PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN
L1-PROB8-PAG32

XAVIER AZNAR
HTTP://FISICAUNED.WORDPRESS.COM

Problema. Una esfera sumergida en un fluido incompresible se dilata de acuerdo con una ley determinada $R = R(t)$. Determinar la presión del fluido en la superficie de la esfera.

Demostración. Suponemos que la esfera se dilata de forma homogénea, por lo que todo el problema tiene simetría esférica. La única componente de la velocidad que no es cero será la velocidad radial $v = v_r \neq 0$.

A partir de la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas, obtenemos:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v\right) = 0 \Rightarrow r^2 v = f(t) \tag{1}$$

Planteamos la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{2}$$

En el primer término utilizamos la relación para v que hemos obtenido de la ecuación (1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f(t)}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}f'(t) \tag{3}$$

En cuanto al segundo, podemos transformarlo en

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r}$$

de manera que al final

$$\frac{f'(t)}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{4}$$

Ahora ya podemos integrar respecto a r:

$$\int_R^{R(t)} \frac{f'(t)}{r^2}dr + \frac{1}{2}\int_{v(R)=0}^{v(t)} dv^2 = -\frac{1}{\rho}\int_{p(R)=p_0}^{p(t)} dp \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\int_{p(R)=p_0}^{p(t)} dp &= \frac{p_0 - p\left(t\right)}{\rho} \\
\frac{1}{2}\int_{v(R)=0}^{v(t)} dv^2 &= \frac{v^2\left(t\right)}{2} \\
\int_{R}^{R(t)} \frac{f'\left(t\right)}{r^2} dr &= -\frac{f'\left(t\right)}{R\left(t\right)} + \frac{f'\left(0\right)}{R\left(0\right)}
\end{aligned}$$

Pero $f'\left(0\right) = 0 = 2R\left(0\right)V^2\left(0\right) + R^2\left(0\right)\frac{dV(0)}{dt}$, ya que $v\left(0\right) = 0$ (inicialmente la esfera no se dilata). Así ahora podemos escribir (tomando $R\left(0\right) = R$ y $R\left(t\right) = r$, $V\left(t\right) = v$)

$$\begin{aligned}
-\frac{f'\left(t\right)}{r} + \frac{1}{2}v^2 &= \frac{p\left(t\right) - p_0}{\rho} \\
-\frac{1}{r}\left(2rv^2 + r^2\frac{dv}{dt}\right) + \frac{1}{2}v^2 &= \frac{p\left(t\right) - p_0}{\rho} \\
-2v^2 - r\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v^2 &= \frac{p\left(t\right) - p_0}{\rho} \\
-\frac{3}{2}v^2 - r\frac{dv}{dt} &= \frac{p\left(t\right) - p_0}{\rho}
\end{aligned}$$

Si utilizamos el hecho de que $v = \frac{dr}{dt}$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{p\left(t\right) - p_0}{\rho}$$

Y ahora, usamos

$$\frac{d^2r^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(2r\frac{dr}{dt}\right) = 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2r\frac{d^2r}{dt^2}$$

y lo sustituimos en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2\left(r^2\right)}{dt^2} &= \\
\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\left(r^2\right)}{dt^2}\right] &= \frac{p\left(t\right) - p_0}{\rho}
\end{aligned}$$

De donde aislando $p\left(t\right)$

$$p\left(t\right) = p_0 + \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\left(r^2\right)}{dt^2}\right]$$

□