EXAMEN 2012-1S CUESTIÓN 1

XAVIER AZNAR

Cuestión 1. Demuestre, mediante un análisis de órdenes de magnitud que la fuerza por unidad de superficie ejercida por un fluido (con densidad ρ y viscosidad μ) sobre un objeto de longitud característica L moviéndose con velocidad U a bajos números de Reynolds es del orden de $\mu U/L$, mientras que a números de Reynolds altos es del orden de ρU^2.

Demostración. La fuerza ejercida por el fluido por unidad de longitud y superficie $\mathbf{F}$ viene dada a partir de

$$F_i = -\sigma_{ik} \cdot n_k \tag{1}$$

donde σ_{ik} es el tensor de tensiones y n_k es un vector normal a la superficie. El tensor de tensiones viene dado por

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \tag{2}$$

Aunque podemos determinar directamente el orden de magnitud del término relacionado con la viscosidad, debemos obtener el orden de magnitud del término de presión p. Para ello, recurrimos a la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \tag{3}$$

Consideramos que la velocidad característica U es muy inferior a la velocidad del sonido c en el fluido, de manera que el número de Mach es muy inferior a la unidad y podemos considerar el fluido como incompresible ($\rho = cte$). Por otro lado, consideramos una escala de tiempos en la que la velocidad no varía apreciablemente, por lo que podemos considerar el sistema en régimen estacionario y despreciar las variaciones temporales.

En estas condiciones, la ecuación de Navier-Stokes se simplifica:

$$\rho \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} \tag{4}$$

Si evaluamos el cociente entre los términos inercial y viscoso:

$$\frac{\rho \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}}{\mu \Delta \mathbf{v}} \sim \frac{\rho U^2/L}{\mu U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu} \equiv Re \tag{5}$$

Así, en el límite de números de Reynolds bajos $(Re \ll 1)$ predomina el término viscoso sobre el inercial. En este caso, de la ecuación de Navier-Stokes (4) queda

$$0 = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}$$

por lo que el orden de magnitud de la variación de la presión

$$\frac{\Delta p}{L} \sim \frac{\mu U}{L^2} \Rightarrow \Delta p \sim \frac{\mu U}{L} \tag{6}$$

Así, el orden de magnitud de la fuerza, $\Delta F \sim \Delta \sigma$

$$\Delta F \sim \Delta p + \frac{\mu U}{L} = \frac{\mu U}{L} \qquad (Re \ll 1)$$

En el caso opuesto, para números de Reynolds altos $Re \gg 1$ predomina el término inercial (podemos considerar $\mu \sim 0$), por lo que ahora el orden de de magnitud de las variaciones de presión Δp

$$\rho \frac{U^2}{L} = \frac{\Delta p}{L} \Rightarrow \Delta p \sim \rho U^2 \tag{7}$$

Así que el orden de magnitud de la fuerza en este caso

$$\Delta F \sim \Delta \sigma \sim \Delta p \sim \rho U^2 \qquad (Re \gg 1)$$

□