PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN
L2-PROB2-PAG77

XAVIER AZNAR
HTTP://FISICAUNED.WORDPRESS.COM

Problema. Determinar la velocidad de una gota esférica de fluido (de viscosidad η') moviéndose bajo la gravedad en un fluido de viscosidad η.

Demostración. Elegimos un sistema de referencia en el que la gota esférica esté en reposo. En esta situación tenemos que las ecuaciones de movimiento para un flujo estacionario para un fluido incompresible, cuando el número de Reynolds es pequeño nos llevan a la ecuación

$$\Delta \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$$

En el caso particular de una esfera en movimiento rectilíneo uniforme, debemos solucionar la ecuación

$$\Delta^2 \mathbf{grad} f = 0 \tag{1}$$

Para el fluido externo, como la velocidad debe anularse en el infinito, tenemos que la solución es de la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a\frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\right)}{r} + b\frac{3\mathbf{n}\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\right) - \mathbf{u}}{r^3} \tag{2}$$

Para el fluido interior de la gota la solución debe evitar la singularidad en $r = 0$, además de que las segundas derivadas de f -que son las que determinan la velocidad- deben mantenerse finitas. La solución es de la forma

$$f = \frac{1}{4}Ar^2 + \frac{1}{8}Br^4$$

que da como resultado una velocidad:

$$\mathbf{v} = -A\mathbf{u} + Br^2\left(\mathbf{n}\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\right) - 2\mathbf{u}\right)$$

En la superficie de la esfera -que es la superficie de contacto entre los dos fluidos- deben satisfacerse las condiciones límite. Todas las componentes de la velocidad normal hacia el exterior $\mathbf{v}_e$ y hacia el interior $\mathbf{v}_i$ deben anularse

$$v_{i,r} = 0 = v_{e,r}$$

La componente tangencial de la velocidad debe ser continua:

$$v_{i,\theta} = v_{e,\theta}$$

Del mismo modo, las componentes $\sigma_{r\theta}$ del tensor de tensiones también deben ser continuas:

$$\sigma_{i,r\theta} = \sigma_{e,r\theta}$$

La condición de que las componentes σ_{rr} sean iguales no es necesario escribirlas; simplemente servirán para determinar la velocidad requerida u. A partir de las cuatro condiciones límite anteriores, tenemos cuatro ecuaciones para las constantes a, b y A, B. Solucionándolas obtenemos:

$$a = R\frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')} \qquad b = R^3 = \frac{\eta'}{4(\eta + \eta')} \qquad A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}$$

Según la ecuación

$$F = 8\pi a\eta u$$

tenemos para el arrastre:

$$F = 2\pi u\eta R\frac{(2\eta + 3\eta')}{(\eta + \eta')}$$

Cuando $\eta' \to \infty$ (que corresponde a una esfera sólida) esta fórmula se convierte en la de Stokes ($F = 6\pi u\eta R$). En el límite opuesto, $\eta' \to 0$ (que corresponde a una burbuja gasesosa) tenemos $F = 4\pi u\eta R$, que corresponde a una fuerza de arrastre de únicamente dos tercios de la correspondiente a una esfera maciza.

$$F = 2\pi u\eta R\frac{(2\eta + 3\eta')}{(\eta + \eta')}\begin{cases}\eta' \to \infty & F = 6\pi u\eta R \quad \text{(Stokes)}\\ \eta' \to 0 & F = 4\pi u\eta R = \frac{2}{3}F_{\text{Stokes}}\,(\eta' = \infty)\end{cases}$$

□