

**PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN**  
**L2-PROB5-PAG66**

XAVIER AZNAR  
HTTP://FISICAUNED.WORDPRESS.COM

**Problema.** Una capa de fluido de espesor  $h$  está limitada por encima por una superficie libre y por debajo por un plano fijo inclinado un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal (ver figura (1)). Determinar el flujo debido a la gravedad

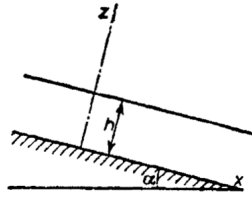


FIGURA 1.

*Demostración.* La velocidad del fluido será paralela al eje  $x$  y dependerá únicamente de  $z$ . Planteamos las ecuaciones de Navier-Stokes (con campo gravitatorio):

$$\begin{aligned} 0 &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \rho g \sin \alpha \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \cos \alpha \end{aligned}$$

La presión en la superficie libre será igual a  $p_0$ , la presión atmosférica, de manera que integrando la segunda ecuación

$$p = p_0 + \rho g \cos \alpha (h - z)$$

En cuanto al perfil de velocidades:

$$v_x(z) = -\frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha z^2 + az + b$$

Utilizando que  $v_x(z=0) = 0$  tenemos  $b = 0$ . En cuanto a la superficie libre,  $z = h$  sabemos que la  $\sigma_{xz} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = 0$  y que  $\sigma_{zz} = -p_0$  ( $p_0$  es la presión

atmosférica). De manera que

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{z=h} = 0 = -\frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha 2h + a$$

por lo que, al final del día:

$$v_x(z) = \frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha z (2h - z)$$

La cantidad de masa por unidad de longitud en la dirección  $y$  (caudal) es

$$Q = \rho \int_0^h v \, dz = \frac{\rho g h^3 \sin \alpha}{3\nu}$$

□