Problema. (Problema 7, páginas 32,32 de Landau) Un hueco esférico de radio a se forma repentinamente dentro de un fluido incompresible que llena todo el espacio. Determinar cuánto tiempo tarda el fluido en rellenar la cavidad.

Demostración. La única componente no nula de la velocidad es la componente radial

$$v = v_r < 0$$

Planteamos la ecuación de Euler y la de continuidad en coordenadas esféricas teniendo en cuenta que el fluido es incompresible $\rho = constante$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\mathrm{r}^2\mathrm{v}\right) = 0 \tag{2}$$

A partir de la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned}
2rv\partial r + r^2\partial v &= 0\\
\frac{\partial v}{v} &= -2\frac{\partial r}{r}\\
\log v &= -2\log r + f_0(t)\\
v &= \frac{f(t)}{r^2} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Ahora introducimos este resultado en la ecuación de Euler (1) e integramos para r. Como extremos de integración tenemos el radio de la esfera $R(t) \leq a$ y el infinito. Las condiciones de velocidad y presión en cada uno de estos extremos son:

$$R(t) \quad : \quad v = V(t), \quad p = 0 \tag{4}$$

$$\infty \quad : \quad v = 0, \quad p = p_0 \tag{5}$$

donde $V(t) = \frac{dR(t)}{dt}$ es la velocidad de variación de la esfera del *hueco en el fluido.*

$$\begin{aligned}
\frac{f'(t)}{r^2} + v\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\
f'(t)\int_{R(t)}^{\infty}\frac{dr}{r^2} + \int_{R(t)}^{\infty} drv\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho}\int_{R(t)}^{\infty} dr\frac{\partial p}{\partial r}\\
\frac{f'(t)}{R(t)} + \int_{V(t)}^{0} v\partial v &= -\frac{1}{\rho}\int_{0}^{p_0}\partial p\\
\frac{f'(t)}{R(t)} - \frac{1}{2}V^2(t) &= -\frac{1}{\rho}p_0 \qquad (6)
\end{aligned}$$

En el interior del *hueco* de la esfera se verifica

$$f(t) = R^2(t)\, V(t) \tag{7}$$

(como hemos visto al solucionar la ecuación de continuidad en (3)). Utilizamos (7) para calcular $f'(t)$

$$f'(t) = 2R(t)\, V^2(t) + R^2(t)\, V'(t)$$

Nos interesa obtener la derivada de $V'(t)$ en función de R (para resolver (6)), así que el último término

$$R^2 V'(t) = R^2(t)\frac{dV}{dt} = R^2\frac{dV}{dR}\frac{dR}{dt} = R^2 V\frac{dV}{dR} = \frac{1}{2}R^2\frac{dV^2}{dR} \tag{8}$$

Con lo que ahora, (6) se convierte es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R}\left(2RV^2 + \frac{1}{2}R^2\frac{dV^2}{dR}\right) - \frac{1}{2}V^2 &= -\frac{1}{\rho}p_0 \\ \frac{3}{2}V^2 + \frac{1}{2}R\frac{dV^2}{dR} &= -\frac{1}{\rho}p_0 \end{aligned}$$

Ahora la masajeamos un poco:

$$\begin{aligned} \frac{dV^2}{dR} &= -\frac{3V^2 + 2\frac{p_0}{\rho}}{R} \\ \frac{d\left(V^2\right)}{\left(V^2 + \frac{2}{3}\frac{p_0}{\rho}\right)} &= -3\frac{dR}{R} \\ \frac{dy}{y+c} &= -3\frac{dR}{R} \qquad \left(y = V^2\right) \end{aligned}$$

Podemos realizar la integración teniendo en cuenta que para $R = a$, $V = 0$, de manera que:

$$\begin{aligned} \int_c^{V^2}\frac{dy}{y+c} &= -3\int_a^R\frac{dR'}{R'} \\ \ln\left(V^2 + c\right) - \ln(c) &= -3\left(\ln R - \ln a\right) \\ \ln\left(\frac{V^2 + c}{c}\right) &= \ln\left(\frac{R^{-3}}{a^{-3}}\right) = \ln\left(\frac{a^3}{R^3}\right) \\ \frac{V^2 + c}{c} &= \frac{a^3}{R^3} \\ V^2 &= c\frac{a^3}{R^3} - c = c\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right) \end{aligned}$$

$$V(t) = -\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3(t)} - 1\right)} \tag{9}$$

De las dos soluciones para la velocidad, debemos tomar la $V < 0$.

Ya tenemos la velocidad a la que el hueco se llena de fluido. El siguiente paso es integrar $V = \frac{dR}{dt}$ para obtener el tiempo que tarda en llenarse el hueco, que es lo que nos pide el enunciado.

$$\tau = \int_0^\tau dt = \int_a^0 \frac{dR}{V(R(t))} = -\sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_a^0 \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1}}$$

Para resolver la integral I, realizamos el cambio de variable $t = \left(\frac{R}{a}\right)^3$.

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} I \\ I &= \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 1}} \end{aligned}$$

(Hemos absorvido el signo negativo cambiando los extremos de integración)

$$\begin{aligned} dt &= \frac{3}{a^3} R^2 dR = \frac{3}{a}\left(\frac{R^2}{a^2}\right) dR = \frac{3}{a} t^{2/3} dR \\ \frac{a}{3} t^{-2/3} dt &= dR \end{aligned}$$

$$I = \frac{a}{3}\int_0^1 t^{-2/3} \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{t} - 1}} = \frac{a}{3}\int_0^1 t^{-2/3} \frac{dt}{\frac{\sqrt{1-t}}{t^{-1/2}}} = \frac{a}{3}\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{a}{3}\int_0^1 \frac{t^{-1/6}}{\sqrt{1-t}} dt$$

Ahora, identificamos esta ecuación como del tipo

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{(1-t)^{w-1}} = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \qquad \text{con} \qquad \begin{aligned} z &= 5/6 \\ w &= 1/2 \end{aligned}$$

por lo que

$$I = \frac{a}{3} \frac{\Gamma(5/6)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(4/3)}$$

Y ahora sólo queda utilizar las propiedades de la función Gamma $\Gamma(x)$ para obtener el resultado:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

por lo que

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

con lo que finalmente,

$$I = a\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Y el tiempo que tarda en llenarse el hueco resulta:

$$\tau = a\sqrt{\frac{3\rho\pi}{2p_0}}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\right) a\sqrt{\frac{\rho}{p_0}} \simeq 0{,}915 \times a\sqrt{\frac{\rho}{p_0}}$$

□