinado de la superficie; consideramos  $R_1, R_2 > 0$  si se trazan en el medio 1. Entonces los elementos de longitud

$dl_1$  y  $dl_2$  sobre la superficie en sus secciones principales reciben incrementos  $\frac{\delta\zeta}{R_1}dl_1$  y  $\frac{\delta\zeta}{R_2}dl_2$  respectivamente, cuando la superficie sufre un desplazamiento infinitesimal; aquí  $dl_1$  y  $dl_2$  se consideran como elementos de las circunferencias de radios  $R_1$  y  $R_2$ . De aquí que el elemento superficial  $df = dl_1dl_2$  resulte, después del desplazamiento

$$dl_1 \left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_1}\right) dl_2 \left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_2}\right) \approx dl_1dl_2 \left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_1} + \frac{\delta\zeta}{R_2}\right)$$

es decir, varía en la cantidad  $\delta\zeta df \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ . A partir de aquí vemos que la variación total del área de la superficie de separación es

$$(7.1.2) \quad \delta f = \int \delta\zeta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) df$$

Sustituyendo estas expresiones en (7.1.1) e igualando a cero obtenemos la ecuación de equilibrio en la forma:

$$\delta f = \int \delta\zeta \left((p_1 - p_2) - \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right) df = 0$$

Esta condición debe ser válida para cualquier desplazamiento infinitesimal de la superficie, es decir, para todo  $\delta\zeta$ . Por tanto, la expresión del integrando debe ser cero:

$$(7.1.3) \quad p_1 - p_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \text{Fórmula de Laplace}$$

Esta es la **fórmula de Laplace** que da la presión superficial. Vemos que si  $R_1, R_2 > 0$  entonces  $p_1 - p_2 > 0$ . Esto significa que la presión es mayor en el medio cuya superficie es convexa. Si  $R_1 = R_2 = \infty$ , es decir, la superficie de separación es plana, la presión es la misma en los dos medios, como era de esperar.

Aplicamos ahora la fórmula de Laplace (7.1.3) para investigar el equilibrio mecánico de dos medios en contacto. Suponemos que no existen fuerzas externas que actúan entre ellos en la superficie de separación o en los propios medios. Usando (7.1.3) podemos escribir entonces la ecuación de equilibrio como

$$(7.1.4) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{constante}$$

Así, la suma de las curvaturas debe ser una constante en cualquier superficie de separación. Si la superficie completa es libre, la condición (7.1.4) significa que debe ser esférica (por ejemplo la superficie de una pequeña gota cuando puede despreciarse el efecto de la gravedad). Sin embargo, si

la superficie está apoyada a lo largo de una curva determinada, su forma es menos simple.

Cuando se aplica la condición de equilibrio mecánico (7.1.4) al equilibrio de películas delgadas apoyadas en marcos rígidos debe ser cero la constante del segundo miembro. En este caso, la suma  $1/R_1 + 1/R_2$  debe ser la misma en todos los puntos de la superficie libre de la partícula, mientras que en caras opuestas de los mismos debe tener signos opuestos, por lo que si un lado es convexo, el otro será cóncavo y los radios de curvatura serán iguales pero de signos opuestos. De aquí se deduce que la condición de equilibrio para una película delgada es

$$(7.1.5) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO EN LA SUPERFICIE DE UN MEDIO DENTRO DE UN CAMPO GRAVITATORIO. Por sencillez, admitiremos que el medio 2 es la atmósfera, cuya presión puede considerarse como constante en toda la superficie y que el medio 1 es un fluido incompresible. Entonces tenemos que  $p_2 = \text{constante}$ , mientras que  $p_1$  es la presión del fluido,  $p = \text{constante} - \rho g z$ , midiéndose la coordenada  $z$  verticalmente hacia arriba. Así pues, la condición de equilibrio se transforma en

$$(7.1.6) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\rho g z}{\alpha} = \text{constante}$$

Para determinar la forma de equilibrio de la superficie del fluido en casos particulares es normalmente más conveniente utilizar la condición de equilibrio no en la forma (7.1.6), sino la obtenida directamente el problema variacional de minimizar la energía libre total. La energía libre interna de un fluido incompresible depende únicamente del volumen del mismo y no de la forma de su superficie. De esta última depende, en primer lugar, la energía libre de la superficie  $\int \alpha df$  y en segundo lugar, la energía del campo exterior (gravedad), que es  $g\rho \int z dV$ . Así pues, la condición de equilibrio puede escribirse como

$$(7.1.7) \quad \alpha \int df + g\rho \int z dV = \text{mínimo}$$

El mínimo deberá determinarse sometido a la condición

$$(7.1.8) \quad \int dV = \text{constante}$$

que expresa el hecho de que el volumen del fluido es constante.

Las constantes  $\alpha$ ,  $\rho$  y  $g$  aparecen en las condiciones de equilibrio (7.1.6) y (7.1.7) únicamente en la forma  $\alpha/g\rho$ . Este cociente tiene las dimensiones

de  $cm^2$ . La longitud

$$(7.1.9) \quad a = \sqrt{\frac{2\alpha}{g\rho}}$$

se denomina *constante de capilaridad* para la sustancia. **La forma de la superficie del fluido está determinada únicamente por esta magnitud.**

Si la constante capilar es grande en comparación con la dimensión del medio podemos despreciar la gravedad en la determinación de la superficie.

Con objeto de hallar la forma de la superficie a partir de la condición (7.1.4) o (7.1.6) necesitamos fórmulas que determinen los radios de curvatura a partir de la forma de la superficie. Estas fórmulas son en general muy complicadas pero se simplifican cuando la superficie se desvía de un plano sólo ligeramente.

Sea  $z = \zeta(x, y)$  la ecuación de la superficie y supongamos que  $\zeta$  es pequeña en todos los puntos; es decir, que la superficie se desvía sólo ligeramente del plano  $z = 0$ . El área  $f$  de la superficie viene dada por la integral

$$f = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

o sea, para valores pequeños de  $\zeta$  podemos aproximar por

$$(7.1.10) \quad f \simeq \int \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right) dx dy$$

La variación  $\delta f$  es

$$\delta f = \int \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial y} \right) \delta \zeta dx dy$$

Comparando este resultado con (7.1.2) tenemos

$$(7.1.11) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

Cuando están en equilibrio tres medios en contacto las superficies de separación son tales que la resultante de las fuerzas superficie-tensión es nula en la línea común de intersección. Esta condición implica que las superficies de separación deben cortarse en ángulos (denominados *ángulos de contacto*) determinados por los valores de los coeficientes de tensión superficial.

Finalmente consideramos el tema de las condiciones límites que deben satisfacerse en la frontera entre dos fluidos en movimiento cuando se tienen en cuenta las fuerzas de tensión superficial. Si se desprecian, se tiene que en la frontera  $n_k (\sigma_{2,ik} - \sigma_{1,ik}) = 0$ , que significa que la fuerza de

rozamiento viscoso en la superficie de cada fluido es igual a la del otro. Cuando se incluye la tensión superficial, tenemos que sumar en el segundo miembro una fuerza determinada por la fórmula de Laplace dirigida a lo largo de la normal:

$$(7.1.12) \quad n_k \sigma_{2,ik} - n_k \sigma_{1,ik} = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i$$

Esta ecuación puede escribirse también en la forma:

$$(7.1.13) \quad (p_1 - p_2) n_i = (\sigma'_{1,ik} - \sigma'_{2,ik}) n_k + \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i$$

Si ambos fluidos son ideales, las tensiones viscosas  $\sigma'_{ik}$  son cero y nos encontramos de nuevo con la ecuación (7.1.3) de la fórmula de Laplace.

Pero la condición (7.1.13) todavía no es completamente general. La razón es que el coeficiente  $\alpha$  de tensión superficial puede no ser constante en toda la superficie (por ejemplo, si tenemos en cuenta variaciones de temperatura). Entonces, además de la fuerza normal (que es cero en el caso de una superficie plana) existe otra fuerza tangencial a la superficie. Del mismo modo que existe una fuerza volumétrica  $-\text{grad} p$  por unidad de volumen (como vimos en la sección (1.2)) en aquellos casos en los que la presión no es uniforme, aquí tenemos una fuerza tangencial  $f_i = \text{grad} \alpha$  por unidad de área de la superficie de separación. En este caso tomaremos el gradiente como positivo, debido a que las fuerzas de tensión superficial tienden a reducir el área de la superficie, mientras que la fuerza de la presión tiende a aumentar el volumen. Sumando esta fuerza al segundo miembro de la ecuación (7.1.13) obtenemos la condición límite:

$$(7.1.14) \quad \left( p_1 - p_2 - \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right) n_i = (\sigma'_{1,ik} - \sigma'_{2,ik}) n_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$$

(el vector normal  $\mathbf{n}$  está dirigido hacia el medio 1). Esta condición sólo puede satisfacerse en el caso de un fluido viscoso: en un fluido ideal  $\sigma'_{ik} = 0$  y el primer miembro de la ecuación (7.1.14) es un vector dirigido a lo largo de la normal, mientras que el segundo miembro, en este caso, es un vector tangencial.

## 7.2. Ondas de capilaridad (E)

Las superficies de los fluidos tienden a adquirir una forma de equilibrio, tanto bajo la acción de la fuerza de la gravedad como por las fuerzas de tensión superficial. La capilaridad tiene una influencia importante sobre las ondas de gravedad de pequeña longitud de onda.

Como en la sección (1.12) suponemos que la amplitud de las oscilaciones es pequeña comparada con la longitud de onda

$$a \ll \lambda$$

Para el potencial de velocidad tenemos como antes la ecuación  $\Delta\phi = 0$ . Pero ahora la condición en la superficie del fluido es diferente: la diferencia de presiones entre las dos caras de la superficie no es cero, sino que viene dada por la fórmula de Laplace (7.1.3).

Llamamos  $\zeta$  a la coordenada  $z$  de un punto de la superficie. Como  $\zeta$  es pequeña podemos utilizar la expresión (7.1.11) y escribir la fórmula de Laplace en la forma

$$p - p_0 = \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

Aquí  $p$  es la presión en el fluido cerca de la superficie y  $p_0$  es la presión externa constante. Para  $p$  podemos sustituir, de acuerdo con (1.12.2) por

$$p = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

obteniendo

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0$$

Por las mismas razones que en la sección (1.12), podemos omitir la constante  $p_0$  redefiniendo  $\phi$ . Derivando esta expresión respecto a  $t$  y sustituyendo  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  por  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$  tenemos la condición límite sobre el potencial  $\phi$ :

$$(7.2.1) \quad \rho g z \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ para } z = 0$$

Consideramos una onda plana que se propaga en la dirección del eje  $x$ . Como en la sección (1.12), obtenemos una solución de la forma  $\phi = A e^{kz} \cos(kx - \omega t)$ . Se obtiene ahora la relación entre  $k$  y  $\omega$  a partir de la condición límite (7.1.1) y resulta ser:

$$(7.2.2) \quad \omega^2 = gk + \frac{\alpha k^3}{\rho}$$

Vemos que en el caso de longitudes de onda largas,  $k \ll \sqrt{\frac{\rho g}{\alpha}}$  o sea,  $k \ll 1/a$  (en donde  $a$  es la constante de capilaridad) puede despreciarse el efecto de la capilaridad y tenemos una onda de gravedad pura. En el caso opuesto, de longitudes de onda cortas, puede despreciarse el efecto de la gravedad. Entonces:

$$(7.2.3) \quad \omega^2 = \frac{\alpha k^3}{\rho}$$

Estas ondas se denominan *ondas de capilaridad*. Los casos intermedios se denomina *ondas de gravedad y capilaridad*.

A continuación nos concentramos en la naturaleza de las oscilaciones de una gota esférica de fluido incompresible bajo la acción de fuerzas capilares. Las oscilaciones hacen que la superficie de la gota se desvíe de su forma esférica. Como es normal, supondremos que la amplitud de las oscilaciones es pequeña.

Empezaremos por determinar el valor de la suma  $1/R_1 + 1/R_2$  para una superficie ligeramente distinta de una esfera. A continuación procederemos como en la deducción de la fórmula (7.1.11). El área de una superficie dada en coordenadas esféricas  $r, \theta, \phi$  mediante una función  $r = r(\theta, \phi)$  es

$$(7.2.4) \quad f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2} r \sin \theta d\theta d\phi$$

Una superficie esférica viene dada por  $r = \text{constante} = R$  siendo  $R$  el radio de la esfera, y una superficie próxima viene dada por  $r = R + \zeta$ , donde  $\zeta$  es pequeño. Sustituyendo en (7.2.4) obtenemos

$$f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ (R + \zeta)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi}\right)^2 \right] \sin \theta d\theta d\phi$$

Encontremos la variación  $\delta f$  del área cuando varía  $\zeta$ . Tenemos

$$\delta f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ 2(R + \zeta) \delta \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial \phi} \right] \sin \theta d\theta d\phi$$

Integrando el segundo término por partes respecto a  $\theta$  y el tercero por partes respecto a  $\phi$  obtenemos

$$\delta f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ 2(R + \zeta) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right] \delta \zeta \sin \theta d\theta d\phi$$

Si dividimos la expresión entre llaves por  $R(R + 2\zeta)$ , el coeficiente resultante de  $\delta \zeta \delta f \approx \delta \zeta R(R + 2\zeta) \sin \theta d\theta d\phi$  en el integrando es, según la fórmula (7.1.2), precisamente la suma requerida de las curvaturas, corregidas hasta los términos de primer orden en  $\zeta$ . Así obtenemos

$$(7.2.5) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) \right)$$

El primer término corresponde a una superficie esférica, en la cual  $R_1 = R = R_2$ .

El potencial de velocidades  $\psi$  satisface la ecuación de Laplace  $\Delta \psi = 0$  con una condición límite en  $r = R$  semejante a la de una superficie plana:

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \left( \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right] \right) + p_0 = 0$$



La constante  $p_0 + \frac{2\alpha}{R}$  puede omitirse de nuevo; derivando respecto al tiempo y poniendo  $\partial\zeta/\partial t = v_r = \partial\psi/\partial r$ , tenemos la condición límite sobre  $\psi$ :

$$(7.2.6) \quad \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{R^2} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \right) = 0 \text{ para } r = R$$

Buscamos una solución en forma de onda estacionaria  $\psi = e^{-i\omega t} f(r, \theta, \phi)$  en donde la función  $f$  satisface la ecuación de Laplace  $\Delta f = 0$ . Cualquier solución de la ecuación de Laplace puede representarse como una combinación lineal de *funciones armónicas esféricas volumétricas*  $r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$  en donde  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  son los armónicos esféricos de Laplace:  $Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ . Aquí  $P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}$  es lo que se denomina una *función de Legendre asociada*, siendo  $P_l(\cos \theta)$  el polinomio de Legendre de orden  $l$ . Como se sabe  $l$  adquiere todos los valores enteros desde cero en adelante, mientras que  $m$  toma los valores  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ .

De acuerdo con ello buscaremos una solución particular del problema en la forma

$$(7.2.7) \quad \psi = A e^{-i\omega t} r^l P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

La frecuencia  $\omega$  debe ser de tal tipo que satisfaga la condición límite (7.2.6). Sustituyendo la expresión (7.2.7) y utilizando el hecho de que el armónico esférico  $Y_{lm}$  satisface

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \phi^2} + l(l+1) Y_{lm} = 0$$

se halla (eliminando  $\psi$ )

$$\rho \omega + l \alpha \frac{2 - l(l+1)}{R^3} = 0$$

o sea,

$$(7.2.8) \quad \omega^2 = \frac{\alpha l(l-1)(l+2)}{\rho R^3}$$

Esta fórmula da las frecuencias propias de las oscilaciones por capilaridad de una gota esférica. Vemos que depende únicamente de  $l$  y no de  $m$ . Sin embargo, para un valor dado de  $l$ , existen  $2l+1$  funciones diferentes en correspondencia con (7.2.7). Así, a cada una de las frecuencia (7.2.8) le corresponden  $2l+1$  oscilaciones distintas. Las oscilaciones independientes que poseen la misma frecuencia se dice que son *degeneradas*; en este caso, tenemos una degeneración de orden  $2l+1$ .

La expresión (7.2.8) se anula para  $l=0$  y  $l=1$ . El valor  $l=0$  corresponde a oscilaciones radiales, es decir, pulsaciones con simetría esférica de la gota; en el caso de un fluido incompresible, dichas oscilaciones son

imposibles. Para  $l = 1$  el movimiento es simplemente un movimiento de traslación de la gota como un todo. La frecuencia de oscilación más pequeña posible de la gota corresponde a  $l = 2$  y es

$$(7.2.9) \quad \omega_{min} = \sqrt{\frac{8\alpha}{\rho R^3}}$$

### **7.3. Influencia de películas absorvidas sobre el movimiento de un líquido (L)**

Esta sección está marcada como *sólo de lectura* en la Guía de la Asignatura.