

# Apuntes Física de Fluidos

Xavi Aznar



# Índice alfabético

## C

- Capa límite, 99
- Circulación de la velocidad  $\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ , 18
- Coefficiente de amortiguamiento  $\gamma$ , 75
- Coefficientes de viscosidad  $\eta, \zeta$ , 46
- Condiciones límite, 10
- Convección, 11
- Correlación de velocidades, 86

## D

- Densidad de flujo de energía  $\rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right)$ , 16
- Densidad de flujo de entropía  $\rho s \mathbf{v}$ , 9
- Densidad de flujo másico  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , 7
- Distribución de velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ , 5

## E

- Ecuación de Bernoulli  
 $\frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante}$ , 14
- Ecuación de continuidad (fluido ideal)  
 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ , 7
- Ecuación de Euler (con gravedad)  
 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}(p) + \mathbf{g}$ , 8
- Ecuación de Euler (sólo velocidad)  
 $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v})$ , 9
- Ecuación de Euler (termodinámica)  
 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad}(w)$ , 9
- Ecuación de Euler (versión termodinámica)  
 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = -\mathbf{grad} w$ , 9
- Ecuación de Euler  
 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}(p)$ , 8

- Ecuación de Laplace  $\Delta \phi = \nabla^2 \phi = 0$  (para el potencial  $\phi$ ; flujo potencial de fluido incompresible), 27
- Ecuación de Navier-Stokes  
 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$ , 47
- Elemento de superficie  $d\mathbf{f}$ , 6
- Energía interna por unidad de masa  $\epsilon$ , 14
- Estela laminar, 63
- Estela turbulenta, 90

## F

- Fenómeno de separación, 90
- Fluido ideal, 8
- Flujo bidimensional, 28
- Flujo de masa  $Q$ , 29
- Flujo estacionario, 13
- Flujo irrotacional, 21
- Flujo plano, 28
- Flujo potencial, 21
- Flujo rotacional, 21
- Flujos semejantes, 57
- Fórmula de Poiseuille, 54
- Fórmula de Stokes  $F = 6\pi R\eta u$ , 62
- Fuerza de arrastre, 34
- Fuerza de sustentación, 34, 65
- Función de corriente  $\psi$ , 28

## L

- Ley de conservación de la circulación  
 $\oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{constante}$ , 20
- Ley de Kolmogorov y Obukhov  $v_\lambda \sim (\epsilon \lambda)^{\frac{1}{3}}$ , 84
- Ley de Loytsianski  
 $\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' r^2 dV' = \text{constante}$ , 96

Ley de semejanza, 57  
 Línea de corriente, 13  
 Línea de separación, 90

## M

Movimiento adiabático de un fluido ideal

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(s) = 0, 8$$

Movimiento isoentrópico, 9

## N

Número de Froude  $F = \frac{u^2}{lg}$ , 57  
 Número de Reynolds crítico  $R_{cr}$ , 77  
 Número de Reynolds  $R = \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho ul}{\eta}$ , 56

## O

Ondas de gravedad, 36  
 Ondas largas, 40

## P

Paradoja d'Alambert, 35  
 Parte fluctuante de la velocidad  
 $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , 80  
 Potencial complejo  $w = \phi + i\psi$ , 30  
 Potencial de velocidad  $\phi$ , 25  
 Profundidad de penetración, 70  
 Punto de estancamiento, 27

## R

Resistencia de onda, 35

## T

Tensor de masas asociadas  $m_{ik}$ , 34  
 Tensor de tensiones de la viscosidad  $\sigma'_{ik}$ , 45  
 Tensor de tensiones  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ , 45  
 Tensor densidad de flujo de impulso  
 $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ , 17  
 Teorema de Joukowski  $F_y = -\rho U \int \Gamma dz$ , 94  
 Teorema de Kelvin  $\oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{constante}$ , 20  
 Turbulencia totalmente desarrollada, 79

## V

Velocidad compleja  $\frac{dw}{dz}$ , 30  
 Velocidad media, 80  
 Viscosidad cinemática  $\nu$ , 47  
 Viscosidad dinámica  $\eta$ , 47  
 Viscosidad turbulenta  $\nu_{turb}$ , 82  
 Vorticidad  $\omega = \mathbf{rot} \mathbf{v}$ , 20

## Fluidos Ideales

### Conceptos previos

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) se denomina *dinámica de fluidos*. Los fenómenos considerados en dinámica de fluidos son macroscópicos, pues un fluido se considera medio continuo. Por tanto, cuando se habla de elemento de volumen pequeño, se considera que son pequeños en relación con el volumen del sistema pero grandes comparados con la distancia entre las moléculas. En este sentido interpretamos las expresiones *partícula o punto en un fluido*.

La descripción matemática del estado de un fluido móvil se efectúa con funciones que dan la **distribución de velocidad** del fluido  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  y *dos magnitudes termodinámicas cualesquiera* que pertenezcan al fluido, como por ejemplo la presión  $p(x, y, z, t)$  y la densidad  $\rho(x, y, z, t)$ . Todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dadas los valores de **dos** cualesquiera de ellas junto con la **ecuación de estado**, es decir, las tres componentes de la velocidad  $\mathbf{v}$ , la presión  $p$  y la densidad  $\rho$  (ver esquema 1).

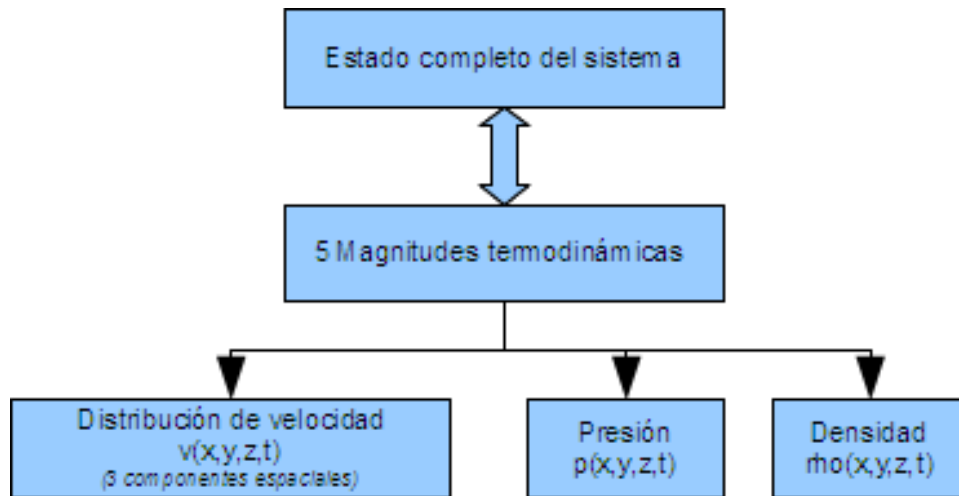


FIGURA 1. Esquema básico

En general todas las magnitudes son funciones de las coordenadas espaciales y del tiempo. Cuando especificamos, por ejemplo, la velocidad del fluido en un punto

(y en un instante determinado), nos referimos a la velocidad del fluido en *ese punto*, y no a la velocidad de partículas fijas del fluido.

### 1.1. Ecuación de continuidad

Empezamos con la deducción de la ecuación de la conservación de la materia.

Consideramos un volumen  $V_0$  del espacio. La masa del fluido contenida en ese volumen es

$$\int_{V_0} \rho dV$$

La masa de fluido que circula por unidad de tiempo a través de un elemento de superficie  $d\mathbf{f}$  es

$$\frac{dm}{dt dS} = \rho \frac{dV}{dt dS} = \rho \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{f} dS}{dS} = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

El módulo del vector  $d\mathbf{f}$  es igual al área del elemento de superficie y su dirección es normal a la superficie. Por convenio,  $d\mathbf{f}$  se considera positivo si el fluido está saliendo del volumen, y negativo si es hacia el interior. La masa total que sale del volumen  $V_0$  en una unidad de tiempo es

$$(1.1.1) \quad \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

donde la integración se realiza sobre toda la superficie que encierra  $V_0$ . Por otro lado, la disminución de fluido en el volumen  $V_0$  por unidad de tiempo es

$$(1.1.2) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$$

Por lo que igualando las ecuaciones (1.1.1) y (1.1.2) tenemos:

$$(1.1.3) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

Ahora la ecuación (1.1.3) se puede modificar usando el teorema de Green, convirtiendo la integral de superficie en una integral de volumen

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_{V_0} \text{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

Y la ecuación (1.1.3) queda:

$$\int_{V_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

Pero la ecuación anterior debe ser válida independientemente del volumen  $V_0$ , por lo que debe verificarse:

$$(1.1.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad}$$

La ecuación (1.1.4) se denomina ecuación de continuidad. Si desarrollamos  $\text{div}(\rho \mathbf{v})$  podemos re-escribir la ecuación de continuidad (1.1.4) como

$$(1.1.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\rho) = 0$$

El vector  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  se llama *densidad de flujo másico*. Su dirección es la del movimiento del fluido, mientras que su módulo es igual a la masa del fluido que circula por unidad de tiempo a través de una unidad de área perpendicular a la velocidad.

## 1.2. Ecuación de Euler

Consideramos un cierto volumen de fluido. La fuerza total que actúa sobre el mismo es la integral de la presión sobre la superficie que limita el volumen:

$$-\oint p d\mathbf{f}$$

Si transformamos la integral de superficie en una integral de volumen

$$-\oint p d\mathbf{f} = -\int \mathbf{grad}(p) dV$$

Es decir, que el fluido que rodea cualquier elemento de volumen  $dV$  ejerce sobre el mismo una fuerza  $-dV \mathbf{grad}(p)$ . O lo que es lo mismo, sobre la unidad de volumen del fluido actúa una fuerza  $-\mathbf{grad}(p)$ .

Ahora escribimos la ecuación de movimiento de un elemento de volumen del fluido igualando la fuerza  $-\mathbf{grad}(p)$  al producto de la masa por unidad de volumen  $\rho$  por la aceleración  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ :

$$(1.2.1) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad}(p)$$

La derivada  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  representa la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio. Esta derivada debe expresarse en función de magnitudes que se refieren a punto fijos del espacio. Esta velocidad se descompone en dos partes, la variación durante  $dt$  de la velocidad en un punto fijo del espacio y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) en dos puntos separados  $d\mathbf{r}$ , siendo  $d\mathbf{r}$  la distancia recorrida por la partícula de fluido durante el tiempo  $dt$ . La primera parte es  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt$ , en donde se considera que la derivada  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  corresponde a valores  $x, y, z$  constantes, es decir, a un punto determinado del espacio. La segunda parte es

$$dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$$

De manera que

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$$

o sea, dividiendo ambos miembros por  $dt$

$$(1.2.2) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.2.1) tenemos

$$(1.2.3) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}(p) \quad \text{Ecuación de Euler}$$

Esta es la ecuación del movimiento del fluido. Se denomina *ecuación de Euler* y es una de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos.

Si el fluido está en el interior de un campo gravitatorio, sobre cualquier unidad de volumen actúa una fuerza adicional  $\rho \mathbf{g}$ , donde  $\mathbf{g}$  es la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (1.2.1), de modo que la ecuación de Euler (1.2.3), teniendo en cuenta la gravedad, toma la forma:

$$(1.2.4) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}(p) + \mathbf{g}$$

Para obtener las ecuaciones del movimiento no se ha tenido en cuenta los procesos de disipación de energía que se producen en el fluido como consecuencia de la fricción o rozamiento interno (*viscosidad*) ni los debidos al intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido. Es decir, que estos resultados sólo son válidos cuando en el movimiento del fluido no es importante:

- la conductividad térmica
- la viscosidad

Un fluido en el que la conductividad térmica o la viscosidad **no** es importante se denomina **fluido ideal**.

Como suponemos que no hay intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido ideal (porque la conductividad térmica no es importante), el movimiento del fluido se considera *adiabático*. Por tanto, en el movimiento de un fluido ideal la entropía de cualquier partícula de fluido permanece constante a medida que la partícula se mueve por el espacio. Si llamamos  $s$  a la *entropía por unidad de masa*, la condición correspondiente al movimiento adiabático es:

$$(1.2.5) \quad \frac{ds}{dt} = 0$$

Como en el caso de la ecuación (1.2.1), la derivada total respecto al tiempo designa la variación respecto al tiempo de la entropía de una partícula de fluido cuando se mueve. La ecuación anterior (1.2.5) también puede escribirse como

$$(1.2.6) \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(s) = 0$$

La ecuación (1.2.6) describe el movimiento adiabático de un fluido ideal.



Usando la ecuación de continuidad 1.1.4 en la página 6 podemos escribirla como una *ecuación de continuidad* para la entropía:

$$(1.2.7) \quad \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0$$

El producto  $\rho s \mathbf{v}$  es la **densidad de flujo de entropía**.

Conviene recordar que la ecuación adiabática puede ponerse de forma mucho más sencilla. Si, como suele suceder, la entropía es constante a través del volumen del fluido en un instante inicial determinado, sigue manteniendo el mismo valor constante en todo instante durante cualquier movimiento subsiguiente del fluido. En este caso, podemos escribir la ecuación adiabática, simplemente, como

$$(1.2.8) \quad s = \text{constante}$$

que es lo que haremos normalmente en adelante. En esta situación se dice que el movimiento es **isoentrópico**.

**Deducción de la Ecuación de Euler (versión termodinámica).** Podemos utilizar que el movimiento es isoentrópico para poner la ecuación de movimiento 1.2.3 en la página anterior de forma ligeramente distinta. Para ello utilizaremos la relación termodinámica:

$$dw = Tds + Vdp$$

donde  $w^1$  es la *entalpía* por unidad de masa de fluido,  $V = 1/\rho$  el volumen específico y  $T$  la temperatura. Como la entropía  $s$  es constante, tenemos

$$dw = Vdp = \frac{dp}{\rho}$$

por tanto,  $\frac{\mathbf{grad} p}{\rho} = \mathbf{grad} w$ . De manera que la ecuación (1.2.3), ecuación de Euler, puede escribirse en la forma:

$$(1.2.9) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad}(w)$$

**Deducción de la Ecuación de Euler (versión sólo velocidad).** Otra forma en la que puede tomar la ecuación de Euler, en la que sólo interviene la velocidad, se obtiene a partir de una identidad del análisis vectorial:

$$\frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 = \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$$

de manera que podemos escribir la *versión termodinámica* de la Ecuación de Euler (1.2.9) como

$$(1.2.10) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = -\mathbf{grad} w$$

---

<sup>1</sup>Normalmente la entalpía se representa por la letra  $H$ , o  $h$ , si es por unidad de masa.

Tomando el rotacional a ambos lados de esta ecuación tenemos:

$$(1.2.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v})$$

de forma que en esta forma de la ecuación de Euler, sólo interviene la velocidad.

**Condiciones límite.** Las ecuaciones de movimiento deben ir acompañadas de las condiciones límite que deben satisfacerse en las superficies que limitan con el fluido.

En el caso de un fluido ideal, la condición límite expresa que el fluido no puede penetrar una superficie sólida. Esto es equivalente a que la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie debe anularse si dicha superficie está en reposo:

$$(1.2.12) \quad v_n = 0$$

En el caso general de una superficie móvil,  $v_n$  debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie.

En una superficie límite entre dos fluidos inmiscibles (que no pueden mezclarse), la condición es que la presión y la componente de velocidad normal a la superficie de separación debe ser la misma para ambos fluidos y cada una de estas componentes de velocidad debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de superficie.

PROBLEMA (pag 9)

### 1.3. Hidrostática

**Fluido en reposo en un campo gravitatorio uniforme (equilibrio mecánico) con  $\rho = \text{constante}$ .** En el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme, la ecuación de Euler 1.2.4 en la página 8 toma la forma

$$(1.3.1) \quad \mathbf{grad} p = \rho \mathbf{g}$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido. Si no existe ninguna fuerza externa, la ecuación de equilibrio es simplemente  $\mathbf{grad} p = 0$ , es decir,  $p = \text{constante}$ ; la presión es la misma en todos los puntos del fluido.

La ecuación (1.3.1) puede integrarse inmediatamente si la densidad del fluido puede suponerse constante a través de todo el volumen, es decir, si no existe compresión significativa del fluido bajo la acción de una fuerza exterior. Tomando el eje  $z$  vertical hacia arriba, tenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Con lo que obtenemos:

$$p = -\rho g z + \text{constante}$$

Si el fluido en reposo tiene una superficie libre a una altura  $h$ , en la cual se aplica una presión externa  $p_0$  para  $z = h$ , encontramos que la constante es  $p_0 + \rho gh$ , de manera que al final

$$(1.3.2) \quad p = p_0 + \rho g(h - z)$$

**Fluido en equilibrio mecánico y térmico (con  $\rho \neq \text{constante}$ ).** En general, en grandes masas de líquido y para un gas, la densidad  $\rho$  no puede considerarse constante (por ejemplo, en la atmósfera). Si el fluido está en equilibrio térmico además de en equilibrio mecánico, la temperatura es la misma en todos los puntos del fluido.

En este caso, la ecuación (1.3.1) puede integrarse del siguiente modo:

$$d\Phi = -s dT + V dp$$

en donde  $\Phi$  es el potencial termodinámico por unidad de masa <sup>2</sup>

(pag 11, 12)

$$(1.3.3) \quad \rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz}$$

#### 1.4. Caso en que la convección está ausente

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico. La ecuación (1.3.1), que es la condición para el equilibrio mecánico, puede satisfacerse aunque la temperatura no sea constante en el interior del fluido. En este caso la cuestión es si el equilibrio mecánico es estable. El equilibrio es estable sólo cuando se cumplen determinadas condiciones. Si no se dan, el equilibrio es inestable y se producen corrientes en el fluido que tienden a mezclarlo, de modo que se iguale la temperatura. A este movimiento se le denomina *convección*.

**La condición para que un equilibrio mecánico sea estable es que no haya convección.**

A continuación vamos a deducir esta condición.

Consideramos un elemento fluido a una altura  $z$  en un volumen específico  $V(p, s)$ , en donde  $p$  y  $s$  son la presión y entropía de equilibrio de la altura  $z$ . Suponemos que este fluido sufre un desplazamiento hacia arriba a lo largo de un pequeño intervalo  $\zeta$ ; su volumen específico se transforma entonces en  $V(p', s)$  en donde  $p'$  es la presión a la altura  $p + \zeta$ . Para que el equilibrio sea estable, es necesario -aunque no suficiente, en general- que la fuerza resultante sobre el elemento tienda a devolverlo a su posición original. Esto significa que el elemento debe ser más pesado que el fluido que desplaza en su nueva posición. El volumen específico

---

<sup>2</sup>Entalpía libre o potencial de Gibbs, que suele representarse como  $G$ .

de este último es  $V(p', s')$ , siendo  $s'$  la entropía de equilibrio a la altura  $z + \zeta$ . Así, la ecuación de estabilidad es

$$V(p', s') - V(p', s) > 0$$

Desarrollando esta diferencia en potencias de  $s - s' = \zeta \frac{ds}{dz}$ , obtenemos

$$(1.4.1) \quad \left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

Las fórmulas de la termodinámica dan

$$\left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

donde  $c_p$  es el calor específico a presión constante. Tanto  $c_p$  como  $T$  son positivos, de modo que (1.4.1) puede escribirse como

$$(1.4.2) \quad \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

La mayoría de las sustancias se dilatan al calentarse, es decir,  $(\partial V / \partial T)_p > 0$ . La condición de que no haya convección se reduce entonces a

$$(1.4.3) \quad \frac{ds}{dz} > 0$$

es decir, que la entropía aumente con la altura.

A partir de este resultado encontramos con facilidad la condición que debe ser satisfecha por el gradiente de temperaturas  $dT/dz$ . Desarrollando la derivada  $ds/dz$ , tenemos

$$\frac{ds}{dz} = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} > 0$$

Finalmente, sustituyendo la expresión dada por la ecuación 1.3.3 en la página anterior,  $\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V}$ , se obtiene:

$$(1.4.4) \quad \frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Puede producirse convección si la temperatura disminuye al aumentar la altura y el valor del gradiente de temperaturas excede a  $\frac{gT}{c_p V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ .

Si consideramos el equilibrio de una columna de un gas perfecto, entonces

$$\left( \frac{T}{V} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = 1$$

y la condición correspondiente al equilibrio estables es, simplemente:

$$(1.4.5) \quad \frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p}$$

### 1.5. Ecuación de Bernoulli

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se simplifican mucho en el caso de un flujo estacionario. Un *flujo estacionario* es aquel en el que la velocidad es constante en el tiempo en cada punto ocupado del fluido. En otras palabras,  $\mathbf{v}$  es función sólo de las coordenadas, de manera que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \iff \text{Fluido estacionario}$$

En esta situación la ecuación (1.2.10) se reduce a:

$$(1.5.1) \quad \frac{1}{2} \mathbf{grad}(v^2) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} w$$

El siguiente paso es introducir el concepto de *línea de corriente*. En una línea de corriente la tangente a ellas indica la dirección de la velocidad en ese punto. Una línea de corriente queda determinada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$(1.5.2) \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \iff \text{Línea de corriente}$$

En el caso de flujo estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo, con lo que coinciden con las trayectorias de las partículas fluidas.

*Si* flujo estacionario  $\Rightarrow$  líneas de corriente = trayectoria de las partículas

Si el flujo no es estacionario, la situación anterior no se verifica. Cuando el flujo no es estacionario, las tangentes a las líneas de corriente dan las direcciones de las velocidades de las partículas del fluido en diversos puntos del espacio en un instante dado, mientras que las tangentes a las trayectorias de las partículas indican las direcciones de las velocidades del fluido dadas en distintos instantes de tiempo.

La proyección del gradiente en cualquier dirección es la derivada en esa dirección. Formamos el producto escalar de la ecuación (1.5.1) con el vector unitario tangente a la línea de corriente en cada punto. A este vector unitario lo llamamos  $\mathbf{l}$ . Así, la proyección de  $\mathbf{grad} w$  es  $\partial w / \partial l$ . El vector  $\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$ , mientras que  $\mathbf{l}$  es paralelo a  $\mathbf{v}$ , de manera que  $\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) = 0$ . Así, a partir de la ecuación (1.5.1) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0$$

De manera que  $\frac{1}{2} v^2 + w$  es constante a lo largo de una línea de corriente:

$$(1.5.3) \quad \frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante}$$

En general, la constante toma diferentes valores para las distintas líneas de corriente. La ecuación (1.5.3) se denomina *Ecuación de Bernoulli*.

Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, la aceleración  $\mathbf{g}$  debida a la gravedad debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (1.5.1). Si suponemos que la dirección de la gravedad es en el eje  $z$ , entonces, el coseno del ángulo formado por las direcciones de  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{l}$  es igual a la derivada  $-dz/dl$ , de modo que la proyección de  $\mathbf{g}$  sobre  $\mathbf{l}$  es

$$-\mathbf{g} \frac{dz}{dl}$$

de manera que ahora:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{2} v^2 + w + gz \right) = 0$$

Por lo que la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente de un flujo en un campo gravitatorio es

$$(1.5.4) \quad \frac{1}{2} v^2 + w + gz = \text{constante}$$

## 1.6. Flujo de energía

Ahora nos concentramos en estudiar cómo varía la energía del fluido contenido dentro de un elemento cualquiera de volumen de fluido. La energía de la unidad de volumen de fluido es

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon$$

energía cinética y energía interna, donde  $\epsilon$  es la *energía interna por unidad de masa*. La variación de esta energía es

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right)$$

Para calcular esta expresión trataremos de forma independiente los dos términos. Empezando por el primero, podemos escribirlo como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial v^2}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho 2\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \end{aligned}$$

Y ahora, utilizando la ecuación de continuidad 1.1.4 en la página 6 y la ecuación de movimiento 1.2.3 en la página 8

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= \frac{1}{2} v^2 (-\text{div}(\rho \mathbf{v})) - \\ &\quad - \rho \mathbf{v} \cdot \left( (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p \right) \end{aligned}$$

El término  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}$  lo podemos transformar en la forma

$$\mathbf{grad} v^2 = \frac{dv^2}{d\mathbf{r}} = 2\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2$$

El término  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p$  lo transformamos usando la relación termodinámica

$$dw = Tds + \frac{1}{\rho} dp$$

Dividiendo por  $d\mathbf{r}$ , tenemos:

$$\frac{dw}{d\mathbf{r}} = T \frac{ds}{d\mathbf{r}} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{grad} p = \rho \mathbf{grad} w - \rho T \mathbf{grad} s$$

Si utilizamos estos dos resultados,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \\ &\quad -\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} v^2 - \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{grad} w - \rho T \mathbf{grad} s) = \\ &= -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \\ &\quad -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s \end{aligned}$$

A continuación nos ocupamos de la variación temporal de la energía interna de la unidad de volumen de fluido,  $\partial(\rho\epsilon)/\partial t$ . Para ello, empezamos utilizando la relación termodinámica:

$$d\epsilon = Tds - pdV$$

De manera

$$d(\rho\epsilon) = \epsilon d\rho + \rho d\epsilon = w d\rho + \rho T ds - \rho p dV$$

(però no hi ha variació de volum)

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = w \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}$$

Ahora utilizamos la ecuación de continuidad ( 1.1.4 en la página 6) y el hecho de que el fluido es adiabático ( 1.2.6 en la página 8) tenemos

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = w (-\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})) + \rho T (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(s))$$

Al final del día, combinando los dos resultados que hemos encontrado por separado, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\epsilon \right) &= -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s - \\ &\quad - w \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(s) = \\ &= -\left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \end{aligned}$$

O sea, que finalmente,

$$(1.6.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = -\text{div} \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \right]$$

Para determinar el significado de esta ecuación, la integramos respecto a un determinado volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) dV = - \int \text{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \right) dV$$

Convertimos la integral de volumen del segundo término en una integral de superficie:

$$(1.6.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) dV = - \oint \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \cdot d\mathbf{f}$$

El primer miembro es la variación por unidad de tiempo de la energía del fluido en un volumen determinado. El segundo miembro es la cantidad de energía que fluye hacia el exterior del volumen por unidad de tiempo. Por tanto, la expresión

$$(1.6.3) \quad \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \quad \text{Densidad de Flujo de Energía}$$

se denomina *vector densidad de flujo de energía*. Su módulo es la cantidad de energía que pasa por unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular a la velocidad.

La expresión (1.6.3) muestra que cualquier unidad de masa del fluido lleva consigo en su movimiento una cantidad de energía  $w + \frac{1}{2} v^2$ . El hecho de que en la fórmula aparezca la entalpía  $w$  y no la energía  $\epsilon$  tiene un significado físico sencillo. Haciendo  $w = \epsilon + p/\rho$  podemos escribir el flujo de energía a través de una superficie cerrada en la forma:

$$- \oint \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \epsilon \right) \cdot d\mathbf{f} - \oint p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

El primer término es la energía (cinética más interna) transportada por la masa de fluido a través de la superficie por unidad de tiempo. El segundo término es el trabajo realizado por la fuerza de presión sobre el fluido dentro de la superficie.

### 1.7. Flujo de impulso o cantidad de movimiento

Vamos a seguir un razonamiento similar al utilizado en la sección anterior para determinar el flujo de cantidad de movimiento por unidad de volumen.

La cantidad de movimiento por unidad de volumen es  $\rho \mathbf{v}$ , de manera que su variación temporal será  $\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t}$ .

En lo que resta de sección utilizaremos notación tensorial para escribir las ecuaciones.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Los sufijos  $i, j, \dots$  toman valores 1, 2, 3, correspondientes a las componentes  $x, y, z$ .



$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Para el primer término, utilizamos la ecuación de continuidad, con la divergencia escrita en forma tensorial

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}$$

De manera que

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = -v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Para el segundo término en el miembro de la derecha, utilizamos la ecuación de Euler, también en forma tensorial:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Con lo que tenemos

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = -v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} - \rho v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Pero los dos primeros términos son la derivada del producto  $\rho v_i v_k$ , así que

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Reescribimos

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (p \delta_{ik})$$

De manera que al final

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial}{\partial x_k} (p \delta_{ik} + \rho v_i v_k)$$

con lo que podemos definir el tensor simétrico  $\Pi_{ik}$  y

$$(1.7.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

con  $\Pi_{ik}$

$$(1.7.2) \quad \Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

Para obtener el significado físico del tensor  $\Pi_{ik}$  integramos la ecuación (1.7.1) respecto a un volumen cualquiera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV$$

---

Las sumas del tipo  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_i A_i B_i = A_i B_i$  se escriben omitiendo el signo  $\sum$ , sobreentendiéndolo cuando aparecen índices repetidos.

El segundo miembro lo convertimos en una integral de superficie aplicando la fórmula de Green

$$(1.7.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = - \oint \Pi_{ik} df_k$$

El primer miembro es la variación respecto al tiempo de la componente  $i$  del momento contenido en el volumen considerado. La integral del segundo miembro es la cantidad de impulso que fluye hacia fuera a través de la superficie por unidad de tiempo. Entonces  $\Pi_{ij} df_j$  es la componente  $i$  del impulso que fluye a través del elemento de superficie  $df$ . Si escribimos  $df_k = n_k df$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario (que apunta hacia fuera) normal a la superficie, entonces  $\Pi_{ij} n_j$  es el flujo de la componente  $i$  del impulso a través de la superficie unidad.

Además, de acuerdo con (1.7.2)

$$\Pi_{ij} n_j = p n_i + \rho v_i v_j n_j$$

que de forma vectorial se escribe

$$(1.7.4) \quad p \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$$

Así,  $\Pi_{ij}$  es la componente  $i$  de la cantidad de impulso que fluye en la unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular al eje  $x_j$ . El tensor  $\Pi_{ij}$  se denomina *tensor densidad de flujo de impulso*.

Si el flujo de energía -que es un escalar- queda determinado por un vector, el flujo de impulso -que es un vector- queda determinado por un tensor de orden dos.

El vector de la expresión (1.7.4) da el flujo de impulso en la dirección de  $\mathbf{n}$ , es decir, a través de una superficie perpendicular a  $\mathbf{n}$ . Si tomamos  $\mathbf{n}$  paralelo a la velocidad del fluido, sólo la componente longitudinal del impulso se ve transportada en dicha dirección, y su densidad de flujo es  $p + \rho v^2$ . En una dirección perpendicular a la velocidad sólo se transporta la componente transversal (relativa a  $\mathbf{v}$ ) del impulso, siendo su densidad de flujo exactamente  $p$ .

## 1.8. Conservación de la circulación (G)

La integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

extendida a lo largo de un contorno cerrado se denomina *circulación de la velocidad* a lo largo de ese contorno.

Supongamos que tenemos un *contorno fluido*, es decir, un contorno cerrado formado por partículas del fluido. Al pasar el tiempo, las partículas se mueven (y el contorno con ellas). Queremos averiguar qué pasa con la circulación de la velocidad,

es decir, calcularemos

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Calculamos la derivada total porque al pasar el tiempo, las partículas del fluido se mueven en el espacio y cambia su velocidad (no tenemos un contorno fijo en el espacio).

Para evitar confusiones, temporalmente designamos la derivada respecto a las coordenadas espaciales con el símbolo  $\delta$ . También notamos que  $d\mathbf{l}$  puede escribirse como la diferencia de dos radios vectores que apuntan a los extremos de  $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1 = \delta\mathbf{r}$ , de manera que escribimos

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r}$$

Ahora, al derivar esta expresión, tenemos en cuenta que no sólo varía la velocidad de las partículas del contorno fluido, sino también la posición de las mismas (es decir, que el contorno cambia). Por ello, derivamos  $\mathbf{v}$  y  $\delta\mathbf{r}$

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}$$

Nos concentramos en el segundo término del miembro de la derecha. La velocidad es precisamente la derivada temporal de  $d\mathbf{r}$

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} = \delta \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

Con lo que

$$\oint \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \oint \delta \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

Pero la derivada sobre un contorno cerrado de una diferencia total es cero, por lo que este segundo término se anula.

Así que la variación de la circulación, de momento, queda:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r}$$

El siguiente paso es substituir la aceleración  $d\mathbf{v}/dt$  por la expresión de la ecuación de Euler 1.2.9 en la página 9:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} = - \oint \mathbf{grad} w \cdot \delta\mathbf{r}$$

Pero si ahora utilizamos la fórmula de Stokes<sup>4</sup> entonces

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = - \oint \mathbf{rot} (\mathbf{grad} w) \cdot d\mathbf{f}$$

---

<sup>4</sup>  $\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

Pero resulta que  $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} w) \equiv 0$ <sup>5</sup>, de manera que finalmente

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$$

O lo que es lo mismo

$$(1.8.1) \quad \oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \text{constante}$$

Es decir, para un fluido ideal, la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno fluido cerrado es constante en el tiempo. Este resultado se conoce como *Teorema de Kelvin* o *Ley de conservación de la circulación*.

Como para obtener el resultado hemos utilizado la ecuación de Euler (1.2.9 en la página 9) y en ella interviene la hipótesis de que el flujo es isentrópico, este resultado no es válido para fluidos que no sean isentrópicos.

### 1.9. Flujo potencial

A partir de la ley de conservación de la circulación podemos obtener un resultado importante. Primero, suponemos que el flujo es estacionario, es decir, que la velocidad es constante en todo punto del fluido ( $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ ). Consideramos una línea de corriente de la cual sabemos que la vorticidad  $\omega \equiv \mathbf{rot} \mathbf{v}$  es cero en un punto determinado. Dibujamos un contorno cerrado arbitrario infinitamente pequeño que rodee la línea de corriente en ese punto. Según el teorema de Stokes, la circulación de la velocidad será:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante} = \dots \\ \int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \text{ Teorema de Stokes} \\ \dots &= \int_S (\mathbf{rot} \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{f} \end{aligned}$$

donde  $d\mathbf{f}$  es el elemento de área encerrado por el contorno.

Este contorno, como hemos indicado antes, está en un punto donde  $\omega = 0 = \mathbf{rot} \mathbf{v}$ , de manera que la circulación

$$\Gamma = \text{constante} = 0$$

Al pasar el tiempo, el contorno se mueve con el fluido, pero siempre permanece infinitamente pequeño y rodeando la misma línea de corriente. Como la circulación debe permanecer constante, es decir, 0, entonces  $\omega$  debe ser cero en todos los puntos de la línea de corriente.

---

<sup>5</sup>Este resultado también es válido para un fluido ideal en un campo gravitatorio, ya que  $\mathbf{rot} \mathbf{g} \equiv 0$ .

(Flujo estacionario) Si  $\omega = 0$  en  $\mathbf{r}_0 \Rightarrow \omega = 0 \forall \mathbf{r} \in \text{línea de corriente}$

Si el flujo **no** es estacionario, el resultado sigue siendo válido, pero considerando trayectorias de partículas, en vez de líneas de corriente (ya que en flujos no estacionarios las trayectorias y las líneas de corriente no coinciden).

(Flujo NO estacionario) Si  $\omega = 0$  en  $\mathbf{r}_0 \Rightarrow \omega = 0 \forall \mathbf{r} \in \text{trayectoria}$

Consideramos que un flujo estacionario está pasando alrededor de un cuerpo determinado. El flujo incidente suponemos que es uniforme en el infinito, es decir, que  $\mathbf{v} = \text{constante}$ . Entonces,  $\omega = \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$  en **todas** las líneas de corriente (en el infinito). Pero entonces  $\omega = 0$  a lo largo de la totalidad cada línea de corriente, es decir, en todo el espacio.

Un flujo para el que  $\omega = 0$  en todo el espacio se denomina *flujo potencial* o *flujo irrotacional*. Un flujo para el que  $\omega \neq 0$  en todos los puntos se denomina *flujo rotacional*.

$$\begin{aligned}\omega = 0 \forall \mathbf{r} &\iff \text{Flujo potencial o irrotacional} \\ \omega \neq 0 &\iff \text{Flujo rotacional}\end{aligned}$$

Llegamos a la conclusión de que, si junto a un cuerpo cualquiera pasa un flujo estacionario y uniforme, en el infinito debe ser un flujo potencial. Podemos llegar al mismo resultado a partir de la ley de conservación de la circulación de la velocidad. Supongamos que en un instante dado tenemos un flujo potencial en todo el volumen del fluido. Entonces, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno cualquiera del fluido es nula. Según el Teorema de Kelvin o conservación de la circulación de la velocidad (1.8.1 en la página anterior) esta conclusión será válida en cualquier instante futuro. Es decir, si tenemos un flujo potencial en un instante dado, entonces lo será en todo momento. En particular, cualquier flujo en el que el fluido esté inicialmente en reposo debe ser un fluido potencial. Esto está de acuerdo con el hecho de que si  $\omega = \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ , la ecuación de Euler 1.2.11 en la página 10 se satisface idénticamente.

El problema es que todos los estos resultados tienen una validez limitada. Estrictamente hablando, la prueba de que  $\omega = 0$  a lo largo de una línea de corriente es inválida para una línea que esté en la superficie de un sólido junto al que circula un flujo, ya que la presencia de esta superficie imposibilita dibujar un contorno cerrado que rodee la línea de corriente.

Las ecuaciones de movimiento de un fluido ideal admiten soluciones en las que se produce una *separación* en la superficie del cuerpo: las líneas de corriente que ha seguido la superficie del cuerpo durante cierta distancia empiezan a separarse de ella

y continúan dentro del fluido. El esquema del flujo resultante está caracterizado por la presencia de una superficie de discontinuidad tangencial que sale del cuerpo. En esta superficie la velocidad (que es tangencial en todas partes en las dos superficies) tiene una discontinuidad, es decir, en esta superficie una capa de fluido se *desliza* sobre otra. La figura 1 muestra una superficie de discontinuidad que separa el fluido que está moviéndose en una región de otra con fluido estacionario detrás del cuerpo. Desde el punto de vista matemático, la discontinuidad en la componente tangencial

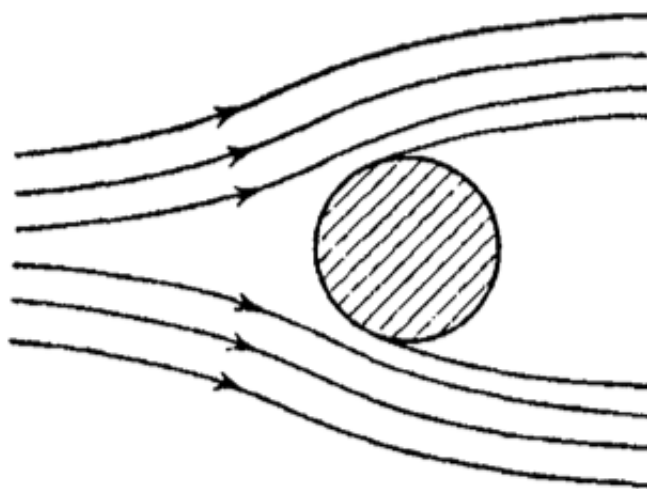


FIGURA 2. Discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad.

corresponde a una superficie en la cual la velocidad es nula. Cuando se incluyen dichos flujos discontinuos, la solución de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal no es única: además del flujo continuo admiten también un número infinito de soluciones que poseen superficies de discontinuidad tangencial partiendo desde cualquier línea prescrita en la superficie del cuerpo por el cual está circulando el flujo en cuestión. Sin embargo, estas soluciones discontinuas no tienen significado físico, pues son inestables y el flujo se convertiría en turbulento.

El problema físico real del flujo que pasa a lo largo de los cuerpos tiene una solución única. El problema es que los fluidos ideales no existen; cualquier fluido tiene una cierta viscosidad, aunque sea muy pequeña. Esta viscosidad, aunque no tenga efecto sobre el movimiento de la mayor parte del fluido, sus efectos sobre una capa delgada de fluido junto al cuerpo son importantes. Las propiedades del flujo en esta *capa límite* deciden la selección de una de las infinitas soluciones de las ecuaciones de movimiento correspondientes a un fluido ideal. Así, en el caso

general de un flujo que rodea a un cuerpo de forma arbitraria, deben rechazarse las soluciones de separación; si se produjese la separación daría como resultado la turbulencia.

El estudio de las soluciones de las ecuaciones de movimiento para un flujo potencial estacionario continuo que circula junto a un cuerpo de forma arbitraria sólo es interesante para cuerpos de *formas especiales* (*aerodinámicos*). En el resto de casos, el flujo real apenas tiene relación con el flujo potencial.

Para las formas aerodinámicas el flujo real y el potencial son muy parecidos, excepto en una capa delgada de fluido en la superficie del cuerpo y en una *estela* relativamente estrecha detrás del mismo.

Otro caso importante de flujo potencial se presenta cuando existen oscilaciones pequeñas de un cuerpo inmerso en un fluido. Puede demostrarse que si la amplitud  $a$  de las oscilaciones son pequeñas en comparación con la dimensión  $l$  del cuerpo ( $a \ll l$ ), el flujo que circula junto al cuerpo será un flujo potencial.

Para demostrarlo estimaremos el orden de magnitud de los diversos términos de la ecuación de Euler.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} w$$

La velocidad  $\mathbf{v}$  varía apreciablemente (en una cantidad del mismo orden que la velocidad  $\mathbf{u}$  del cuerpo oscilante) a lo largo de una distancia del orden de la dimensión  $l$  del cuerpo. De aquí que las derivadas de  $\mathbf{v}$  respecto a las coordenadas son del orden de  $u/l$ . El orden de magnitud de la propia  $\mathbf{v}$  (a distancias relativamente pequeños del cuerpo) queda determinado por el valor de  $\mathbf{u}$ . Así, tenemos que  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \sim \frac{u^2}{l}$ . La derivada  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  es del orden de  $\omega u$ , siendo  $\omega$  la frecuencia de las oscilaciones. Como  $\omega \sim u/a$ , tenemos que  $\partial \mathbf{v} / \partial t \sim u^2/a$ . A partir de la desigualdad  $a \ll l$  tenemos que  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  es pequeño comparado con  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  y puede despreciarse, de modo que la ecuación de movimiento del fluido se reduce a  $\partial \mathbf{v} / \partial t = -\mathbf{grad} w$ . Tomando el rotacional en ambos miembros, obtenemos  $\partial (\mathbf{rot} \mathbf{v}) / \partial t = 0$  y por tanto  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \text{constante}$ . Sin embargo, en el movimiento oscilante, el promedio temporal de la velocidad es cero, y por tanto  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \text{constante}$  implica que  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ . Por tanto, el movimiento de un fluido que realiza pequeñas

oscilaciones es un flujo potencial en primera aproximación.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} &= -\mathbf{grad} w \\
 \mathbf{u} &= \text{velocidad del cuerpo oscilante} \\
 l &= \text{dimensiones del cuerpo} \\
 a &= \text{amplitud de las oscilaciones} \\
 \omega &= \text{frecuencia de las oscilaciones} \\
 \downarrow & \text{ (Trabajando con los órdenes de magnitud)} \\
 \mathbf{v} &\sim \mathbf{u} \\
 \mathbf{grad} \mathbf{v} &\sim \frac{\mathbf{u}}{l} \\
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &\sim \omega \mathbf{u} \\
 \omega &\sim \frac{\mathbf{u}}{a} \\
 \downarrow \\
 \frac{u^2}{a} + \frac{u^2}{l} &\simeq -\mathbf{grad} w \\
 \downarrow & (a \ll l) \\
 \frac{u^2}{a} &\simeq -\mathbf{grad} w \\
 \downarrow & \text{ (Volviendo a las ecuaciones)} \\
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &\simeq -\mathbf{grad} w \\
 \downarrow & \text{ (Tomamos rotacionales)} \\
 \frac{\partial \mathbf{rot} \mathbf{v}}{\partial t} &\simeq \mathbf{rot} (-\mathbf{grad} w) = 0 \\
 \mathbf{rot} \mathbf{v} &\simeq \text{constante}
 \end{aligned}$$

A continuación obtendremos algunas propiedades del flujo potencial.

En la deducción de la ley de conservación de la circulación de la velocidad utilizamos la hipótesis de que el flujo era isentrópico.

Si el flujo no es isentrópico, la ley de conservación no se verifica, de manera que aunque tengamos un flujo potencial en un instante determinado, la vorticidad no será nula en los instantes siguientes. Es decir, que sólo el flujo isentrópico puede ser potencial.

Utilizando el teorema de Stokes:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$



En el flujo potencial, la circulación de la velocidad alrededor de cualquier contorno cerrado es nula:

$$(1.9.1) \quad \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

De esto se deduce que no pueden existir líneas de corriente cerradas en el flujo potencial. Como la dirección de una línea de corriente es en todos los puntos la dirección de la velocidad, la circulación a lo largo de dicho línea no puede ser nunca nula.

En el movimiento rotacional la circulación de la velocidad es, en general, no nula. En este caso pueden existir líneas de corriente cerradas, aunque el hecho de que haya líneas de corriente cerradas **no** es una propiedad del movimiento rotacional.

Como cualquier campo vectorial que tenga un rotacional igual a cero, la velocidad en el flujo potencial puede expresarse como el gradiente de un escalar.

$$\text{Flujo potencial} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \rightarrow \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{rot} (\mathbf{grad} \mathbf{v}) = 0$$

$$(1.9.2) \quad \mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$$

A este escalar se le denomina *potencial de velocidad*  $\phi$ .

Si escribimos la ecuación de Euler en la forma expresada en 1.2.10 en la página 9

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} w$$

y sustituyendo  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$  tenemos

$$\mathbf{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0$$

de donde

$$(1.9.3) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w = f(t)$$

con  $f(t)$  una función arbitraria del tiempo. Esta ecuación es una primera integral de las ecuaciones del flujo potencial. La función  $f(t)$  de la ecuación (1.9.3) puede ponerse igual a cero sin pérdida de generalidad. Como la velocidad es la derivada espacial de  $\phi$ , podemos sumar a  $\phi$  cualquier función del tiempo, cambiando  $\phi$  por  $\phi + \int f(t) dt$ , seguimos obteniendo cero en el segundo miembro de (1.9.3).

En el caso del flujo estacionario tenemos (suponiendo que el potencial  $\phi$  es independiente del tiempo)  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ,  $f(t) = \text{constante}$  y (1.9.3) se transforma en la ecuación de Bernoulli:

$$(1.9.4) \quad \frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante}$$

Existe una diferencia importante entre la ecuación de Bernoulli para el flujo potencial y la correspondiente para un flujo general (no potencial). En el caso general, la constante es diferente para las distintas líneas de corriente, mientras que en el flujo potencial es la misma constante para todo el fluido.

$$\text{Flujo general} \rightarrow \frac{1}{2}v^2 + w = c_i \quad (\text{una } c_i \text{ para cada línea de corriente})$$

$$\text{Flujo potencial} \rightarrow \frac{1}{2}v^2 + w = C \quad (\forall \text{ líneas de corriente del fluido})$$

Esto resalta la importancia de la ecuación de Bernoulli en el estudio del flujo potencial.

### 1.10. Fluidos incompresibles

En un gran número de casos el flujo de fluidos (y gases) se puede suponer que la densidad es invariable en el tiempo (a lo largo del movimiento) y en el espacio (en todo el fluido). Es decir, no existe compresión o dilatación apreciable del fluido. En este caso hablamos de un *fluido incompresible*.

$$\text{Fluido incompresible} \iff \rho = \text{constante}$$

En este caso la ecuación de Euler no varía de forma, pero podemos incluir  $\rho$  en el operador gradiente de la ecuación 1.2.4 en la página 8.

$$(1.10.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{g}$$

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible se simplifica

$$(1.10.2) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Como  $\rho$  deja de ser una función desconocida, el sistema fundamental de ecuaciones de la dinámica de fluidos incompresible puede considerarse como un conjunto de ecuaciones en el que sólo interviene la velocidad. Por ejemplo, la ecuación de continuidad (1.10.2) y la ecuación de Euler en función sólo de la velocidad (ecuación 1.2.11 en la página 10)

$$(1.10.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot } \mathbf{v}) = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{rot } \mathbf{v})$$

La ecuación de Bernoulli para un fluido incompresible también se simplifica. La ecuación (1.10.1) difiere de la ecuación general 1.2.9 en la página 9 en que hay que escribir  $\mathbf{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right)$  en lugar de  $\mathbf{grad} w$ . Así podemos escribir directamente la ecuación de Bernoulli cambiando la entalpía  $w$  por  $\frac{p}{\rho}$ .

$$(1.10.4) \quad \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante}$$

En el caso de un fluido incompresible, podemos escribir  $\frac{p}{\rho}$  en lugar de  $w$  en la expresión (1.6.3) que nos da el flujo de energía, lo que resulta en

$$(1.10.5) \quad \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right)$$

A partir de la relación termodinámica sabemos que  $d\epsilon = Tds - pdV$  corresponde a la variación de la energía interna. Para  $s = \text{constante}$  y  $V = \frac{1}{\rho} = \text{constante}$  resulta  $d\epsilon = 0$ , es decir,  $\epsilon = \text{constante}$ . Como los términos constantes en la energía no tienen importancia, podemos omitir  $\epsilon$  en  $w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$ .

En el caso de un flujo potencial de un fluido incompresible, las ecuaciones se simplifican todavía más. La ecuación (1.10.3) se verifica idénticamente, pues en el flujo potencial  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ . La ecuación de continuidad (1.10.2), al sustituir  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$  se transforma en

$$(1.10.6) \quad \Delta \phi = \nabla^2 \phi = 0$$

es decir, en la ecuación de Laplace para el potencial  $\phi$ . Esta ecuación debe complementarse con las condiciones límite en la superficie donde el fluido se encuentra con cuerpos sólidos. En las superficies sólidas fijas la componente de la velocidad del fluido  $v_n$  normal a la superficie debe ser nula, mientras que en superficies móviles debe ser igual a la componente normal de la velocidad de la superficie (que es una función del tiempo). Pero la velocidad  $v_n$  es la derivada normal del potencial  $\phi$ ,  $v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ . Entonces, las condiciones límite generales son que  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  es una función determinada de las coordenadas y el tiempo en los límites del fluido.

En el flujo potencial la velocidad está relacionada con la presión mediante la ecuación (1.9.3). En un fluido incompresible podemos sustituir  $w$  por  $\frac{p}{\rho}$

$$(1.10.7) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

Ahora obtenemos otra importante propiedad del flujo potencial de un fluido incompresible. Suponemos que un cuerpo sólido se está moviendo a través de un fluido. Si el resultado es un flujo potencial, en un instante cualquiera depende sólo de la velocidad del cuerpo móvil en dicho instante y no, por ejemplo, de su aceleración. La ecuación de Laplace (1.10.6) no contiene explícitamente el tiempo, el cual entra en la solución sólo a través de las condiciones límite y éstas sólo contienen la velocidad del cuerpo móvil.

A partir de la ecuación de Bernoulli  $\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{constante}$  vemos que el flujo estacionario de un fluido incompresible (que no está en un campo gravitatorio) la presión más alta se presenta en puntos donde la velocidad es nula. Este punto normalmente se presenta en la superficie de un cuerpo a lo largo del cual se está moviendo el fluido (el punto  $O$  en la figura (3)) y se denomina *punto de estancamiento*.

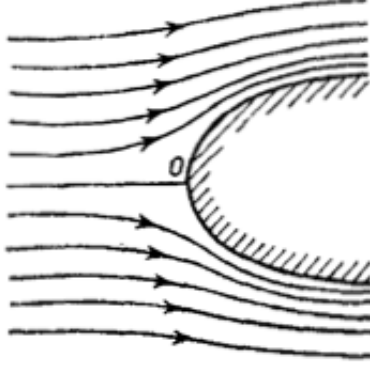


FIGURA 3. Punto de estancamiento

Si  $\mathbf{u}$  es la velocidad de la corriente incidente (es decir, la velocidad del fluido en el infinito) y  $p_0$  es la presión en el infinito, la presión en el punto de estancamiento es:

$$(1.10.8) \quad p_{max} = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2$$

Si la distribución de velocidades en un fluido móvil depende sólo de dos coordenadas, por ejemplo  $x$  e  $y$ , y la velocidad es en todas partes paralela al plano  $xy$  entonces se dice que el *flujo es bidimensional* o *flujo plano*.

Para resolver problemas de flujo bidimensional a veces es conveniente expresar la velocidad en función de lo que se denomina *función de corriente*  $\psi$ . A partir de la ecuación de continuidad  $\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$  vemos que las ecuaciones de la velocidad pueden escribirse como derivadas de cierta función  $\psi(x, y)$  denominada *función de corriente*:

$$(1.10.9) \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La ecuación de continuidad, así, se satisface automáticamente. Para resolver el problema del flujo plano ahora vemos qué condiciones debe satisfacer  $\psi$  introduciendo (1.10.9) en la ecuación de Euler (1.10.3)<sup>6</sup>

$$(1.10.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = 0$$

<sup>6</sup>A continuación obtenemos el primer término de la ecuación de Euler para la función de corriente  $\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{k} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) = \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi$$

El resto de términos se obtienen del mismo modo.

Si conocemos la función de corriente podemos determinar inmediatamente la forma de las líneas de corriente en el caso del flujo estacionario. La ecuación diferencial de las líneas de corriente (en el flujo bidimensional) es

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \rightarrow v_y dx - v_x dy = 0$$

Esta ecuación expresa el hecho de que la dirección de la tangente a una línea de corriente es la dirección de la velocidad. Sustituyendo la velocidad en función de la función de corriente (1.10.9) tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0$$

de donde  $\psi = \text{constante}$ . Es decir, las líneas de corriente son la familia de curvas obtenida haciendo la función de corriente  $\psi(x, y)$  igual a una constante arbitraria.

Si dibujamos una curva entre dos puntos A y B en el plano  $xy$ , el flujo de masa  $Q$  a través de esta curva viene dada por la diferencia de los valores de la función de corriente en esos dos puntos, independientemente de la forma de la curva. Porque si  $v_n$  es la componente de la velocidad normal a la curva en un punto cualquiera, tenemos

$$Q = \rho \oint_A^B v_n dl = \rho \oint_A^B (-v_y dx + v_x dy) = \rho \oint_A^B d\psi$$

de manera que

$$(1.10.11) \quad Q = \rho (\psi_B - \psi_A)$$

Existen potentes métodos para resolver problemas de un flujo potencial bidimensional en el caso de un fluido incompresible que rodea a cuerpos de diversos perfiles en los que interviene la aplicación de la teoría de funciones de una variable compleja. La base de los métodos es la siguiente.

La función potencial y la corriente están relacionadas con las componentes de la velocidad por

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Estas relaciones entre las derivadas de  $\phi$  y  $\psi$  son, matemáticamente, las mismas que las condiciones de Cauchy-Riemann para que una expresión compleja

$$(1.10.12) \quad w = \phi + i\psi$$

sea una función analítica del argumento complejo  $z = x + iy$ . Esto significa que la función  $w(z)$  tiene en cada punto una derivada bien definida

$$(1.10.13) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_x - iv_y$$

La función  $w$  se denomina *potencial complejo* y  $\frac{dw}{dz}$  se llama *velocidad compleja*. El módulo y el argumento de esta última dan el módulo  $v$  de la velocidad y el ángulo  $\theta$  formado por la dirección de la velocidad con el eje  $x$ :

$$(1.10.14) \quad \frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta}$$

En una superficie sólida, alrededor de la cual tiene lugar el flujo, la velocidad debe estar dirigida sobre la tangente. Es decir, el contorno del perfil de la superficie debe ser una línea de corriente. O lo que es lo mismo,  $\psi = \text{constante}$  a lo largo de la misma. La constante puede considerarse como cero y entonces el problema del flujo que rodea un contorno determinado se reduce a la determinación de una función analítica  $w(z)$  que tome valores reales en el contorno. El enunciado del problema es más complicado cuando el fluido tiene una superficie libre.

La integral de una función analítica a lo largo de cualquier contorno cerrado  $C$  es  $2\pi i$  veces la suma de los residuos de la función en sus polos simples en el interior de  $C$ .

$$\oint w' dz = 2\pi i \sum_k A_k$$

donde  $A_k$  son los residuos de la velocidad compleja. También tenemos

$$\begin{aligned} \oint w' dz &= \oint (v_x - iv_y)(dx + idy) = \\ &= \oint (v_x dx + v_y dy) + i \oint (v_x dy - v_y dx) \end{aligned}$$

La parte real de esta expresión es precisamente la circulación de la velocidad  $\Gamma$  a lo largo del contorno  $C$ . La parte imaginaria, multiplicada por  $\rho$  es el flujo de masa que atraviesa  $C$ . Si no existen fuentes de fluido dentro del contorno, este flujo es cero y por tanto

$$(1.10.15) \quad \Gamma = 2\pi i \sum_k A_k$$

siendo en este caso todos los residuos  $A_k$  imaginarios puros.

Para acabar, consideramos **en qué condiciones se puede considerar un fluido como incompresible**. Cuando la presión varía adiabáticamente en  $\Delta p$ , la densidad varía en  $\Delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \Delta p$ . Sin embargo, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli,  $\Delta p$  es del orden de  $\rho v^2$  en flujo estacionario. De manera que  $\Delta \rho \sim \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \rho v^2$ . Más adelante se demostrará que la derivada  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s$  es el cuadrado de la velocidad de sonido  $c$  en el fluido, de modo que  $\Delta \rho \sim \frac{\rho v^2}{c^2}$ . El fluido puede considerarse incompresible si  $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$ .

$$\text{Fluido incompresible} \iff \frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$$

Una condición necesaria para que se cumpla ésto es que la velocidad del fluido sea pequeña comparada con la del sonido:

$$(1.10.16) \quad \text{Fluido incompresible (flujo estacionario)} \iff v \ll c$$

La condición (1.10.16) sólo es suficiente en flujo estacionario.

En un flujo no estacionario, debe cumplirse, además, otra condición. Sean  $\tau$  y  $l$  un tiempo y una longitud del orden de los tiempos y distancias en los que la velocidad del fluido sufre una variación significativa. Si son comparables los términos  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  y  $\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$  en la ecuación de Euler, encontramos, en términos de órdenes de magnitud,  $\frac{v}{\tau} \sim \frac{\Delta p}{l\rho}$  o  $\Delta p \sim \frac{l\rho v}{\tau}$ , y la variación correspondiente en  $\rho$  es  $\Delta \rho \sim \frac{l\rho v}{\tau c^2}$ . Comparando a continuación los términos  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  y  $\rho \operatorname{div} \mathbf{v}$  en la ecuación de continuidad, vemos que puede despreciarse la derivada  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  (es decir, puede suponerse que  $\rho$  es constante) si  $\frac{\Delta \rho}{\tau} \ll \frac{\rho v}{l}$ , o sea

$$(1.10.17) \quad \text{Fluido incompresible (flujo no estacionario)} \iff \tau \gg \frac{l}{c}$$

Si se satisfacen simultáneamente las condiciones (1.10.16) y (1.10.17) puede considerarse que un fluido es incompresible.

La condición (1.10.17) tiene un significado evidente: el tiempo  $\frac{l}{c}$  que emplea una señal sonora en recorrer la distancia  $l$  debe ser pequeño en comparación con el tiempo  $\tau$  durante el cual varía apreciablemente el flujo, de manera que la propagación de las interacciones en el fluido pueda considerarse como instantánea.

### 1.11. Fuerza de arrastre en un flujo potencial que rodea un cuerpo

Ahora consideramos el problema del flujo potencial de un fluido ideal incompresible que rodea un cuerpo sólido. Esto es equivalente a pensar que el fluido está en reposo y es el cuerpo el que se mueve a través de él. Lo único que tenemos que hacer para pasar de un problema a otro es cambiar a un sistema de coordenadas en las cuales el fluido está en reposo en el infinito. De hecho, a partir de ahora **siempre consideraremos que es el cuerpo el que se está moviendo a través del fluido.**

Vamos a calcular la *distribución de velocidades del fluido a una distancia grande del cuerpo* móvil. El flujo potencial de un fluido incompresible satisface la ecuación de Laplace  $\Delta \phi = 0$ . Las soluciones que buscamos tienen que anularse en el infinito, pues allí el fluido está en reposo. Consideraremos que el origen está en algún lugar del interior del cuerpo móvil, por lo que el sistema de coordenadas se mueve con el cuerpo, aunque consideraremos la distribución de velocidades del fluido en un instante en particular. Sabemos que la ecuación de Laplace tiene una solución  $\frac{1}{r}$  donde  $r$  es la distancia respecto al origen. También son soluciones el gradiente de  $1/r$  y todas las derivadas espaciales de orden superior. Todas

ellas y sus combinaciones lineales son soluciones que se anulan en el infinito. Por tanto, la forma general de la solución que buscamos para la ecuación de Laplace a gran distancia del cuerpo es

$$\phi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \frac{1}{r} + \dots$$

en donde  $a$  y  $\mathbf{A}$  son independientes de las coordenadas.

Vamos a ver que la constante  $a$  debe ser nula. Para el potencial  $\phi = -a/r$  se obtiene una velocidad

$$\mathbf{v} = -\mathbf{grad} \left( \frac{a}{r} \right) = a \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Calculamos el flujo de masa a través de alguna superficie cerrada, como por ejemplo una esfera de radio  $R$ . En esta superficie, la velocidad es constante e igual a  $\frac{a}{R^2}$ . El flujo total es

$$\rho \frac{a}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi \rho a$$

Pero el flujo de un fluido incompresible a través de cualquier superficie cerrada debe ser nulo, por lo que llegamos a la conclusión de que  $a = 0$ .

Entonces,  $\phi$  contiene términos de orden  $\frac{1}{r^2}$  y superiores. Como estamos interesados en la velocidad a grandes distancias del cuerpo, podemos despreciar los términos de orden superior y quedarnos con

$$(1.11.1) \quad \phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = -\mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{n}}{r^2}$$

y la velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$

$$(1.11.2) \quad \mathbf{v} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{grad} \frac{1}{r} = \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{A}}{r^3}$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{r}$ . Vemos que a distancias grandes la velocidad disminuye como  $1/r^3$ . El vector  $\mathbf{A}$  depende de la forma real y de la velocidad del cuerpo y sólo puede determinarse resolviendo por completo la ecuación  $\Delta\phi = 0$  a todas las distancias, teniendo en cuenta las condiciones límites apropiadas en la superficie del cuerpo móvil.

El vector  $\mathbf{A}$  que aparece en (1.11.2) está relacionado de un modo definido con el impulso y la energía totales del fluido en su movimiento alrededor del cuerpo. La energía cinética del fluido (*la energía interna de un fluido incompresible es constante*) es  $E = \frac{1}{2} \int \rho v^2 dV$ , integrando en todo el espacio exterior al cuerpo. Consideramos la región de integración una esfera de radio  $R$  grande, cuyo centro está en el origen y hacemos tender  $R \rightarrow \infty$  después de integrar. Vamos a modificar la integral:

$$\int v^2 dV = \int dV (v^2 + u^2 - u^2) = \int u^2 dV + \int (\mathbf{v} + \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV$$



donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad del cuerpo. Como  $\mathbf{u}$  es independiente de las coordenadas, la primera integral resulta ser  $\int u^2 dV = u^2 (V - V_0)$ , donde  $V_0$  es el volumen del cuerpo. En la segunda integral, escribimos  $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{grad}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$ .

$$(\mathbf{v} + \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{grad}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}(\phi) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = \dots$$

Ahora utilizamos la identidad vectorial

$$\text{div}(f\mathbf{A}) = (\mathbf{grad}f) \cdot \mathbf{A} + f(\text{div}\mathbf{A})$$

para convertir cada uno de los términos anteriores en

$$\begin{aligned} \dots &= \text{div}(\mathbf{v}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})) - (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \text{div}\mathbf{v} + \\ &+ \text{div}(-\mathbf{u}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})) - (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \text{div}(-\mathbf{u}) = \dots \end{aligned}$$

Y ahora utilizando que  $\text{div}\mathbf{v} = 0$  (ecuación de continuidad) y  $\text{div}\mathbf{u} = 0$  (porque el cuerpo es sólido), obtenemos

$$\dots = \text{div}((\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}))$$

Así que al final, la integral de la energía cinética queda:

$$\int v^2 dV = u^2 (V - V_0) + \int \text{div}((\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})) dV = \dots$$

Transformamos la segunda integral en una integral sobre la superficie  $S$  de la esfera y la superficie  $S_0$  del cuerpo

$$\dots = u^2 (V - V_0) + \oint_{S+S_0} (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{f}$$

En la superficie del cuerpo, las componentes normales de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$  tienen que ser iguales (por las condiciones límite); como el vector  $d\mathbf{f}$  es normal a la superficie, la integral sobre  $S_0$  se anula ( $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{f} = v_n - u_n = 0$ ). En la superficie remota  $S$ , sustituimos las expresiones de las ecuaciones (1.11.1) y (1.11.2) para  $\phi$  y  $\mathbf{v}$  y se desprecian los términos que se anulan cuando  $R \rightarrow \infty$ . Escribiendo el elemento de superficie de la esfera  $S$  en la forma  $d\mathbf{f} = \mathbf{n}R^2 d\omega$ , donde  $d\omega$  es un elemento de ángulo sólido, obtenemos:

$$\int v^2 dV = u^2 \left( \frac{4}{3} \pi R^3 - V_0 \right) + \int \left[ 3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 R^3 \right] d\omega$$

Finalmente, realizamos la integración <sup>7</sup> y multiplicando por  $\frac{1}{2}\rho$  tenemos la expresión para la energía total del fluido:

$$(1.11.3) \quad E = \frac{1}{2}\rho (4\pi \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - V_0 u^2)$$

El cálculo exacto del vector  $\mathbf{A}$  exige una solución completa de la ecuación  $\Delta\phi = 0$  teniendo en cuenta las condiciones límite particulares en la superficie del cuerpo. Sin embargo, podemos hacernos una idea de la dependencia de  $\mathbf{A}$  con respecto a la velocidad  $\mathbf{u}$  del cuerpo teniendo en cuenta que la ecuación es lineal en  $\phi$  y que las condiciones límite son lineales tanto en  $\phi$  como en  $\mathbf{u}$ . De esto deducimos que  $\mathbf{A}$  debe ser una función lineal de las componentes de  $\mathbf{u}$ . La energía obtenida en la ecuación (1.11.3) será una función cuadrática de las componentes de  $\mathbf{u}$  y podrá escribirse en la forma

$$(1.11.4) \quad E = \frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k$$

siendo  $m_{ik}$  un tensor simétrico constante cuyos términos pueden calcularse a partir de los de  $\mathbf{A}$ ; al tensor  $m_{ik}$  se le denomina *tensor de masas asociadas*.

Conociendo la energía  $E$  podemos obtener una expresión para el impulso total  $\mathbf{P}$  del fluido. Las variaciones infinitesimales en  $E$  y  $\mathbf{P}$  están relacionadas mediante  $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$ , por lo que si expresamos la energía  $E$  según la ecuación (1.11.4), las componentes de  $\mathbf{P}$  deben ser

$$(1.11.5) \quad P_i = m_{ik} u_k$$

Finalmente, comparando las fórmulas (1.11.3), (1.11.4) y (1.11.5) se ve que  $\mathbf{P}$  viene dado en función de  $\mathbf{A}$  por

$$(1.11.6) \quad \mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0 \mathbf{u}$$

El impulso transmitido al fluido por el cuerpo en la unidad de tiempo es  $d\mathbf{P}/dt$ . Cambiar el signo da la reacción  $\mathbf{F}$  del fluido, es decir, la fuerza que actúa sobre el cuerpo:

$$(1.11.7) \quad \mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

La componente de  $\mathbf{F}$  paralela a la velocidad del cuerpo se denomina *fuerza de arrastre* y la componente perpendicular se denomina *fuerza de sustentación*.

---

<sup>7</sup>La integración respecto al ángulo sólido  $do$  es equivalente a promediar integrando respecto a todas las direcciones del vector  $\mathbf{n}$  y multiplicar por  $4\pi$ . Para promediar las expresiones del tipo  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{A}_i \mathbf{n}_i \mathbf{B}_k \mathbf{n}_k$ , observamos que los valores medios  $n_i n_k$  forman un tensor simétrico que puede expresarse en función del tensor unidad:  $\delta_{ik} = n_i n_k = a_{ik} \delta_{ik}$ . Contrayendo respecto a los sufijos  $i, k$  y recordando que  $n_i n_k = 1$  se halla que  $a = 1/3$ , por lo que

$$\overline{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})} = \frac{1}{3} \delta_{ik} A_i B_k = \frac{1}{3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

Si fuese posible tener un flujo potencial en alrededor de un cuerpo moviéndose uniformemente dentro del fluido ideal ( $\mathbf{u} = \text{constante}$ ), deberíamos tener  $\mathbf{P} = \text{constante}$ , y por tanto  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Es decir, no habría fuerza de arrastre o sustentación; las fuerzas de presión ejercidas sobre el cuerpo por el fluido estarían equilibradas. Este resultado se denomina Paradoja d'Alambert. Vamos a ver por qué es una paradoja. Tener una fuerza de arrastre en un movimiento uniforme significa que, para mantener el cuerpo en movimiento, debería realizarse continuamente un trabajo por alguna fuerza externa. Este trabajo se disiparía dentro del fluido o se convertiría en energía cinética del mismo. El resultado sería un flujo de energía continuo hacia el infinito en el interior del fluido. Pero en un fluido ideal no hay disipación de energía (por definición de fluido ideal). Además la velocidad del fluido puesto en movimiento por el cuerpo disminuye muy rápidamente en cuanto nos alejamos del cuerpo con lo que no puede haber flujo de energía hacia el infinito.

Sin embargo, estos argumentos sólo son válidos en relación con el movimiento de un cuerpo dentro de un volumen infinito de fluido. Si el fluido tiene una superficie libre, un cuerpo que tuviese un movimiento uniforme paralelo a esta superficie experimentaría la acción de un arrastre. La aparición de esta fuerza (denominada *resistencia de onda*) se debe a la presencia de un sistema de ondas propagadas en la superficie libre, que continuamente van eliminando energía hacia el infinito.

Si el movimiento del cuerpo es oscilante, debido a una fuerza externa  $\mathbf{f}$  y en las condiciones consideradas en la sección anterior (1.10), el fluido que rodea el cuerpo se mueve con un flujo potencial y podemos utilizar todos los resultados obtenidos para deducir las ecuaciones de movimiento del cuerpo.

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\mathbf{P}_{\text{cuerpo}} + \frac{d}{dt}\mathbf{P}_{\text{fluido}} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{u}) + \frac{d}{dt}\mathbf{P}_{\text{fluido}} \\ f_i &= M \frac{du_i}{dt} + m_{ik} \frac{du_k}{dt}\end{aligned}$$

que puede escribirse como:

$$(1.11.8) \quad \frac{du_k}{dt} (M\delta_{ik} + m_{ik}) = f_i$$

Esta es la ecuación de movimiento de un cuerpo sumergido en un fluido ideal.

A continuación consideramos el problema de obtener las ecuaciones del movimiento de un cuerpo sumergido en un fluido que oscila por alguna causa externa al cuerpo <sup>8</sup>. Estas oscilaciones del fluido pondrán en movimiento al cuerpo.

Suponemos que la velocidad del fluido varía ligeramente en distancias del orden de la dimensión del cuerpo. Sea  $\mathbf{v}$  la velocidad del fluido que existiría en la posición

---

<sup>8</sup>Por ejemplo, una onda sonora de longitud de onda larga comparada con las dimensiones del cuerpo.

ocupada por el cuerpo si no hubiera cuerpo. Es decir,  $\mathbf{v}$  es la velocidad del flujo no perturbado. Con esta suposición podemos suponer que  $\mathbf{v}$  es constante en todo el volumen ocupado por el cuerpo. La velocidad del cuerpo es  $\mathbf{u}$ , como antes.

Si el cuerpo fuera totalmente transportado por el fluido, es decir,  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , la fuerza que actuase sobre él debería ser la misma que la fuerza que actúa sobre el líquido en el mismo volumen si el cuerpo no estuviera. El impulso de este volumen de fluido es  $\rho V_0 \mathbf{v}$ , y por tanto la fuerza sobre el mismo es  $\rho V_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ . Pero en realidad el cuerpo no es totalmente transportado con el fluido; existe un cierto movimiento respecto a éste, por lo que el fluido adquiere un cierto movimiento adicional. El impulso adicional resultante del fluido es  $m_{ik}(u_k - v_k)$ , ya que ahora debemos sustituir  $\mathbf{u}$  por la velocidad del cuerpo respecto al fluido  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  en la ecuación (1.11.5). La variación de este impulso con respecto al tiempo da como resultado la aparición de una fuerza sobre el cuerpo  $-m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k)$ . Así, la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k)$$

Esta fuerza tiene que igualarse a la derivada temporal del impulso del cuerpo, obteniendo la ecuación del movimiento:

$$\frac{d}{dt}(Mu_i) = \rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik} \frac{d}{dt}(u_k - v_k)$$

Integrando ambos miembros, tenemos:

$$Mu_i = \rho V_0 v_i - m_{ik}(u_k - v_k)$$

o lo que es lo mismo:

$$(1.11.9) \quad (M\delta_{ik} + m_{ik})u_k = (m_{ik} + \rho V_0\delta_{ik})v_k$$

Hacemos la constante de integración igual a cero, puesto que la velocidad del cuerpo en su movimiento producido por el fluido debe anularse cuando  $\mathbf{v}$  se hace cero. La relación obtenida determina la velocidad del cuerpo a partir de la velocidad del fluido. Si la densidad del cuerpo es igual a la del fluido ( $M = \rho V_0$ ), tenemos  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , como era de esperar.

## 1.12. Ondas de gravedad

La superficie libre de un líquido en equilibrio en un campo gravitatorio es plana. Si una perturbación externa afecta a la superficie en un punto determinado, aparece un movimiento en el líquido. El movimiento se propaga a lo largo de la superficie en forma de *ondas de gravedad*. Estas ondas afectan a la superficie y al interior del fluido, aunque su efecto disminuye con la profundidad.

Consideramos ondas de gravedad en las que la velocidad de las partículas del fluido es tan pequeña que podemos despreciar el término  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  en comparación con  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  en la ecuación de Euler.

Durante el intervalo de tiempo  $\tau$ , del orden del periodo de las oscilaciones de las partículas el fluido en la onda, estas recorren una distancia del orden de la amplitud de onda  $a$ . Por tanto, su velocidad es del orden de  $a/\tau$ . Por tanto, la derivada temporal de la velocidad es del orden de  $\frac{1}{\tau} \frac{da}{dt} \simeq \frac{v}{\tau}$  y las derivadas espaciales del orden de  $\frac{d}{dr} \left( \frac{a}{\tau} \right) \simeq \frac{1}{\tau} \left( \sim \frac{1}{s} \frac{m}{m} = \frac{m/s}{m} \right) = \frac{v}{\lambda}$ . Así, la condición  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  es equivalente a

$$\frac{1}{\lambda} \left( \frac{a}{\tau} \right)^2 \ll \frac{a}{\tau} \frac{1}{\tau}$$

o sea,

$$(1.12.1) \quad a \ll \lambda$$

es decir, las amplitudes de las oscilaciones en la onda deben ser pequeñas en comparación con su longitud de onda. En este caso, como vimos en la sección 1.9, cuando puede despreciarse  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  en la ecuación de Euler tenemos un flujo potencial. Si además, el flujo es incompresible, podemos utilizar las ecuaciones (1.10.6) (ec. de Laplace) y (1.10.7). Podemos despreciar el término  $\frac{1}{2}v^2$  porque contiene el cuadrado de la velocidad, haciendo  $f(t) = 0$  e incluyendo un término  $\rho g z$  para tener el campo gravitatorio, obtenemos:

$$(1.12.2) \quad p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Tomamos el eje  $z$  como vertical hacia arriba y el plano  $xy$  sobre la superficie en equilibrio del fluido. Llamamos  $\zeta$  a la coordenada  $z$  de un punto de la superficie.  $\zeta$  es función de  $x, y, z$  y  $t$ . En equilibrio  $\zeta = 0$ , de modo que  $\zeta$  da el desplazamiento vertical de la superficie en las oscilaciones. Suponemos que sobre la superficie actúa una presión constante  $p_0$ . Entonces, usando (1.12.2)

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Si elegimos el potencial  $\phi' = \phi + \frac{p_0}{\rho} t$  no supone ninguna diferencia, ya que  $\mathbf{grad} \phi = \mathbf{grad} \phi'$ . Sin embargo, de esta manera se elimina el término  $p_0$  de la ecuación anterior (y si prescindimos de la prima), obtenemos la condición de la superficie

$$(1.12.3) \quad g\zeta + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} = 0$$

Cuando la amplitud de las oscilaciones es pequeña, el desplazamiento  $\zeta$  también es pequeño. Aquí podemos suponer, con el mismo grado de aproximación, que la componente vertical de la velocidad de los puntos en la superficie es simplemente

la derivada respecto al tiempo de  $\zeta$ :

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Pero  $v_z = \frac{\partial \phi}{\partial t}$  de modo que

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Sustituyendo  $\zeta$  a partir de (1.12.3) tenemos

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = 0$$

Cuando las oscilaciones son pequeñas, podemos tomar el valor del paréntesis en  $z = 0$  en lugar de  $z = \zeta$ . Así pues, tenemos un sistema de ecuaciones para determinar el movimiento de la superficie de un fluido en un campo gravitatorio:

$$(1.12.4) \quad \Delta \phi = 0$$

$$(1.12.5) \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0$$

Suponemos que tenemos un fluido de profundidad infinita. De esta forma, el área del fluido es ilimitada y la longitud de onda será pequeña en comparación con la profundidad del fluido. En esta situación evitamos las condiciones límite en los bordes y en la parte inferior del fluido.

Consideramos una onda de gravedad que se propaga a lo largo del eje  $x$  y que es uniforme en la dirección  $y$ . En esta onda todas las magnitudes son independientes de  $y$ . Buscamos una solución que sea una función periódica simple del tiempo y de la coordenada  $x$ , es decir, de la forma

$$\phi = f(z) \cos(kx - \omega t)$$

$\omega$  es lo que se denomina *frecuencia angular* de la onda;  $2\pi/\omega$  es el periodo del movimiento en un punto determinado;  $k$  se denomina *número de onda*; y  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  es la longitud de onda.

Sustituyendo en la ecuación

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

tenemos

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones  $e^{kz}$  y  $e^{-kz}$ . Elegimos la primera, porque la segunda da un aumento de  $\phi$  cuando pasamos al interior del fluido (que ocupa la región  $z < 0$ ). Así, obtenemos el potencial para la velocidad:

$$(1.12.6) \quad \phi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

Nos falta aplicar las condiciones límite (1.12.5). Sustituyendo (1.12.6) obtenemos

$$k - \frac{\omega^2}{g} = 0$$

O sea

$$(1.12.7) \quad \omega^2 = kg$$

Esto nos proporciona la relación existente entre el número de onda y la frecuencia de una onda de gravedad.

La distribución de velocidades en el fluido móvil se encuentra tomando las derivadas espaciales de  $\phi$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi$ :

$$(1.12.8) \quad v_x = -Ake^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad v_z = Ake^{kx} \cos(kx - \omega t)$$

Como vemos, la velocidad disminuye exponencialmente al penetrar en el fluido. En un punto determinado cualquiera del espacio (es decir, fijados  $x, z$ ) el vector velocidad gira uniformemente en el plano  $xz$ , permaneciendo su módulo constante e igual a  $Ake^{kz}$ .

El siguiente paso es determinar las trayectorias de las partículas del fluido en la onda. Temporalmente designaremos por  $x, z$  las coordenadas de una partícula del fluido móvil y no las de un punto fijo del espacio, siendo  $x_0, z_0$  los valores de  $x, z$  en la posición de equilibrio de una partícula. Entonces  $v_x = \frac{dx}{dt}$  y  $v_z = \frac{dz}{dt}$ , y podemos aproximar el segundo miembro de (1.12.8) escribiendo  $x_0$  y  $z_0$ , puesto que las oscilaciones son pequeñas. Una integración respecto al tiempo nos da:

$$(1.12.9) \quad \begin{aligned} x - x_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t) \\ z - z_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t) \end{aligned}$$

Así pues, las partículas del fluido describen circunferencias de radio  $\left(\frac{Ak}{\omega}\right) e^{kz_0}$  alrededor de los puntos  $(x_0, z_0)$ ; este radio disminuye exponencialmente al aumentar la profundidad.

La velocidad de propagación  $U$  de la onda es (como se demostrará más adelante)  $U = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ . Sustituyendo  $\omega = \sqrt{kg}$  vemos que la velocidad de propagación de las ondas de gravedad en el caso de una superficie sin limitaciones de un fluido de profundidad infinita es

$$(1.12.10) \quad U = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Esta velocidad aumenta con la longitud de onda.

### 1.13. Ondas de gravedad largas

Hasta ahora hemos estudiado las ondas de gravedad con una longitud de onda pequeña en comparación con la profundidad del fluido. Ahora nos concentramos en el caso contrario, es decir, en ondas de longitud grande en comparación con la profundidad. Estas ondas se denominan *ondas largas*.

Para ello, vamos a estudiar la propagación de ondas largas en un canal. Se supone que el canal está dirigido a lo largo del eje  $x$  y que tiene longitud infinita. La sección recta del canal puede tener cualquier forma y puede variar a lo largo de su longitud. Denotamos el área de la sección transversal del canal como  $S = S(x, t)$ . Suponemos que la anchura y la profundidad del canal son pequeñas en comparación con la longitud de onda. Sólo tendremos en cuenta ondas longitudinales en las que el fluido se mueve a lo largo del canal. En este tipo de ondas la velocidad  $v_x$  es grande en comparación con las componentes  $v_y$  y  $v_z$ . Para simplificar, llamamos  $v$  a  $v_x$  y prescindimos de las otras componentes (pequeñas en comparación).

La componente  $x$  de la ecuación de Euler se escribe:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

y la componente  $z$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

Despreciamos los términos cuadráticos en la velocidad, porque suponemos que es pequeña en comparación con la longitud de onda. En la superficie libre ( $z = \zeta$ ) la presión es  $p_0$ , así que a partir de la segunda ecuación:

$$p = p_0 + g\rho(\zeta - z)$$

Y ahora introduciendo este resultado en la primera ecuación

$$(1.13.1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Necesitamos otra ecuación para poder determinar las dos incógnitas,  $v$  y  $\zeta$ . Utilizando la ecuación de continuidad en este escenario, considerando un volumen de fluido limitado por dos secciones rectas planas del canal distantes entre sí una distancia  $dx$ . En una unidad de tiempo fluye a través de los planos un volumen  $(Sv)_x$  de fluido y a través del otro un volumen  $(Sv)_{x+dx}$ . Por tanto, el volumen de fluido entre los dos planos varía una cantidad:

$$(Sv)_{x+dx} - (Sv)_x = \frac{\partial (Sv)}{\partial x} dx$$

Pero como el fluido es incompresible, esta variación será simplemente la variación del nivel del fluido. El cambio por unidad de tiempo del volumen de fluido. El cambio por unidad de tiempo del volumen de fluido comprendido entre dos planos



es  $(\partial S/\partial t) dx$ . Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{\partial S}{\partial t} dx = -\frac{\partial (Sv)}{\partial x} dx$$

es decir,

$$(1.13.2) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Sv)}{\partial x} = 0$$

Esta es la ecuación de continuidad que buscábamos.

Si  $S_0$  es el área de la sección recta de equilibrio del fluido del canal, entonces  $S = S_0 + S'$ , donde  $S'$  es la variación en la sección recta producida por la onda. Como el cambio en el nivel del fluido es pequeño, podemos escribir  $S'$  en la forma  $b\zeta$ , donde  $b$  es el ancho del canal en la superficie del fluido. La ecuación anterior (1.13.2) se transforma entonces en

$$(1.13.3) \quad b \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (S_0 v)}{\partial x} = 0$$

Derivando (1.13.3) respecto a  $t$  y sustituyendo  $\frac{\partial v}{\partial t}$  según lo encontrado en la ecuación (1.13.1)

$$(1.13.4) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left( S_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0$$

Si la sección recta del canal es la misma en todos los puntos, entonces  $S_0 = \text{constante}$  y

$$(1.13.5) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g S_0}{b} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de onda* y corresponde a la propagación de ondas con una velocidad  $U$  que es independiente de la frecuencia y es la raíz cuadrada de  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ . Así pues, la velocidad de propagación de ondas de gravedad largas en canales es

$$(1.13.6) \quad U = \sqrt{\frac{g S_0}{b}}$$

De la misma manera podemos considerar ondas largas en un depósito grande, que podemos suponer infinito en dos direcciones (las correspondientes a  $x$  e  $y$ ). Se designa  $h$  a la profundidad del fluido del depósito. En este caso ahora  $v_z$  es pequeña. La ecuación de Euler toma una forma parecida a (1.13.1).

$$(1.13.7) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

Del mismo modo que antes para (1.13.2), deducimos la ecuación de continuidad como

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h v_y)}{\partial y} = 0$$

Si escribimos la profundidad  $h$  como  $h_0 + \zeta$ , donde  $h_0$  es la profundidad de equilibrio, entonces,

$$(1.13.8) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h_0 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h_0 v_y)}{\partial y} = 0$$

Si el depósito tiene un fondo horizontal de manera que  $h_0 = \text{constante}$ , derivando (1.13.8) respecto a  $t$  y sustituyendo el valor de (1.13.7) obtenemos

$$(1.13.9) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + gh \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0$$

Esta es la ecuación de onda (bidimensional) y corresponde a ondas que se propagan con una velocidad

$$(1.13.10) \quad U = \sqrt{gh}$$

#### 1.14. Ondas en un fluido incompresible

Existe un tipo de onda de gravedad que puede propagarse en el interior de un fluido incompresible. Dichas ondas se deben a una inhomogeneidad del fluido producida por el campo gravitatorio. La presión (y también la entropía  $s$ ) varían con la altura, por lo que si desplazamos una partícula de fluido destruimos el equilibrio mecánico y se produce un movimiento oscilante. Como el movimiento es adiabático, la partícula se lleva con ella la entropía  $s$ , que no es la que corresponde a la posición de equilibrio en su nueva posición.

Suponemos que la longitud de onda es pequeña en comparación con las distancias sobre las que el campo gravitatorio produce una variación notable de la densidad, además de considerar el fluido como incompresible. Así podemos despreciar las variaciones producidas en su interior por la variación de presión de la onda. La modificación de la densidad producida por la dilatación termina no puede despreciarse, pues es la que origina el movimiento que estamos estudiando.

Vamos a buscar las ecuaciones que describen este movimiento. Utilizamos el sufijo  $_0$  para distinguir los valores de las magnitudes correspondientes al equilibrio mecánico y una prima  $'$  para marcar las pequeñas desviaciones de estos valores.

Con estas suposiciones podemos escribir la ecuación de conservación de la entropía  $s = s_0 + s'$  hasta el primer orden,

$$(1.14.1) \quad \frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s_0 = 0$$

donde  $s_0$ , igual que el resto de los valores de equilibrio de otras magnitudes, es una función determinada de la coordenada vertical  $z$ .

Como antes, ahora despreciamos el término  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  de la ecuación de Euler, pues las oscilaciones son pequeñas. Además, como la distribución de presiones de

equilibrio viene dada por  $\mathbf{grad} p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$ , tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{grad} p}{\rho} + \mathbf{g} = -\frac{\mathbf{grad} p'}{\rho_0} + \frac{\mathbf{grad} p_0}{\rho_0} \rho'$$

Como hemos visto antes, la variación de la densidad se debe únicamente al cambio de entropía y no a la variación de presión, por lo que podemos escribir

$$\rho' = \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s'$$

y se obtiene la ecuación de Euler en la forma

$$(1.14.2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' - \mathbf{grad} \frac{p'}{\rho_0}$$

Podemos introducir  $\rho_0$  dentro del operador gradiente, pues despreciamos la variación de la densidad de equilibrio en distancias del orden de la longitud de onda. Por esta misma razón se puede suponer constante la densidad en la ecuación de continuidad, que entonces queda:

$$(1.14.3) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

Buscaremos una solución de las ecuaciones (1.14.1, 1.14.2, 1.14.3) en forma de onda plana

$$\mathbf{v} = \text{constante} \times e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

y análogamente para  $s'$  y  $p'$ . Sustituyendo la ecuación de continuidad (1.14.3) se tiene

$$(1.14.4) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$$

es decir, que la velocidad del fluido es siempre perpendicular al *vector de onda*  $\mathbf{k}$  (onda transversal). Las ecuaciones (1.14.1) y (1.14.2) dan

$$\begin{aligned} i\omega s' &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s_0 \\ -i\omega \mathbf{v} &= \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' \mathbf{g} - \frac{i\mathbf{k}}{\rho_0} p' \end{aligned}$$

La condición  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$  junto a la segunda de las ecuaciones da

$$ik^2 p' = \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}$$

y eliminando  $\mathbf{v}$  y  $s'$  de ambas ecuaciones, obtenemos la relación entre el vector de onda y la frecuencia:

$$(1.14.5) \quad \omega^2 = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p g \frac{ds}{dz} \sin^2 \theta$$

De ahora en adelante omitiremos el sufijo cero para los valores de equilibrio de las magnitudes termodinámicas; el eje  $z$  es vertical y hacia arriba y  $\theta$  es el ángulo entre el eje  $z$  y la dirección de  $\mathbf{k}$ . Si la expresión en el segundo miembro de (1.14.5) es positiva, se cumple la condición para la estabilidad de la distribución de equilibrio  $s(z)$  (condición de que la convección esté ausente, como se vió en la sección 1.4).

Vemos que la frecuencia depende sólo de la dirección del vector de onda y no de su valor. Para  $\theta = 0$  tenemos  $\omega = 0$ , por lo que no pueden existir ondas del tipo considerado con su vector de onda vertical.

Si el fluido está en equilibrio mecánico y en equilibrio térmico, su temperatura es constante y podemos escribir

$$\frac{ds}{dz} = \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = -\rho g \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T$$

Finalmente, usando las relaciones termodinámicas

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T &= \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \\ \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p &= \frac{T}{c_p} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \end{aligned}$$

en donde  $c_p$  es el calor específico por unidad de masa, encontramos

$$(1.14.6) \quad \omega = \sqrt{\frac{T}{c_p} \frac{g}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p} \sin \theta$$

En el caso particular de un gas perfecto:

$$(1.14.7) \quad \omega = \frac{g}{\sqrt{c_p T}} \sin \theta$$

## Fluidos viscosos

### 2.1. Ecuación de movimiento de un fluido viscoso

Ahora estudiaremos el efecto producido por la disipación de la energía que se produce durante el movimiento del fluido sobre el propio movimiento. Este proceso es consecuencia de la irreversibilidad termodinámica del movimiento, que **siempre** está presente en alguna medida, debida a la **fricción interna (viscosidad)** y a la **conducción térmica**.

En general, para obtener las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso, tenemos que añadir algunos términos a la ecuación de movimiento del fluido ideal.

La ecuación de continuidad es válida para cualquier fluido, independientemente de si es viscoso o no.

La ecuación de Euler debe modificarse cuando el fluido es viscoso. En la sección 1.7 vimos que la ecuación de Euler puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

donde  $\Pi_{ik}$  es el tensor de densidad de flujos de impulso. El flujo de impulso en la fórmula (1.7.2) representa una transferencia de impulso **completamente reversible** debida al transporte mecánico de las partículas de fluido de un lugar a otro y a las fuerzas de presión que actúan en el fluido. La viscosidad (rozamiento interno) se debe a una transferencia de impulso, **irreversible**, de unos puntos donde la velocidad es grande a otros donde la velocidad es pequeña.

Por tanto, a la ecuación de movimiento de un fluido ideal (1.7.2) le añadiremos un término  $\sigma'_{ik}$  que tenga en cuenta la transferencia de impulso *viscoso* irreversible en el fluido.

$$(2.1.1) \quad \Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik}$$

El tensor

$$(2.1.2) \quad \sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

se denomina *tensor de tensiones* y  $\sigma'_{ik}$  es el *tensor de tensiones de la viscosidad*.  $\sigma_{ik}$  expresa la parte del flujo de impulso que no se debe a transferencia directa de impulso con la masa del fluido móvil.

Como el rozamiento interno aparece sólo cuando distintas partículas se mueven con velocidades diferentes,  $\sigma'_{ik}$  dependerá de las derivadas espaciales de la velocidad. Si los gradientes de velocidad son pequeños, podemos suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. Con la misma aproximación podemos considerar que  $\sigma'_{ik}$  es una función lineal de las derivadas  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ , sin términos independientes de estas derivadas, ya que  $\sigma'_{ik}$  tiene que anularse para  $v = \text{constante}$ .  $\sigma'_{ik}$  también tiene que anularse cuando el fluido completo está en rotación uniforme, ya que entonces tampoco hay rozamiento interno. En el caso de rotación uniforme con velocidad angular  $\Omega$ , la velocidad  $\mathbf{v}$  es igual a  $\Omega \times \mathbf{r}$ . Las sumas

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

son combinaciones lineales de las derivadas  $\partial v_i / \partial x_k$  y se anulan cuando  $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$ . De aquí deducimos que  $\sigma'_{ik}$  deberá contener exactamente estas combinaciones simétricas en las derivadas  $\partial v_i / \partial x_k$ .

El tensor más general de rango dos que satisface las condiciones anteriores es

$$\sigma'_{ik} = a \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

siendo  $a$  y  $b$  independientes de la velocidad. Sin embargo, es conveniente escribir este tensor de una forma diferente

$$(2.1.3) \quad \sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

La expresión entre paréntesis tiene la propiedad de anularse por contracción respecto a  $i$  y  $k$ , es decir, cuando se hace la suma de las componentes en el caso  $i = k$ . Las constantes  $\eta$  y  $\zeta$  se denominan *coeficientes de viscosidad*. Más adelante veremos que los dos son positivos:

$$(2.1.4) \quad \eta > 0 \quad \zeta > 0$$

Ahora ya podemos obtener la ecuación de Euler para un fluido viscoso, añadiendo las expresiones  $\partial \sigma'_{ik} / \partial x_k$  en el segundo miembro:

$$(2.1.5) \quad \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)$$

Esta forma de la ecuación de Euler para el movimiento de un fluido viscoso es la más general de todas. Las magnitudes  $\eta$  y  $\zeta$  son funciones de la presión y la

temperatura.

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(p, T) & \zeta &= \zeta(p, T) \\ &\Downarrow \\ p, T &= f(\mathbf{x}) \Rightarrow \eta, \zeta = f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

En general  $p$  y  $T$  no son constantes en todo el fluido, de manera que  $\eta$  y  $\zeta$  no pueden extraerse fuera del operador gradiente.

Sin embargo, en la mayor parte de los casos, **los coeficientes de viscosidad no varían demasiado en el fluido, por lo que pueden considerarse como constantes.**

$$\eta, \zeta \text{ varían poco en el fluido} \Rightarrow \eta, \zeta \sim \text{constantes}$$

En este caso

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} &= \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \text{div} \mathbf{v} \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \equiv \Delta v_i$$

Por lo que podemos escribir la ecuación del movimiento de un fluido viscoso en forma vectorial

$$(2.1.6) \quad \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \right] = -\mathbf{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \mathbf{grad} (\text{div} \mathbf{v})$$

Si el fluido es incompresible,  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ , por lo que el último término de (2.1.6) es cero. La ecuación de movimiento de un fluido viscoso incompresible es

$$(2.1.7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

Esta ecuación se denomina *Ecuación de Navier-Stokes*.

El tensor de tensiones en un fluido incompresible es

$$(2.1.8) \quad \sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

Como vemos, la viscosidad de un fluido incompresible queda determinada sólo por un coeficiente. Como la mayoría de los fluidos se pueden considerar como incompresibles, el coeficiente de viscosidad  $\eta$  es el que tiene importancia. El cociente

$$(2.1.9) \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

se denomina *viscosidad cinemática* mientras que  $\eta$  se denomina *viscosidad dinámica*.

La viscosidad dinámica de un gas a una temperatura determinada es independiente de la presión, mientras que la viscosidad cinemática es inversamente proporcional a la presión.

$$\text{Gas (T constante)} \Rightarrow \begin{cases} \eta \neq f(p) & (\text{Viscosidad dinámica}) \\ \nu \propto \frac{1}{p} & (\text{Viscosidad cinemática}) \end{cases}$$

La presión puede eliminarse de la ecuación de Navier-Stokes del mismo modo que se hizo en la ecuación de Euler: tomando rotacionales a ambos lados de la ecuación (2.1.7)

$$(2.1.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \Delta (\mathbf{rot} \mathbf{v})$$

El siguiente paso es escribir las condiciones límite que actúan sobre las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso.

Las fuerzas de atracción molecular entre el fluido y la pared del cuerpo sólido con el que está en contacto hacen que la capa de fluido junto al cuerpo *se pegue* y quede totalmente en reposo. Por ello, las condiciones límites exigen que la velocidad del fluido viscoso se anule en las superficies sólidas fijas:

$$(2.1.11) \quad \mathbf{v} = 0 \text{ en una superficie sólida fija}$$

Como vemos, en un fluido viscoso deben anularse tanto la componente normal como la tangencial, mientras que en un fluido ideal sólo tiene que anularse la componente normal a la superficie. En el caso de una superficie móvil, la velocidad  $\mathbf{v}$  debe ser igual a la velocidad de la superficie.

Condiciones límite en contacto con una superficie sólida fija

Fluido ideal	Fluido Viscoso
$v_n = 0$	$\mathbf{v} = 0 \quad (v_n = 0, v_{\parallel} = 0)$

Ahora busquemos la fuerza que actúa sobre una superficie sólida que limita el fluido. La fuerza que actúa sobre un elemento de la superficie coincide con el flujo de impulso a través de dicho elemento. El flujo de impulso a través del elemento de superficie  $d\mathbf{f}$  es

$$\Pi_{ik} df_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) df_k$$

Escribiendo  $df_k = n_k df$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector unidad a lo largo de la normal y teniendo en cuenta que  $\mathbf{v} = 0$  en la superficie sólida, encontramos que la fuerza  $\mathbf{P}$  que actúa sobre una unidad de superficie es

$$(2.1.12) \quad P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k$$



El primer término es la presión del fluido, mientras que el segundo es la fuerza de rozamiento debida a la viscosidad.  $\mathbf{n}$  apunta hacia fuera del fluido, es decir, *hacia adentro* en la superficie sólida que limita al fluido.

Si tenemos una superficie de separación entre dos fluidos inmiscibles, las velocidades de los fluidos deben ser iguales en la superficie y las fuerzas que se ejercen entre sí deben ser iguales y opuestas. Esta condición se escribe como

$$n_{1,k}\sigma_{1,ik} + n_{2,k}\sigma_{2,ik} = 0$$

donde los sufijos 1 y 2 se refieren a los dos fluidos. Los vectores normales, en este caso, tienen sentidos opuestos, por lo que  $n_{1,i} = -n_{2,i} = n_i$ , por lo que la condición anterior se puede escribir como

$$(2.1.13) \quad n_i\sigma_{1,ik} = n_i\sigma_{2,ik}$$

En una superficie libre del fluido debe cumplirse la condición

$$(2.1.14) \quad \sigma_{ik}n_k \equiv \sigma'_{ik}n_k - pn_i = 0$$

Como referencia daremos las expresiones en componentes del tensor de tensiones y la ecuación en Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas y esféricas.

**Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas  $r, \phi, z$ .**

$$(2.1.15) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \sigma_{\phi\phi} &= -p + 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \sigma_{r\phi} &= \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) \\ \sigma_{\phi z} &= \eta \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right) \\ \sigma_{zr} &= \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Las tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes (en coordenadas cilíndricas):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} &= \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} \right) \end{aligned}$$

*etc...*

**Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas esféricas  $r, \phi, \theta$ . PAG9****2.2. Disipación de energía en un fluido incompresible**

La presencia de la viscosidad da como resultado disipación de energía, que finalmente se transforma en calor. El cálculo de la disipación de energía es sencillo en el caso de un fluido incompresible.

La energía cinética total de un fluido incompresible es

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \rho \int v^2 dV$$

Si tomamos la derivada temporal de esta energía y utilizamos la ecuación de Navier-Stokes para  $\frac{\partial v_i}{\partial t}$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \\ &= -\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \text{div} (\mathbf{v} \cdot \sigma') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

En esta expresión  $\mathbf{v} \cdot \sigma'$  designa el vector cuyas componentes son  $v_i \sigma'_{ik}$ . Como  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  en el caso de un fluido incompresible, podemos escribir el primer término del segundo miembro como una divergencia:

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\text{div} \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \sigma' \right] - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

La expresión entre corchetes es la densidad de flujo de energía en el fluido: el término  $\rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right)$  es el flujo de energía debido a la transferencia real de masa de fluido y equivale al flujo de energía correspondiente a un fluido ideal (ver ( 1.10.5 en la página 27)). El segundo término,  $\mathbf{v} \cdot \sigma'$  es el flujo de energía debido a los procesos de rozamiento interno. Pero la presencia de la viscosidad da como resultado un flujo de impulso  $\sigma'_{ik}$ ; sin embargo, en una transferencia de impulso interviene siempre una transferencia de energía y el flujo de energía es igual al producto escalar del flujo de impulso por la velocidad.

Si integramos (2.2.1) respecto a un volumen  $V$ , obtenemos

$$(2.2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \oint \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \sigma' \right] \cdot d\mathbf{f} - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV$$

El primer término del segundo miembro nos da la variación respecto al tiempo de la energía cinética del fluido contenido en  $V$  debido al flujo de energía a través de la superficie que limita a  $V$ . La integral del segundo término es la disminución por unidad de tiempo de la energía cinética debida a la disipación.

Si la integral se extiende al volumen total del fluido, la integral de superficie se anula (puesto que la velocidad se anula en el infinito) y encontramos que la energía

disipada por unidad de tiempo en la totalidad del fluido es:

$$\dot{E}_k = - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV$$

En fluidos incompresibles, el tensor  $\sigma'_{ik}$  viene dado por (2.1.8), de modo que

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

Es fácil comprobar que esta expresión se puede escribir como

$$\frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2$$

De manera que la disipación de energía en un fluido incompresible resulta:

$$(2.2.3) \quad \dot{E}_k = - \frac{1}{2} \eta \int \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV$$

La disipación conduce a una disminución de energía mecánica, es decir, siempre se dará  $E_{cin} < 0$ . Sin embargo, la integral 2.2.3 es siempre positiva. Por tanto, se llega a la conclusión de que el coeficiente de viscosidad  $\eta$  es siempre positivo.

### 2.3. Flujo en una tubería

En esta sección nos concentramos en problemas sencillos de movimiento de un fluido viscoso incompresible.

Supongamos que el fluido está encerrado entre dos planos paralelos que se mueven con una velocidad relativa constante  $\mathbf{u}$ . Tomemos uno de ellos como el plano  $xz$  con el eje  $x$  en la dirección  $\mathbf{u}$ . Todas las magnitudes dependen únicamente de  $y$  y la velocidad del fluido siempre está en la dirección  $x$ . A partir de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido viscoso incompresible (2.1.7 en la página 47) tenemos para el flujo estacionario

$$\frac{dp}{dy} = 0 \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$$

La ecuación de continuidad se satisface idénticamente.

Así,  $p = \text{constante}$  y  $v = ay + b$ . Como  $v(y=0) = 0$  tenemos que  $b = 0$ , y  $v(y=h) = u$  tenemos que  $a = u/h$ . Al final, la distribución de velocidad en el canal es lineal,

$$(2.3.1) \quad v = \frac{u}{h} y$$

La velocidad media del fluido definida como

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v dy$$

es

$$(2.3.2) \quad \bar{v} = \frac{1}{2} u$$

Según la ecuación (2.1.12)

$$\begin{aligned} P_i &= -\sigma_{ik}n_k \\ \sigma_{ik} &= -p\delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

tenemos que la componente normal de la fuerza sobre cualquiera de los planos es exactamente  $p$ , mientras que la fuerza de rozamiento tangencial sobre el plano  $y = 0$  es

$$(2.3.3) \quad \sigma_{xy} = \eta \frac{dv}{dy} = \eta \frac{u}{h}$$

y la fuerza sobre el plano  $y = h$  es  $-\eta u/h$ .

A continuación consideramos el flujo estacionario entre dos planos paralelos en presencia de un gradiente de presión. Escojemos las coordenadas como antes, el eje  $x$  es el de la dirección del movimiento del fluido. Las ecuaciones de Navier-Stokes, como la velocidad sólo depende de  $y$ , son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

La segunda ecuación demuestra que la presión es independiente de  $y$ , es decir, que es constante a través de la profundidad del fluido situado entre dos planos. El segundo miembro de la primera ecuación es sólo función de  $x$ , mientras que el primero sólo es función de  $y$ . Por tanto esta igualdad sólo puede verificarse si los dos miembros son constantes. Si  $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante}$  entonces  $p$  es una función lineal de la coordenada  $x$  a lo largo de la dirección del flujo.

Para la velocidad obtenemos

$$v = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) y^2 + ay + b$$

Determinamos las constantes a partir de las condiciones límite:  $v = 0$  en  $y = 0$

$$v = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y(y - h)$$

que por algún motivo que se me escapa, en el libro prefieren retorcer hasta convertirlo en

$$(2.3.4) \quad v = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left( \frac{1}{4}h^2 - \left( y - \frac{1}{2}h \right)^2 \right)$$

Así, la velocidad varía parabólicamente a través del fluido, alcanzando su valor máximo en la mitad. La velocidad media del fluido (promediada en toda la profundidad

del mismo es:

$$(2.3.5) \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dy = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{dp}{dx}$$

También podemos calcular la fuerza de rozamiento  $\sigma_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0}$  que actúa sobre uno de los planos fijos. La sustitución de (2.3.4) da

$$(2.3.6) \quad \sigma_{xy} = -\frac{1}{2} h \frac{dp}{dx}$$

Finalmente, consideramos el flujo estacionario en una tubería de sección recta arbitraria (que es la misma a lo largo de toda la longitud de la misma). Tomaremos el eje de la tubería como el eje  $x$ . La velocidad del fluido es en la dirección  $x$  en todos los puntos y es una función sólo de  $y$  y  $z$ . La ecuación de continuidad se satisface idénticamente, mientras que las componentes  $y$  y  $z$  de la ecuación de Navier-Stokes nos dan de nuevo

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

es decir, la presión es constante en toda la sección recta de la tubería. La componente  $x$  de la ecuación (2.1.7) nos da

$$(2.3.7) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx}$$

De nuevo se tiene la conclusión de que  $dp/dx = \text{constante}$ ; el gradiente de presión puede entonces escribirse como  $-\Delta p/l$ , donde  $\Delta p$  es la diferencia de presiones entre los extremos de la tubería y  $l$  su longitud.

La distribución de velocidades correspondiente al flujo de una tubería está determinada por una ecuación bidimensional de la forma  $\Delta v = \text{constante}$ . Esta ecuación se tiene que resolver con la condición límite  $v = 0$  en la periferia de la sección recta de la tubería. Resolveremos a continuación para una tubería de sección recta circular. Tomando el origen en el centro del círculo y usando coordenadas polares, tenemos por simetría que  $v = v(r)$ . Utilizando la expresión correspondientes a la laplaciana en coordenadas polares tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}$$

Integrando <sup>1</sup> obtenemos:

$$(2.3.8) \quad v = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \log r + b$$

En el centro de la tubería  $r = 0 \Rightarrow \log 0 = -\infty$ , lo que nos indica que  $a = 0$ . Para determinar  $b$ , utilizamos la condición de que  $v = 0$  en  $r = R$ , donde  $R$  es el radio de la tubería. En este caso:

$$(2.3.9) \quad v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Por lo que vemos que la distribución de velocidades a través de la tubería es parabólica.

La masa  $Q$  de fluido que pasa a través de una sección recta de la tubería por segundo se denomina *caudal*. A través de un elemento anular  $2\pi r dr$  del área de la sección recta pasa por segundo una masa  $\rho \cdot 2\pi r v dr$ , de donde

$$Q = 2\pi \int_0^R r v dr$$

Utilizando (2.3.9) obtenemos

$$(2.3.10) \quad Q = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l} R^4$$

La masa de fluido es proporcional a la cuarta potencia del radio de la tubería (*fórmula de Poiseuille*).

PROBS pag 15

## 2.4. Flujo entre cilindros en rotación

Consideramos ahora el movimiento de un fluido entre dos cilindros coaxiales infinitos de radios  $R_1$  y  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) girando alrededor de sus ejes con velocidades angulares  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Tomamos coordenadas cilíndricas  $r, \phi$  y  $z$ , con el eje  $z$  a lo largo

---

<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} d\left(r \frac{dv}{dr}\right) &= -Cr dr \\ r \frac{dv}{dr} &= -C \frac{r^2}{2} + a \\ dv &= -\frac{C}{2} r dr + \frac{a}{r} dr \\ v &= -\frac{C}{4} r^2 + a \log r + b \end{aligned}$$

donde  $C = \frac{\Delta p}{\eta l}$ .

de los ejes de los cilindros. Por la simetría del problema es evidente que

$$\begin{aligned} v_z = v_r &= 0 \\ v_\phi &= v(r) \\ p &= p(r) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas en este caso son

$$(2.4.1) \quad \frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}$$

$$(2.4.2) \quad \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0$$

La última ecuación tiene una solución de la forma  $r^n$ ; sustituyendo resulta  $n = \pm 1$ , de manera que

$$v = ar + \frac{b}{r}$$

Las constantes  $a$  y  $b$  se deducen de las condiciones límite: la velocidad del fluido debe coincidir con la velocidad de las superficies de los cilindros:  $v = R_1\Omega_1$  para  $r = R_1$  y  $v = R_2\Omega_2$  para  $r = R_2$ . Como resultado tenemos la distribución de velocidades:

$$(2.4.3) \quad v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}$$

A partir de la integración de (2.4.1) obtenemos la distribución de presiones.

Para  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$  tenemos simplemente que  $v = \Omega r$ , es decir, el fluido gira rígidamente con los cilindros. Cuando está ausente el cilindro exterior (es decir  $R_2 = \infty, \Omega_2 = 0$ ), tenemos  $v = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}$ .

La fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de área del cilindro interior está dirigida a lo largo de la tangente a su superficie y según (2.1.12) es igual a la componente  $\sigma'_{r\phi}$  del tensor de tensiones. Utilizando las fórmulas (2.1.5) se tiene

$$\begin{aligned} \sigma'_{r\phi}|_{r=R_1} &= \eta \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=R_1} = \\ &= -2\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned}$$

La fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del cilindro se obtiene multiplicando por  $2\pi R_1$ .

Las soluciones encontradas para los escenarios propuestos en las secciones (2.3) y (2.4) tienen en común que en estos casos el término no lineal  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  es nulo, de manera que para encontrar la distribución de velocidades estamos resolviendo ecuaciones lineales (lo que simplifica mucho el problema). Por este motivo todas las ecuaciones también satisfacen las ecuaciones de movimiento correspondientes a un fluido ideal incompresible. En las soluciones que hemos encontrado no aparece

el coeficiente de viscosidad, que sólo aparece en las fórmulas (como la (2.3.9)) que relacionan la velocidad con el gradiente de presiones del fluido. Como la presencia de un gradiente de presión se debe a la viscosidad, un fluido ideal podría fluir por una tubería aunque no existiera ningún gradiente de presión.

## 2.5. Ley de semejanza

El estudio del movimiento de fluidos viscosos permite obtener un cierto número de resultados importantes a partir de razonamientos sencillos que se refieren a las dimensiones de las diversas magnitudes físicas.

Estudiamos el movimiento de un cuerpo de una forma determinada a través de un fluido. Si el cuerpo no es una esfera, también debemos indicar la dirección del movimiento.

Los cuerpos de la misma forma son geoméricamente semejantes, ya que podemos obtener uno del otro cambiando todas las dimensiones lineales en la misma relación. Por ejemplo, si se da la forma del cuerpo, basta con especificar cualquiera de sus dimensiones lineales para determinar por completo sus dimensiones (el radio de una esfera o una tubería cilíndrica, el semieje de un esferoide de excentricidad determinada, etc).

Suponemos que el flujo es estacionario y el fluido incompresible.

De los parámetros que caracterizan el propio fluido, sólo aparece en las ecuaciones de Navier-Stokes la viscosidad cinemática  $\nu = \eta/\rho$ ; las funciones incógnitas que queremos encontrar son las ecuaciones de la velocidad  $\mathbf{v}$  y el cociente entre la presión y la densidad (constante)  $p/\rho$ . Además, el flujo depende de las condiciones límite, de la forma y dimensiones del cuerpo y de su velocidad a través del fluido.

Como suponemos que la forma del cuerpo es conocida, quedan determinadas sus propiedades geométricas mediante una sola dimensión lineal, que designaremos como  $l$ . Si la velocidad del flujo principal es  $u$ , entonces cualquier flujo queda determinado por tres parámetros,  $\nu, u$  y  $l$ . Estas magnitudes tienen las siguientes dimensiones:

$$\nu = \text{cm}^2/\text{s} \quad l = \text{cm} \quad u = \text{cm}/\text{s}$$

Sólo puede formarse una magnitud adimensional con las tres anteriores:  $ul/\nu$ . Esta combinación se denomina *número de Reynolds*

$$(2.5.1) \quad R = \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho ul}{\eta}$$

Cualquier otro parámetro adimensional puede escribirse en función de  $R$ .

A continuación mediremos las longitudes en función de  $l$  y la velocidad en función de  $u$ , es decir, introduciremos las magnitudes adimensionales  $r/l$ ,  $\mathbf{v}/u$ . Como el único parámetro adimensional es el número de Reynolds, la distribución



de velocidad obtenida resolviendo las ecuaciones del flujo incompresible viene dada por una función de la forma

$$(2.5.2) \quad \mathbf{v} = u \mathbf{f} \left( \frac{\mathbf{r}}{l}, R \right)$$

A partir de esta expresión se ve que, en dos flujos diferentes del mismo tipo, las velocidades  $\mathbf{v}/u$  son las mismas funciones del cociente  $\mathbf{r}/l$  si el número de Reynolds es el mismo para cada flujo. Los flujos que pueden obtenerse unos de otros cambiando la unidad de medida de las coordenadas de velocidades se dice que son *semejantes*. Los flujos del mismo tipo con los mismos números de Reynolds son semejantes. Esto se denomina *ley de semejanza*.

Puede escribirse una fórmula semejante a (2.5.2) para la distribución de presiones de los fluidos. Para ello, tenemos que construir alguna magnitud con las dimensiones de presión dividida por densidad a partir de  $\nu, l$  y  $u$ . Esta magnitud puede ser, por ejemplo  $u^2$ . Entonces podemos decir que  $p/\rho u^2$  es una función de la variable adimensional  $\mathbf{r}/l$  y del parámetro adimensional  $R$ . Así pues

$$(2.5.3) \quad p = \rho u^2 f \left( \frac{\mathbf{r}}{l}, R \right)$$

Del mismo modo podemos aplicar este razonamiento a magnitudes que caracterizan el flujo pero que no son funciones de las coordenadas. Por ejemplo, la fuerza de arrastre  $F$  que actúa sobre el cuerpo. El cociente adimensional de  $F$  con alguna magnitud formada con  $\nu, u, l, \rho$  y que tenga las dimensiones de fuerza debe ser una función sólo del número de Reynolds. Esta combinación puede ser, por ejemplo  $\rho u^2 l^2$ , de manera que

$$(2.5.4) \quad F = \rho u^2 l^2 f(R)$$

Si la fuerza de la gravedad tiene un efecto importante sobre el flujo, entonces éste está determinado por cuatro parámetros:  $l, u, \nu$  y  $g$ . Con estas magnitudes podemos construir dos magnitudes independientes adimensionales: el número de Reynolds y el *número de Froude*.

$$(2.5.5) \quad F = \frac{u^2}{lg}$$

En las fórmulas (2.5.1)-(2.5.4) la función  $f$  depende de dos parámetros,  $R$  y  $F$ . En este caso, dos flujos son semejantes únicamente si los dos números poseen los mismos valores.

Finalmente, en el caso de flujos **no estacionarios**, quedarán caracterizados por las magnitudes  $\nu, u, l$  y también por el tiempo característico  $\tau$  que determina la variación de flujo respecto al tiempo. A partir de estas cuatro magnitudes se pueden construir dos magnitudes adimensionales independientes, el número de Reynolds y

el número

$$(2.5.6) \quad S = \frac{u\tau}{l}$$

denominado *número de Strouhal*. En este caso, dos movimientos son semejantes si estos dos números tienen los mismos valores.

Si las oscilaciones del fluido se presentan espontáneamente (y no bajo la acción de una fuerza excitadora externa determinada) entonces el movimiento de un tipo determinado  $S$  será una función definida de  $R$ :

$$S = f(R)$$

## 2.6. Fórmula de Stokes

La ecuación de Navier-Stokes se simplifica mucho en el caso de números de Reynolds pequeños. En el caso de flujo estacionario de un fluido incompresible esta ecuación es

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

El término  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  es del orden de magnitud de  $u^2/l$ . La magnitud  $(\eta/\rho) \Delta \mathbf{v}$  es del orden de magnitud de  $\eta u/\rho l^2$ . El cociente de las dos es precisamente el número de Reynolds, por lo que podemos despreciar  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  si es pequeño el número de Reynolds. En este caso, la ecuación de movimiento se reduce a una ecuación lineal

$$(2.6.1) \quad \eta \Delta \mathbf{v} - \mathbf{grad} p = 0$$

Esta ecuación, junto a la de continuidad

$$(2.6.2) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

determina por completo el movimiento. También es interesante la ecuación

$$(2.6.3) \quad \Delta \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$$

que se obtiene tomando el rotacional de la ecuación (2.6.1).

Empezamos considerando el movimiento rectilíneo y uniforme de una esfera en un fluido viscoso. El problema del movimiento de una esfera es completamente equivalente al flujo que pasa alrededor de una esfera fija, teniendo el fluido una velocidad determinada  $\mathbf{u}$  en el infinito. La distribución de velocidades en el primer problema se obtiene del segundo restando simplemente la velocidad  $\mathbf{u}$ ; el fluido está entonces en reposo en el infinito, mientras que la esfera se mueve con velocidad  $-\mathbf{u}$ . Si consideramos el flujo como estacionario tenemos que el flujo pasa rodeando una esfera fija, pues si la esfera se mueve, entonces la velocidad del fluido en un punto cualquiera varía con el tiempo.

Debemos tener  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  en el infinito, de manera que hacemos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ , de manera que  $\mathbf{v}'$  se anule en el infinito. Como  $\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}' = 0$ , entonces puede escribirse como rotacional de un vector  $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A} + \mathbf{u}$ . El rotacional de un vector polar es un vector axial<sup>2</sup> y viceversa. Como la velocidad es un vector polar ordinario,  $\mathbf{A}$  debe ser un vector axial. Pero  $\mathbf{v}$  es un vector polar y  $\mathbf{A}$  sólo depende del radio vector  $\mathbf{r}$  (tomando el origen en el centro de la esfera) y del parámetro  $\mathbf{u}$ ; los dos vectores son polares. Además,  $\mathbf{A}$  debe ser una función lineal de  $\mathbf{u}$ . El único vector axial que puede construirse para un cuerpo con simetría total (la esfera) con dos vectores polares es el producto vectorial  $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ , por lo que  $\mathbf{A}$  debe tener la forma  $f'(r) \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ , donde  $f'(r)$  es una función escalar de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{n}$  es un vector unidad en la dirección del radio vector. El producto  $f'(r) \mathbf{n}$  puede escribirse como un gradiente  $\text{grad } f(r)$  de una función  $f(r)$ , de manera que la forma general de  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A} = \text{grad } f(r) \times \mathbf{u}$$

y la velocidad  $\mathbf{v}'$  como

$$\mathbf{v}' = \text{rot}(\text{grad } f \times \mathbf{u})$$

Como  $\mathbf{u}$  es constante,  $\text{grad } f \times \mathbf{u} = \text{rot}(f\mathbf{u})$ <sup>3</sup>, de manera que

$$(2.6.4) \quad \mathbf{v} = \text{rot rot}(f\mathbf{u}) + \mathbf{u}$$

Para determinar la función  $f$ , utilizamos la ecuación (2.6.3). Como

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot rot rot}(f\mathbf{u}) = (\text{grad div} - \Delta) \text{rot}(f\mathbf{u}) = -\Delta \text{rot}(f\mathbf{u})$$

(2.6.3) toma la forma  $\Delta^2 \text{rot}(f\mathbf{u}) = 0$ , pero como  $\mathbf{u} = \text{constante}$

$$\Delta^2(\text{grad } f \times \mathbf{u}) = (\Delta^2 \text{grad } f) \times \mathbf{u} = 0$$

de lo que deducimos que

$$(2.6.5) \quad \Delta^2 \text{grad } f = 0$$

Una primera integración da

$$\Delta^2 f = \text{constante}$$

<sup>2</sup>Un vector axial o pseudovector se transforma como un vector ordinario bajo una rotación propia, pero cambia de signo si se transforma como una reflexión (rotación impropia). Todos los vectores formados a partir de un producto vectorial son axiales.

<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \text{grad } f \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left( \frac{df}{dy} u_z - \frac{df}{dz} u_y \right) + \dots = \\ \text{rot}(f\mathbf{u}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ fu_x & fu_y & fu_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left( \frac{d(fu_z)}{dy} - \frac{d(fu_y)}{dz} \right) + \dots = \mathbf{i} \left( \frac{df}{dy} u_z - \frac{df}{dz} u_y \right) + \dots \end{aligned}$$

Esta constante debe ser nula. Como la velocidad  $\mathbf{v}$  debe anularse en el infinito, también deben hacerlo sus derivadas. La expresión  $\Delta^2 f$  contine cuatro derivadas de  $f$ , mientras que la velocidad se da en función de las segundas derivadas de  $f$ , con lo que tenemos

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \Delta f = 0$$

De manera que

$$\Delta f = 2 \frac{a}{r} + A$$

La constante  $A$  debe ser cero, si la velocidad se anula en el infinito. A partir de  $\Delta f = 2a/r$  tenemos

$$(2.6.6) \quad f = ar + \frac{b}{r}$$

Omitimos la constante aditiva, pues no tiene importancia (ya que la velocidad se obtiene a partir de  $f$  calculando derivadas).

Si sustituimos en (2.6.4), obtenemos

$$(2.6.7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3}$$

Determinamos las constantes  $a$  y  $b$  a partir de las condiciones límite: en la superficie de la esfera ( $r = R$ ) se anula la velocidad  $\mathbf{v} = 0$ , es decir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{R} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{R^3} = 0$$

Como esta ecuación debe cumplirse para todo  $\mathbf{n}$ , los coeficientes de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$  deben anularse:

$$1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} = 0 \quad -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} = 0$$

De donde obtenemos

$$a = \frac{3}{4}R \quad b = \frac{1}{4}R^3$$

Al final del día obtenemos

$$(2.6.8) \quad f = \frac{3}{4}Rr + \frac{1}{4} \frac{R^3}{r}$$

$$(2.6.9) \quad \mathbf{v} = -\frac{3}{4}R \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} - \frac{1}{4}R^3 \frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r^3} + \mathbf{u}$$

o en componentes esféricas:

$$(2.6.10) \quad \begin{aligned} v_r &= u \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ v_\theta &= -u \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \end{aligned}$$

Así obtenemos la distribución de velocidades alrededor de una esfera móvil. Para determinar la presión, sustituimos (2.6.4) en (2.6.1)

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} p = \eta \Delta \mathbf{v} &= \eta \Delta \mathbf{rot} \mathbf{rot} (f \mathbf{u}) = \\ &= \eta \Delta (\mathbf{grad} \mathbf{div} (f \mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f)\end{aligned}$$

Pero  $\Delta^2 f = 0$ , por lo que

$$\mathbf{grad} p = \mathbf{grad} (\eta \Delta \mathbf{div} (f \mathbf{u})) = \mathbf{grad} (\eta \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \Delta f)$$

de donde obtenemos

$$(2.6.11) \quad p = \eta \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \Delta f + p_0$$

donde  $p_0$  es la presión del fluido en el infinito. Sustituyendo  $f$  se tiene como expresión final

$$(2.6.12) \quad p = p_0 - \frac{3}{2} \eta \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{r^2} R$$

Utilizando las fórmulas anteriores podemos calcular la fuerza  $\mathbf{F}$  ejercida sobre la esfera por el fluido móvil (es decir, el arrastre sobre la esfera cuando se mueve a través del fluido). Para ello, tomamos coordenadas esféricas con el eje polar paralelo a  $\mathbf{u}$ . Por simetría, todas las magnitudes son únicamente función de  $r$  y del ángulo polar  $\theta$ . La fuerza  $\mathbf{F}$  es paralela a la velocidad  $\mathbf{u}$ . Podemos determinar la fuerza  $\mathbf{F}$  a partir de la ecuación (2.1.12). Tomando de esta fórmula las componentes normal y tangencial a la superficie de la fuerza ejercida sobre un elemento de la esfera y proyectando estas componentes en la dirección  $\mathbf{u}$ , tenemos

$$(2.6.13) \quad F = \oint (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df$$

donde la integración se realiza sobre toda la superficie de la esfera. Sustituyendo las expresiones (2.6.10) en las fórmulas

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \sigma'_{r\theta} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

encontramos que en la superficie de la esfera:

$$\sigma'_{rr} = 0 \quad \sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta}{2R} u \sin \theta$$

mientras que la presión (2.6.12) es

$$p = p_0 - \frac{3\eta}{2R} u \cos \theta$$

Al final, la integral (2.6.13) se reduce a  $F = \frac{3\eta u}{2R} df$ , o sea que

$$(2.6.14) \quad F = 6\pi R \eta u$$

Esta fórmula (denominada *fórmula de Stokes*) da el arrastre que actúa sobre una esfera que se mueve lentamente en un fluido. Observamos que el arrastre es proporcional a la primera potencia de la velocidad y de la dimensión lineal del cuerpo<sup>4</sup>.

**Esta dependencia del arrastre con la velocidad y la dimensión es válida para cuerpos que se mueven lentamente, aunque sean de otras formas.** La dirección del arrastre sobre un cuerpo de forma arbitraria no es la misma que la de la velocidad; la forma general de la relación entre  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{u}$  puede escribirse como

$$(2.6.15) \quad F_i = a_{ik} u_k$$

en donde  $a_{ik}$  es un tensor de rango dos independiente de la velocidad. El tensor es simétrico  $a_{ik} = a_{ki}$  en la aproximación lineal respecto a la velocidad.

La solución recién obtenida del flujo alrededor de una esfera no es válida a grandes distancias de ella, aunque el número de Reynolds sea pequeño. Para demostrarlo, estimaremos el valor del término  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  que despreciamos al deducir la ecuación de Navier-Stokes (2.6.1). A grandes distancias, la velocidad es  $\mathbf{u}$ . A partir de (2.6.9) las derivadas de la velocidad a estas distancias son del orden de  $uR/r^2$ , de manera que  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  es del orden de  $u^2 R/r^2$ . Los términos retenidos en la ecuación (2.6.1), por ejemplo  $(1/\rho) \mathbf{grad} p$  son del orden de  $\eta Ru/\rho r^3$ . La condición

$$\frac{u\eta R}{\rho r^2} \gg \frac{u^2 R}{r^2}$$

sólo es válida a distancias  $r \ll \frac{\nu}{u}$ , donde  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ . A distancias mayores no podemos despreciar los términos que hemos omitido y por tanto, la distribución de velocidades que hemos obtenido no es correcta.

Para obtener la distribución de velocidades a gran distancia de la esfera, podemos aproximar  $\mathbf{v} \sim \mathbf{u}$ , por lo que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \sim \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$ . Entonces, a distancias grandes:

$$(2.6.16) \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

A partir de la solución de esta ecuación se obtiene una ecuación más exacta para el arrastre sobre la esfera en la que se incluye el siguiente término del desarrollo del arrastre en potencias del número de Reynolds  $uR/\nu$ :

$$(2.6.17) \quad F = 6\pi\eta uR \left( 1 + \frac{3uR}{8\nu} \right)$$

<sup>4</sup>La fórmula para un elipsoide en movimiento lento es  $F = 16\eta Ru$  y para un disco moviéndose en su plano  $F = \frac{32\eta Ru}{3}$ .

Para resolver el mismo problema del flujo que rodea a un cilindro infinito con la corriente perpendicular a su eje, se ha utilizado la ecuación (2.6.16) desde el principio, pues la ecuación de Navier-Stokes (2.6.1) no tiene ninguna solución que satisfaga las condiciones límite en la superficie del cilindro y que al mismo tiempo se anule en el infinito. El arrastre por unidad de longitud del cilindro es

$$(2.6.18) \quad F = \frac{4\pi\eta u}{\frac{1}{2} - \gamma - \log \frac{uR}{4\nu}}$$

donde  $\gamma = 0,577$  es la constante de Euler.

## 2.7. Estela laminar

Cuando tenemos un flujo estacionario de un fluido alrededor de un cuerpo sólido, el flujo a grandes distancias detrás del cuerpo tiene características que pueden estudiarse independientemente de la forma del cuerpo.

Sea  $\mathbf{U}$  la velocidad constante de la corriente incidente, con dirección paralela al eje  $x$  con origen dentro del cuerpo. La velocidad del fluido real en un punto cualquiera puede escribirse como  $\mathbf{U} + \mathbf{v}$ , con  $\mathbf{v} = 0$  en el infinito.

A grandes distancias del cuerpo, la velocidad  $\mathbf{v}$  es diferente de cero sólo en una región estrecha cercana al eje  $x$ . Esta región se denomina *estela laminar* contiene las partículas del fluido que se mueven a lo largo de líneas de corriente que pasan muy cerca del cuerpo. Por tanto, el flujo en la estela es esencialmente rotacional. Por otra parte, la viscosidad apenas tiene influencia en los puntos de las líneas de corriente que no pasan cerca del cuerpo, y la vorticidad, que es cero en la corriente incidente, permanece prácticamente nula sobre esta línea de corriente como si se tratara de un fluido ideal. Por todo esto podemos considerar el flujo a grandes distancias del cuerpo como un flujo potencial en todas partes **excepto en la estela**.

A continuación, se deducen las fórmulas que relacionan las propiedades del flujo **en la estela** con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

El impulso total transportado por el fluido a través de una superficie cerrada cualquiera que rodea el cuerpo es igual a la integral del tensor densidad de flujo de impulso extendida a dicha superficie,  $\oint \Pi_{ki} df_k$ . Las componentes del tensor  $\Pi_{ik}$  son

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho(U_i + v_i)(U_k + v_k)$$

Escribimos la presión como  $p = p_0 + p'$ , donde  $p_0$  es la presión en el infinito. La integración del término constante  $p_0\delta_{ik} + \rho U_i U_k$  es cero, puesto que la integral vectorial  $\oint d\mathbf{f}$  respecto a una superficie cerrada es nula. También se anula la integral  $U_i \oint \rho v_k df_k$ : como la masa total del fluido en el volumen considerado es constante, el flujo de masa total  $\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$  a través de la superficie que rodea el volumen debe ser cero. Finalmente, la velocidad  $\mathbf{v}$  cuando estamos lejos del cuerpo es pequeña

comparada con  $\mathbf{U}$ ; por ello podemos despreciar el término  $\rho v_i v_k$  en  $\Pi_{ik}$  en comparación con  $\rho U_k v_i$  si la superficie en cuestión está suficientemente lejos del cuerpo. Así pues, el flujo del impulso total es

$$\oint (p' \delta_{ik} + \rho U_k v_i) df_k$$

Suponemos ahora que el volumen del fluido es el volumen entre dos planos infinitos con  $x = \text{constante}$ , uno delante del cuerpo y otro detrás, lejos. Cuando calculamos el flujo total del impulso la integral sobre la superficie *lateral* en el infinito es nula, ya que  $p' = \mathbf{v} = 0$  (en el infinito), y por tanto, es suficiente integrar sólo sobre estos dos planos. El flujo del impulso obtenido de esta manera es la diferencia entre el flujo del impulso total que entra a través del plano delantero y el que sale a través del plano trasero. Pero esta diferencia es también la cantidad de impulso que pasa por unidad de tiempo desde el fluido hasta el cuerpo, es decir, la fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre dicho cuerpo.

Así, las componentes de la fuerza  $\mathbf{F}$  son

$$\begin{aligned} F_x &= \left( \iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) (p + \rho U v_x) dy dz \\ F_y &= \left( \iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_y dy dz \\ F_z &= \left( \iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_z dy dz \end{aligned}$$

en donde la integración se extiende a los planos infinitos  $x = x_1$  (bastante detrás del cuerpo) y  $x = x_2$  (muy por delante de él).

Empezamos calculando la expresión correspondiente a  $F_x$ . En el exterior de la estela tenemos un flujo potencial y por tanto es válida la ecuación de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = \text{constante} \equiv p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2$$

o sea, despreciando el término  $\frac{1}{2} \rho v^2$  en comparación con  $\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}$

$$p' = -\rho U v_x$$

En esta aproximación se anula el integrando en  $F_x$  en todos los puntos del exterior de la estela. En otras palabras, la integral respecto al plano  $x = x_2$  (que está delante y no corta la estela) es nula y la integral extendida al plano  $x = x_1$  sólo es necesario realizarla en el área cubierta por la sección recta de la estela. Sin embargo, dentro de ésta, la variación de la presión  $p'$  es del orden de  $\rho v^2$ , es decir, pequeña en comparación con  $\rho U v_x$ . Así, al final, obtenemos que el arrastre que actúa sobre el cuerpo es

$$(2.7.1) \quad F_x = -\rho U \iint v_x dy dz$$



donde la integración se extiende sobre el área de la sección recta de la estela bastante detrás del cuerpo. Como es natural, la velocidad  $v_x$  de la estela es negativa: el fluido se mueve más lentamente que si estuviese ausente el cuerpo. Hay que destacar que la ecuación (2.7.1) da el déficit de caudal de fluido a través de la sección de la estela respecto del valor que tendría en ausencia del cuerpo.

Consideramos ahora la fuerza (componentes  $F_y$  y  $F_z$ ) que tienden a mover transversalmente el cuerpo. Esta fuerza se denomina *sustentación*. En el exterior de la estela, donde tenemos un flujo potencial, podemos escribir  $v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ ,  $v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ , siendo cero la integral extendida al plano  $x = x_2$  que no corta la estela:

$$\begin{aligned}\iint v_y dy dz &= \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} dy dz = 0 \\ \iint \frac{\partial \phi}{\partial z} dy dz &= 0\end{aligned}$$

porque  $\phi = 0$  en el infinito. Por tanto, encontramos para la sustentación:

$$\begin{aligned}F_y &= -\rho U \iint v_y dy dz \\ F_z &= -\rho U \iint v_z dy dz\end{aligned}\tag{2.7.2}$$

De nuevo, estas integrales se refieren sólo al área de la sección recta de la estela. Si el cuerpo tiene un eje de simetría (aunque no es necesario que deba ser una simetría axial completa) y si el flujo es paralelo a este eje, entonces el flujo que rodea al cuerpo también tiene un eje de simetría. En este caso, la sustentación es cero.

Ahora volvemos al flujo de la estela. Una estimación de los valores de diversos términos de la ecuación de Navier-Stokes muestra que el término  $\nu \Delta \mathbf{v}$  puede despreciarse, en general, a una distancia  $r$  del cuerpo tal que  $\frac{rU}{\nu} \gg 1$ ; estas son distancias en las que el flujo en el interior de la estela puede considerarse como flujo potencial. Sin embargo no es posible despreciar este término en el interior de la estela ni siquiera a esta distancia, puesto que las derivadas transversales  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial y^2$  y  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial z^2$  son grandes en comparación con  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial x^2$ .

El término  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  en la ecuación de Navier-Stokes es del orden de magnitud  $(U + v) \partial v / \partial x \sim Uv/x$  en la estela. El término  $\nu \Delta \mathbf{v}$  es del orden de  $\nu \partial^2 v / \partial y^2 \sim \nu v / Y^2$ , donde  $Y$  es la anchura de la estela, es decir, del orden de magnitud de la distancia respecto al eje  $x$ , en la cual la velocidad tiende marcadamente a cero. Si son comparables estas magnitudes tenemos:

$$Y \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\tag{2.7.3}$$

Esta cantidad es pequeña en comparación con  $x$ , pues hemos supuesto que  $\frac{Ux}{\nu} \gg 1$ . Así, la anchura de la estela laminar aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia respecto al cuerpo.

Para obtener cómo disminuye la velocidad cuando aumenta  $x$  en la estela, volvemos a la ecuación (2.7.1). La región de integración tiene un área del orden de  $Y^2$ . Por tanto, podemos estimar la integral como  $F_x \sim \rho U \nu Y^2$ , y utilizando la relación (2.7.3) obtenemos

$$(2.7.4) \quad v \sim \frac{F_x}{\rho \nu x}$$

## 2.8. La viscosidad de las suspensiones

Un fluido en el que están suspendidas numerosas partículas sólidas finas (formando una suspensión) puede considerarse un medio homogéneo si nos referimos a fenómenos cuyas longitudes características son grandes en comparación con el tamaño de las partículas. Dicho medio tiene una viscosidad efectiva  $\eta$  diferente de la viscosidad  $\eta_0$  del fluido en el que están las partículas en suspensión. El valor de  $\eta$  puede obtenerse cuando la concentración es pequeña (es decir, su volumen total es pequeño en comparación con el del fluido). El cálculo es relativamente sencillo en el caso de partículas esféricas.

Primero calculamos el efecto que tiene sobre un flujo o corriente con gradiente de velocidad constante la presencia de un glóbulo sólido en el fluido. Suponemos que el fluido sin perturbar está descrito por una distribución de velocidades lineal

$$(2.8.1) \quad v_{0i} = \alpha_{ik} x_k$$

donde  $\alpha_{ik}$  es un tensor simétrico constante. La presión del fluido es constante:

$$p_0 = \text{constante}$$

y en el futuro tomaremos  $p_0$  como cero, de manera que mediremos únicamente variaciones respecto al valor constante. Si el fluido es incompresible ( $\text{div}(\mathbf{v}_0) = 0$ ), la suma de los elementos diagonales del tensor  $\alpha_{ik}$  debe ser nula:

$$(2.8.2) \quad \alpha_{ii} = 0$$

Ahora suponemos que tenemos una pequeña esfera de radio  $R$  en el origen. La velocidad alterada del fluido es  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ , con  $\mathbf{v}_1$  que debe anularse en el infinito, pero que cerca de la esfera  $\mathbf{v}_1$  no es pequeña en comparación con  $\mathbf{v}_0$ . Por simetría de la corriente, la esfera permanece en reposo, de modo que la condición límite es  $\mathbf{v} = 0$  para  $r = R$ .

La solución para las ecuaciones del movimiento (2.6.1) a (2.6.3) se pueden obtener de una vez a partir de la solución (2.6.4) con la función  $f$  dada por (2.6.6) si nos damos cuenta que las derivadas espaciales de esta solución también son soluciones. En el caso de las suspensiones buscamos una solución que dependa de las componentes del tensor  $\alpha_{ik}$  de modo paramétrico (y no del vector  $\mathbf{u}$  como en la

sección (2.6)). Esta solución es:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{rot} \mathbf{rot} ((\alpha \cdot \mathbf{grad}) f) \\ p &= \eta_0 \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \Delta f}{\partial x_i \partial x_k}\end{aligned}$$

en donde  $(\alpha \cdot \mathbf{grad}) f$  es un vector cuyas componentes son  $\alpha_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}$ . Desarrollando estas expresiones y determinando las constantes  $a$  y  $b$  en la función  $f = ar + \frac{b}{r}$  de modo que satisfaga las condiciones límite en la superficie de la esfera, obtenemos las siguientes fórmulas para la velocidad y la presión:

$$(2.8.3) \quad v_{1i} = \frac{5}{2} \left( \frac{R^5}{r^4} - \frac{R^3}{r^2} \right) \alpha_{kl} n_i n_k n_l - \frac{R^5}{r^4} \alpha_{ik} n_k$$

$$(2.8.4) \quad p = -5\eta_0 \frac{R^5}{r^3} \alpha_{ik} n_i n_k$$

siendo  $\mathbf{n}$  un vector unidad en la dirección del radio vector.

Volviendo al problema de determinar la viscosidad efectiva de una suspensión, calculamos el valor promedio (respecto al volumen) del tensor densidad de flujo de impulso  $\Pi_{ik}$ , que en la aproximación lineal respecto a la velocidad es el mismo que el tensor de tensiones  $-\sigma_{ik}$ :

$$\overline{\sigma_{ik}} = \frac{1}{V} \int \sigma_{ik} dV$$

Podemos realizar la integración sobre el volumen  $V$  de una esfera y después ampliar el radio hasta el infinito. En primer lugar, tenemos la identidad:

$$(2.8.5) \quad \overline{\sigma_{ik}} = \eta_0 \left( \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}} \right) - p \delta_{ik} + \frac{1}{V} \int \left( \sigma_{ik} - \eta_0 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + p \delta_{ik} \right) dV$$

El integrando del segundo miembro es cero, dentro de las esferas sólidas. Como se supone que la concentración de la suspensión es pequeña, podemos calcular la integral para una sola esfera como si no hubiera más y luego multiplicar por la concentración  $c$  de la suspensión (que es el número de esferas por unidad de volumen). Si intentáramos integrar directamente, tendríamos que estudiar las tensiones internas de las esferas. Podemos evitarlo convirtiendo la integral de volumen en una integral de superficie extendida sobre una esfera alejada que está completamente dentro del fluido. Para ello, observamos que la ecuación del movimiento  $\partial \sigma_{ik} / \partial x_i = 0$  conduce a la identidad:

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial (\sigma_{il} x_k)}{\partial x_l}$$

de donde la transformación de la integral de volumen en una integral de superficie de

$$\sigma_{ik} = \eta_0 \left( \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}} \right) + c \oint (\sigma_{il} x_k df_l - \eta_0 (v_i df_k + v_k df_i))$$

Se ha omitido el término  $\bar{p}$  pues la presión media es cero;  $\bar{p}$  es un escalar que viene dado por una combinación lineal de componentes  $\alpha_{ik}$  y el único escalar que cumple esta condición es  $\alpha_{ii} = 0$ .

Al calcular la integral sobre una esfera de radio muy grande sólo es necesario conservar en (2.8.3) los términos de orden  $1/r^2$  para obtener la velocidad. Realizando la integral:

$$c\eta_0 20\pi R^3 (5\alpha_{lm} \overline{n_i n_k n_l n_m} - \alpha_{il} \overline{n_k n_l})$$

en donde la barra indica un promedio respecto a las direcciones del vector unidad  $\mathbf{n}$ . Al realizar el promedio <sup>5</sup> se obtiene, al final

$$(2.8.6) \quad \overline{\sigma_{ik}} = \eta_0 \left( \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}} \right) + 5\eta_0 \alpha_{ik} \frac{4}{3} \pi R^3 c$$

El cociente del segundo término al primero determina la corrección relativa requerida para dar la viscosidad efectiva de la suspensión. Si estamos interesados sólo en correcciones de primer orden, podemos tomar el primer término como si fuese  $2\eta_0 \alpha_{ik}$ . Entonces se obtiene como valor de la viscosidad efectiva de la suspensión

$$(2.8.7) \quad \eta = \eta_0 \left( 1 + \frac{5}{2} \phi \right)$$

en donde  $\phi = \frac{4}{3} \pi R^3 c$  es el cociente del volumen total de las esferas al volumen total de la suspensión, que es pequeño.

## 2.9. Movimiento oscilante en un fluido viscoso

Ahora estudiaremos las propiedades características del flujo de un cuerpo oscilando en un fluido viscoso.

Empezamos con un ejemplo sencillo: un fluido incompresible limitado por una superficie plana infinita que realiza una oscilación armónica simple en su propio plano con frecuencia  $\omega$ . Queremos encontrar el movimiento resultante del fluido. Consideramos la superficie sólida como el plano  $yz$  y la región del fluido como  $x > 0$ ; se toma el eje  $y$  en la dirección de la oscilación. La velocidad  $u$  de la superficie oscilante es una función del tiempo, de la forma  $A \cos(\omega t + \alpha)$ . Es conveniente escribir esta expresión como la parte real de una magnitud compleja

$$u = \text{re} (u_0 e^{-i\omega t})$$

en donde la constante  $u_0 = A e^{i\alpha}$  es, en general, compleja, pero que siempre puede hacerse real mediante una selección adecuada del origen de tiempo.

---

5

$$\begin{aligned} \overline{n_i n_k} &= \delta_{ik} \\ \overline{n_i n_k n_l n_m} &= \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) \end{aligned}$$

Siempre que en los cálculos intervengan sólo operaciones lineales respecto a la velocidad  $u$  podemos omitir el signo  $\text{re}(\dots)$  y proceder como si  $u$  fuese complejo, tomando la parte real en el resultado final. Así

$$(2.9.1) \quad u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}$$

La velocidad del fluido debe satisfacer la condición límite  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  para  $x = 0$ , es decir,  $v_x = v_z = 0$ ,  $v_y = u$ .

Es evidente, a partir de la simetría del problema, que todas las magnitudes dependerán sólo de la coordenada  $x$  y del tiempo  $t$ . En la ecuación de continuidad  $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$  y por tanto  $\partial v_x / \partial x = 0$ , de donde  $v_x = \text{constante} = 0$  (por las condiciones límite). Como todas las magnitudes son independientes de las coordenadas  $y$  y  $z$ , tenemos que  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}$  y como  $v_x = 0$ , tenemos que  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = 0$ . La ecuación de Navier-Stokes (2.1.7) se transforma en

$$(2.9.2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Esta ecuación es lineal. Su componente  $x$  es  $\partial p / \partial x = 0$ , es decir,  $p = \text{constante}$ . Por simetría, la velocidad  $\mathbf{v}$  tiene dirección  $y$  en todos los puntos. Para  $v_y = v$  tenemos, por (2.9.2)

$$(2.9.3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

que equivale a la ecuación de conducción térmica monodimensional. Ahora buscamos una solución que sea periódica en  $x$  y  $t$  de la forma

$$v = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

con una amplitud compleja  $u_0$ , de modo que  $v = u$  para  $x = 0$ . Sustituyendo en (2.9.3) encontramos  $i\omega = \nu k^2$ , de donde obtenemos

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \pm (i + 1) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

de manera que la velocidad  $v$  (es decir,  $v_y$ ) es

$$(2.9.4) \quad v = u_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x} e^{i(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x - \omega t)}$$

Hemos tomado  $k$  como si tuviese una parte imaginaria positiva, ya que de lo contrario, la velocidad aumentaría sin límite en el interior del fluido, lo que no es posible físicamente.

La solución obtenida representa una onda transversal: su velocidad  $v_y = v$  es perpendicular a la dirección de propagación. La propiedad más importante de esta onda es que se ve rápidamente amortiguada en el interior del fluido: la amplitud

disminuye exponencialmente cuando aumenta la distancia  $x$  a la superficie sólida, cuyo movimiento genera las ondas.

La distancia  $\delta$  en la cual la amplitud decae un factor de  $e$  se denomina *profundidad de penetración* de la onda. A partir de (2.9.4)

$$(2.9.5) \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

La profundidad de penetración disminuye al aumentar la frecuencia, pero crece con la viscosidad cinemática del fluido.

A continuación calculamos la fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de área del plano que oscila en el fluido viscoso. La dirección de esta fuerza coincide con el eje  $y$  y es igual a la componente  $\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$  del tensor de tensiones; el valor de la derivada debe tomarse en la superficie, es decir, en  $x = 0$ . Sustituyendo (2.9.4) obtenemos

$$(2.9.6) \quad \sigma_{xy} = \sqrt{\frac{1}{2}\omega\eta\rho} (i-1) u$$

Suponiendo que  $u_0$  es real y tomando la parte real de (2.9.6) tenemos

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega\eta\rho} u_0 \cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

Sin embargo, la velocidad de la superficie oscilante es  $u = u_0 \cos \omega t$ . Por tanto, existe una diferencia de fase entre la velocidad y la fuerza de rozamiento.

También es sencillo calcular el promedio (temporal) de la disipación de energía en el problema anterior. Esto puede hacerse mediante la fórmula general (2.2.3), pero en este caso es más sencillo calcular el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento. La energía disipada por unidad de tiempo y por unidad de área del plano oscilante es igual al valor medio del producto de la fuerza  $\sigma_{xy}$  por la velocidad  $u_y = u$ :

$$(2.9.7) \quad -\overline{\sigma_{xy}u} = \frac{1}{2}u_0^2 \sqrt{\frac{1}{2}\omega\eta\rho}$$

Este valor es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia de las oscilaciones y a la raíz cuadrada de la viscosidad.

También puede calcularse una solución explícita para el problema de un fluido puesto en movimiento mediante una superficie plana que se mueve en su plano de acuerdo con una ley  $u = u(t)$ . El resultado para la fuerza de rozamiento sobre la unidad de área de la superficie viene dada por

$$(2.9.8) \quad \sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}}$$

Ahora consideramos el caso general de un cuerpo oscilante de forma arbitraria. En el caso del plano oscilante, el término  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  de la ecuación de movimiento era idénticamente nulo. En el caso de un cuerpo de forma arbitraria esto no es así, pero supondremos que el término es pequeño y que puede despreciarse en comparación con el resto de términos.

Empezamos a partir de la ecuación lineal (2.9.2). Tomamos el rotacional en ambos miembros; el término  $\mathbf{rot grad p}$  se anula idénticamente, dando

$$(2.9.9) \quad \frac{\partial \mathbf{rot v}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{rot v}$$

es decir,  $\mathbf{rot v}$  satisface una ecuación de conducción térmica. Pero como hemos visto anteriormente, la solución es una disminución exponencial de la magnitud que satisface la ecuación. Por tanto podemos decir que la vorticidad disminuye hacia el interior del fluido. En otras palabras, el movimiento del fluido producido por oscilaciones del cuerpo es rotacional en una determinada capa alrededor del cuerpo, mientras que a distancias mayores varía rápidamente convirtiéndose en un flujo potencial. La profundidad de penetración del flujo rotacional es  $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ .

Tenemos dos casos límites importantes: la magnitud  $\delta$  puede ser grande o pequeña en comparación con las dimensiones del cuerpo oscilante. Suponemos que  $l$  es una magnitud del orden de la dimensión del cuerpo.

En primer lugar, estudiamos el caso  $\delta \gg l$ , lo que implica que  $l^2 \omega \ll \nu$ . Además, suponemos que el número de Reynolds es pequeño. Si  $a$  es la amplitud de las oscilaciones, la velocidad del cuerpo es del orden de  $a\omega$ . El número de Reynolds para este movimiento es  $\frac{\omega a l}{\nu}$ . Suponemos entonces que

$$(2.9.10) \quad l^2 \omega \ll \nu \quad \frac{\omega a l}{\nu} \ll 1$$

Este es el caso de frecuencias bajas de oscilación, lo que significa que la velocidad del cuerpo varía lentamente con el tiempo y que podemos despreciar la derivada  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  en la ecuación general del movimiento. El término  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  puede también despreciarse porque el número de Reynolds es pequeño.

Como no tenemos término  $\partial \mathbf{v} / \partial t$ , el flujo es estacionario. Así, para  $\delta \gg l$  puede considerarse el flujo como estacionario en un instante cualquiera. Esto significa que en cualquier instante el flujo es el mismo que aparecería si el cuerpo se moviera uniformemente con su velocidad instantánea. En el caso de una esfera oscilante en un fluido, por ejemplo, con una frecuencia que verifique las desigualdades (2.9.10) (donde  $l = R$ ), podemos decir que el arrastre sobre la esfera será el dado por la fórmula de Stokes (2.6.14) para el caso de un movimiento uniforme de la esfera con números de Reynolds pequeños.

En el otro extremo, cuando  $\delta \ll l$ , para poder despreciar el término  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  es necesario que la amplitud de las oscilaciones sea pequeña en comparación con

las dimensiones del cuerpo:

$$(2.9.11) \quad l^2 \omega \gg \nu \quad a \ll l$$

En este caso no es necesario que el número de Reynolds sea pequeño. La desigualdad anterior se obtiene estimando el valor de  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ . El operador  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})$  designa una derivación en la dirección de la velocidad. Sin embargo, cerca del cuerpo la velocidad es casi tangencial. En la dirección tangencial la velocidad varía apreciablemente sólo en distancias del orden de la dimensión del cuerpo, de donde

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \sim \frac{v^2}{l} \sim \frac{a^2 \omega^2}{l}$$

ya que la velocidad es del orden de  $a\omega$ . Sin embargo,  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  es del orden de  $v\omega \sim a\omega^2$ . Comparando las dos expresiones vemos que

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

si  $a \ll l$ . Los términos  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  y  $\nu \Delta \mathbf{v}$  se ven entonces que son del mismo orden.

A continuación estudiamos la naturaleza del flujo que rodea el cuerpo oscilante cuando se cumplen las condiciones (2.9.11). En una capa delgada cercana a la superficie del cuerpo el flujo es rotacional, pero en el resto del cuerpo el flujo es potencial. Por tanto, excepto en la capa cercana al cuerpo, el flujo en el resto de puntos viene dado por las ecuaciones:

$$(2.9.12) \quad \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{div} \mathbf{v} = 0$$

De aquí tenemos que  $\Delta \mathbf{v} = 0$  y la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación de Euler. Por tanto, el flujo es ideal en todas partes, excepto en la capa superficial. Como esta capa es delgada, al resolver las ecuaciones (2.9.12) para determinar el flujo tenemos que tomar como condiciones límites aquellas que deben satisfacerse en las superficies del cuerpo, es decir, que la velocidad del fluido es igual a la del cuerpo. Sin embargo las soluciones de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal no pueden satisfacer estas condiciones. Entonces podemos exigir únicamente que se cumpla la condición correspondiente para la componente normal a la superficie de la velocidad del fluido.

Aunque las ecuaciones (2.9.12) no se pueden aplicar en la capa superficial del fluido, la distribución de velocidades obtenida al resolverlas satisface la condición límite necesaria para la componente de velocidad normal y, por consiguiente, la variación real de esta componente carece de propiedades significativas cerca de la superficie. Se podría hallar la componente tangencial resolviendo la ecuación (2.9.12) y así se encuentra que tiene valores diferentes a la componente de velocidad correspondiente del cuerpo, aunque estas componentes de velocidad también deberían



ser iguales. De aquí que la componente de velocidad tangencial debe variar rápidamente en la capa superficial. Obtener esta variación es sencillo. Consideramos una porción cualquiera de la superficie del cuerpo, de dimensión grande en comparación con  $\delta$ , pero pequeña en comparación con la dimensión del cuerpo. Puede considerarse dicha parte como aproximadamente plana, y por tanto, podemos utilizar los resultados anteriores para una superficie plana. Suponemos que el eje  $x$  es normal a la parte considerada y que el eje  $y$  es paralelo a la componente de velocidad tangencial en dicho punto. Llamamos  $v_y$  a la componente tangencial de la velocidad del fluido relativa al cuerpo;  $v_y$  debe anularse en la superficie. Finalmente, sea  $v_0 e^{-i\omega_0 t}$  el valor de  $v_y$  que se encuentra al resolver las ecuaciones (2.9.12). A partir de los resultados obtenidos al principio de esta sección podemos decir que en la capa superficial la cantidad  $v_y$  tenderá a cero cuando nos acerquemos a la superficie de acuerdo con

$$(2.9.13) \quad v_y = v_0 e^{-i\omega t} \left( 1 - e^{-(1-i)x\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}} \right)$$

Finalmente, la cantidad total de energía disipada por unidad de tiempo viene dada por la integral

$$(2.9.14) \quad \overline{E_{kin}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}\eta\rho\omega} \oint |v_0|^2 df$$

extendida a toda la superficie del cuerpo oscilante.

Para acabar, haremos algunas consideraciones sobre el arrastre sobre los cuerpos que oscilan en un fluido viscoso. Si escribimos la velocidad en forma compleja  $u = u_0 e^{-i\omega_0 t}$  tenemos una fuerza de arrastre  $F$  proporcional a la velocidad  $u$ , y también compleja  $F = \beta u$ , donde  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$  es una constante compleja. Esta expresión puede escribirse como la suma de dos términos con coeficientes reales:

$$(2.9.15) \quad F = (\beta_1 + i\beta_2) u = \beta_1 u - \beta_2 \frac{\dot{u}}{\omega}$$

uno de los términos es proporcional a la velocidad  $u$  y otro a la aceleración  $\dot{u}$ .

El promedio temporal de la disipación de la energía viene dado por el producto medio del arrastre por la velocidad, donde primero tenemos que tomar las partes reales de las expresiones dadas anteriormente, es decir,  $u = \frac{1}{2} (u_0 e^{-i\omega t} + u_0^* e^{i\omega t})$  y  $F = \frac{1}{2} (u_0 \beta e^{-i\omega t} + u_0^* \beta^* e^{i\omega t})$ . Como los valores medios de  $e^{\pm 2i\omega t}$  son nulos, tenemos

$$(2.9.16) \quad \overline{Fu} = \frac{1}{4} (\beta + \beta^*) |u_0|^2 = \frac{1}{2} \beta_1 |u_0|^2$$

Vemos que la disipación de energía surge únicamente de la parte real de  $\beta$ ; la parte correspondiente a la fuerza de arrastre (2.9.15), proporcional a la velocidad, puede denominarse *parte disipativa*. La otra parte del arrastre, proporcional a la aceleración y determinada por la parte imaginaria de  $\beta$  no origina disipación de energía y puede denominarse *parte inercial*.

Las mismas consideraciones pueden realizarse sobre el momento de fuerzas sobre un cuerpo que realiza oscilaciones de rotación en un fluido viscoso.

### 2.10. Amortiguamiento de las ondas de gravedad (E)

Ahora consideramos el movimiento oscilante que se produce cerca de la superficie (por ejemplo, las ondas de gravedad). Suponemos que son válidas las condiciones (2.9.11) cambiando la dimensión  $l$  por la longitud de onda  $\lambda$ :

$$(2.10.1) \quad \lambda^2 \omega \gg \nu \quad a \gg \lambda$$

donde  $a$  es la amplitud de onda y  $\omega$  su frecuencia. Podemos decir que el flujo es rotacional sólo en una capa de superficie delgada, mientras que en el resto del fluido tenemos un flujo potencial (como en el caso del fluido ideal).

El movimiento del fluido viscoso debe satisfacer las condiciones límite (2.1.14) en la superficie libre, lo que exige que se anulen ciertas combinaciones de las derivadas especiales de la velocidad. El flujo obtenido resolviendo las ecuaciones de la dinámica para los fluidos ideales no verifica estas condiciones. Como en la sección anterior, al estudiar el comportamiento de  $v_y$ , llegamos a la conclusión que sus derivadas espaciales disminuyen rápidamente en el interior de una capa superficial delgada, aunque esto no implica un gradiente de velocidades grande, como pasa cerca de una superficie sólida.

A continuación calculamos la disipación de energía de una onda de gravedad. En este caso debemos considerar la energía mecánica, que incluye la energía cinética y la potencial del campo gravitatorio, a diferencia del caso anterior donde sólo considerábamos la cinética. Sin embargo, está claro que la presencia (o ausencia) de un campo gravitatorio no influye en los procesos de rozamiento interno en el fluido. Por tanto, la variación temporal de la energía mecánica viene dada por la misma fórmula (2.2.3):

$$\dot{E}_{mec} = -\frac{1}{2}\eta \int \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV$$

Al calcular la integral para una onda de gravedad, hay que tener en cuenta que, al ser pequeño el volumen de la región superficial de flujo de rotación y mientras que el gradiente de velocidad no sea grande ahí, puede ignorarse esta región, a diferencia de lo que sucedía en el caso de oscilaciones de una superficie sólida. En otras palabras, la integración se extiende a todo el volumen del fluido, que se mueve como si fuera ideal (como hemos dicho antes).

El flujo de una onda de gravedad en el caso de un flujo ideal ya se obtuvo en la sección (1.12). Como tenemos un flujo potencial

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

por lo que

$$\dot{E}_{mec} = -2\eta \int \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 dV$$

El potencial  $\phi$  tiene la forma

$$\phi = \phi_0 \cos(kx - \omega t + \alpha) e^{-kz}$$

Estamos interesados en el valor medio respecto al tiempo  $\overline{\dot{E}_{mec}}$ . Si observamos que el valor medio de un seno y un coseno al cuadrado son iguales, tenemos

$$(2.10.2) \quad \overline{\dot{E}_{mec}} = -8\eta k^4 \int \overline{\phi^2} dV$$

Podemos calcular la energía mecánica  $E_{mec}$  en el caso de una onda de gravedad gracias a un teorema de la mecánica que dice que, en un sistema cualquier que realiza pequeñas oscilaciones (es decir, de pequeña amplitud), la energía cinética y la energía potencial media son iguales. Por tanto, podemos escribir  $\overline{E_{mec}}$  como el doble de la energía cinética:

$$\overline{E_{mec}} = \rho \int \overline{v^2} dV = \rho \int \overline{\left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2} dV$$

de donde

$$(2.10.3) \quad \overline{E_{mec}} = 2\rho k^2 \int \overline{\phi^2} dV$$

El amortiguamiento de las ondas se caracteriza por el *coeficiente de amortiguamiento*  $\gamma$  definido como

$$\gamma = \frac{\overline{\dot{E}_{mec}}}{2\overline{E_{mec}}}$$

En el transcurso del tiempo la energía de la onda disminuye de acuerdo con la ley  $\overline{E_{mec}} = \text{constante} \times e^{-2\gamma t}$ ; como la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, ésta disminuye como  $e^{-\gamma t}$ .

Utilizando (2.10.2) y (2.10) tenemos

$$(2.10.4) \quad \gamma = 2\nu k^2$$

Sustituyendo la expresión (1.12.7) para la relación entre el número de onda y la frecuencia, obtenemos

$$(2.10.5) \quad \gamma = \frac{2\nu\omega^4}{g^2}$$

el **coeficiente de amortiguamiento para ondas de gravedad**.

## Turbulencia

### 3.1. Estabilidad del flujo estacionario (B)

Para resolver las ecuaciones del flujo estacionario para fluidos viscosos se tienen que hacer aproximaciones (como el de considerar números de Reynolds pequeños) para simplificar las dificultades matemáticas, lo que hace que las soluciones obtenidas sean de aplicación limitada. Sin embargo, tiene que haber una solución estacionaria exacta de las ecuaciones de la dinámica de fluidos para cualquier problema con condiciones externas estacionarias (para cualquier valor de los números de Reynolds).

Pero ni siquiera todas las soluciones de las ecuaciones del movimiento, aunque sean exactas, pueden producirse en la naturaleza. Estos flujos no sólo deben verificar las ecuaciones de la dinámica de fluidos sino que también tienen que ser estables. Para que el flujo sea estable es necesario que si se producen pequeñas perturbaciones, éstas tiendan a disminuir con el tiempo. En caso contrario, el flujo es inestable.

El estudio de la estabilidad de un flujo determinado respecto a perturbaciones infinitamente pequeñas se realiza de la siguiente manera. Aplicamos una pequeña perturbación no estacionaria  $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$  sobre una solución estacionaria  $\mathbf{v}_0(x, y, z)$ , de manera que la velocidad resultante  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$  satisfaga las ecuaciones del movimiento. Obtenemos  $\mathbf{v}_1$  sustituyendo en las ecuaciones la velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$  y la presión  $p = p_0 + p_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{v}_0$  y  $p_0$  satisfacen:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_0 &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p_0 + \nu \Delta \mathbf{v}_0 \\ \text{div } \mathbf{v}_0 &= 0\end{aligned}$$

Si omitimos los términos superiores al primer orden en  $\mathbf{v}_1$  tenemos:

$$(3.1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p_1 + \nu \Delta \mathbf{v}_1$$

$$\text{div } \mathbf{v}_1 = 0$$

**La condición límite es que  $\mathbf{v}_1$  se anule en las superficies sólidas.**

Entonces  $\mathbf{v}_1$  satisface un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes que son funciones sólo de las coordenadas y no del tiempo. La solución puede representarse como una suma de soluciones particulares en las que  $\mathbf{v}_1$  depende del tiempo como  $e^{-i\omega t}$ . Las *frecuencias*  $\omega$  de las perturbaciones no son arbitrarias, sino que se determinan resolviendo las ecuaciones (3.1.1) con las condiciones límite apropiadas. En general, estas frecuencias son complejas. Existen valores de  $\omega$  cuyas partes imaginarias son positivas, en las que  $e^{-i\omega t}$  aumentará indefinidamente con el tiempo. En otras palabras, estas perturbaciones aumentarán con el tiempo, dando lugar a un flujo inestable. Para que el flujo perturbado sea estable, es necesario que estas *frecuencias* sean negativas (así disminuirán exponencialmente con el tiempo).

Matemáticamente, el estudio de la estabilidad es muy complicado y no existe una solución teórica general al problema.

Los resultados experimentales parecen indicar que para números de Reynolds más grandes que un determinado *número de Reynolds crítico*  $R_{cr}$  **es imposible tener un flujo estacionario estable**. Este número de Reynolds crítico no es universal, sino es diferente en cada tipo de flujo.

### 3.2. Establecimiento de la turbulencia <sup>1</sup>

Consideramos el flujo no estacionario que se establece como resultado de la inestabilidad absoluta del flujo estacionario para números de Reynolds grandes. Empezamos estudiando las propiedades de este flujo para números ligeramente mayores que  $R_{cr}$ . Para  $R < R_{cr}$  las “frecuencias” complejas  $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$  son negativas para todas las perturbaciones posibles de velocidad pequeña ( $\gamma_1 < 0$ ). Para  $R = R_{cr}$  existe una frecuencia cuya parte imaginaria es cero. Para  $R > R_{cr}$  la parte imaginaria es positiva, pero si  $R \geq R_{cr}$ , la parte imaginaria es pequeña en comparación con la parte real  $\gamma_1 \ll \omega_1$ .

La función  $\mathbf{v}_1$  correspondiente a esta frecuencia es de la forma:

$$(3.2.1) \quad \mathbf{v}_1 = A(t) \mathbf{f}(x, y, z)$$

donde  $\mathbf{f}$  es una función compleja de las coordenadas y  $A(t)$  la “amplitud” compleja.

$$(3.2.2) \quad A(t) = \text{constante} \times e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t}$$

---

<sup>1</sup>Sólo páginas 115 y 116 (ver Guía de la Asignatura)

Pero esta expresión para  $A(t)$  sólo es válida durante un tiempo corto después de que desaparezca el flujo estacionario; el factor  $e^{\gamma_1 t}$  aumenta rápidamente con el tiempo, mientras que el método para determinar  $\mathbf{v}_1$  dado en la sección (3.1), que dió como resultado las ecuaciones (3.2.1) y (3.2.2) sólo es válido cuando  $\mathbf{v}_1$  es pequeño. Como es natural, el módulo de la “amplitud” del flujo no estacionario  $|A|$  en realidad no aumenta sin límite, sino que tiene un valor finito. Para  $R \geq R_{cr}$  este valor finito es pequeño y puede determinarse. Vamos a ello.

Primero obtenemos la derivada:  $\frac{d|A|^2}{dt} \simeq 2\gamma_1 |A|^2$  para valores muy pequeños de  $t$ , mientras (3.2.2) sigue siendo válida. Esta expresión es exactamente el primer término de un desarrollo de potencias de  $A$  y  $A^*$ . Cuando aumenta  $|A|$  (siendo todavía pequeño), debemos tener en cuenta los siguientes términos del desarrollo (que serán de tercer orden en  $A$ ). Pero lo que nos interesa no es el valor exacto de  $\frac{d|A|^2}{dt}$ , sino en su promedio temporal tomado en tiempo grandes comparados con el periodo  $\frac{2\pi}{\omega_1}$  del factor  $e^{-i\omega_1 t}$ ; como  $\omega_1 \gg \gamma_1$ , este periodo es pequeño en comparación con el tiempo  $1/\gamma_1$  necesario para que el módulo  $|A|$  varíe apreciablemente. Sin embargo, los términos de tercer orden deben contener el factor periódico y por tanto, se anulan al promediar. En los términos de cuarto orden se incluye uno que es proporcional a  $A^2 A^{*2} = |A|^4$ , que también se anula al promediar. Así, hasta los términos de cuarto orden:

$$(3.2.3) \quad \overline{\frac{d|A|^2}{dt}} = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4$$

donde  $\alpha$  puede ser positivo o negativo.

Suponemos que  $\alpha$  es positivo. No hemos puesto barras encima de  $|A|^2$  y  $|A|^4$  porque el promedio sólo corresponde a un intervalo de tiempo corto en comparación con  $1/\gamma_1$ . Por la misma razón, al resolver la ecuación supondremos que no hay “barra” tampoco encima de la derivada. La solución para la ecuación (3.2.3) es

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{constante} \times e^{-2\gamma_1 t}$$

Claramente,  $|A|^2$  tiene a un límite finito:

$$(3.2.4) \quad |A|_{max}^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha}$$

La magnitud  $\gamma_1$  es función del número de Reynolds. Cerca de  $R_{cr}$  puede desarrollarse como una serie de potencias de  $R - R_{cr}$ . Pero  $\gamma_1(R_{cr}) = 0$  por definición del número de Reynolds crítico. De aquí que el primer término del desarrollo sea nulo y tenemos hasta el primer orden  $\gamma_1 \simeq \text{constante} \times (R - R_{cr})$ . Sustituyendo en (3.2.4) vemos que el módulo de la amplitud  $|A|$  es proporcional a la raíz cuadrada de  $R - R_{cr}$ .

$$(3.2.5) \quad |A|_{max} \sim \sqrt{R - R_{cr}}$$

Resumiendo; la inestabilidad absoluta del flujo cuando  $R > R_{cr}$  resulta en un flujo periódico no estacionario. Si  $R \geq R_{cr}$  el flujo puede representarse como un flujo periódico  $\mathbf{v}_1(x, y, z, t)$  sobre un flujo estacionario  $\mathbf{v}_0(x, y, z)$ . El flujo periódico  $\mathbf{v}_1$  tiene una amplitud pequeña pero finita que aumenta con  $R$  proporcionalmente a la raíz cuadrada de  $R - R_{cr}$ . La distribución de velocidades en este flujo es de la forma:

$$(3.2.6) \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{f}(x, y, z) e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)}$$

en donde  $\mathbf{f}$  es una función compleja de las coordenadas y  $\beta_1$  es una determinada fase inicial. Para valores grandes de  $R - R_{cr}$  la separación de la velocidad  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{v}_1$  deja de tener significado. Entonces tenemos simplemente un flujo periódico con frecuencia  $\omega_1$ .

### 3.3. Estabilidad del flujo entre cilindros en rotación <sup>4</sup>

Esta sección no aparece indicada en la Guía de la Asignatura.

### 3.4. Estabilidad del flujo en una tubería (L)

En la Guía de la Asignatura sólo se recomienda la lectura.

### 3.5. Inestabilidad de las discontinuidades tangenciales (L)

En la Guía de la Asignatura sólo se recomienda la lectura.

### 3.6. Turbulencia totalmente desarrollada (B)

El flujo turbulento a números de Reynolds suficientemente grandes se caracteriza por la presencia de una variación extremadamente irregular de la velocidad con el tiempo en cada punto. Este fenómeno se denomina *turbulencia totalmente desarrollada*. La velocidad fluctúa continuamente alrededor de un determinado valor medio y la amplitud de esta variación no es, en general, pequeña en comparación con la propia velocidad. Estas mismas variaciones irregulares se producen entre diferentes puntos del flujo en un instante determinado. Las trayectorias de las partículas en un flujo turbulento son extremadamente complicadas, dando como resultado una amplia mezcla del fluido.

El flujo turbulento tiene un número muy grande de grados de libertad. Los valores de las fases iniciales  $\beta_j$ , que corresponden a estos grados de libertad, se determinan mediante las condiciones iniciales del flujo. No tiene demasiado sentido especificar las condiciones iniciales exactas para tantas magnitudes, así que no se plantea el problema de esta manera. En vez de eso, se realiza un enfoque estadístico desde un punto de vista macroscópico. Para dar una descripción exacta de

---

<sup>4</sup>Este apartado (sección 28) no aparece en la Guía de la Asignatura

la variación respecto al tiempo de la distribución de velocidades del fluido móvil sería necesario dar los valores de todas las fases iniciales  $\beta_j$ ; entonces se conocerían los valores de todas las fases  $\phi_j = \omega_j t + \beta_j$  en cada instante. Hemos visto que, pasado un intervalo de tiempo suficientemente largo, el fluido pasa a través de estados arbitrariamente próximos a cualquier estado definido por una selección posible cualquiera de los valores simultáneos de las fases  $\phi_j$ . De aquí deducimos que en el flujo turbulento, las condiciones iniciales no tienen ningún efecto pasado un tiempo suficientemente largo, así que lo mejor es realizar un estudio estadístico. Todavía no se ha desarrollado ninguna reoría completa cuantitativa de la turbulencia, aunque se mostrarán varios resultados cualitativos importantes.

Introducimos el concepto de velocidad media, obtenida a partir del promedio de la velocidad en intervalos largos de tiempo en cada punto. Al promediar, la variación irregular de la velocidad se suaviza y la velocidad media varía suavemente de un punto a otro. En lo que sigue, designamos esta velocidad media por  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}$ . La diferencia  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$  entre la velocidad verdadera y la velocidad media varía irregularmente de la manera característica propia de la turbulencia; la denominamos *parte fluctuante* de la velocidad.

Ahora nos fijamos en el movimiento regular que se superpone al flujo medio. Este movimiento se puede imaginar como una superposición de *remolinos* o *torbellinos turbulentos* de diferentes tamaños, entendiendo por “tamaño del torbellino” el orden de magnitud de la distancia en la que la velocidad varía apreciablemente. Cuando el número de Reynolds aumenta, primero aparecen grandes remolinos; cuando más pequeños sean los remolinos, más tarde aparecen. Para números de Reynolds muy grandes, se presentan remolinos de todos los tamaños. Los remolinos más grandes juegan una parte importante en cualquier flujo turbulento, siendo estos remolinos del orden de la región en la que tiene lugar el flujo. En lo que sigue, designaremos por  $l$  este orden de magnitud para un flujo determinado cualquiera. Estos grandes remolinos tienen las mayores amplitudes. La velocidad en ellos es comparable con la variación de la velocidad media a lo largo de la distancia  $l$ . Designamos mediante  $\Delta u$  el orden de magnitud de esta variación. Las frecuencias correspondientes a estos remolinos son del orden de  $u/l$ , cociente entre la velocidad media  $u$  (y no de su variación  $\Delta u$ ) y la dimensión  $l$ . Es la frecuencia lo que determina el periodo con el que se reproduce la imagen del movimiento cuando se observa en un sistema de referencia fijo. Sin embargo, relativamente a dicho sistema, la imagen o esquema completo se mueve con el fluido a una velocidad del orden de  $u$ .

Los remolinos menores, que corresponden a frecuencias grandes, participan en el flujo turbulento con amplitudes mucho menores. Pueden considerarse como una estructura detallada fina superpuesta sobre los remolinos turbulentos fundamentales



grandes. Sólo una parte comparativamente pequeña de la energía cinética total del fluido radica en estos remolinos pequeños.

Con esta imagen de la turbulencia como una superposición de remolinos grandes y pequeños, podemos obtener una conclusión respecto al modo de variación de la velocidad fluctuante desde un punto a otro en un instante cualquiera. En distancias grandes (comparables con  $l$ ), la variación de la velocidad fluctuante viene dada por la velocidad de los remolinos grandes, y por tanto, es comparable con  $\Delta u$ . En distancias pequeñas (en comparación con  $l$ ), viene determinada por los remolinos pequeños, y por tanto es pequeña comparada con  $\Delta u$ . Obtenemos la misma descripción si consideramos la variación de la velocidad con el tiempo en un punto dado cualquiera. En intervalos de tiempo cortos (en comparación con  $T \sim l/u$ ), la velocidad no varía apreciablemente, mientras que en intervalos largos, varía en cantidades del orden de  $\Delta u$ .

La longitud  $l$  aparece como una dimensión característica en el número de Reynolds  $R$ , que determina las propiedades del flujo dado. Además, podemos introducir el concepto cualitativo de los números de Reynolds correspondientes a remolinos turbulentos de diversos tamaños. Si  $\lambda$  es el orden de magnitud del tamaño de un remolino dado y  $v_\lambda$  el orden de magnitud de su velocidad, entonces el número de Reynolds correspondiente se define como  $R_\lambda \sim v_\lambda \frac{\lambda}{\nu}$ . Este número es más pequeño cuanto más pequeño sea el tamaño del remolino.

Cuando se tienen números de Reynolds grandes, los números de Reynolds  $R_\lambda$  de los remolinos grandes también son altos. Sin embargo, números de Reynolds grandes corresponden a viscosidades pequeñas. Por tanto, podemos sacar la conclusión de que en el caso de los remolinos grandes, que son la base de las turbulencias, la viscosidad carece de importancia y puede hacerse cero, de modo que el **movimiento del remolino obedece la ecuación de Euler**. En particular se deduce que **no existe ninguna disipación apreciable de energía en remolinos grandes**.

La viscosidad del fluido resulta importante sólo en el caso de remolinos más pequeños, con número de Reynolds comparables con la unidad. Llamamos  $\lambda_0$  al tamaño de estos remolinos pequeños. La disipación de energía se produce en estos remolinos, que carecen de importancia respecto al esquema o modelo general del flujo turbulento.

Es decir, la energía pasa de los remolinos grandes a otros más pequeños sin que prácticamente se produzca ninguna disipación en este proceso. Podemos decir que existe un flujo continuo de energía desde los remolinos grandes a los pequeños, es decir, de las frecuencias grandes a las pequeñas. Este flujo de energía se disipa en los remolinos más pequeños, en donde se transforma la energía cinética en calor <sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Para que se mantenga un estado estacionario es necesario que haya fuentes externas de energía que suministren energía de modo continuo a los remolinos grandes.

Como la viscosidad del fluido sólo tiene importancia en el caso de remolinos pequeños, podemos decir que ninguna de las magnitudes que pertenecen a los remolinos de tamaño  $\lambda > \lambda_0$  puede depender de  $\nu$  (o lo que es lo mismo, esas cantidades no deben variar si se modifica  $\nu$  manteniendo el resto de condiciones de movimiento). Esto reduce el número de propiedades del flujo turbulento y da como resultado el que los razonamientos de semejanza, en los que intervienen las dimensiones de las magnitudes disponibles, resulten muy importantes en la investigación de la turbulencia.

Aplicamos estos razonamientos para determinar el orden de magnitud de la disipación de energía en el flujo turbulento. Sea  $\epsilon$  la disipación media de energía en el flujo turbulento por unidad de masa de fluido y por unidad de tiempo. Esta energía se extrae de los remolinos grandes, desde donde se transfiere a los remolinos menores hasta que se disipa en los remolinos de tamaño  $\sim \lambda_0$ . Por tanto, aunque la disipación se debe al final a la viscosidad, sólo podemos determinar el orden de magnitud para aquellas magnitudes que caracterizan a los remolinos grandes. Estas son la densidad del fluido  $\rho$ , la dimensión  $l$  y la velocidad  $\Delta u$ . A partir de estas tres magnitudes sólo podemos formar otra que posea las dimensiones de  $\epsilon$ , es decir,  $cm^2/s^3$ :

$$(3.6.1) \quad \epsilon \sim \frac{(\Delta u)^3}{l}$$

y esta expresión determina el orden de magnitud de la disipación de energía del flujo turbulento.

Otra manera de verlo es decir que podemos describir un fluido turbulento diciendo que tiene una *viscosidad turbulenta*  $\nu_{turb}$  (diferente a la verdadera viscosidad cinética  $\nu$ ).  $\nu_{turb}$  caracteriza las propiedades del flujo turbulento y su orden de magnitud está determinado por  $\rho$ ,  $\Delta u$  y  $l$ ; la única magnitud que puede formarse con las dimensiones de la viscosidad dinámica es

$$(3.6.2) \quad \nu_{turb} \sim l \Delta u$$

El cociente entre la viscosidad turbulenta y la viscosidad ordinaria es  $\nu_{turb}/\nu \sim R$ , es decir, aumenta con el número de Reynolds.

La disipación de energía  $\epsilon$  se expresa en función de  $\nu_{turb}$  por medio de:

$$(3.6.3) \quad \epsilon \sim \nu_{turb} \left( \frac{\Delta u}{l} \right)^2$$

de acuerdo con la definición normal de viscosidad. Mientras que  $\nu$  determina la disipación de energía en función de las derivadas espaciales de la verdadera velocidad,  $\nu_{turb}$  la relaciona con el gradiente ( $\sim \frac{\Delta u}{l}$ ) de la velocidad media.

Podemos aplicar razonamientos de semejanza para determinar el orden de magnitud  $\Delta p$  de la variación de la presión en la región del flujo turbulento. La única magnitud que tiene la dimensión de la presión y que puede formarse con  $\rho, l$  y  $\Delta u$  es  $\rho (\Delta u)^2$ , por lo que

$$(3.6.4) \quad \Delta p \sim \rho (\Delta u)^2$$

### 3.7. Turbulencia local (B)

Ahora consideramos las propiedades de la turbulencia considerando los tamaños de los remolinos  $\lambda$  en el caso de que sean pequeños en comparación con el tamaño fundamental del remolino  $l$ . A estas propiedades las llamaremos propiedades *locales* de la turbulencia. Consideramos el flujo lejos de todas las superficies sólidas (o lo que es lo mismo, el flujo a distancias grandes en comparación con  $\lambda$ ).

La turbulencia a pequeña escala, lejos de los cuerpos, es isótropa. Esto significa que en regiones de dimensiones pequeñas comparadas con  $l$  las propiedades del flujo turbulento son independientes de la dirección; en particular no dependen de la dirección de la velocidad media.

Hay que destacar que cuando hablamos de las propiedades del flujo turbulento en una región del flujo pequeña nos referimos al movimiento relativo de las partículas de fluido en esa región y no el movimiento absoluto de la región como un todo, que se debe a los remolinos mayores.

Utilizando razonamientos de semejanza pueden obtenerse resultados importantes relativos a las propiedades locales de la turbulencia.

Primero, determinamos qué parámetros intervienen en las propiedades del flujo turbulento en regiones pequeñas comparadas con  $l$  pero grandes en comparación con las distancias  $\lambda_0$ , en las que la viscosidad del fluido comienza a ser importante. Después estudiaremos lo que sucede a distancias intermedias.

Los parámetros que intervienen en las propiedades del flujo turbulento son la densidad del fluido  $\rho$  y la disipación de energía por unidad de tiempo y masa del fluido,  $\epsilon$ .

Hemos visto que  $\epsilon$  es el *flujo de energía* que pasa continuamente de los remolinos mayores a los menores. De aquí que, aunque la disipación se deba a la viscosidad del fluido y se produzca en los remolinos pequeños, la magnitud  $\epsilon$  viene determinada por las propiedades de los remolinos grandes. Suponemos que (para valores de  $\rho$  y  $\epsilon$  dados) las propiedades locales de la turbulencia son independientes de la dimensión  $l$  y de la velocidad  $\Delta u$  del flujo como un todo. Tampoco puede aparecer la viscosidad del fluido  $\nu$  (ya que vimos que no influían en las distancias  $\lambda \gg \lambda_0$  que estamos considerando).

Vamos a determinar el orden de magnitud  $v_\lambda$  de la variación de la velocidad de la turbulencia en distancias del orden de  $\lambda$ . Esta distancia debe obtenerse a partir de  $\rho$ ,  $\epsilon$  y  $\lambda$  únicamente. A partir de estas tres magnitudes sóloxs podemos construir otra con dimensiones de velocidad  $(\epsilon\lambda)^{\frac{1}{3}}$  por lo que

$$(3.7.1) \quad v_\lambda \sim (\epsilon\lambda)^{\frac{1}{3}} \quad \text{Ley de Kolmogorov y Obukhov}$$

Este resultado se conoce como *ley de Kolmogorov y Obukhov* y demuestra que la variación de la velocidad a lo largo de una distancia pequeña es proporcional a la raíz cúbica de la distancia. También puede considerarse la magnitud  $v_\lambda$  como la velocidad de los remolinos turbulentos de tamaño del orden  $\lambda$ .

A continuación planteamos el problema de manera distinta para determinar el orden de la magnitud  $v_\tau$  de la variación de velocidad en un punto determinado a lo largo de un intervalo de tiempo  $\tau$  que es corto en comparación con el tiempo  $T \sim l/u$  que caracteriza el flujo como un todo. Como existe un flujo medio neto, cualquier parte del fluido que esté en un punto determinado se desplazará durante el intervalo de tiempo  $\tau$  una distancia  $\tau u$ , donde  $u$  es la velocidad media. Así podemos obtener la magnitud requerida  $v_\tau$  sustituyendo directamente  $\lambda$  por  $\tau u$  en (3.7.1):

$$(3.7.2) \quad v_\tau \sim (\epsilon\tau u)^{\frac{1}{3}}$$

Así, la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo  $\tau$  es proporcional a la raíz cúbica de dicho intervalo.

Designamos  $v'_\tau$  a la variación de la velocidad de una parte del fluido cuando se mueve en el espacio. Esta variación sólo puede depender de  $\rho$ ,  $\epsilon$  que determinan las propiedades de la turbulencia y del propio  $\tau$ . La única combinación que tiene dimensiones de velocidad es

$$(3.7.3) \quad v'_\tau \sim (\epsilon\tau)^{\frac{1}{2}}$$

A diferencia de la variación de la velocidad en un punto determinado  $v_\lambda$ , vemos que  $v'_\tau$  es proporcional a la raíz cuadrada de  $\tau$  y no a su raíz cúbica. Por tanto, en el caso de  $\tau$  pequeño en comparación con  $T$ ,  $v'_\tau < v_\tau$ .

Utilizando la expresión (3.6.1) para  $\epsilon$  podemos volver a escribir (3.7.1) como

$$(3.7.4) \quad v_\lambda \sim \Delta u \left( \frac{\lambda}{l} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Y de la misma manera  $v_\tau$

$$(3.7.5) \quad v_\tau \sim \Delta u \left( \frac{\tau}{T} \right)^{\frac{1}{3}}$$

en donde  $T \sim l/u$ .

Ahora vamos a determinar a qué distancia empieza a ser importante la viscosidad del fluido. Estas distancias  $\lambda_0$  deteminan también el orden de magnitud del

tamaño de los remolinos más pequeños en el flujo turbulento (denominada *escala interna* de la turbulencia, a diferencia de la *escala externa*  $l$ ). Para determinar  $\lambda_0$  formamos el número de Reynolds  $R_\lambda \sim v_\lambda \frac{\lambda}{\nu}$ ; utilizando (3.7.4) tenemos

$$R_\lambda \sim \Delta u \frac{\lambda^{\frac{4}{3}}}{\nu l^{\frac{1}{3}}}$$

Introduciendo el número de Reynolds  $R \sim l \frac{\Delta u}{\nu}$  para el flujo como un todo, podemos reescribir esta magnitud como  $R_\lambda \sim R \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{\frac{4}{3}}$ . El orden de magnitud de  $\lambda_0$  es aquel para el cual  $R_{\lambda_0} \sim 1$ , de donde:

$$(3.7.6) \quad \lambda_0 \sim \frac{l}{R^{\frac{3}{4}}}$$

Puede obtenerse la misma expresión formando la única combinación de  $\epsilon$ ,  $\rho$  y  $\nu$  con dimensiones de longitud,  $\lambda_0 \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$  y expresando  $\epsilon$  en función de  $\Delta u$  y mediante (3.6.1).

Al final lo importante es que la escala interna de la turbulencia es inversamente proporcional a  $R^{3/4}$ . Para la velocidad correspondiente tenemos

$$(3.7.7) \quad v_{\lambda_0} \sim \frac{\Delta u}{R^{1/4}}$$

que disminuye cuando  $R$  aumenta.

Finalmente, el orden de magnitud de las frecuencias correspondientes a los remolinos de este tamaño es  $\omega_0 \sim u/\lambda_0$ , o sea

$$(3.7.8) \quad \omega_0 \sim \frac{u R^{3/4}}{l}$$

Esta expresión nos da el orden de magnitud del extremo superior del espectro de frecuencias de la turbulencia; el extremo inferior corresponde a frecuencias del orden de  $u/l$ . Así, el margen de frecuencias aumenta con el número de Reynolds proporcionalmente a  $R^{3/4}$ .

Siguiendo razonamientos similares podemos determinar el orden de magnitud del número de grados de libertad de un flujo turbulento. Sea  $n$  el número de grados de libertad por unidad de volumen de fluido;  $n$  tiene dimensiones de  $1/cm^3$ . Este número sólo puede depender de  $\rho$ ,  $\epsilon$  y de la viscosidad  $\nu$ , ya que ésta determina el límite inferior de las dimensiones de los remolinos turbulentos. A partir de estas tres magnitudes sólo podemos formar una que tenga las dimensiones  $1/cm^3$ ,  $(\epsilon/\nu^3)^{3/4}$ , que resulta ser exactamente  $1/\lambda_0^3$  como era previsible. Así tenemos

$$(3.7.9) \quad n \sim \frac{1}{\lambda_0^3} \sim \frac{R^{9/4}}{l^3}$$

Obtenemos el número total  $N$  de grados de libertad multiplicando  $n$  por el volumen de la región del fujo turbulento, que es del orden de  $l^3$ :

$$(3.7.10) \quad N \sim R^{9/4}$$

Para acabar, consideramos las propiedades del flujo en regiones cuya dimensión  $l$  es pequeña en comparación con  $\lambda_0$ . En estas regiones el flujo es regular y su velocidad varía suavemente, por lo que podemos desarrollar  $v_\lambda$  en serie de potencias de  $\lambda$ . Si nos quedamos sólo con el primer término obtenemos  $v_\lambda = \text{constante} \times \lambda$ . El orden de magnitud de la constante es  $v_{\lambda_0}/\lambda_0$  ya que para  $\lambda \sim \lambda_0$  debemos tener que  $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$ . Sustituyendo las expresiones (3.7.6) y (3.7.7) obtenemos

$$(3.7.11) \quad v_\lambda \sim \Delta u R^{1/2} \frac{\lambda}{l}$$

También podríamos haber obtenido esta fórmula directamente igualando dos expresiones para la disipación de la energía  $\epsilon$ : la expresión (3.6.1)  $(\Delta u)^3/l$  que determina  $\epsilon$  en función de las magnitudes que caracterizan los remolinos grandes y la expresión  $\nu (v_\lambda/\lambda)^2$  que determina  $\epsilon$  en función del gradiente de velocidades ( $\sim v_\lambda/\lambda$ ) para los remolinos en los que realmente se produce disipación de la energía.

### 3.8. Correlación de velocidades (G)

La fórmula (3.7.1) determina cualitativamente la *correlación de velocidades* en la turbulencia local, es decir, la relación entre las velocidades que existen en dos puntos vecinos. A continuación se definen algunas magnitudes que van a servir para caracterizar cuantitativamente esta correlación. Una de estas cantidades puede ser el tensor:

$$(3.8.1) \quad B_{ik} = \overline{(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})}$$

en donde  $\mathbf{v}_2$  y  $\mathbf{v}_1$  son las velocidades del fluido en puntos vecinos y la barra designa la operación de promediar respecto al tiempo. El radio vector desde el punto 1 al 2 se designa por  $\mathbf{r}$ ; suponemos que  $r = |\mathbf{r}| \ll l$  (pero no necesariamente grande en comparación con la escala interna de la turbulencia  $\lambda_0$ ).

Como la turbulencia local es isótropa,  $B_{ik}$  no puede depender de la velocidad espacial. El único vector que puede aparecer en la expresión correspondiente a  $B_{ik}$  es  $\mathbf{r}$ . Es decir, en  $B_{ik}$  sólo puede aparecer el módulo de  $\mathbf{r}$ , el tensor unidad  $\delta_{ik}$  y el vector unitario  $\mathbf{n}$  en la dirección  $\mathbf{r}$ . La forma más general de un tensor de rango dos de este tipo es:

$$(3.8.2) \quad B_{ik} = A(r) \delta_{ik} + B(r) n_i n_k$$

Tomamos los ejes con uno de ellos coincidiendo con la dirección de  $\mathbf{n}$ , llamamos a la componente de la velocidad en esa dirección  $v_r$  y la componente perpendicular a  $\mathbf{n}$

$v_t$ . La componente  $B_{rr}$  es el valor medio del cuadrado de la velocidad relativa de dos partículas de fluido vecinas a lo largo de la línea que las une. Del mismo modo  $B_{tt}$  es el valor medio del cuadrado de la velocidad transversal de una partícula respecto a la otra, mientras que  $B_{rt}$  es el valor medio del producto de ambas componentes de la velocidad. Como  $n_r = 1, n_t = 0$  tenemos a partir de (3.8.2)

$$(3.8.3) \quad B_{rr} = A + B \quad B_{tt} = A \quad B_{rt} = 0$$

El siguiente paso es determinar una relación entre  $B_{rr}$  y  $B_{tt}$ . Recordamos que la variación de velocidad a lo largo de distancias pequeñas se debe principalmente a los remolinos pequeños. Las propiedades de la turbulencia local no dependen de los remolinos grandes. Por tanto, para calcular el tensor  $B_{ik}$  basta tomar el caso particular de un flujo turbulento completamente isótropo y homogéneo, en el que la velocidad media del fluido es cero.

Desarrollando los paréntesis en (3.8.1) tenemos

$$B_{ik} = \overline{v_{1i}v_{1k}} + \overline{v_{2i}v_{2k}} - \overline{v_{1i}v_{2k}} - \overline{v_{1k}v_{2i}}$$

Como el flujo es completamente homogéneo e isótropo, tenemos que  $\overline{v_{1i}v_{1k}} = \overline{v_{2i}v_{2k}}$  y  $\overline{v_{1i}v_{2k}} = \overline{v_{1k}v_{2i}}$ , de manera que

$$(3.8.4) \quad B_{ik} = 2\overline{v_{1i}v_{1k}} - 2\overline{v_{1i}v_{2k}}$$

Derivamos la expresión respecto a las coordenadas del punto 2:

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2v_{1i} \frac{\partial v_{2k}}{\partial x_{2k}}$$

Pero debido a la ecuación de continuidad,  $\partial v_{2k}/\partial x_{2k} = 0$ ,  $\partial B_{ik}/\partial x_{2k} = 0$ . Como  $B_{ik}$  es una función sólo de las componentes de  $x_i = x_{2i} - x_{1i}$  del vector  $\mathbf{r}$ , la derivación respecto a  $x_{2k}$  es equivalente a derivar respecto a  $x_k$ . Sustituyendo (3.8.2) tenemos, después de un cálculo simple, que  $A' + B' + 2\frac{B}{r} = 0$ , donde la prima indica la derivada respecto de  $r$ . Sustituyendo (3.8.3), podemos escribir esta expresión como  $B'_{rr} + 2\frac{(B_{rr}-B_{tt})}{r} = 0$ , de donde se obtiene al final la relación entre  $B_{rr}$  y  $B_{tt}$ :

$$(3.8.5) \quad 2rB_{tt} = \frac{d(r^2B_{rr})}{dr}$$

A distancias  $r$  grandes en comparación con  $\lambda_0$  la diferencia de velocidad es proporcional a  $r^{1/3}$ , de acuerdo con (3.7.1), de manera que las componentes de  $B_{ik}$  para dicho valor de  $r$  son proporcionales a  $r^{2/3}$ . Sustituyendo en (3.8.5)  $B_{rr} = \text{constante} \times r^{2/3}$ ,  $B_{tt} = \text{constante} \times r^{2/3}$  obtenemos una relación

$$(3.8.6) \quad B_{tt} = \frac{4}{3}B_{rr}$$

Para distancias  $r$  pequeñas en comparación con  $\lambda_0$  la diferencia de velocidades es proporcional a  $r$  y por tanto  $B_{tt}$  y  $B_{rr}$  son proporcionales a  $r^2$ . La fórmula (3.8.5)

nos da entonces la relación

$$(3.8.7) \quad B_{tt} = 2B_{rr}$$

A estas distancias ( $r \ll \lambda_0$ ),  $B_{rr}$  y  $B_{tt}$  pueden expresarse separadamente en función de la disipación media de energía  $\epsilon$ . Si escribimos  $B_{rr} = ar^2$ , donde  $a$  es una constante y combinamos (3.8.2), (3.8.3) y (3.8.4) obtenemos

$$\overline{v_{1i}v_{2k}} = \overline{v_{1i}v_{1k}} - ar^2\delta_{ik} + \frac{1}{2}ar^2n_in_k$$

Y derivando esta relación tenemos

$$\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2i}}{\partial x_{2l}} = 15a \quad \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2i}} = 0$$

Como estas expresiones son válidas para un valor de  $r$  arbitrariamente pequeño, podemos hacer que  $x_{1i} = x_{2i}$ , de donde

$$\overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right)^2} = 15a \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} = 0$$

Sin embargo, según la fórmula general (2.2.3) <sup>6</sup>, tenemos como valor de la disipación media de la energía:

$$\epsilon = \frac{1}{2}\nu \overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_i}\right)^2} = \nu \left[ \overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\right)^2} + \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_i}} \right] = 15a\nu$$

es decir,  $a = \epsilon/15\nu$ . Por tanto, se obtienen las siguientes relaciones que nos dan  $B_{rr}$  y  $B_{tt}$  en función de la disipación media de energía:

$$(3.8.8) \quad B_{tt} = \frac{2}{15}\epsilon \frac{r^2}{\nu} \quad B_{rr} = \frac{1}{15}\epsilon \frac{r^2}{\nu}$$

(Correlación triple de velocidades, pag32 del PDF y 141 del libro en adelante, la omito).

### 3.9. Región de turbulencia y el fenómeno de separación (G)

El flujo turbulento es, en general, rotacional. Sin embargo la distribución de la vorticidad ( $\omega \equiv \mathbf{rot} \mathbf{v}$ ) en el fluido tiene ciertas peculiaridades en un flujo turbulento (para  $R$  muy grande): en el flujo turbulento *estacionario* que rodea los cuerpos, puede normalmente dividirse el volumen total del fluido en dos regiones separadas. En una de ellas el flujo es rotacional mientras que en la otra la vorticidad es cero y tenemos un flujo potencial. Así, la vorticidad es no nula únicamente en una parte del fluido.

El hecho de que esta región limitada de flujo rotacional pueda existir es una consecuencia de que pueda considerarse el flujo turbulento como el movimiento

<sup>6</sup>Esta es la ecuación (2.2.3) a la que hace referencia:  $\dot{E}_k = -\frac{1}{2}\eta \int \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV$



de un fluido ideal que satisface las ecuaciones de Euler. En la sección (1.8) que, en el caso del movimiento de un fluido ideal, es válida la ley de conservación de la circulación. En particular, si en un punto cualquiera de una línea de corriente  $\omega = 0$ , entonces es válida igualmente en todos los puntos de dicha línea de corriente. Inversamente, si en un punto de una línea de corriente  $\omega \neq 0$ , entonces  $\omega \neq 0$  en toda la línea de corriente. Esto muestra claramente que existen regiones limitadas de flujo rotacional e irrotacional que son compatibles con las ecuaciones de movimiento si la región del flujo rotacional es de tal forma que las líneas de corriente no salgan de la zona rotacional. Dicha distribución de  $\omega$  será estable y la vorticidad valdrá cero más allá de la superficie de separación.

Una de las propiedades de la región del flujo turbulento rotacional es que el intercambio de fluido entre esta región y el espacio que la rodea sólo puede producirse en una dirección. El fluido puede entrar en esta región procedente de la región de flujo potencial, pero no puede abandonarla.

Aunque los razonamientos realizados no son una prueba de lo que se ha afirmado en esta sección, experimentalmente se ha confirmado que existen zonas limitadas de flujo turbulento rotacional.

El flujo es turbulento tanto en el caso de la región rotacional como en el de la irrotacional. Sin embargo, la naturaleza de la turbulencia es diferente en las dos regiones. Vamos a ver el porqué de esta diferencia. El flujo potencial obedece la ecuación de Laplace,  $\Delta\phi = 0$ . Suponemos que el flujo es periódico en el plano  $xy$ , de manera que en  $\phi$  intervienen  $x$  e  $y$  a través de un factor de la forma  $e^{ik_1x+ik_2y}$ . Entonces

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -(k_1^2 + k_2^2)\phi = -k^2\phi$$

y como la suma de las derivadas de segundo orden debe ser nula, la derivada segunda de  $\phi$  respecto a  $z$  debe ser igual a  $\phi$  multiplicada por un coeficiente positivo:  $\partial^2\phi/\partial z^2 = k^2\phi$ . La dependencia de  $\phi$  con  $z$  viene dada entonces por un factor de amortiguamiento de la forma  $e^{-kz}$  para  $z > 0$ . Es decir, si el flujo potencial es periódico en un plano, debe amortiguarse en la dirección perpendicular a dicho plano. Además, cuanto mayor sean  $k_1$  y  $k_2$  (es decir, menor el periodo del flujo en el plano  $xy$ ), más rápidamente se verá amortiguado el flujo a lo largo del eje  $z$ . Todos estos razonamientos permanecen cualitativamente válidos en los casos en los que el movimiento no es estrictamente periódico, pero tiene alguna cualidad periódica.

A partir del resultado anterior obtenemos lo siguiente: fuera de la región de flujo rotacional deben amortiguarse los remolinos turbulentos y deben hacerlo tanto más rápidamente cuanto menor sea su tamaño. En otras palabras, los remolinos pequeños no llegan a penetrar muy lejos en la región de flujo potencial. Así, en esta región sólo tienen importancia los remolinos grandes. Éstos se ven amortiguados

a distancias del orden de la dimensión (transversal) de la región rotacional, que coincide con la escala de turbulencia en este caso. A distancias mayores que esta dimensión no existe prácticamente turbulencia y el flujo puede considerarse como laminar.

Anteriormente habíamos visto que la disipación de energía en el flujo turbulento se produce en los remolinos más pequeños; en los remolinos grandes no interviene ninguna disipación apreciable, por lo que es posible aplicar la ecuación de Euler. Por tanto, la disipación de energía se produce principalmente en la región de flujo turbulento rotacional y muy poco en el exterior de esta región.

Recordando todas estas propiedades del flujo rotacional e irrotacional llamaremos, de ahora en adelante a la región de flujo turbulento rotacional simplemente *región de flujo turbulento* o *región turbulenta*.

La región turbulenta debe estar limitada en alguna dirección por parte de la superficie del cuerpo, alrededor del cual tiene lugar el flujo. La línea que limita esta parte de la superficie se denomina *línea de separación*. A partir de ella empieza la superficie de separación entre el fluido turbulento y el resto del mismo. La formación de una región turbulenta en el flujo que rodea un cuerpo se denomina *fenómeno de separación*.

La forma de la región turbulenta queda determinada por las propiedades del flujo en el cuerpo principal del fluido (no en la vecindad inmediata de la superficie). Una teoría completa de la turbulencia (que todavía no existe) debería permitir determinar la forma de esta región utilizando las ecuaciones del movimiento para un fluido ideal, dada la posición de la línea de separación en la superficie del cuerpo. Sin embargo, la posición real de la línea de separación está determinada por las propiedades del flujo en la proximidad inmediata de la superficie (conocida como *capa límite*) donde la viscosidad juega una parte vital (y que se estudiará más adelante).

### 3.10. Chorro turbulento (?)

Esta sección no aparece en la Guía de la Asignatura.

### 3.11. Estela turbulenta (E)

Cuando se tienen números de Reynolds  $R \gg R_{cr}$  en un flujo que rodea a un cuerpo sólido, se forma detrás del mismo una región muy larga de flujo turbulento. Esta región se denomina *estela turbulenta*. A distancias grandes en comparación con la dimensión del cuerpo se puede determinar la forma de la estela y el modo en el que disminuye en ella la velocidad del fluido.

Como en el estudio de la estela laminar (en la sección 2.7 en la página 63), llamamos  $\mathbf{U}$  a la velocidad del chorro incidente y tomamos la dirección de  $\mathbf{U}$  como

eje  $x$ . La velocidad del fluido en un punto cualquiera, promediada respecto a las fluctuaciones turbulentas se escribe  $\mathbf{U} + \mathbf{u}$ . Si  $a$  es la anchura media de la estela, queremos calcular  $a(x)$ . Si no existe sustentación, a grandes distancias del cuerpo la estela tiene simetría axial y una sección recta circular. En este caso,  $a$  puede ser el radio de la estela. Si existe sustentación, se selecciona una dirección en el plano  $yz$  y la estela no tiene simetría axial a ninguna distancia del cuerpo.

La componente de velocidad longitudinal del fluido en una estela es del orden de  $\mathbf{U}$ , mientras que la componente transversal es del orden de cierto valor medio  $u$  de la velocidad turbulenta. El ángulo formado por las líneas de corriente y el eje  $x$  es del orden de  $u/U$ . La estela termina en aquellas líneas de corriente del movimiento turbulento de rotación que no puede atravesar. De aquí se deduce que el ángulo entre el límite de la estela y el eje  $x$  es también del orden de  $u/U$ . Por tanto

$$(3.11.1) \quad \frac{da}{dx} \sim \frac{u}{U}$$

A continuación utilizamos las fórmulas (2.7.1) <sup>7</sup> y (2.7.2) <sup>8</sup> que determinan las fuerzas sobre el cuerpo en función de integrales de la velocidad del fluido en la estela (interpretando ahora la velocidad como su valor medio). La región de integración de estas integrales es del orden de  $a^2$ , por lo que una estimación de la integral nos da  $F \sim \rho U u a^2$ , donde  $F$  es del orden del arrastre o de la sustentación. Por tanto

$$(3.11.2) \quad u \sim \frac{F}{\rho U a^2}$$

Sustituyendo en (3.11.1) se tiene  $da/dx \sim F/\rho U^2 a^2$ , a partir de la cual se obtiene por integración

$$(3.11.3) \quad a \sim \left( \frac{Fx}{\rho U^2} \right)^{1/3}$$

De manera que vemos que la anchura de la estela aumenta proporcionalmente a la raíz cúbica de la distancia al cuerpo. Para el valor de la velocidad  $u$ , a partir de (3.11.2) y (3.11.3) tenemos

$$(3.11.4) \quad u \sim \left( \frac{FU}{\rho x^2} \right)^{1/3}$$

Es decir, la velocidad media del fluido en la estela es inversamente proporcional a  $x^{2/3}$ .

---

<sup>7</sup> $F_x = -\rho U \iint v_x dy dz$   
<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} F_y &= -\rho U \iint v_y dy dz \\ F_z &= -\rho U \iint v_z dy dz \end{aligned}$$

El flujo en cualquier sección recta de la estela está caracterizado por el número de Reynolds  $R \sim \frac{\rho u}{\nu}$ . Sustituyendo (3.11.2) y (3.11.3) se obtiene

$$R \sim \frac{F}{\nu \rho U a} \sim \left( \frac{F^2}{\rho^2 U x \nu^3} \right)$$

Como vemos  $R$  no es constante a lo largo de la estela. A distancias suficientemente grandes del cuerpo,  $R$  resulta ser tan pequeño que el flujo en la estela deja de ser turbulento. Más allá de este punto, tenemos una estela laminar (como en la sección (2.7)).

Para acabar, se comentan algunas propiedades general de la distribución de velocidades alrededor del cuerpo. Tanto en el interior como en el exterior de la turbulencia la velocidad (que siempre entendemos como  $\mathbf{u}$ ) disminuye cuando nos alejamos del cuerpo. Pero la velocidad longitudinal  $u_x$  desciende más rápidamente  $\sim 1/x^2$  fuera de la estela que en su interior. Por tanto podemos suponer que lejos del cuerpo  $u_x$  es cero en el exterior de la estela:  $u_x$  disminuye desde cierto valor máximo en el eje de la estela hasta cero en sus límites. Las componentes transversales  $u_y, u_z$  en los límites son del mismo orden de magnitud que en el interior de la estela, disminuyendo rápidamente cuando nos alejamos de la estela una distancia determinada del cuerpo.

### 3.12. Teorema de Joukowski (E)

La distribución de velocidades desarrollada alrededor de un cuerpo no es válida en casos excepcionales, en donde el espesor de la estela formada detrás del cuerpo es muy pequeña en comparación con su anchura. Se forma una estela de este tipo en el flujo que rodea a cuerpos cuya sección transversal al flujo es muy alargada. Entre estos cuerpos podemos incluir, en particular, las *alas*, es decir, cuerpos cuya anchura o *envergadura* es grande en comparación con sus otras dimensiones.

En este caso no existe ninguna razón por la cual la componente de la velocidad  $u_y$  perpendicular al plano de la estela turbulenta deba descender apreciablemente a distancias del orden del espesor de la misma. Por el contrario, esta componente será ahora del mismo orden de magnitud dentro de la estela y a distancias considerables de la misma, del orden de la envergadura. En este escenario admitimos que la sustentación no es cero, ya que de hacerlo la velocidad transversal sería prácticamente cero.

Consideramos la fuerza de sustentación vertical  $F_y$  que se obtiene como resultado de dicho flujo. De acuerdo con la fórmula (2.7.2), viene dada por

$$(3.12.1) \quad F_y = -\rho U \iint u_y dy dz$$

en donde, por la distribución de  $u_y$ , la integral debe realizarse sobre el plano transversal completo. Además, como el espesor de la estela es pequeño (dirección  $y$ ) mientras que la velocidad  $u_y$  dentro de la estela no es grande en comparación con su valor fuera, podemos realizar la integración sobre  $y$  con suficiente aproximación, extendiéndola sobre la región a la estela y escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_y dy \approx \int_{-\infty}^{y_2} u_y dy + \int_{y_1}^{\infty} u_y dy$$

donde  $y_1$  e  $y_2$  son las coordenadas de los límites de la estela (figura (1))

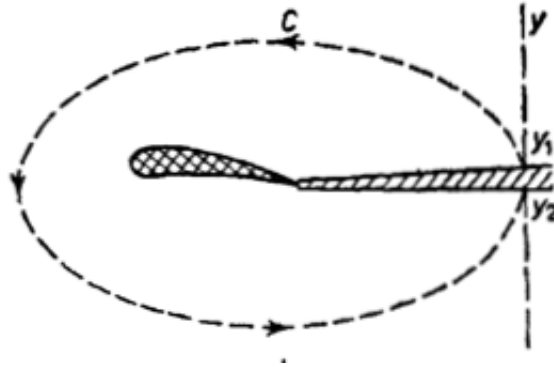


FIGURA 1. Estela de una ala

Sin embargo, fuera de la estela tenemos un flujo potencial y  $u_y = \partial\phi/\partial y$ . Como  $\phi = 0$  en el infinito, tenemos

$$\int u_y dy = \phi_2 - \phi_1$$

en donde  $\phi_1, \phi_2$  son los valores del potencial en ambos lados de la estela. Podemos decir que  $\phi_2 - \phi_1$  es la discontinuidad del potencial en la superficie de discontinuidad que puede sustituirse por una estela delgada. Debe permanecer continua la derivada  $u_y = \partial\phi/\partial y$ . Una discontinuidad en la componente normal a la superficie de la estela significaría que fluye cierta cantidad de fluido dentro de la estela; sin embargo en la misma aproximación, la presión también debe ser continua en la estela. Como la variación de la presión viene dada, también en primera aproximación, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli por  $\rho U u_x = U \partial\phi/\partial x$ , se dice que la derivada  $\partial\phi/\partial x$  debe ser también continua. Sin embargo, la derivada  $\partial\phi/\partial z$  (la velocidad a lo largo del ala) es, en general, discontinua.

Como la derivada  $\partial\phi/\partial x$  es continua, la discontinuidad  $\phi_2 - \phi_1$ , depende sólo de  $z$  y no de la coordenada  $x$  a lo largo de la estela. Así pues, tenemos la siguiente

fórmula para la sustentación:

$$(3.12.2) \quad F_y = -\rho U \int (\phi_2 - \phi_1) dz$$

La integración respecto a  $z$  puede tomarse sobre la anchura de la estela ( $\phi_2 - \phi_1 = 0$  fuera de la misma). Esta fórmula puede escribirse de forma ligeramente distinta. Utilizando las propiedades del gradiente de un escalar, podemos escribir la diferencia  $\phi_2 - \phi_1$  como una integral de contorno

$$\oint \mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{l} = \oint (u_y dy + u_x dx)$$

tomada a lo largo de un contorno que parte del punto  $y_1$ , rodea el cuerpo y termina en el punto  $y_2$ , pasando a través de todos los puntos de la región de flujo potencial. Como esta estela es delgada, podemos, sin variar la integral excepto en cantidades de orden superior, cerrar este contorno mediante el segmento que va de  $y_2$  a  $y_1$ . Si llamamos  $\Gamma$  a la circulación de la velocidad alrededor del contorno cerrado  $C$  que encierra el cuerpo en la figura (1), tenemos

$$(3.12.3) \quad \Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \phi_2 - \phi_1$$

y para la fuerza de sustentación tenemos

$$(3.12.4) \quad F_y = -\rho U \int \Gamma dz$$

La relación entre la sustentación y la circulación de la ecuación (3.12.4) se denomina *Teorema de Joukowski*.

### 3.13. Turbulencia isótropa (B)

En la sección 3.8 en la página 86 se ha comentado el caso particular del flujo turbulento que es completamente homogéneo e isótropo, donde la velocidad media es cero en todo el fluido. Este flujo se puede imaginar como el de un fluido que se agita vigorosamente y que luego se abandona a sí mismo. El movimiento va disminuyendo en el tiempo.

El estudio de la turbulencia isótropa y en particular del modo cómo se amortigua el movimiento a lo largo del tiempo se basa en una ley que -aunque sólo es válida en el caso de la turbulencia isótropa- deriva de la ley general de conservación del momento cinético.

Aislemos dentro del fluido ilimitado una parte suficientemente grande de volumen y consideremos la cantidad total de momento cinético o angular  $\mathbf{M}$  contenido en ese volumen.  $\mathbf{M}$  tiene un determinado valor aleatorio que en general es diferente a cero. Teniendo en cuenta la interacción de las regiones que la rodean,  $\mathbf{M}$  no

permanece estrictamente constante. Pero como la interacción es un efecto superficie, el tiempo  $T$  durante el cual  $\mathbf{M}$  varía apreciablemente debe aumentar con la dimensión  $L$  del volumen seleccionado. El tiempo  $T$  y la dimensión  $L$  pueden ser arbitrariamente grandes y en este sentido se conserva el momento cinético  $\mathbf{M}$ .

Por conveniencia supondremos que el volumen elegido está encerrado en un recipiente con paredes fijas; es evidente que las condiciones límites en la superficie de un gran volumen no pueden tener ningún efecto sobre las propiedades volumétricas del flujo en el que estamos interesados.

De acuerdo con la definición general, el tensor  $M_{ik}$ , que es el momento angular total, es igual a la integral

$$\rho \int (x_i v_k - x_k v_i) dV$$

tomada en todo el volumen. Transformaremos esta integral de la siguiente forma:

$$\int x_k v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_l} (x_i x_k v_l) dV - \int x_i x_k \frac{\partial v_l}{\partial x_l} dV - \int x_i v_k dV$$

La primera integral del segundo miembro, al convertirse en una integral de superficie, resulta cero, puesto que las componentes de velocidad normales en las paredes que limitan el fluido son nulas, de modo que  $v_k dk_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} df = 0$ . La segunda integral es cero si el fluido es incompresible ( $\text{div} \mathbf{v} = 0$ ). De manera que

$$\int x_k v_i dV = - \int x_i v_k dV$$

y podemos escribir el tensor

$$M_{ik} = 2\rho \int x_i v_k dV$$

La suma de las componentes al cuadrado de  $M_{ik}$  es igual al doble del valor absoluto del cuadrado del vector del momento cinético

$$\mathbf{M} = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV$$

Por tanto tenemos

$$M^2 = 2\rho^2 \left[ \int x_i v_k dV \right]^2$$

La integral al cuadrado puede escribirse como una integral doble

$$M^2 = 2\rho^2 \iint x_i x'_i v_k v'_k dV dV'$$

Finalmente, esta expresión puede volverse a escribir como

$$(3.13.1) \quad M^2 = -\rho^2 \iint (x_i - x'_i)^2 v_k v'_k dV dV'$$

Las integrales que contienen los cuadrados  $x_i^2$  y  $x_i'^2$  se anulan, ya que

$$\iint x_i'^2 v_k v_k' dV dV' = \int x_i'^2 v_k' dV' \int v_k dV$$

y

$$\int v_k dV = 0$$

ya que el impulso total de un fluido incompresible en un recipiente fijo es cero.

El factor  $v_k v_k' \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$  en el integrando de (3.13.1) es el producto escalar de las velocidades en dos puntos que tienen coordenadas  $x_k$  y  $x_k'$ , estando separados una distancia  $r = \sqrt{(x_k - x_k')^2}$ . Promediamos este producto respecto a todas las posiciones de los puntos  $x_k$  y  $x_k'$  (para un  $r$  dado) dentro del volumen que nos ocupa; esta operación de promedio es la misma que utilizamos en la sección (3.8) para definir las funciones de correlación. Como el flujo es isótropo, la magnitud  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$  sólo es función de  $r$ . Disminuye rápidamente al aumentar  $r$ , puesto que las velocidades del flujo turbulento en dos puntos separados a una distancia grande puede suponerse que son estadísticamente independientes: el valor medio de su producto se reduce entonces al producto de los valores medios de las velocidades individuales, el cual es cero (puesto que la velocidad media es cero en cualquier punto dentro del flujo considerado).

Efectuando esta operación de promediar bajo el signo de la integral en (3.13.1) se tiene

$$(3.13.2) \quad M^2 = \rho^2 \int f dV \quad f = - \int \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'} r^2 dV'$$

El integrando correspondiente a  $f$  disminuye rápidamente al aumentar  $r$  de modo que la integral converge; esto significa que, cuando la dimensión  $L$  de la región tiende a infinito,  $f$  tiende a un límite finito. Como el flujo es homogéneo, la magnitud  $f$  es constante en todas partes del fluido y podemos escribir simplemente  $M^2 = \rho^2 f V$ . Es decir, que el momento angular o cinético aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada del volumen del fluido móvil y no proporcionalmente a dicho volumen. Esto se debe a que el momento angular es la suma de un gran número de componentes estadísticamente independientes (los momentos angulares de las diversas partes pequeñas del fluido), cuyos valores medios no son nulos.

Así se obtiene la conclusión de que, en caso de turbulencia isótropa, la constante  $M$  implica la condición de que

$$(3.13.3) \quad \int \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'} r^2 dV' = \text{constante}$$

Esta es la *Ley de Loytsianski*.

El integrando (3.13.3) es notablemente diferente de cero en una región cuyas dimensiones son del orden de la escala  $l$  de la turbulencia (el volumen de la región



es  $\sim l^3$ ) y allí es del orden de  $v^2 l^2$ . De aquí que tengamos a partir de (3.13.3):

$$(3.13.4) \quad v^2 l^5 = \text{constante}$$

Utilizando esta relación podemos determinar el modo en el que disminuye con el tiempo la turbulencia isótropa. Para ellos estimamos la derivada temporal de la energía cinética de la unidad de volumen del fluido. Por una parte, puede escribirse que es del orden de  $\rho v^2/t$ . Además, debe ser igual a la energía disipada en el volumen por unidad de tiempo. De acuerdo con la fórmula (3.6.1),  $\rho \epsilon \sim \rho v^3/l$  (siendo aquí  $v$  la velocidad característica). Si son comparables las dos expresiones, tenemos

$$(3.13.5) \quad l \sim vt$$

Sustituyendo (3.13.5) en (3.13.4) vemos que

$$(3.13.6) \quad v = \frac{\text{constante}}{t^{5/7}}$$

Así, la velocidad en la turbulencia isótropa disminuye con el tiempo, de modo inversamente proporcional a  $t^{5/7}$ . Para el valor de  $l$  tenemos

$$(3.13.7) \quad l = \text{constante} \times t^{2/7}$$

es decir, la escala o dimensión interna de la turbulencia aumenta proporcionalmente a  $t^{2/7}$ .

De acuerdo con las fórmulas (3.13.6) y (3.13.7), el número de Reynolds  $R \sim vl/\nu$  disminuye proporcionalmente a  $t^{-3/7}$ , y después de un tiempo suficiente resulta tan pequeño que empieza a ser importante la viscosidad. Se determina entonces la disipación de energía, por una parte, mediante la formula usual:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \sim \frac{\nu v^2}{l^2}$$

y por otra parte, mediante  $\epsilon \sim v^2/t$ . Comparando, tenemos

$$(3.13.8) \quad l \sim \sqrt{\nu t}$$

y luego, a partir de (3.13.4) tenemos

$$(3.13.9) \quad v = \frac{\text{constante}}{t^{5/4}}$$

Estas fórmulas dan el modo en que disminuye la turbulencia isótropa en el periodo final, cuando resulta predominante el efecto de la viscosidad.

Se puede conseguir un flujo turbulento haciendo pasar una corriente a través de una rejilla que posee un número grande de aberturas regularmente espaciadas. Designemos mediante  $\mathbf{U}$  la velocidad del flujo original (tomando  $x$  en la dirección de  $\mathbf{U}$ ) y la verdadera velocidad por  $\mathbf{U} + \mathbf{v}$ , de modo que  $\mathbf{v}$  es la velocidad del flujo turbulento que nos interesa. Si introducimos un sistema de referencia móvil con

velocidad  $\mathbf{U}$ , entonces respecto a este sistema el fluido realiza un flujo turbulento con velocidad  $\mathbf{v}$ . Cuando nos alejamos de la rejilla el flujo turbulento promediado (con velocidad  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{v}}$ ) disminuye más rápidamente que el flujo fluctuante. Esto se debe a que el flujo promediado tiene una escala del orden de la dimensión  $a$  de las aberturas de las rejillas y éstas son pequeñas en comparación con la escala del flujo fluctuante. En consecuencia, a distancias  $x$  suficientemente grandes de la rejilla, la velocidad promediada  $\mathbf{u}$  es casi cero y la velocidad turbulenta  $\mathbf{v}$  coincide prácticamente con la velocidad fluctuante. A esta distancia la turbulencia puede considerarse como totalmente isótropa en regiones pequeñas en comparación con  $x$  (aunque no necesariamente pequeñas en comparación con la escala externa de la turbulencia). El tiempo de amortiguamiento de la turbulencia en el sistema móvil de referencia corresponde a un amortiguamiento al aumentar las distancias de las rejillas en el sistema estacionario original. El modo como se produce esta disminución viene dado por las fórmulas que hemos deducido en esta sección, en las que únicamente necesitamos sustituir  $t$  por  $x/U$ . Recordando que a distancias de la rejilla del orden de  $a$  (dimensión de las aberturas), debemos tener  $l \sim a$ , podemos volver a escribir la fórmula (3.13.7) como  $l \sim a \left(\frac{x}{a}\right)^{2/7}$ . Para la velocidad tenemos, mediante (3.13.5),  $v \sim \frac{lU}{x}$  de donde  $v \sim U (a/x)^{5/7}$ .

## Capas límite

### 4.1. Capa límite laminar (B)

Los números de Reynolds muy grandes son equivalentes a viscosidades muy pequeñas, por lo que si  $R$  es grande, podemos considerar el fluido como ideal. Esta aproximación **no es válida** cuando el flujo se produce **cerca de paredes sólidas**. Para un fluido ideal, las condiciones límite exigen que la velocidad normal a la pared se anule, aunque la componente tangencial siga siendo finita. En el caso de un fluido viscoso, la velocidad junto a la pared sólida debe anularse por completo.

Teniendo en cuenta lo anterior, llegamos a la conclusión de que para números de Reynolds grandes, la disminución de la velocidad hasta cero se produce casi exclusivamente en una capa delgada junto a la pared. Esta capa se denomina *capa límite* y se caracteriza por la presencia de gradientes de velocidad considerables. El flujo en la capa límite puede ser *laminar* o *turbulento*. En esta sección consideramos las propiedades de la capa límite laminar. El límite de la capa no es nítido, sino que tenemos una transición continua desde el flujo laminar en la capa límite a la corriente principal del fluido.

La disminución rápida de la velocidad en la capa límite se debe a que no podemos despreciar la viscosidad aunque  $R$  sea grande. Matemáticamente esto se traduce en que los gradientes de velocidad en la capa límite son grandes, es decir, todos los términos que contienen derivadas espaciales de la velocidad, aunque  $\nu$  sea pequeña.

A continuación vamos a deducir las ecuaciones de movimiento del fluido en una capa límite laminar. Para simplificar, consideramos un flujo bidimensional a lo largo de una porción plana de la superficie (plano  $xz$ , con la dirección del flujo en la dirección  $x$ ). La distribución de velocidades es independiente de  $z$  y la velocidad no tiene componente  $z$ .

Las ecuaciones exactas de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad son:

$$(4.1.1) \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$$

$$(4.1.2) \quad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right)$$

$$(4.1.3) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Consideramos el flujo estacionario, por lo que se omiten las derivadas respecto al tiempo.

Como la capa límite es delgada, el flujo tiene lugar principalmente de modo que resulta paralelo a la superficie, es decir la velocidad  $v_y$  es pequeña en comparación con  $v_x$  (como se ve a partir de la ecuación de continuidad).

La velocidad varía rápidamente a lo largo del eje  $y$ , produciéndose una variación apreciable a distancias  $\delta$  del orden del espesor de la capa límite. A lo largo del eje  $x$  la velocidad varía lentamente, por lo que sólo se produce una variación apreciable a distancias del orden de  $l$  la longitud característica del problema (generalmente, las dimensiones del cuerpo). Por tanto, las derivadas respecto al eje  $y$  son grandes en comparación con las derivadas respecto al eje  $x$ . En la ecuación (4.1.1) podemos entonces despreciar la derivada  $\partial^2 v_x / \partial x^2$  en comparación con  $\partial^2 v_x / \partial y^2$ ; comparando (4.1.1) y (4.1.2) vemos que la derivada  $\partial p / \partial y$  es pequeña en comparación con  $\partial p / \partial x$  (siendo el cociente del mismo orden que  $v_y / v_x$ ). En la aproximación que consideramos, podemos poner simplemente

$$(4.1.4) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

es decir, que no existe un gradiente de presión transversal en la capa límite. O lo que es lo mismo, que la presión en la capa límite es igual a la presión  $p(x)$  de la corriente principal (y que suponemos es una función determinada de  $x$  para poder resolver el problema de la capa límite). Como la presión sólo depende de  $x$ , cambiamos la derivada parcial en (4.1.1) por  $dp(x)/dx$ ; esta derivada puede expresarse en función de la velocidad  $U(x)$  de la corriente principal. Como fuera de la capa límite tenemos un flujo potencial, es válida la ecuación de Bernoulli  $p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{constante}$ , de donde

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx}$$

Así obtenemos las ecuaciones del movimiento en la capa límite laminar:

$$(4.1.5) \quad \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \\ &= U \frac{dU}{dx} \end{aligned}$$

$$(4.1.6) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Aunque las ecuaciones se han deducido para el flujo de una pared plana son válidas para cualquier tipo general de flujo bidimensional. Vamos a aplicarlo al flujo transversal que rodea un cilindro de longitud infinita y sección recta arbitraria. En este caso,  $x$  es la distancia medida a lo largo de la circunferencia de la sección recta desde un punto determinado de la misma e  $y$  es la distancia a la superficie.

Llamamos  $U_0$  a la velocidad característica del problema (por ejemplo, la velocidad de la corriente principal en el infinito). En lugar de las coordenadas  $x, y$  y las velocidades  $v_x, v_y$  introducimos las variables adimensionales  $x', y', v'_x, v'_y$ :

$$(4.1.7) \quad \begin{aligned} x &= lx' & v_x &= U_0 v'_x \\ y &= \frac{ly'}{\sqrt{R}} & v_y &= \frac{U_0 v'_y}{\sqrt{R}} \end{aligned}$$

(y en correspondencia,  $U = U_0 U'$ ), en donde  $R = \frac{U_0 l}{\nu}$ . Entonces las ecuaciones (4.1.5) toman la forma:

$$(4.1.8) \quad \begin{aligned} v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} - \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} &= U' \frac{dU'}{dx'} \\ \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} &= 0 \end{aligned}$$

En estas ecuaciones (y en las condiciones límite que hay que aplicar a las mismas) no interviene la viscosidad. Eso significa que las soluciones son independientes del número de Reynolds. Es decir, cuando se varía el número de Reynolds, el esquema completo del flujo de la capa límite sufre una transformación de semejanza, permaneciendo invariable en las distancias y velocidades longitudinales, mientras que las distancias y velocidades transversales varían como  $1/\sqrt{R}$ .

A continuación podemos decir que las velocidades adimensionales  $v'_x$  y  $v'_y$  obtenidas al resolver las ecuaciones (4.1.8) deben ser del orden de la unidad, ya que no dependen de  $R$ . Lo mismo es cierto cuando se trata del espesor  $\delta$  de la capa límite en función de las coordenadas  $x', y'$ . A partir de la fórmula (4.1.7) podemos llegar a la conclusión que

$$(4.1.9) \quad v_y \sim \frac{U_0}{\sqrt{R}}$$

es decir, el cociente entre las velocidades transversales y longitudinales es inversamente proporcional a  $\sqrt{R}$  y que

$$(4.1.10) \quad \delta \sim \frac{l}{\sqrt{R}}$$

el espesor de la capa límite disminuye al aumentar el número de Reynolds en la proporción  $1/\sqrt{R}$ .

Vamos a aplicar las ecuaciones correspondientes a la capa límite al caso del flujo plano paralelo a lo largo de una lámina plana. Suponemos que el plano de la placa coincide con el semiplano  $xz$ , correspondiente a valores  $x > 0$ , con  $x = 0$  el borde de ataque de la placa. También suponemos que la placa se extiende indefinidamente en el sentido de los  $x > 0$ . La velocidad de la corriente principal en este caso es constante ( $U = \text{constante}$ ). Con estas suposiciones, las ecuaciones (4.1.5) toman la forma:

$$(4.1.11) \quad \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones límites en la superficie de la placa exigen que se anulen ambas componentes de la velocidad  $v_x = v_y = 0$  para  $y = 0, x \geq 0$ . Cuando nos alejamos de la placa, la velocidad debe tender asintóticamente a la velocidad  $U$  del flujo incidentes, es decir:  $v_x = U$  para  $y \rightarrow \pm\infty$ . En la solución de las ecuaciones de la capa límite, como hemos visto,  $v_x/U$  y  $v_y\sqrt{\frac{l}{U\nu}}$  sólo pueden ser funciones de  $x' = x/l$  e  $y' = y\sqrt{\frac{U}{l\nu}}$ . Sin embargo, en el problema que estamos considerando la placa tiene una extensión infinita y no existe, por tanto, ninguna longitud característica  $l$ . De aquí que  $v_x/U$  sólo pueda depender de una combinación de  $x'$  e  $y'$  en la que no intervenga  $l$ , por ejemplo,  $y'/\sqrt{x'} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ . Análogamente, el producto  $v'_y\sqrt{x'}$  debe ser una función de  $y'/\sqrt{x'}$ . Así, podemos buscar una solución de la forma

$$(4.1.12) \quad v_x = U f\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) \quad v_y = \sqrt{\frac{U\nu}{x}} f_1\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right)$$

donde  $f$  y  $f_1$  son funciones adimensionales. Utilizando la segunda ecuación en (4.1.11) podemos expresar  $f_1$  en función de  $f$ . El problema se reduce así a la determinación de una sola función  $f$  de una única variable  $\xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ .

En lo que sigue sólo nos preocupamos de la distribución de velocidad longitudinal  $v_x$  (ya que  $v_y$  es pequeña). Podemos obtener una conclusión importante de la ecuación (4.1.12) sin necesidad de encontrar la forma de  $f$ . La velocidad  $v_x$  aumenta desde cero en la superficie de la placa hasta una fracción de  $U$  para un valor determinado del argumento de  $f$ , es decir,  $y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$  = una constante dada cualquiera. Por tanto, el orden de magnitud del espesor de una capa límite en el flujo a lo largo

de una capa es

$$(4.1.13) \quad \delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

Así, cuando nos alejamos del borde de la placa,  $\delta$  aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia al borde.

$f$  puede determinarse por métodos numéricos (ver figura (1)). Observamos que tiende rápidamente a su valor límite, que es la unidad.

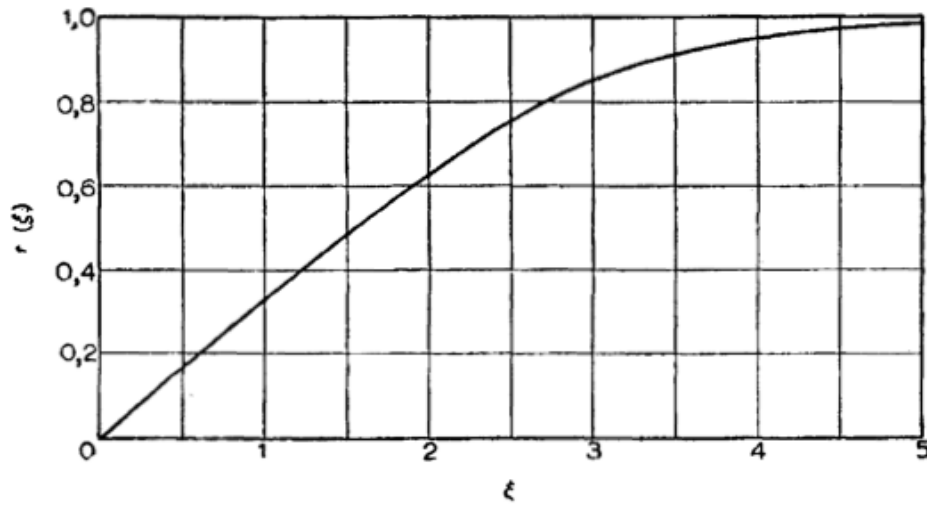


FIGURA 1. Función  $f$

La fuerza de rozamiento por unidad de área de la superficie de la placa es

$$\sigma_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Un cálculo numérico nos da

$$(4.1.14) \quad \sigma_{xy} = 0,332 \sqrt{\frac{\eta \rho U^3}{x}}$$

Si la placa tiene una longitud  $l$  (en la dirección  $x$ ), entonces la fuerza de rozamiento total sobre ella por unidad de longitud en la dirección  $z$  es

$$F = 2 \int_0^l \sigma_{xy} dx$$

El factor 2 se debe a que la placa tiene dos caras expuestas al fluido. Sustituyendo (4.1.14) tenemos

$$(4.1.15) \quad F = 1,328 \sqrt{\eta \rho l U^3}$$

Es interesante notar que la fuerza de rozamiento es proporcional a  $U^{3/2}$ , donde  $U$  es la velocidad de la corriente principal. La fórmula (4.1.15) sólo puede aplicarse a placas bastante largas, en las que el número de Reynolds  $Ul/\nu$  es suficientemente grande. Suele expresarse la fuerza en función del *coeficiente de arrastre* definido como el cociente adimensional <sup>1</sup>

$$(4.1.16) \quad C = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2(2l)}$$

Según (4.1.15) esta magnitud, en el caso de un flujo laminar a lo largo de una placa es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de Reynolds:

$$(4.1.17) \quad C = \frac{1,328}{\sqrt{R}}$$

Los resultados cuantitativos obtenidos anteriormente sólo son válidos para el flujo a lo largo de una placa plana. Sin embargo, los resultados cualitativos, como (4.1.9) y (4.1.10) son válidos para el flujo que rodea un cuerpo de una forma cualquiera. En estos casos,  $l$  es la dimensión del cuerpo en la dirección del flujo.

Para acabar, estudiaremos un par de casos de capa límite.

El primero es el caso de un disco plano de radio grande girando en el fluido alrededor de un eje perpendicular a su plano. En este caso, para estimar el espesor de la capa límite debemos sustituir  $U$  en (4.1.13) por  $\Omega x$ , donde  $\Omega$  es la velocidad angular de rotación, con lo que obtenemos:

$$(4.1.18) \quad \delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$$

Vemos que el espesor de la capa límite puede considerarse como una constante en toda la superficie del disco.

El otro caso interesante es la capa laminar formada en las paredes de una tubería cerca del punto de entrada del fluido. El fluido normalmente entra en un tubo con una distribución de velocidades que es casi constante en toda su sección recta y la velocidad disminuye hacia cero dentro totalmente dentro de la capa límite. Cuando nos alejamos de la entrada de la tubería, las capas de fluido más próximas al eje van con retraso. Puesto que la masa del fluido que pasa por cada sección recta es la misma, la parte más interna de la corriente en donde la velocidad es todavía uniforme, debe acelerarse cuando su diámetro se reduce. Esto continúa así hasta que se alcanza asintóticamente una distribución de velocidades de Poiseuille; esta distribución se encuentra así sólo a cierta distancia de la entrada de la tubería. Es fácil determinar el orden de magnitud de la longitud  $l$  de la *sección de entrada*. Viene dada por el hecho de que, a una distancia  $l$  de la entrada, el espesor de la capa límite rellena por completo la sección recta de la misma. Haciendo en (4.1.13)

---

<sup>1</sup> $2l = S$ , superficie de la placa



$x \sim l$  y  $\delta \sim a$  obtenemos

$$(4.1.19) \quad l \sim \frac{a^2 U}{\nu} \sim aR$$

Así pues, la longitud de la sección de entrada es proporcional al número de Reynolds.

#### **4.2. Flujo cerca de la línea de separación**

PAG11