PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN
L2-PROB5-PAG66

XAVIER AZNAR
HTTP://FISICAUNED.WORDPRESS.COM

Problema. Una capa de fluido de espesor h está limitada por encima por una superficie libre y por debajo por un plano fijo inclinado un ángulo α respecto a la horizontal (ver figura (1)). Determinar el flujo debido a la gravedad

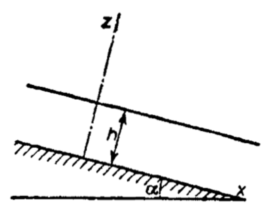

FIGURA 1.

Demostración. La velocidad del fluido será paralela al eje x y dependerá únicamente de z. Planteamos las ecuaciones de Navier-Stokes (con campo gravitatorio):

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \rho g \sin\alpha \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \cos\alpha \end{aligned}$$

La presión en la superficie libre será igual a p_0, la presión atmosférica, de manera que integrando la segunda ecuación

$$p = p_0 + \rho g \cos\alpha\,(h - z)$$

En cuanto al perfil de velocidades:

$$v_x(z) = -\frac{\rho g}{\eta}\sin\alpha z^2 + az + b$$

Utilizando que $v_x(z = 0) = 0$ tenemos $b = 0$. En cuanto a la superficie libre, $z = h$ sabemos que la $\sigma_{xz} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = 0$ y que $\sigma_{zz} = -p_0$ (p_0 es la presión atmosférica). De manera que

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{z=h} = 0 = -\frac{\rho g}{\eta}\sin\alpha 2h + a$$

por lo que, al final del día:

$$v_x\left(z\right) = \frac{\rho g}{\eta}\sin\alpha z\left(2h - z\right)$$

La cantidad de masa por unidad de longitud en la dirección y (caudal) es

$$Q = \rho\int_0^h v\,dz = \frac{\rho g h^3\sin\alpha}{3\nu}$$

$\square$