

# **Apuntes de Física de Fluidos en la UNED**

## **Resumen**

Xavi Aznar

<http://FisicaUNED.wordpress.com>



# Índice alfabético

## C

Circulación de la velocidad, 17  
 Coeficientes de viscosidad  $\eta, \zeta$ , 35  
 Convección, 12

## D

Densidad de flujo de entropía  $j = \rho s \mathbf{v}$ , 7  
 Densidad de flujo másico  $j = \rho \mathbf{v}$ , 6

## E

Ecuación de Bernoulli en un campo  
     gravitatorio  $\frac{1}{2}v^2 + w + gz = \text{const}$ , 14  
 Ecuación de Bernoulli  $\frac{1}{2}v^2 + w = \text{const}$ ,  
     14, 22  
 Ecuación de continuidad  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) =$   
      $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho$ , 6  
 Ecuación de Euler (en la que interviene  
     sólo la velocidad)  
      $\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v})$ , 8  
 Ecuación de Euler (versión  
     termodinámica)  
      $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} w$ , 8  
 Ecuación de Euler  
      $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$ , 7  
 Ecuación de Navier-Stokes  
      $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$ ,  
     36  
 Estela laminar, 48

## F

Fluido ideal, 7  
 Fluido incompresible  $\rho = \text{const}$ , 22  
 Flujo estacionario, 13  
 Flujo irrotacional, 19  
 Flujo plano o bidimensional, 24  
 Flujo potencial, 19

Flujo rotacional, 19

Flujos semejantes, 43

Fórmula de Stokes (disco circular  $\parallel$  su  
     plano)  $F = \frac{32}{3} \eta R u$ , 48

Fórmula de Stokes (disco circular  $\perp$  su  
     plano)  $F_{\perp} = 16 \eta R u$ , 48

Fórmula de Stokes (elipsoide)  $F = 16 \eta R u$ ,  
     48

Fórmula de Stokes (esfera)  $F = 6 \pi R \eta u$ ,  
     48

Fórmula de Stokes (sin determinar a y b )  
      $F = 8 \pi a \eta u$ , 48

Fuerza de arrastre, 29

Fuerza de sustentación, 29, 50

Función de corriente  $\psi(x, y)$ , 24

## L

Ley de conservación de la circulación  
      $\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante}$ , 18  
 Ley de Semejanza, 43  
 Línea de corriente, 13

## N

Número de Froude  $F = \frac{u^2}{lg}$ , 43

## O

Onda de gravedad, 29

## P

Potencial de velocidad  $\phi$ , 22  
 Profundidad de penetración  $\delta$ , 53  
 Punto de estancamiento, 24

## T

Tensor de densidad de flujo de impulso  
      $\Pi_{ik}$ , 17

Tensor de masas asociadas  $m_{ik}$ , 29

Tensor de tensiones de la viscosidad  $\sigma'_{ik}$ ,  
34

Tensor de tensiones  $\sigma_{ik}$ , 34

Teorema de Kelvin

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante}, 18$$

## **V**

Viscosidad cinemática  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , 36

Viscosidad dinámica  $\eta$ , 36

## Fluidos ideales

### Consideraciones previas

El estudio del movimiento de los fluidos (líquidos y gases) se denomina *dinámica de fluidos*.

Los fenómenos en dinámica de fluidos son macroscópicos, por lo que se considera al fluido como un medio continuo. Un volumen infinitamente pequeño del fluido es *pequeño* comparado con el volumen de un cuerpo o del sistema que consideramos pero *grande* en comparación con la distancia entre las partículas del mismo.

La descripción matemática del estado del fluido se consigue mediante la distribución de velocidades  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  y dos magnitudes termodinámicas cualquiera, como la presión  $p$  y la densidad  $\rho$  del fluido

$$\text{Estado del fluido} = \begin{cases} \mathbf{v}(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z) & \text{Distribución de velocidades} \\ p(x, y, z, t) & \text{Presión} \\ \rho(x, y, z, t) & \text{Densidad} \end{cases}$$

Todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de **dos** de ellas junto con las ecuaciones de estado.

### 1.1. Ecuación de continuidad (B)

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la materia.

Empezamos considerando un volumen  $V_0$ . Si  $\rho$  es la densidad del fluido, la masa contenida en este volumen es

$$\int_{V_0} \rho dV$$

La masa de fluido que atraviesa una unidad de superficie  $d\mathbf{f}$  es  $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ , donde  $d\mathbf{f}$  es un vector normal a la superficie (apuntando hacia afuera) y  $|d\mathbf{f}| = n df$ , (con  $\mathbf{n}$  un vector unitario) y  $df$  igual al área de la superficie. De manera que integrando sobre toda la superficie que rodea  $V_0$  tenemos la masa total de fluido que la atraviesa

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

La disminución de la masa contenida en  $V_0$  debe ser igual a la que atraviesa la superficie, de manera que

$$(1.1.1) \quad -\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

Podemos transformar la integral de superficie en una integral de volumen

$$-\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$$

La derivada total se convierte en parcial al incluirla en la integral de volumen, por lo que

$$\int_{V_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

Pero como la integral debe ser cero para cualquier  $V_0$ , el integrando debe ser cero:

$$(1.1.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Desarrollando la divergencia, podemos escribir la **ecuación de continuidad** como

$$(1.1.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0$$

El vector

$$(1.1.4) \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

se denomina **densidad de flujo másico**: su dirección coincide con la del movimiento del fluido y su módulo es la cantidad de masa de fluido que circula por unidad de tiempo a través de una superficie perpendicular a la velocidad.

## 1.2. Ecuación de Euler (B)

La ecuación de Euler es la versión *para fluidos* de  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .

La fuerza total que **actúa**<sup>1</sup> sobre un volumen de fluido es<sup>2</sup>  $-\oint p d\mathbf{f}$  y transformando la integral de superficie en una integral de volumen tenemos  $-\int_{V_0} \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{f}$ .

Por otro lado, para  $m\mathbf{a}$  escribimos  $\int_{V_0} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$ . Pero el problema es que esta derivada expresa la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula de fluido (que se mueve) y nosotros queremos magnitudes

<sup>1</sup>De aquí el signo menos.

<sup>2</sup> $p = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}} \Rightarrow \mathbf{F} = p\mathbf{S}$

que se refieren a puntos fijos en el espacio. Por tanto:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Esta expresión indica la variación de la velocidad entre dos puntos separados  $d\mathbf{r}$  (que es lo que se ha movido la partícula de fluido en un intervalo de tiempo  $dt$ ) y la velocidad en un punto fijo.

Así que solucionar este detalle, ya podemos escribir, para un elemento de volumen:

$$(1.2.1) \quad -\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Esta es la ecuación de movimiento del fluido: **ecuación de Euler**. Es una de las **ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos**.

Si el fluido está en un campo gravitatorio, sobre cualquier elemento de volumen actúa una fuerza adicional  $\rho \mathbf{g}$ , donde  $\mathbf{g}$  es la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse a la fuerza que actúa sobre cada elemento del volumen:

$$(1.2.2) \quad (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{g}$$

En todos los razonamientos hasta ahora no se ha tenido en cuenta la viscosidad o la conducción térmica del fluido. Un fluido de este tipo se denomina **fluido ideal**:

$$\text{Fluido ideal} \iff \nexists \begin{cases} \text{Viscosidad } \nu \\ \text{Conducción térmica} \end{cases}$$

En un fluido ideal no hay conductividad térmica, por lo que el movimiento a través del fluido es *adiabático*.

$$(1.2.3) \quad \text{Movimiento adiabático} \iff \frac{ds}{dt} = 0$$

donde  $s$  es la entropía de una partícula de fluido. Como antes, esta derivada se refiere a la partícula de fluido *en movimiento*, mientras que nosotros queremos expresar las ecuaciones respecto a puntos fijos del espacio:

$$(1.2.4) \quad \frac{ds}{dt} = \mathbf{v} \cdot \text{grad} s + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

Esta forma nos recuerda la ecuación (1.1.2), por lo que podemos escribir una *ecuación de continuidad para la entropía*:

$$(1.2.5) \quad \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \text{div} (\rho s \mathbf{v}) = 0$$

donde  $\rho s \mathbf{v}$  se denomina **densidad de flujo de entropía**.

En general la entropía es constante en todo el fluido, por lo que si tiene un valor específico en un instante inicial, el valor se mantiene en cualquier instante posterior; esto significa que podemos simplificar la ecuación (1.2.5) y dejarla simplemente en

$$(1.2.6) \quad s = \text{constante}$$

En adelante, suponemos que la entropía es constante en todo el fluido. En este caso el movimiento del fluido se denomina **isoentrópico**.

**Ecuación de Euler (versión termodinámica).** Si suponemos que el movimiento es isoentrópico, por lo que podemos utilizar la relación termodinámica:

$$dw = Tds + Vdp$$

donde  $w$  es la entalpía por unidad de masa del fluido,  $V = 1/\rho$  el volumen específico y  $T$  la temperatura. Como  $s$  es constante, tenemos

$$dw = Vdp = \frac{dp}{\rho}$$

y por tanto

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} w$$

Así, la ecuación (1.2.1) puede escribirse como

$$(1.2.7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} w$$

que es la versión termodinámica de la ecuación de Euler.

**Ecuación de Euler (en función sólo de  $\mathbf{v}$ ).** Usando la relación proveniente del análisis vectorial:

$$\frac{1}{2} \text{grad} v^2 = \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$$

podemos escribir (1.2.7) en la forma

$$(1.2.8) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = -\text{grad} w$$

Tomando rotacionales a los dos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta que el rotacional de un gradiente es cero, tenemos una forma de la ecuación de Euler en la que interviene sólo la velocidad:

$$(1.2.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \mathbf{v}) = \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v})$$

**Condiciones límite para un fluido ideal.** Las ecuaciones de movimiento deben complementarse con las condiciones límite que debe satisfacer el fluido en las superficies que lo limitan.



En el caso de un fluido ideal, la condición límite indica que **el fluido no puede penetrar una superficie sólida**. De forma matemática, esta condición es

$$(1.2.10) \quad v_n = 0$$

Es decir, la componente de la velocidad normal a la superficie debe anularse si la superficie está en reposo. Si la superficie está en movimiento

$$v_n = v_{sup}$$

Si es una superficie entre dos fluidos inmiscibles:

$$p_1 = p_2$$

$$v_{n_1} = v_{n_2}$$

### Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

---

Ecuaciones de Euler $(x, y, z)$	$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$
---------------------------------	--

Ecuación de continuidad	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho = 0$
-------------------------	--

Ecuación adiabática	$s = \text{constante}$
---------------------	------------------------

---

CUADRO 1. Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

### 1.3. Hidrostática (G)

Consideramos el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme. Como el fluido está en reposo,  $\mathbf{v} = 0$ , de manera que la ecuación de Euler (1.2.2) toma la forma

$$(1.3.1) \quad \text{grad} p = \rho \mathbf{g}$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido.

**Densidad constante en todo el fluido.** Suponemos que  $\rho$  es constante en todo el volumen (es decir, no hay compresión significativa del fluido

debida a la gravedad). Tomando el eje  $z$  vertical y hacia arriba, tenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

De manera que

$$p = -\rho g z + \text{constante}$$

Si el fluido tiene una superficie libre a una altura  $h$ , donde se le aplica una presión externa  $p_0$  (igual en todos los puntos), esta superficie estará en el plano horizontal  $z = h$ . Estas condiciones límite nos permiten encontrar la constante, que resulta  $p_0 + \rho g h$ , y al final

$$(1.3.2) \quad p = p_0 + \rho g (h - z)$$

**Densidad no constante en el fluido (gran volumen).** En el caso de masas grandes de fluido  $\rho$  no puede suponerse constante.

Ahora suponemos que el fluido está tanto en equilibrio mecánico como térmico, por lo que la temperatura es igual en todos sus puntos. Usaremos la relación termodinámica:

$$dG = -s dT + V dp$$

donde  $G$  es el potencial termodinámico por unidad de masa (entalpía libre o potencial de Gibbs). Si  $T = \text{constante}$

$$dG = V dp = \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow \text{grad} G = \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

Así que ahora, la ecuación de Euler para una *gran* masa de fluido en reposo (1.3.1) puede escribirse como

$$\text{grad} G = \mathbf{g}$$

Si la gravedad  $\mathbf{g}$  es un vector constante dirigido hacia el eje  $z$  negativo,

$$\mathbf{g} = -\text{grad}(gz)$$

por lo que combinando las dos ecuaciones anteriores:

$$(1.3.3) \quad \text{grad}(G - gz) = 0 \Rightarrow G + gz = \text{constante}$$

donde  $gz$  es la energía potencial del elemento de masa del fluido en el campo gravitatorio.

**Dependencia sólo de  $z$ .** Como consecuencia de la ecuación (1.3.1) deducimos que si un fluido está en equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, la presión sólo puede ser función de la altura  $z$  (si la presión fuera diferente en distintos puntos a la misma altitud no estaría en

equilibrio). A partir de (1.3.1) vemos que

$$(1.3.4) \quad \rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz}$$

la densidad también es sólo una función de  $z$ .

$$p = p(z) \Rightarrow \rho = \rho(z) \Rightarrow T = T(z)$$

Es decir,

$$\text{Equilibrio mecánico en campo gravitatorio} \Rightarrow p, \rho, T = f(z)$$

**Masa muy grande de fluido (unidas por la atracción gravitatoria).**

En este caso consideramos una masa muy grande de fluido que se mantiene unido mediante la atracción gravitatoria (como una estrella). Si  $\phi$  es el potencial gravitatorio newtoniano, satisface la ecuación diferencial

$$(1.3.5) \quad \Delta\phi = 4\pi G\rho$$

donde  $G$  es la constante de la gravitación de Newton. La aceleración gravitatoria será  $g = -\text{grad}\phi$ , por lo que la ecuación de Euler (1.3.1) en este caso queda:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad}p = -\text{grad}\phi$$

Tomando la divergencia

$$(1.3.6) \quad \text{div} \left( \frac{1}{\rho} \text{grad}p \right) = -\Delta\phi = -4\pi G\rho$$

Obtenemos la ecuación que nos da el equilibrio mecánico de la estrella (aunque no presupone la existencia de equilibrio térmico completo).

Si el cuerpo no está girando, será esférico y tanto las distribuciones de presión y densidad serán esféricas, por lo que la ecuación (1.3.6) quedará

$$(1.3.7) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G\rho$$

#### 1.4. Caso en que la convección está ausente (G)

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico.

Equilibrio mecánico  $\nRightarrow$  Equilibrio térmico

Si el fluido verifica la ecuación (1.3.1) pero el fluido no está en equilibrio térmico, el equilibrio mecánico sólo es estable si se dan ciertas condiciones.

En caso contrario, el equilibrio es inestable, de manera que se producen corrientes de fluido que tienden a mezclarlo, igualando la temperatura

hasta que se alcanza el equilibrio térmico; este movimiento se denomina **convección**. La condición para que el equilibrio mecánico sea estable es la ausencia de convección.

$$\text{Equilibrio estable} \iff \nexists \text{ convección}$$

Para que el equilibrio sea estable es necesario (pero no suficiente) que la fuerza sobre el elemento que se desplaza tienda a devolverlo a su lugar inicial. Es decir, que el fluido desplazado tiene que ser más pesado que el volumen que ha ocupado su lugar. Si  $V(p, s)$  es el volumen del elemento a una altura  $z$  (donde  $p$  y  $s$  son la presión y entropía de equilibrio a la altura  $z$ ) y el desplazamiento es adiabático, el elemento en su nueva posición tiene  $V(p', s)$ , con  $p' = p(z + \xi)$  (situación (1) en la figura (1)). El elemento de volumen en equilibrio en  $z + \xi$  es  $V(p', s')$  (con  $s' = s(z + \xi)$ ). Así, la condición de equilibrio es

$$V(p', s') - V(p', s) > 0$$

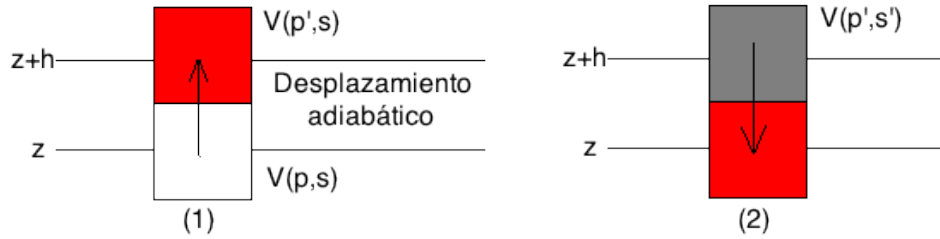


FIGURA 1. Condición de equilibrio: el elemento que ha sido desplazado (gris oscuro) debe ser más pesado que el elemento que lo desplaza (en rojo), de manera que tienda a devolverlo a su posición inicial, manteniendo el equilibrio y evitando las corrientes de convección.

Desarrollando en serie de potencias  $s' - s = \xi \frac{ds}{dz}$  de donde obtenemos

$$(1.4.1) \quad \left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

Las fórmulas de la termodinámica dan:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

en donde  $c_p$  es el calor específico a presión constante.  $c_p$  y  $T$  son positivos, de manera que (1.4.1) puede escribirse como

$$(1.4.2) \quad \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

La mayoría de las sustancias se dilatan cuando se calientan, es decir,  $(\partial V / \partial T)_p > 0$  así que la condición de ausencia de convección se reduce a

$$(1.4.3) \quad \frac{ds}{dz} > 0$$

que la entropía aumente con la altura.

A partir de aquí encontramos la condición para el gradiente de temperaturas. Desarrollando  $ds/dz$

$$\frac{ds}{dz} = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dz} > 0$$

Usando la expresión dada en (1.3.4)  $\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V}$  se obtiene

$$(1.4.4) \quad \frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

En resumen, un fluido en equilibrio mecánico verifica la ecuación (1.3.1). Si no está en equilibrio térmico, el equilibrio será estable en ausencia de convección. La convección se puede dar si

$$\begin{cases} T \Downarrow & \text{cuando } z \Uparrow \\ \frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \end{cases}$$

### 1.5. Ecuación de Bernoulli (G)

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se simplifican en el caso de un flujo estacionario. Un **flujo** es **estacionario** si la velocidad es constante en el tiempo en todo el fluido.

$$\text{Flujo estacionario} \iff \begin{matrix} \mathbf{v} \neq f(t) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) \end{matrix} \iff \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

En esta situación la ecuación de Euler (en versión termodinámica) *tuneada* con la relación del análisis vectorial (1.2.8) queda

$$(1.5.1) \quad \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = -\text{grad} w$$

Introducimos el concepto de **línea de corriente**: la tangente en cualquier punto a una línea de corriente indica la dirección de la velocidad en

ese punto. Estas líneas quedan determinadas por las ecuaciones diferenciales:

$$(1.5.2) \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

En flujo estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo y coinciden con la trayectoria de las partículas (cosa que no sucede en flujo no estacionario).

Hacemos el producto escalar de la ecuación (1.5.1) con un vector unitario  $\mathbf{l}$  tangente a la línea de corriente. La proyección del gradiente en una dirección es la derivada en esa dirección, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \mathbf{grad} w &\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial l} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \perp \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \parallel \mathbf{l} &\Rightarrow \mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

Así que la ecuación (1.5.1) queda como

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0$$

De manera que

$$(1.5.3) \quad \frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante} \quad \text{a lo largo de una línea de corriente}$$

(La constante es diferente en cada línea de corriente). La ecuación anterior es la **ecuación de Bernoulli**.

**Flujo estacionario en un campo gravitatorio.** Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, tenemos que sumar la gravedad  $g$  al segundo miembro de la ecuación (1.5.1). Si la dirección de la gravedad es el eje  $z$ , entonces el ángulo formado por  $g$  y  $\mathbf{l}$  es la derivada  $-dz/dl$ , por lo que la proyección de  $g$  sobre  $\mathbf{l}$  es  $-g \frac{dz}{dl}$  y la ecuación de Bernoulli en un campo gravitatorio resulta:

$$(1.5.4) \quad \frac{1}{2} v^2 + w + gz = \text{constante}$$

## 1.6. Flujo de energía (B)

Seleccionamos un volumen fijo cualquiera y estudiamos cómo varía la energía del fluido con el tiempo. Si la energía del volumen seleccionado es  $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon$  (energía cinética e interna, donde  $\epsilon$  es la energía interna por unidad de masa), estamos interesados en calcular

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right)$$

Para ello, nos centraremos en cada término por separado.

**Término**  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

O utilizando la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación de Euler (1.2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p - \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$$

Y ahora el último término lo modificamos:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2$$

Y para  $\mathbf{grad} p$  usamos la relación termodinámica  $dw = Tds + \frac{1}{\rho} dp$ , con lo que

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{grad} w - \rho T \mathbf{grad} s$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} w + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} w + \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s \end{aligned}$$

**Término**  $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon)$ . Utilizamos la relación termodinámica

$$d\epsilon = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Como  $\epsilon + \frac{p}{\rho}$  es la entalpía por unidad de masa

$$d(\rho \epsilon) = \rho d\epsilon + \epsilon d\rho = w d\rho + \rho T ds$$

y por tanto

$$\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} = w \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}$$

Utilizamos la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación adiabática general (1.2.4)<sup>3</sup> para obtener

$$\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} = -w \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s$$

Combinando los resultados para los dos términos tenemos finalmente para la variación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = - \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right)$$

<sup>3</sup>La “ecuación de continuidad de la entropía”.

o lo que es lo mismo

$$(1.6.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = -\text{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \right)$$

Integrando esta expresión respecto al volumen considerado tenemos:

$$(1.6.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) dV &= - \int \text{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \right) dV = \\ &= - \oint \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \cdot d\mathbf{f} \end{aligned}$$

Como vemos, el primer miembro es la variación de energía del fluido por unidad de tiempo mientras que el segundo término es la energía que sale del volumen. Por tanto,

$$(1.6.3) \quad \text{Densidad de flujo de energía} \quad \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right)$$

### 1.7. Flujo de impulso (B)

Hacemos los mismos razonamientos que en la sección anterior, pero interesándonos en la cantidad de movimiento del fluido. El impulso por unidad de volumen es  $\rho \mathbf{v}$ , de manera que buscamos  $\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t$  (usando notación tensorial):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Usamos la ecuación de continuidad (1.1.2) en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

y la ecuación de Euler (1.2.1) en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) \end{aligned}$$

Reescribimos el primer término del segundo miembro como

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

y finalmente

$$(1.7.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$



donde  $\Pi_{ik}$  es el tensor simétrico:

$$(1.7.2) \quad \Pi_{ik} = \delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

Como antes, integrando sobre todo el volumen considerado tenemos:

$$(1.7.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV &= - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = \\ &= - \oint \Pi_{ik} df_k \end{aligned}$$

El primer miembro es la variación de la componente  $i$  del impulso en el volumen, y por tanto, el segundo miembro es la cantidad de impulso que atraviesa la superficie por unidad de tiempo. Si escribimos  $df_k = n_k df$  donde  $\mathbf{n}$  es un vector normal a la superficie (apuntado hacia afuera),  $\Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k$ , o de forma vectorial:

$$(1.7.4) \quad \Pi = p \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$$

Así,  $\Pi_{ik}$  es la componente  $i$  de impulso que fluye a través del área perpendicular al eje  $k$  de la superficie por unidad de tiempo.  $\Pi_{ik}$  se denomina **tensor de densidad de flujo de impulso**.

### 1.8. Conservación de la circulación (G)

La integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

a lo largo de un contorno cerrado se denomina **circulación de la velocidad**.

Consideramos la circulación sobre contorno fluido en un instante determinado. Queremos saber qué ocurre a medida que pasa el tiempo. Como el contorno se ha tomado sobre partículas del fluido, el contorno se despalza con éstas, por lo que queremos averiguar:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Tomamos la derivada total porque debemos tener en cuenta tanto la variación de la velocidad como el de  $d\mathbf{l}$ , al desplazarse el contorno con las partículas. Así<sup>4</sup>:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{l}}{dt}$$

Nos concentramos en el segundo término:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = \delta \left( \frac{1}{2} v^2 \right) \Rightarrow \oint \delta \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = 0$$

<sup>4</sup>Utilizamos  $\delta$  para distinguir el diferencial de la derivada y no liarnos.

Pero la integral a lo largo de un camino cerrado de una diferencial total es cero, así que

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l}$$

Utilizando el teorema de Stokes  $\int_S \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ , de manera que:

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{f}$$

Finalmente, teniendo en cuenta  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad}w$ , y que el rotacional de un gradiente es cero<sup>5</sup> tenemos:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{f} = \int_S \mathbf{rot}(\mathbf{grad}w) \cdot d\mathbf{f} = 0$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$(1.8.1) \quad \Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante}$$

En un fluido ideal, la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno *fluido* cerrado es constante en el tiempo (Teorema de Kelvin o Ley de conservación de la circulación).

Hemos utilizado la ecuación de Euler 1.2.7, en la que interviene que el flujo es isoentrópico, por lo que **el resultado no es válido si el fluido no es isoentrópico**.

### 1.9. Flujo potencial (G)

Suponemos un flujo estacionario. Consideramos una línea de corriente de la que sabemos que, en un determinado punto tiene vorticidad cero  $\omega \equiv \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ . Si elegimos un camino cerrado alrededor de la línea de corriente, la circulación de la velocidad será

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_S \omega \cdot d\mathbf{f} = 0$$

Es decir, vemos que la circulación es cero. A medida que el contorno se mueve con el fluido siguiendo la línea de corriente, la ley de conservación de la circulación nos dice que este valor no se altera, por tanto, la vorticidad  $\omega$  también se mantendrá igual a cero a lo largo de toda la línea de corriente.

<sup>5</sup>Si el fluido ideal está sometido a un campo gravitatorio  $\mathbf{g}$  también se verifica la ley de conservación de la circulación, porque  $\mathbf{rot} \mathbf{g} = 0$ .

Por tanto, si  $\omega = \text{rot } \mathbf{v} = 0$  en un punto de la línea de corriente, es igualmente cero en toda la línea de corriente.

$$\omega(x) = 0 \Rightarrow \omega(x') = 0 \quad \forall x' \in \text{línea de corriente}$$

Consideramos un flujo estacionario incidiendo sobre un cuerpo. Como el flujo es uniforme en el infinito, su velocidad  $\mathbf{v}$  es una constante, de manera que  $\omega = 0$  en todas las líneas de corriente. Con el resultado anterior se concluye entonces que  $\omega = 0$  para todas las líneas de corriente del fluido, o lo que es lo mismo,  $\omega = 0$  en todo el fluido.

$$\begin{aligned} \text{Flujo estacionario} &\Rightarrow \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \omega(\infty) = 0 \quad \forall \text{ líneas de corriente} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega = 0 \quad \text{todo el fluido} \end{aligned}$$

Un flujo en el cual  $\omega = 0$  en todo el espacio se denomina **flujo potencial** o **flujo irrotacional**. Por el contrario, un flujo en el que  $\omega$  no es nula en todos los puntos se denomina **flujo rotacional**.

Si en un instante determinado tenemos un flujo potencial en todo el volumen del fluido. Entonces, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno cerrado cualquiera será cero. Por la ley de conservación de la circulación, también será cero en cualquier instante futuro, por lo que si existe un flujo potencial en un instante cualquiera, tendremos un flujo potencial en cualquier instante futuro.

Flujo potencial en  $t$  (en todo el fluido)

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const} \quad \forall \text{ contorno cerrado} \\ &\text{Flujo potencial } \forall t' > t \end{aligned}$$

De hecho, esto coincide con el hecho de que si  $\omega = 0$ , entonces la ecuación de Euler (en función sólo de la velocidad) 1.2.9 se satisface automáticamente.

**Todas estas conclusiones tienen validez limitada.**

El resultado de que la vorticidad  $\omega = 0$  para toda línea de corriente no es válida para líneas de corriente contenidas en la superficie de un sólido junto al cual circula un flujo. La presencia del cuerpo sólido impide construir un contorno cerrado alrededor de la línea de corriente. Las ecuaciones del movimiento admiten soluciones en las que se produce una separación en la superficie del cuerpo: algunas líneas de corriente que han seguido la superficie del cuerpo empiezan a separarse de ella y siguen dentro del fluido. El flujo se caracteriza por una superficie de discontinuidad tangencial que sale del cuerpo. En esta superficie una capa se desliza

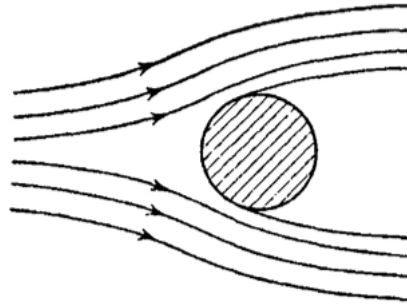


FIGURA 2. Separación sobre la superficie de un cuerpo sólido junto al que circula un flujo

sobre la otra. Desde el punto de vista matemático la discontinuidad en la componente tangencial corresponde a una superficie en la cual la vorticidad  $\omega$  es nula.

Si incluimos estos flujos discontinuos, la solución de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal la solución no es única; sin embargo todas las soluciones discontinuas no tienen significado físico ya que las discontinuidades tangenciales son inestables y el flujo se haría turbulento.

El problema físico real del flujo alrededor de un cuerpo tiene una solución única. Esta solución única viene determinada por las propiedades de la **capa límite**. Esta capa límite es una capa delgada de fluido que circula junto al cuerpo. Como los fluidos ideales no existen, todos tienen una cierta viscosidad, aunque sea pequeña. En esta capa cercana al cuerpo la viscosidad no puede despreciarse. En función de las características de esta capa, se selecciona una de las infinitas soluciones de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal. Así, siempre despreciaremos las soluciones que dan lugar a separación ya que si hay separación se producirá turbulencia.

El estudio de las soluciones de las ecuaciones de movimiento para un flujo estacionario continuo que circula junto a cuerpos en movimiento aporta resultados interesantes para cuerpos de forma *aerodinámica*. En estos casos el flujo difiere muy poco de un flujo potencial, excepto en una capa límite y en una *estela* estrecha detrás del mismo.

Otro caso en el que es importante el estudio del flujo potencial es cuando existen oscilaciones pequeñas de un cuerpo inmerso en un fluido. De hecho, si la amplitud  $a$  de las oscilaciones es pequeña comparadas con la dimensión  $l$  del cuerpo ( $a \ll l$ ), el flujo que circula junto al cuerpo es

potencial.

$$\text{Flujo potencial} \iff \begin{cases} \text{Formas aerodinámicas} & \text{(excepto en capa límite y estela)} \\ \text{Cuerpo oscilando} & a_{osc} \ll l_{cuerpo} \text{ (osc. pequeñas)} \end{cases}$$

La velocidad  $\mathbf{v}$  varía apreciablemente en una cantidad del mismo orden que la velocidad  $u$  del cuerpo oscilante a lo largo de una longitud del orden de la dimensión  $l$  del cuerpo  $\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \equiv \text{grad } \mathbf{v} \sim \frac{u}{l}$ . La magnitud de  $\mathbf{v}$  es del orden de  $u$  (a pequeñas distancias del cuerpo), de manera que

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \sim \frac{u^2}{l}$$

La derivada  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \omega u$ , donde  $\omega$  es la frecuencia de las oscilaciones. Y como  $\omega \sim u/a$ , tenemos  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \frac{u^2}{a}$ . Como nos centramos en oscilaciones pequeñas,  $a \ll l$ ,  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  y puede despreciarse, por lo que la ecuación de Euler queda:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } w$$

Tomando el rotacional en ambos miembros

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } (\text{grad } w) = 0 \Rightarrow \text{rot } \mathbf{v} = \text{constante}$$

Pero en un movimiento oscilante el promedio temporal de la velocidad es cero, por lo que  $\text{rot } \mathbf{v} = \text{Vorticidad} = \omega = \text{constante} = 0$ . Por tanto, en primera aproximación

$$\text{Cuerpo oscilante} \iff \text{Flujo potencial}$$

**Propiedades del flujo potencial.** La ley de conservación de la circulación se basa en que el flujo es isoentrópico. Sólo el flujo isoentrópico puede ser potencial. Usando el teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

Para un flujo potencial  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  (vorticidad), por lo que

$$(1.9.1) \quad \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Es decir, la circulación alrededor de cualquier contorno cerrado es nula  $\Rightarrow$  no pueden existir líneas de corriente cerradas en un flujo potencial. Como la dirección de una línea de corriente es en todos los puntos la dirección de la velocidad, la circulación a lo largo de esta línea no puede ser cero (pues significaría que no hay flujo, que el fluido está estático).

Si tenemos un campo vectorial con un rotacional cero, la velocidad en el flujo potencial puede expresarse como gradiente de un escalar; en este

caso se denomina **potencial de velocidad**.

$$(1.9.2) \quad \mathbf{v} = \text{grad} \phi$$

Escribiendo la ecuación de Euler en la forma 1.2.8

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = \text{grad} w$$

y sustituyendo  $\mathbf{v} = \text{grad} \phi$  tenemos

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0$$

de donde

$$(1.9.3) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w = f(t)$$

donde  $f(t)$  es una función arbitraria del tiempo. Como la velocidad es la derivada espacial de  $\phi$  podemos sumar  $\phi$  a cualquier función del tiempo; cambiando  $\phi$  por  $\phi + \int f(t) dt$  tenemos cero en el segundo miembro de (1.9.3)

En el caso de un flujo estacionario (considerando  $\phi$  independiente del tiempo),  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ ,  $f(t) = \text{constante}$  y entonces (1.9.3) se transforma en la **ecuación de Bernoulli**.

$$(1.9.4) \quad \frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante}$$

### 1.10. Fluidos incompresibles (G)

En muchos fluidos la densidad se puede considerar constante  $\rho = \text{const}$ , es decir, no se observa ninguna compresión/dilatación apreciable en todo el fluido. En este caso denominamos al **fluido incompresible**. En este caso las ecuaciones de la dinámica se simplifican mucho.

$$\text{Flujo incompresible} \iff \begin{cases} \nexists \text{ compresión} \\ \nexists \text{ dilatación} \end{cases} \iff \rho = \text{constante}$$

En esta situación las ecuaciones de la dinámica se simplifican mucho.

$$(1.10.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{g}$$

$$(1.10.2) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

En el caso de la ecuación de Euler podemos incluir  $\rho$  dentro del operador gradiente, mientras que en el caso de la ecuación de continuidad queda muy simplificada.

Como la densidad deja de ser una variable desconocida, las ecuaciones de la dinámica pueden considerarse como un conjunto de ecuaciones en el que sólo es necesario especificar la velocidad:

$$(1.10.3) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(1.10.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v})$$

En este caso la ecuación de Bernoulli también puede escribirse de manera más sencilla. La ecuación (1.10.1) difiere de la ecuación de Euler (1.2.7), en general, en que hay que escribir  $\text{grad} (p/\rho)$  en lugar de  $\text{grad} w$ . Por tanto, podemos escribir la ecuación de Bernoulli cambiando la entalpía en (1.5.4) por  $p/\rho$

$$(1.10.5) \quad \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante}$$

En el caso de un fluido incompresible también podemos escribir  $p/\rho$  en lugar de  $w$  en la expresión (1.6.3) que da el flujo de energía

$$(1.10.6) \quad \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right)$$

Sabemos de la termodinámica que la variación de la energía interna es:

$$d\epsilon = Tds - pdV$$

que en el caso de  $s = \text{const}$  y  $V = 1/\rho = \text{const}$  resulta en  $d\epsilon = 0 \Rightarrow \epsilon = \text{const}$ . Como los términos constantes en la energía no tienen importancia, podemos omitir  $\epsilon$  en  $w = \epsilon + p/\rho$ .

Las ecuaciones todavía se simplifican más en el caso de un flujo potencial de fluido incompresible.

$$\begin{array}{ll} \text{Flujo potencial} & \Longleftrightarrow \quad \omega = 0 = \text{rot } \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = \text{grad} \phi \\ \text{Fluido incompresible} & \Longleftrightarrow \quad \rho = \text{const} \\ & \Downarrow \\ \text{Ecuación de Euler} & \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) \Rightarrow 0 = 0 \\ \text{Ecuación de continuidad} & \rightarrow \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \text{grad} \phi \Rightarrow \Delta \phi = 0 \end{array}$$

Es decir, sólo tenemos que resolver la ecuación de Laplace para el potencial  $\phi$ .

$$(1.10.7) \quad \Delta \phi = 0$$

Debemos completar las ecuaciones anteriores con condiciones límite en las superficies en las que el fluido se encuentra con cuerpos sólidos:

$$v_n^{fluido} = v_n^{superficie} = \begin{cases} v_n^{fluido} = 0 & \text{Superficie fija} \\ v_n^{fluido} = v_n^{sup} = f(t) & \text{Superficie móvil} \end{cases}$$

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

En general la velocidad normal es la derivada en la dirección normal a la superficie del potencial  $\phi$ , por lo que en general las condiciones límite son una determinada función de las coordenadas y del tiempo en los límites.

En el caso del flujo potencial la velocidad está relacionada con la presión mediante la ecuación (1.9.3). En un fluido incompresible, podemos sustituir  $w$  por  $p/\rho$ , de manera que

$$(1.10.8) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t)$$

Observamos la siguiente propiedad de un flujo potencial de un fluido incompresible; si el cuerpo sólido está en movimiento a través del fluido y resulta en un flujo potencial, en un instante cualquiera sólo depende de la velocidad del cuerpo móvil (y no, por ejemplo, de su aceleración). La ecuación de Laplace para el potencial (1.10.7) no depende explícitamente del tiempo, que sólo entra en la solución a través de las condiciones límite (y éstas sólo contiene la velocidad del cuerpo). A partir de la ecuación de Bernoulli observamos que en el flujo estacionario de un fluido incompresible la presión máxima se presenta en puntos donde la velocidad se anula  $v = 0$

$$p = \rho \times const - \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow p^{max} = \rho \times const$$

Este punto normalmente está en la superficie del cuerpo a lo largo del cual se está moviendo el fluido (el punto O de la figura (3)) y se denomina **punto de estancamiento**. Si  $u$  es la velocidad de la corriente incidente (es decir, la velocidad  $u(\infty)$  y  $p_0 = p(\infty)$ ), la presión en el punto de estancamiento es

$$(1.10.9) \quad p_{max} = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2$$

**Flujo bidimensional.** Si la distribución de velocidades en un fluido móvil sólo depende de dos coordenadas y la velocidad en todas partes es paralela al plano  $xy$  entonces el flujo se denomina **bidimensional** o **flujo plano**. En este caso es conveniente expresar la velocidad en función de lo que se denomina **función de corriente**  $\psi(x, y)$ . A partir de la ecuación



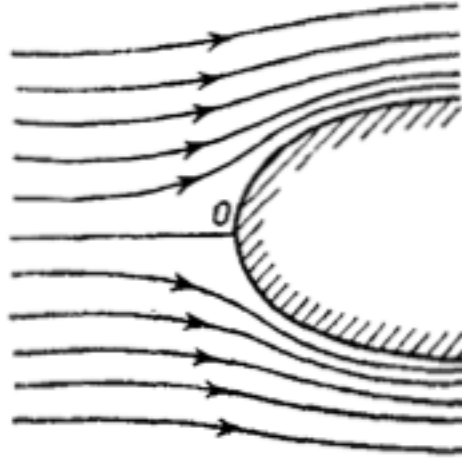


FIGURA 3. Punto de estancamiento

de continuidad  $\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$ , de manera que las componentes de la velocidad se pueden escribir como

$$(1.10.10) \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

De esta manera la ecuación de continuidad se satisface automáticamente. Por lo que entonces sólo nos queda obtener la ecuación de Euler (1.10.4) en función de la función de corriente:

$$(1.10.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = 0$$

Es decir, que si conocemos la función de corriente  $\psi$  podemos determinar inmediatamente la forma de las líneas de corriente en un flujo estacionario. La ecuación diferencial de la línea de corriente (en flujo bidimensional) es  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow v_y dx - v_x dy = 0$ , expresa el hecho de la dirección de la tangente a una línea de corriente es la dirección de la velocidad. Sustituyendo (1.10.10) tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0$$

de donde  $\psi = \text{constante}$ . Es decir, las líneas de corriente son la familia de curvas obtenidas haciendo la función de corriente  $\psi(x, y)$  igual a una constante arbitraria.

El flujo de masa  $Q$  entre dos puntos fijos en el plano  $xy$  viene dado por la diferencia de la función de corriente entre estos dos puntos, independientemente de cuál sea la curva que una los puntos. Si  $v_n$  es la

componente de la velocidad normal a la curva en un punto cualquiera, entonces:

(1.10.12)

$$Q = \rho \oint_A^B v_n dl = \rho \oint_A^B (-v_y dx + v_x dy) = \rho \int_A^B d\psi \Rightarrow Q = \rho (\psi_B - \psi_A)$$

Existen potentes métodos para resolver problemas de flujo potencial bidimensional en el caso de un fluido incompresible que rodea a cuerpos de diversos perfiles en los que interviene la teoría de funciones de variable compleja.

En cuanto a la condición para que un fluido pueda considerarse incompresible, está relacionada con la velocidad del sonido  $c$  en el fluido. Cuando la presión varía en  $\Delta p$ , la densidad lo hace en  $\Delta \rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \Delta p$ . Pero según la ecuación de Bernoulli, en flujo estacionario,  $\Delta p \sim \rho v^2$ , de manera que  $\Delta \rho \sim \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \rho v^2$ . Más adelante veremos que  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = c^2$ , de manera que al final

$$(1.10.13) \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1 \iff \text{Fluido incompresible (flujo estacionario)} \\ v \ll c$$

es decir, que considerar al fluido incompresible es equivalente a que la velocidad del fluido sea pequeña en comparación con la del sonido en el fluido. Pero esta condición sólo es suficiente en flujo estacionario. Cuando el flujo no es estacionario necesitamos una condición adicional. Si  $\tau$  y  $l$  es un tiempo y una longitud del orden de los tiempos y distancias en lo que la velocidad del fluido sufre una variación significativa. Entonces, el fluido (en flujo no estacionario) puede considerarse incompresible si además de (1.10.13) se cumple

$$(1.10.14) \quad \tau \gg \frac{l}{c}$$

La condición (1.10.14) indica que el tiempo  $\frac{l}{c}$  que tarda una señal sonora en recorrer la distancia  $l$  debe ser pequeño en comparación con el tiempo  $\tau$  durante el cual el flujo varía apreciablemente. De esta manera las interacciones en el fluido pueden considerarse instantáneas.

Si se satisfacen simultáneamente las condiciones (1.10.13) y (1.10.14) el fluido puede considerarse incompresible:

$$\text{Fluido incompresible} \iff \begin{cases} v \ll c \\ \tau \gg \frac{l}{c} \end{cases}$$

### 1.11. Fuerza de arrastre en un flujo potencial que rodea un cuerpo

En esta sección nos preocupamos del problema de un flujo potencial de un fluido incompresible que rodea un cuerpo sólido. Ésto es equivalente a un problema con el cuerpo en movimiento y el fluido en reposo. Lo único que tenemos que hacer es cambiar a un sistema de referencia en el que el fluido esté en reposo en el infinito. **A partir de ahora consideramos que es el cuerpo el que se mueve a través del fluido.**



FIGURA 4. a) Flujo alrededor de un cuerpo en reposo  
b) Cuerpo en movimiento a través de un fluido estático

El flujo potencial de un fluido incompresible satisface la ecuación de Laplace  $\Delta\phi = 0$ . Las soluciones que buscamos deben anularse en el infinito, ya que allí el fluido está en reposo. El origen de nuestro sistema de referencia está en algún punto en el interior del cuerpo. La solución de la ecuación de Laplace es de la forma  $\frac{1}{r}$  y derivadas espaciales de  $1/r$  de cualquier orden:

$$\phi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} + \dots$$

donde  $a, \mathbf{A}$  son independientes de  $r$ .

**La constante  $a$  debe ser cero.** Si  $\phi = -\frac{a}{r}$ , entonces  $\mathbf{v} = -\text{grad} \frac{a}{r} = \frac{a}{r^3} \mathbf{r}$ . Pero en este caso, si calculamos el flujo de masa a través de una superficie cerrada, por ejemplo una esfera de radio  $R$  vemos que es  $\rho \frac{a}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi \rho a$ . Pero para un fluido incompresible, la cantidad de fluido que entra en la superficie debe ser igual a la que sale, es decir, que el flujo de masa debe ser cero. Por ello, la única solución es que  $a = 0$ .

**Velocidad a grandes distancias del cuerpo.** Como estamos buscando la velocidad a distancias grandes del cuerpo, podemos despreciar las derivadas de orden superior y quedarnos sólo con el primer término.

$$(1.11.1) \quad \phi = \mathbf{A} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{A}}{r^2} \cdot \mathbf{n}$$

y la velocidad resultante

$$(1.11.2) \quad \mathbf{v} = \text{grad}\phi = (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{A}}{r^3}$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unidad en la dirección de  $\mathbf{n}$ . El vector  $\mathbf{A}$  depende de la forma real y la velocidad del cuerpo y sólo puede determinarse resolviendo por completo la ecuación de Laplace a todas las distancias (con las condiciones límite apropiadas en la superficie del cuerpo).

**Relación de  $\mathbf{A}$  con el impulso y la energía del fluido.** La energía cinética del fluido (la energía interna de un fluido incompresible siempre es constante) es  $E = \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV$ , integrando para toda la región exterior al cuerpo. Elegimos una esfera de radio  $R$  y volumen  $V$  (después haremos tender  $R \rightarrow \infty$ ).

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad del cuerpo. Como  $\mathbf{u}$  es independiente de las coordenadas,  $\int u^2 dV = u^2 \int dV = u^2 (V - V_0)$ , donde  $V_0$  es el volumen del cuerpo. En cuanto al segundo término, escribimos  $\mathbf{v} = \text{grad}\phi$  y  $\mathbf{u} = \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$ , de manera que  $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \text{grad}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})$

$$\int \text{grad}(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{v} - \mathbf{u}) dV$$

Utilizamos la identidad vectorial

$$\text{div}(f\mathbf{A}) = \text{grad}f \cdot \mathbf{A} + f \text{div}\mathbf{A}$$

de manera que el integrando se transforma en

$$\text{div}[(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})] + (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

Pero  $\text{div}\mathbf{v} = 0$  (ecuación de continuidad) y  $\text{div}\mathbf{u} = 0$ ,  $\text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0$ . Así que

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int \text{div}[(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})] dV$$

Y utilizando el teorema de la divergencia, transformamos el segundo término en una integral de superficie.

$$\int \text{div}[(\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u})] dV = \oint_{S+S_0} (\phi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{f}$$

Pero en la superficie del cuerpo, por las condiciones límite, las componentes normales de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$  son iguales, por lo que la integral  $\oint_{S_0}$  se anula. Para la superficie  $S$ , sustituimos las expresiones para  $\phi$  y  $\mathbf{v}$  que hemos

encontrado en (1.11.1) y (1.11.2), con lo que obtenemos:

$$\int v^2 dV = u^2 \left( \frac{4}{3} \pi R^3 - V_0 \right) + \int [3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^2 R^3)] do$$

donde hemos escrito  $d\mathbf{f} = \mathbf{n}R^2 do$  y  $do$  es un elemento de ángulo sólido.

Al final de la integración, obtenemos para la energía total del fluido

$$(1.11.3) \quad E = \frac{1}{2} \rho (4\pi \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - V_0 u^2)$$

Aunque no podemos obtener  $\mathbf{A}$  sin resolver la ecuación  $\Delta\phi = 0$ , sabemos que la ecuación es lineal en  $\phi$  y que las condiciones límite también son ecuaciones lineales en  $\phi$  y  $\mathbf{u}$ . Por tanto  $\mathbf{A}$  tiene que ser una función lineal de las componentes  $\mathbf{u}$ . Y la energía, como hemos visto en (1.11.3) es cuadrática de las componentes de  $\mathbf{u}$ , así que podemos escribir

$$(1.11.4) \quad E = \frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k$$

donde  $m_{ik}$  es es **tensor de masas asociadas**, simétrico y constante, cuyas componentes se pueden obtener a partir de  $\mathbf{A}$ .

Como  $E$  y  $\mathbf{P}$  (el impulso total del fluido) están relacionados mediante  $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$ <sup>6</sup>, entonces podemos escribir las componentes de  $\mathbf{P}$  como

$$(1.11.5) \quad P_i = m_{ik} u_k$$

Y combinando (1.11.3), (1.11.4) y (1.11.5) vemos que  $\mathbf{P}$  tiene que venir dado, en función de  $\mathbf{A}$  por

$$(1.11.6) \quad \mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0 \mathbf{u}$$

El impulso transmitido al fluido por el cuerpo por unidad de tiempo es  $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$ , es decir, la fuerza que actúa sobre el cuerpo

$$(1.11.7) \quad \mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

La componente de  $\mathbf{F}$  paralela a la velocidad del cuerpo se denomina **fuerza de arrastre** y la componente perpendicular **fuerza de sustentación**.

### 1.12. Ondas de gravedad

La superficie de un fluido en equilibrio en un campo gravitatorio es plana. Si una fuerza externa perturba la superficie y hace que se separe de la posición de equilibrio, aparece un movimiento en el fluido. Este movimiento se propaga por toda la superficie mediante lo que se denominan **ondas de gravedad** (ya que se deben a la acción del campo gravitatorio).

<sup>6</sup> $E = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow dE = \frac{1}{2} m 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot d(m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}$

Las ondas de gravedad afectan tanto a la superficie del fluido como a su interior, aunque su efecto es menor a medida que aumenta la profundidad.

Consideramos ondas de gravedad en las que la velocidad de las partículas del fluido móvil sea pequeña, de manera que

$$(1.12.1) \quad (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \iff a \ll \lambda$$

es decir, que la amplitud de las oscilaciones de la onda  $a$  debe ser pequeña comparada con su longitud de onda  $\lambda$ . En la sección (1.9), si despreciar el término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  es equivalente a suponer que tenemos un flujo potencial. Si además consideramos que el fluido es incompresible, podemos utilizar la ecuación de Laplace para el potencial (1.10.7) y (1.10.8), que relaciona la velocidad y la presión. En esta ecuación podemos despreciar el término  $\frac{1}{2}v^2$  porque contiene el cuadrado de la velocidad. Hacemos  $f(t) = 0$  e incluimos el término  $\rho g z$  introducido por el campo gravitatorio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + g z &= f(t) \\ \frac{1}{2}v^2 &\rightarrow 0 \\ f(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$(1.12.2) \quad p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Tomamos el eje  $z$  vertical, con el plano  $xy$  coincidiendo con la superficie de equilibrio del fluido y designamos  $\zeta$  la coordenada  $z$  de un punto de la superficie. Como en equilibrio  $\zeta = 0$ ,  $\zeta$  nos da el desplazamiento vertical de la superficie sobre sus oscilaciones. Si sobre la superficie actúa una presión constante  $p_0$

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Consideramos un potencial  $\phi' = \phi + \frac{p_0}{\rho} t$  de manera que  $\mathbf{v} = \text{grad} \phi = \text{grad} \phi'$ , pero nos permite eliminar el término  $p_0$  (y prescindimos de la prima en  $\phi$ ):

$$(1.12.3) \quad g \zeta + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} = 0$$

Como la amplitud de las oscilaciones de las ondas es pequeña, el desplazamiento  $\zeta$  también es pequeño. En el mismo orden de aproximación suponemos que la componente vertical de la velocidad de los puntos de la superficie en la superficie es  $v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ , pero a su vez,  $v_z = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta}$ , así que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta}$$

Si despejamos  $\zeta$  de la ecuación (1.12.3) y la introducimos en esta igualdad

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} \right) = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta} \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} &= 0\end{aligned}$$

Como las oscilaciones  $\zeta$  son pequeñas,  $z = \zeta \sim z = 0$ , de manera que las ecuaciones que debemos resolver para determinar el movimiento de una superficie bajo la acción de un campo gravitatorio es:

$$(1.12.4) \quad \Delta \phi = 0$$

$$(1.12.5) \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0$$

Supondremos que la superficie del fluido es ilimitada y que  $\lambda$  es pequeña comparada con la profundidad del fluido, así que podemos omitir las condiciones límite en los bordes y en la parte inferior.

Consideramos una onda de gravedad que se propaga a lo largo del eje  $x$  y que es uniforme en la dirección  $y$  (por lo que todas las magnitudes son independientes de  $y$ ). Buscaremos una solución que sea una función periódica simple del tiempo y de la coordenada  $x$

$$\phi = f(z) \cos(kx - \omega t)$$

donde

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0$$

Esta ecuación tiene soluciones  $e^{kz}$  y  $e^{-kz}$ . Debemos eliminar la solución  $e^{-kz}$  porque haría crecer  $\phi$  en el interior del fluido ( $z < 0$ )<sup>7</sup>. Así que la solución es

$$(1.12.6) \quad f(z) = Ae^{kz} \Rightarrow \phi = Ae^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

Si introducimos esta solución en la ecuación (1.12.5), que también debe satisfacerse, encontramos:

$$(1.12.7) \quad k - \frac{\omega^2}{g} = 0 \Rightarrow \omega^2 = kg$$

<sup>7</sup>Es decir, si consideramos que la solución general es de la forma  $f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$ , tenemos una condición límite que dice que como el fluido es infinitamente profundo,  $\phi(-\infty) = 0 \Rightarrow B = 0$ . O lo que es lo mismo, la perturbación de la superficie disminuye con la profundidad hasta disiparse completamente.

La ecuación (1.12.7) nos da la relación entre el número de onda y la frecuencia de la onda de gravedad.

Una vez obtenido el potencial  $\phi$ , encontramos la distribución de velocidades,

$$(1.12.8) \quad v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -Ake^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = Ake^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

Más adelante se demostrará que la velocidad de propagación  $U$  de la onda viene dada por  $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ ; en nuestro caso:

$$(1.12.9) \quad U = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \sqrt{kg}}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Como vemos, la velocidad de propagación aumenta con la longitud de onda  $\lambda$ .

### 1.13. Ondas de gravedad largas

No entiendo cómo se están considerando ondas de gravedad con longitud de onda grande respecto a la profundidad pero se pueden despreciar “los términos cuadráticos de la velocidad, puesto que se supone de nuevo que es pequeña la longitud de onda” (pag 47).

### 1.14. Ondas en un fluido incompresible

Existe un tipo de onda de gravedad que puede propagarse en el interior de un fluido incompresible. Estas ondas se deben a una inhomogeneidad del fluido producida por el campo gravitatorio. La presión (y la entropía  $s$ ) varían con la altura, por lo que cualquier desplazamiento de una partícula de fluido en altura destruye el equilibrio mecánico y produce un movimiento oscilante. El efecto, como el movimiento es adiabático, es que la partícula transporta con ella a su nueva posición toda su entropía anterior  $s$ , que no es la misma que la que corresponde al valor de equilibrio en la nueva posición.

Suponemos que la longitud de onda es pequeña en comparación con las distancias sobre las que el campo gravitatorio produce una variación notable de la densidad. También suponemos que el fluido es incompresible (podemos despreciar las variaciones producidas por la presión de la onda en la densidad). Toda la modificación de la densidad proviene de la dilatación térmica (que es la que origina la onda en este caso).

Vamos a escribir las ecuaciones hidrodinámicas para este movimiento. Utilizamos un sufijo  $_0$  para distinguir los valores de las magnitudes



correspondientes al equilibrio mecánico y una prima ' para marcar las desviaciones respecto al equilibrio.

La ecuación de conservación de la entropía  $s = s_0(z) + s'$  puede escribirse, hasta primer orden

$$(1.14.1) \quad \frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s_0 = 0$$

En la ecuación de Euler despreciamos el término  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$  porque las oscilaciones son pequeñas<sup>8</sup>. La distribución de presión en el equilibrio viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} p_0 + \mathbf{g} \\ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} \sim 0 &\downarrow \text{Oscilaciones pequeñas} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = 0 &\downarrow \text{Equilibrio} \\ \Rightarrow \mathbf{grad} p_0 &= \rho_0 \mathbf{g} \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} p' + \frac{\rho'}{\rho^2} \mathbf{grad} p_0$$

Como la variación de la densidad se debe únicamente al cambio de entropía y no a la variación de presión, podemos escribir:

$$\rho' = \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s'$$

y así se obtiene entonces la ecuación de Euler en la forma:

$$(1.14.2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial s_0} \right)_p s' - \mathbf{grad} \frac{p'}{\rho_0}$$

Podemos incluir  $\rho_0$  bajo el operador gradiente porque siempre despreciamos la variación de la densidad de equilibrio en distancias del orden de la longitud de onda. Por esta misma razón podemos considerar constante la densidad en la ecuación de continuidad, de manera que

$$(1.14.3) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

Como solución de las ecuaciones (1.14.1)-(1.14.3) buscamos ondas planas, tanto para la velocidad como para  $s'$   $p'$

$$\mathbf{v} = \text{const} \times e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$$

<sup>8</sup>Supongo que se refiere a que la amplitud de la onda  $a$  es pequeña comparada con la longitud de onda  $\lambda$ , (1.12.1).

## Fluidos viscosos

### 2.1. Ecuación del movimiento de un fluido viscoso

Ahora nos concentramos en cómo influye la disipación de la energía debida a la viscosidad y la conductividad térmica en el movimiento del fluido. Como debemos tener en cuenta estos nuevos efectos, hay que introducir nuevos términos en la ecuación de Euler. La ecuación de continuidad sigue siendo válida, ya que en la deducción no influye si el fluido es viscoso o no.

En la sección (1.7) vimos que la ecuación de Euler puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

donde  $\Pi_{ik}$  es el tensor de densidad de flujos de impulso. La ecuación anterior representa una transferencia de impulso *completamente reversible* debida al transporte de las partículas de un lugar a otro y a las fuerzas de presión. La viscosidad es un rozamiento interno, por lo que la transferencia de impulso asociada será irreversible y sucede desde puntos en los que la velocidad es grande a donde la velocidad es pequeña.

Basándonos en esta idea, debemos añadir un término que tenga en cuenta esta transferencia irreversible de impulso debida a la viscosidad; para ello utilizaremos el *tensor de tensiones de la viscosidad*  $\sigma'_{ik}$ . De esta manera:

$$(2.1.1) \quad \Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k$$

donde  $\sigma_{ik}$  (sin la prima) es el *tensor de tensiones*  $\sigma_{ik}$ :

$$(2.1.2) \quad \sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$$

Este tensor tiene en cuenta el flujo de impulso que no es debido a la transferencia de impulso con la masa del fluido.

Como la viscosidad se origina porque diferentes partículas del fluido se mueven con velocidades diferentes en diferentes puntos del fluido,  $\sigma'_{ik}$  depende de las derivadas espaciales de la velocidad. Si las diferencias entre

estas velocidades son pequeñas, entonces podemos suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad sólo depende de las primeras derivadas de la velocidad. En primera aproximación

$$\sigma'_{ik} = f \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)$$

Además, no puede haber términos independientes de las derivadas de las velocidades porque  $\sigma'_{ik} = 0 \iff v = \text{constante}$ .  $\sigma'_{ik}$  también debe anularse cuando todo el fluido está en rotación uniforme. Es decir, si  $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$ ,  $\sigma'_{ik} = 0$ , lo que nos indica que  $\sigma'_{ik}$  debe contener combinaciones simétricas de  $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ . El tensor más general de rango dos que satisface las condiciones anteriores es

$$\sigma'_{ik} = a \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}$$

aunque suele escribirse de la forma

$$(2.1.3) \quad \sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

Los términos entre paréntesis se anulan para el caso  $i = k$ . Las constantes  $\eta$  y  $\zeta$  se denominan coeficientes de viscosidad.

$$(2.1.4) \quad \eta > 0 \quad \zeta > 0$$

La ecuación de Euler para fluidos viscosos la obtenemos añadiendo  $\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$  al segundo miembro:

$$(2.1.5) \quad \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)$$

En la mayor parte de los fluidos, los coeficientes de viscosidad no varían demasiado y en general suelen considerarse constantes, por lo que podemos sacarlos de las derivadas:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &+ \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) = \\ &- \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \end{aligned}$$

Usando que

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \text{div} \mathbf{v} \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \equiv \Delta v_i$$

podemos escribir la ecuación de forma vectorial como

$$(2.1.6) \quad \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \right) = -\text{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad} (\text{div} \mathbf{v})$$

Esta ecuación se simplifica en el caso de fluidos incompresibles, donde  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ , por lo que el último término de (2.1.6) se anula.

$$(2.1.7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

Esta ecuación (2.1.7) es la ecuación de Navier-Stokes (ec. de Euler para un fluido viscoso incompresible).

El tensor de tensiones en un fluido incompresible queda:

$$(2.1.8) \quad \sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

Para un fluido incompresible, la viscosidad sólo depende de un coeficiente  $\eta$  (y la mayoría de los fluidos pueden considerarse como incompresibles). En cuanto al cociente

$$(2.1.9) \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

se denomina viscosidad cinemática ( $\eta$  se denomina viscosidad dinámica).

$$\begin{aligned} \eta &\neq f(p)|_T \\ \nu &= f\left(\frac{1}{p}\right)\bigg|_T \end{aligned}$$

Tomando rotacionales de la ecuación (2.1.7) podemos eliminar la presión y obtener una versión en función únicamente de la velocidad de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$(2.1.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) + \nu \Delta (\text{rot } \mathbf{v})$$

Además de las ecuaciones de movimiento, tenemos que fijarnos en las condiciones límite. En el fluido viscoso las fuerzas de atracción molecular entre las partículas del fluido y las de una superficie interaccionan, de manera que se crea una capa de fluido “pegada” a la superficie en las que la velocidad del fluido se anula.

$$(2.1.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} &= 0 \\ (\mathbf{v}_{\text{fluido}} &= \mathbf{v}_{\text{superficie}}) \end{aligned}$$

Es decir, **para el fluido viscoso deben anularse todas las componentes -tangencial y normal- de la velocidad del fluido**, mientras que para el

fluido ideal era suficiente que se anulara la velocidad normal a la superficie.

La fuerza que actúa sobre un elemento de superficie sólida  $df$  coincide con el flujo de impulso a través del elemento de superficie. Si  $df_k = n_k df$ , donde  $\mathbf{n}$  es un vector normal a la superficie y con la condición límite de  $\mathbf{v} = 0$  en la superficie

$$\Pi_{ik} df_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik}) df_k$$

entonces la fuerza  $\mathbf{P}$  que actúa sobre la superficie de área unidad es

$$(2.1.12) \quad P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k$$

El primer término es la presión ordinaria mientras que el segundo es la fuerza de rozamiento debida a la viscosidad que actúa sobre la superficie.

Si tenemos dos fluidos inmiscibles, las velocidades de los fluidos y las fuerzas que se ejercen deben ser iguales y opuestas entre sí.

En una superficie libre del fluido debe verificarse la condición

$$(2.1.13) \quad \sigma_{ik} n_k = \sigma'_{ik} n_k - p n_i = 0$$

En un flujo bidimensional podemos obtener la ecuación para las líneas de corriente sustituyendo  $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  en (2.1.10)

$$(2.1.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial (\Delta \psi)}{\partial x} - \nu \Delta^2 \psi = 0$$

## 2.2. Disipación de energía en un fluido incompresible

La viscosidad (rozamiento interno) produce disipación de energía (que se transforma en calor). Para un fluido incompresible, el cálculo de la disipación es el siguiente. Como la energía interna de un fluido incompresible es nula, la disipación de energía del fluido es igual a la variación de la energía cinética

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{cin} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

La derivada de  $v_i$  respecto al tiempo la obtenemos de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{cin}}{\partial t} &= -\rho v_i v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial p}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \\ &= -\rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) p + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

El último término lo obtenemos de

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \sigma'_{ik}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sigma'_{ik} + v_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

de manera que

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} (\rho \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) p + \text{div} (\mathbf{v} \cdot \sigma') - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Convertimos  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} (\rho \mathbf{v})$  en  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$  y aprovechamos que para un fluido incompresible  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ . Usando la relación:

$$\text{div} \left( \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right) + \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \text{div} \mathbf{v}$$

De manera que

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial E_{cin}}{\partial t} = -\text{div} \left( \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \sigma' \right) - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

$\rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right)$  es el flujo de energía de un fluido ideal (ver (1.10.6)). El segundo término  $\mathbf{v} \cdot \sigma'$  es el flujo de energía interna debido a procesos internos de rozamiento.

Si integramos (2.2.1) respecto a un volumen  $V$ , obtenemos (usando el teorema la divergencia):

$$(2.2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int E_{cin} dV = - \oint \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \mathbf{v} \cdot \sigma' \right] \cdot d\mathbf{f} - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV$$

La expresión entre corchetes es igual a la densidad de flujo de energía en el fluido; el primer término nos da la variación de la energía cinética del fluido contenido en  $V$  debida al flujo de energía a través de la superficie que limita a  $V$ . El segundo término es la disminución de la energía cinética debida a la disipación.

Si extendemos la integración a todo el fluido, el término entre corchetes se anula (porque  $\mathbf{v}$  se anula en el infinito). Así, finalmente la disipación de energía de un fluido viscoso es

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV$$

En fluidos incompresibles el tensor  $\sigma'_{ik}$  viene dado por (2.1.8)

$$\sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

y puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2$$

por lo que finalmente, podemos escribir la disipación de energía en un fluido incompresible como

$$(2.2.3) \quad \dot{E}_k = \frac{dE_k}{dt} = - \frac{1}{2} \eta \int \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV$$

Como la disipación hace que disminuya la energía mecánica ( $E_{kin} < 0$ ) pero el integrando en (2.2.3) es siempre positivo, llegamos a la conclusión que **el coeficiente de viscosidad**  $\eta$  es siempre positivo.

### 2.3. Flujo en una tubería (E)

EJEMPLO 1. Suponemos que el fluido está encerrado entre dos planos paralelos que se mueven con velocidad relativa constante  $u$ . Tomamos uno de ellos como plano  $xz$  con el eje  $x$  en la dirección de  $u$ . Todas las magnitudes dependen solamente de  $y$  y la dirección del fluido está dirigida en la dirección de  $x$ .

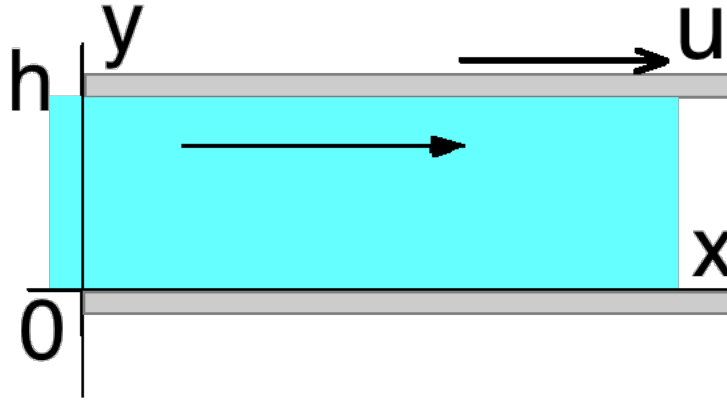


FIGURA 1. Flujo en una tubería

En este escenario la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, por lo que planteamos la ecuación de Navier-Stokes (2.1.7), obteniendo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 y} \quad (\text{componente } x) \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{componente } y) \end{aligned}$$

De la segunda, tenemos que la presión es constante, mientras que de la primera  $v_x = ay + b$ . Determinamos las constantes a partir de las condiciones límite:

$$v_x(y=0) = 0 \quad v_x(y=h) = u$$

así que la distribución de velocidades del fluido es lineal:

$$(2.3.1) \quad v = \frac{u}{h}y$$

La velocidad media del fluido

$$(2.3.2) \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dy = \frac{1}{2} u$$

Según (2.1.12)

$$\mathbf{P}_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k$$

(y  $\sigma_{ik}$  para un fluido incompresible:  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$ ) la componente normal de la fuerza sobre cualquiera de los planos es exactamente  $p$ . Mientras que la fuerza de rozamiento tangencial sobre el plano  $y = 0$  es

$$(2.3.3) \quad \sigma_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \eta \frac{u}{h}$$

**EJEMPLO 2.** Ahora consideramos el flujo estacionario entre dos planos paralelos **fijos** en presencia de un gradiente de presión, escogiendo las coordenadas igual que el ejemplo anterior.

De nuevo, la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, por lo que planteamos las ecuaciones de Navier-Stokes, que resultan

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} & (\text{componente } x) \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} & (\text{componente } y) \end{aligned}$$

A partir de la segunda ecuación, vemos que  $p = p_0 + f(x) = p(x)$ . De manera que, en la primera ecuación, el primer término sólo depende de  $x$ , mientras que el segundo sólo depende de  $y$ . Ésto sólo es posible si los dos términos son constantes. Es decir, que si  $\partial p / \partial x = \text{constante}$ ,  $p(x) = ax + b$ . En cuanto a la velocidad:

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + ay + b$$

Como siempre, determinamos las constantes a partir de las condiciones límite:

$$v_x(y = 0) = 0 \quad v_x(y = h) = 0$$

con lo que obtenemos

$$a = -\frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) h$$

y la velocidad, al final

$$v_x = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) y(y - h)$$

que como vemos, tiene un perfil parabólico.

En este caso, como antes, calculamos la velocidad media del fluido

$$(2.3.4) \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dy = -\frac{h^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$



Finalmente, calculamos la fuerza de rozamiento que actúa sobre uno de los planos fijos (el de la parte inferior, para  $y = 0$ ):

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} P_x &= -\sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{xy} &= -p\delta_{xy} + \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2}h \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Flujo en una tubería de sección recta arbitraria (aunque la sección es la misma en toda la longitud de la tubería). La velocidad del flujo coincide con la dirección  $x$ , por lo que la velocidad será una función de  $y, z$ . La ecuación de continuidad se verifica de forma automática. En cuanto a las ecuaciones de Navier-Stokes tenemos que

$$\eta \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Como la presión no depende de  $y$  ni de  $z$  (como vemos de las dos últimas ecuaciones),  $p = p(x)$ . Pero el miembro de la derecha de la primera ecuación no depende de  $x$ , por lo que la única manera de satisfacer esta situación es que los dos miembros sean constantes. Así, por una parte, tenemos que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante} \Rightarrow p = ax + b$$

Si  $p_{ini}$  y  $p_{fin}$  son las presiones en los extremos de la tubería, y  $l$  es su longitud, podemos determinar estas constantes mediante las condiciones límite:

$$\begin{aligned} p(x=0) &= p_{ini} \Rightarrow b = p_{ini} \\ p(x=l) &= p_{fin} \Rightarrow a = \frac{p_{fin} - p_{ini}}{l} \end{aligned}$$

de manera que

$$p = \frac{\Delta p}{l}x + p_{ini}$$

En cuanto al perfil de velocidades, viene determinado por

$$\Delta v(y, z) = \text{constante}$$

Suponiendo que la sección recta de la tubería es circular, la resolvemos con la condición límite que  $v = 0$  para  $r = R$ . Utilizando coordenadas polares, tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}$$

Integrando, obtenemos:

$$(2.3.6) \quad v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + a \log r + b$$

Para que la velocidad del fluido en el centro de la tubería ( $r = 0$ ) sea finita,  $a = 0$ . En cuanto a  $v(r = R) = 0$  tenemos

$$(2.3.7) \quad v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

## 2.4. Ley de semejanza (B)

Al estudiar el movimiento de fluidos viscosos podemos obtener algunos resultados importantes a partir de razonamientos sencillos que tienen que ver con las dimensiones de diversas magnitudes físicas.

Suponemos el caso de un flujo estacionario de un fluido incompresible. En las ecuaciones de Navier-Stokes sólo aparece la viscosidad cinemática  $\nu = \eta/\rho$  en representación de las características del fluido. Las funciones incógnitas que deben encontrarse resolviendo las ecuaciones son la velocidad  $\mathbf{v}$  y el cociente entre la presión y la densidad del fluido  $p/\rho$ . El flujo también depende -a través de las condiciones límite- de la forma y dimensiones del cuerpo que se mueve a través del fluido, así como de su velocidad. Como la forma del cuerpo es conocida, quedan determinadas todas sus propiedades geométricas mediante una sola dimensión lineal,  $l$ . Si la velocidad de la corriente principal es  $u$ , cualquier flujo queda determinado por tres parámetros:  $\nu, u, l$ , cuyas dimensiones son:

$$\begin{aligned} \nu &= \text{cm}^2/\text{s} \\ l &= \text{cm} \\ u &= \text{cm}/\text{s} \end{aligned}$$

A partir de estas tres cantidades, sólo podemos formar una magnitud adimensional  $ul/\nu$  que resulta ser el número de Reynolds  $R$ :

$$(2.4.1) \quad R = \frac{\rho ul}{\eta} = \frac{ul}{\nu}$$

Cualquier otro parámetro adimensional puede escribirse en función de  $R$ . El resto de dimensiones se expresarán en términos de  $l$  y las velocidades en función de  $u$ .

La distribución de velocidades solución de las ecuaciones de Navier-Stokes será de la forma

$$(2.4.2) \quad \mathbf{v} = u f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, R\right)$$

Esta expresión nos indica que, para dos flujos diferentes del mismo tipo (flujo alrededor de esferas de distintos radios, con viscosidades diferentes), la distribución de velocidad resultante en términos de  $\mathbf{v}/u$  serán las mismas funciones del cociente  $\mathbf{r}/l$  si el número de Reynolds es el mismo

para cada flujo. Estos flujos que pueden obtenerse unos de otros simplemente cambiando la unidad de medida de las coordenadas de velocidades se llaman *semejantes*. **Dos flujos con los mismos números de Reynolds son semejantes.** Esto se denomina **Ley de Semejanza**.

Igual que se ha hecho con la velocidad en (2.4.2), podemos escribir una fórmula para distribución de presiones resultante de las ecuaciones de Navier-Stokes (con unidades de presión dividida por densidad). Esta magnitud puede ser, por ejemplo,  $u^2$ . Entonces,  $p/\rho u^2$  es una función de la variable adimensional  $r/l$  y del parámetro adimensional  $R$ :

$$(2.4.3) \quad p = \rho u^2 f\left(\frac{r}{l}, R\right)$$

Del mismo modo podemos aplicar estas consideraciones a magnitudes que caracterizan el flujo pero que no son funciones de las coordenadas, como por ejemplo, la fuerza de arrastre  $F$  que actúa sobre el cuerpo. Podemos decir que el cociente adimensional de  $F$  con alguna magnitud formada con  $\nu, u, l, \rho$  y que tenga las dimensiones de fuerza debe ser una función del número de Reynolds. Esta combinación puede ser:  $\rho u^2 l^2$ , de donde

$$(2.4.4) \quad F = \rho u^2 l^2 f(R)$$

Si la fuerza de la gravedad tiene un efecto importante sobre el flujo, entonces éste queda determinado por cuatro parámetros y no tres como en el caso anterior:  $l, u, \nu$  y  $g$  (la aceleración debida a la gravedad). Con estos parámetros podemos construir dos -en vez de sólo una- magnitudes independientes adimensionales, como por ejemplo el número de Reynolds y el número de Froude

$$(2.4.5) \quad F = \frac{u^2}{lg}$$

En estos casos, las ecuaciones (2.4.2) y (2.4.4) dependerá de los dos parámetros adimensionales,  $R$  y  $F$  (el número de Reynolds y el de Froude).

Finalmente, en el caso de flujos no estacionarios, además de las magnitudes  $\nu, u, l$  también debemos especificar un intervalo de tiempo característico  $\tau$ , que determina la variación del flujo con respecto al tiempo (por ejemplo, el periodo de oscilación). En flujos no estacionarios también podemos construir dos magnitudes adimensionales independientes, el número de Reynolds y el número de Strouhal:

$$(2.4.6) \quad S = \frac{u\tau}{l}$$

En estos casos tiene lugar un movimiento semejante *sólo si todos estos números tienen los mismo valores*.

Si las oscilaciones del fluido se presentan espontáneamente (y no bajo la acción de una fuerza excitadora externa) entonces el movimiento de un tipo determinado  $S$  será una función definida de  $R$

$$S = f(R)$$

## 2.5. Fórmula de Stokes

La ecuación de Navier-Stokes se simplifica mucho en el caso de flujos con números de Reynolds pequeños. Para un flujo estacionario de un fluido incompresible

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

El término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  es del orden de  $u^2/l$ .  $\frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$  es del orden de  $\frac{\eta u}{\rho l^2}$ , de manera el cociente de ambos

$$\frac{(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}}{\frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}} \sim \frac{\frac{u^2}{l}}{\frac{\eta u}{\rho l^2}} = \frac{ul}{\nu} = R$$

es precisamente el número de Reynolds. Por tanto, si el número de Reynolds es pequeño, podemos despreciar el término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  en la ecuación de Navier-Stokes, que se convierte en una ecuación lineal

$$(2.5.1) \quad \eta \Delta \mathbf{v} - \text{grad} p = 0$$

Esta ecuación junto con la ecuación de continuidad

$$(2.5.2) \quad \text{div} \mathbf{v} = 0$$

determinar por completo el movimiento.

Otra ecuación interesante en este caso es la que se obtiene al tomar el rotacional de (2.5.1):

$$(2.5.3) \quad \Delta \text{rot} \mathbf{v} = 0$$

**EJEMPLO.** Vamos a utilizar esta aproximación para obtener la solución del siguiente escenario. Consideramos una esfera en movimiento rectilíneo uniforme a través de un fluido viscoso. Esta situación es análoga a la de tener una esfera fija con un fluido con velocidad  $\mathbf{u}$  en el infinito. Hacemos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$  de manera que  $\mathbf{v}'$  sea cero en el infinito. Como  $\text{div} \mathbf{v} = \text{div} \mathbf{v}' = 0$ , podemos escribir  $\mathbf{v}'$  como el rotacional de un vector  $\mathbf{A}$ . El rotacional de un vector polar es un vector axial (y viceversa). Como la velocidad es un vector polar,  $\mathbf{A}$  tiene que ser axial. Pero  $\mathbf{v}$  (y por tanto, también  $\mathbf{A}$ ) sólo depende del radio vector  $\mathbf{r}$  (tomamos el origen en el centro de la esfera) y de la velocidad  $\mathbf{u}$ . Además,  $\mathbf{A}$  tiene que ser lineal de  $\mathbf{u}$ . El único vector axial que

puede construirse para un cuerpo con simetría esférica con dos vectores axiales es  $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$ , por lo que  $\mathbf{A}$  tiene que ser de la forma  $f'(r) \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ , donde  $f'(r)$  es una función escalar de  $r$  y  $\mathbf{n}$  es un vector unidad en la dirección de  $\mathbf{r}$ .  $f'(r) \mathbf{n}$  puede escribirse como el gradiente de una función  $f(r)$ ,  $\text{grad} f(r)$  (porque el gradiente es la derivada en una dirección determinada). Así, al final del razonamiento, vemos que podemos escribir  $\mathbf{A}$  como  $\text{grad} f \times \mathbf{u}$ , y la velocidad  $\mathbf{v}'$  como

$$\mathbf{v}' = \text{rot} (\text{grad} f \times \mathbf{u})$$

La velocidad  $\mathbf{u}$  es constante, por lo que  $\text{grad} f \times \mathbf{u}$  puede escribirse, usando la identidad vectorial  $\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$ , como  $\text{rot}(f\mathbf{u})$  (ya que  $\text{rot} \mathbf{u} = 0$ ), de manera que

$$(2.5.4) \quad \mathbf{v} = \text{rot} \text{rot} (f\mathbf{u}) + \mathbf{u}$$

Para determinar  $f$ , usamos la ecuación (2.5.3) <sup>1</sup>,

$$\text{rot} \mathbf{v} = \text{rot} \text{rot} \text{rot} (f\mathbf{u}) = (\text{grad} \text{div} - \Delta) \text{rot} (f\mathbf{u}) = -\Delta \text{rot} (f\mathbf{u})$$

con lo que la ecuación (2.5.3) toma la forma

$$\Delta^2 \text{rot} (f\mathbf{u}) = 0$$

Ahora usamos, como antes, que  $\text{rot}(f\mathbf{u}) = \text{grad} f \times \mathbf{u}$  (porque  $\mathbf{u} = \text{constante}$ )

$$\Delta^2 (\text{grad} f \times \mathbf{u}) = (\Delta^2 \text{grad} f) \times \mathbf{u} = 0$$

de donde deducimos que

$$(2.5.5) \quad \Delta^2 \text{grad} f = 0$$

Realizando una primera integración,

$$\Delta^2 f = \text{constante}$$

Esta constante debe ser nula, ya que la velocidad  $\mathbf{v}$  debe anularse en el infinito (y todas sus derivadas también lo harán). La expresión  $\Delta^2 f$  contiene cuatro derivadas de  $f$ , mientras que la velocidad se da en función de las derivadas segundas de  $f$ , de manera que:

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \Delta f = 0 \Rightarrow \Delta f = \frac{2a}{r} + A$$

De nuevo, como la velocidad debe anularse en el infinito,  $A = 0$ . Finalmente (ignorando la constante aditiva, que no carece de importancia, puesto

---

<sup>1</sup>Usando la identidad vectorial  $\text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = \text{grad} \text{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ , y recordando que  $\nabla^2 = \Delta$  y que  $\text{rot} \text{grad} = 0$ .

que las velocidad viene dada por las derivadas de  $f$ ):

$$(2.5.6) \quad f = ar + \frac{b}{r}$$

Sustituyendo en (2.5.4) se obtiene

$$(2.5.7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3}$$

Las constantes  $a$  y  $b$  se obtienen a partir de las condiciones límite en la superficie de la esfera

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(r=R) &= 0 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{u} - a \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} + b \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u}}{r^3} = 0 \end{aligned}$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo  $\mathbf{n}$ , los coeficientes de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$  deben anularse

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} &= 0 & \text{Coeficientes de } \mathbf{u} \\ -\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} &= 0 & \text{Coeficientes de } \mathbf{n} \end{aligned}$$

De aquí tenemos

$$a = \frac{3R}{4} \quad b = \frac{R^3}{4}$$

y finalmente

$$(2.5.8) \quad f = \frac{3}{4}Rr + \frac{1}{4}\frac{R^3}{r}$$

$$(2.5.9) \quad \mathbf{v} = -\frac{3}{4}R \frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r} - \frac{1}{4}R^3 \frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{r^3} + \mathbf{u}$$

o en componentes esféricas

$$\begin{aligned} v_r &= u \cos \theta \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \\ (2.5.10) \quad v_\theta &= -u \sin \theta \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \end{aligned}$$

Una vez tenemos la distribución de velocidades alrededor de la esfera, calculamos la presión

$$\begin{aligned} \text{grad} p &= \eta \Delta \mathbf{v} = \eta \Delta \text{rot} \text{rot} (f\mathbf{u}) = \\ &= \eta \Delta (\text{grad} \text{div} (f\mathbf{u}) - \mathbf{u} \Delta f) \end{aligned}$$

pero  $\Delta^2 f = 0$ , y por tanto

$$\text{grad} p = \text{grad} (\eta \Delta \text{div} (f\mathbf{u})) = \text{grad} (\eta \mathbf{u} \cdot \text{grad} \Delta f)$$

por lo que, finalmente

$$(2.5.11) \quad p = \eta \mathbf{u} \cdot \text{grad} \Delta f + p_0$$

donde  $p_0$  es la presión del fluido en el infinito. Introduciendo  $f$  tenemos

$$(2.5.12) \quad p = p_0 - \frac{3}{2} \eta \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{r^2} R$$

Utilizando las fórmulas anteriores podemos calcular la fuerza  $\mathbf{F}$  ejercida sobre la esfera por el fluido móvil (o lo que es lo mismo, el arrastre sobre la esfera cuando se mueve a través del fluido). Tomamos coordenadas esféricas con el eje polar paralelo a  $\mathbf{u}$ ; por simetría, todas las magnitudes son funciones únicamente de  $r$  y del ángulo  $\theta$ . La fuerza  $\mathbf{F}$  es paralela a la velocidad  $\mathbf{u}$ . Puede determinarse el valor de la fuerza a través de la fórmula (2.1.12). Tomando las componentes normal y tangencial a la superficie de la fuerza ejercida sobre un elemento de superficie de la esfera y proyectando estas componentes en la dirección de  $\mathbf{u}$  tenemos

$$(2.5.13) \quad F = \oint (-p \cos \theta + \sigma'_{rr} \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) df$$

donde la integración debe realizarse sobre la totalidad de la superficie de la esfera.

Sustituyendo las expresiones para la distribución de velocidades alrededor de la esfera (2.5.10) en las fórmulas

$$\sigma'_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \sigma'_{r\theta} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

encontramos que en la superficie de la esfera:

$$\sigma'_{rr} = 0 \quad \sigma'_{r\theta} = - \left( \frac{3\eta}{2R} \right) u \sin \theta$$

mientras que la presión (2.5.12) es

$$p = p_0 - \left( \frac{3\eta}{2R} \right) u \cos \theta$$

Así que al final, la integral (2.5.13) se reduce a

$$F = \left( \frac{3\eta u}{2R} \right) df$$

$$(2.5.14) \quad F = 6\pi R \eta u$$

Esta es la **fórmula de Stokes**<sup>2</sup> que proporciona la fuerza de arrastre que actúa sobre una esfera que se mueve lentamente en un fluido. El arrastre es proporcional a la velocidad y a la dimensión lineal del cuerpo.

Esta dependencia del arrastre con la velocidad y la dimensión es válida para cuerpos que se mueven lentamente, aunque sean de otras formas. **La dirección del arrastre sobre un cuerpo de forma arbitraria no es la misma que la de la velocidad**; la forma general de la relación entre  $F$  y  $u$  puede escribirse como

$$(2.5.15) \quad F_i = a_{ik} u_k$$

en donde  $a_{ik}$  es un tensor simétrico de rango dos independiente de la velocidad. El hecho de que sea simétrico es válido sólo en la aproximación lineal respecto a la velocidad y es un caso particular de una ley general para el movimiento lento acompañado de procesos disipativos.

La solución obtenida para el flujo que rodea la esfera no es válida a grandes distancias de ella, aunque el número de Reynolds sea pequeño (a distancias mayores los términos que hemos despreciado son importantes y la aproximación deja de ser válida). Si incluimos el siguiente término del desarrollo en serie de potencias del número de Reynolds obtenemos una fórmula más exacta para el arrastre sobre la esfera

$$(2.5.16) \quad F = 6\pi\eta u R \left( 1 + \frac{3uR}{8\nu} \right)$$

## 2.6. Estela laminar

En un flujo estacionario, las propiedades del flujo a distancias elevadas *detrás* del cuerpo tiene unas características determinadas **independientemente** de la forma del cuerpo.

Llamamos  $U$  a la velocidad constante de la corriente incidente (con  $U$  en la dirección del eje  $x$  y el origen dentro del cuerpo). La velocidad del fluido real en un punto cualquiera puede escribirse como  $U + v$ , donde  $v$  se anula en el infinito.

A distancias grandes detrás del cuerpo, la velocidad  $v \neq 0$  sólo en una región estrecha cercana al eje  $x$ . Esta región se denomina **estela laminar** y en ella encontramos las líneas de corriente que pasan muy cerca del cuerpo. Por ello, el flujo es esencialmente rotacional.

<sup>2</sup>Fórmula de Stokes (sin determinar  $a$  y  $b$ )  $F = 8\pi\eta u$ . . Fórmula de Stokes (elipsoide)  $F = 16\eta Ru$ . . Fórmula de Stokes (disco circular  $\perp$  su plano)  $F_{\perp} = 16\eta Ru$ . Fórmula de Stokes (disco circular  $\parallel$  su plano)  $F = \frac{32}{3}\eta Ru$ .



La viscosidad sólo tiene influencia en las líneas de corriente que pasan cerca del cuerpo. Para el resto, como la vorticidad de la corriente incidente es cero, puede considerarse que permanece nula para el resto de la línea de corriente. Así, el flujo a grandes distancias del cuerpo puede considerarse como flujo potencial excepto en la estela.

A continuación se deducen las fórmulas que relacionan las propiedades del flujo en la estela con las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

El impulso total transportado por el fluido a través de una superficie cerrada cualquiera que rodea el cuerpo es igual a la integral del tensor de densidad de flujo sobre esta superficie,  $\oint \Pi_{ik} df_k$ . Las componentes del tensor  $\Pi_{ik}$  son

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho(U_i + v_i)(U_k + v_k)$$

Escribimos la presión  $p$  como  $p = p_0 + p'$ , donde  $p_0$  es la presión en el infinito. La integral del término constante  $p_0\delta_{ik} + U_i U_k$  es cero, ya que la integral vectorial  $\oint df$  respecto a una superficie cerrada es nula. También se anula  $U_i \oint \rho v_k df_k$ ; como la masa total del fluido en el volumen es constante, el flujo de masa total  $\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$  a través de la superficie que rodea el volumen es cero<sup>3</sup>. Finalmente, cuando estamos lejos del cuerpo,  $v \ll U$ , por lo que despreciamos el término  $\rho v_i v_k$  en  $\Pi_{ik}$  en comparación con  $\rho U_k v_i$  si la superficie de integración está suficientemente lejos del cuerpo. Al final, el impulso total es

$$\oint (p'\delta_{ik} + U_k v_i) df_k$$

Ahora suponemos que el volumen del fluido que estamos estudiando está contenido entre dos planos infinitos ( $x = \text{constante}$ ), uno delante y otro detrás del cuerpo, aunque lejos de él. El flujo total del impulso sobre la superficie lateral es nula, pues en el infinito  $p' = v = 0$ , por lo que sólo tenemos que integrar sobre estos dos planos. Pero el flujo que obtenemos de esta manera es la diferencia entre el flujo de impulso que entra a través del plano delantero y el que sale a través del trasero. Pero esta diferencia es también la cantidad de impulso que pasa por unidad de tiempo desde el fluido hacia el cuerpo, es decir, la fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa sobre dicho cuerpo.

---

<sup>3</sup> $U_i \oint \rho v_k df_k$  usando el teorema de Gauss se convierte en  $U \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$ , y usando la ecuación de continuidad  $U \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ . Y como la masa total no varía, esta integral se anula.

Las componentes de la fuerza son:

$$\begin{aligned} F_x &= \left( \iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) (p' + \rho U v_x) dy dz \\ F_y &= \left( \iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_y dy dz \\ F_z &= \left( \iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \rho U v_z dy dz \end{aligned}$$

Empezamos por el cálculo de  $F_x$ . Fuera de la estela tenemos un flujo potencial, por lo que es válida la ecuación de Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = \text{constante} = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 + \left( p' + \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

es decir, que el término entre paréntesis debe anularse. Si  $v \ll U$ , despreciamos el término  $\frac{1}{2} \rho v^2$  en comparación con  $\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{v}$ , con lo que tenemos

$$p' = -\rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} = -\rho U v_x$$

Esto significa que el integrando de  $F_x$  se anula siempre (fuera de la estela). La integral será cero en el plano *antes* del cuerpo ( $x = x_2$ ) y en el plano posterior ( $x = x_1$ ) excepto en la zona de intersección del plano y la estela (por lo que sólo nos preocupa la sección recta de la estela). En la estela, la variación de la presión  $p'$  es del orden de  $\rho v^2$ , es decir, pequeña en comparación con  $\rho U v_x$ , con lo que también la despreciamos. Finalmente obtenemos la fuerza fuerza de arrastre sobre el cuerpo como

$$(2.6.1) \quad F_x = -\rho U \iint v_x dy dz$$

donde la integración se extiende al área de la sección recta de la estela *muy detrás* del cuerpo. Como es normal, la velocidad  $v_x$  de la estela es negativa: el fluido se mueve más lentamente que si estuviese ausente el cuerpo. Además, la integral para  $F_x$  nos da el déficit de caudal de fluido a través de la sección recta de la estela respecto al valor que tendría en ausencia del cuerpo.

Ahora vamos con la fuerza que tiende a mover transversalmente el cuerpo ( $F_y, F_z$ ). A estas fuerzas se las denomina **fuerza de sustentación**. En el exterior de la estela, como tenemos un flujo potencial, podemos escribir

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

de manera que también se anula la integral en el plano  $x = x_2$  donde no se corta la estela

$$\iint v_y dydz = \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} dydz = 0 \quad \iint \frac{\partial \phi}{\partial z} dydz = 0$$

ya que  $\phi = 0$  en el infinito.

Así, para la fuerza de sustentación

$$(2.6.2) \quad F_y = -\rho U \iint v_y dydz \quad F_z = -\rho U \iint v_z dydz$$

donde las integrales sólo deben realizarse en la sección recta de la estela.

Si el cuerpo tiene un eje de simetría y el flujo es paralelo a este eje, entonces el flujo que rodea al cuerpo también tiene simetría. En este caso, la sustentación es cero.

Volviendo a la estela, estimando el valor de los diferentes términos de las ecuaciones de Navier-Stokes muestra que el término  $\nu \Delta \mathbf{v}$  puede despreciarse a una distancia  $r$  del cuerpo tal que  $\frac{rU}{\nu} \gg 1$ . A estas distancias, el flujo dentro de la estela puede considerarse como flujo potencial. Sin embargo, no podemos despreciar este término dentro de la estela porque, incluso a estas distancias, las derivadas transversales  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial y^2$  y  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial z^2$  son grandes en comparación con  $\partial^2 \mathbf{v} / \partial x^2$ .

El término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  en la ecuación de Navier-Stokes es del orden de  $(U + v) \partial v / \partial x \sim \frac{Uv}{x}$  en la estela. El término  $\nu \Delta \mathbf{v}$  es del orden de  $\nu \partial^2 / \partial y^2 \sim \frac{\nu v}{Y^2}$  donde  $Y$  es la anchura de la estela, es decir,  $\nu \Delta \mathbf{v}$  es del orden de magnitud de la distancia respecto al eje  $x$  en el cual a velocidad  $\mathbf{v}$  tiende a cero. Si estas dos magnitudes son comparables

$$(2.6.3) \quad Y \sim \sqrt{\frac{vx}{U}}$$

Esta cantidad es pequeña en comparación con  $x$  ya que inicialmente hemos supuesto que  $\frac{Ux}{\nu} \gg 1$ . Así, la anchura de la estela laminar aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia con respecto al cuerpo.

Si la región de integración tiene un área del orden de  $Y^2$ , podemos estimar la integral (2.6.1) como

$$F_X \sim \rho U v Y^2$$

y usando (2.6.3) tenemos

$$(2.6.4) \quad v \sim \frac{F_x}{\rho \nu} x$$

### 2.7. La viscosidad de las suspensiones (E)

Contiene una sección clasificada como “ejemplo” en la Guía de la Asignatura.

### 2.8. Soluciones exactas de las ecuaciones del movimiento en el caso de un fluido viscoso

Esta sección no aparece en la Guía de la Asignatura (la obviaamos).

### 2.9. Movimiento oscilante en un fluido (G) viscoso

Cuando un cuerpo sumergido en un fluido **viscoso** oscila, el flujo creado tiene una serie de propiedades características. Para estudiarlas, empecemos por un caso sencillo y después pasamos a un caso general.

**EJEMPLO.** Tenemos un fluido incompresible limitado por una superficie plana infinita que realiza una oscilación armónica simple en su propio plano, con frecuencia  $\omega$ . Consideramos la superficie sólida como el plano  $xy$  y la región del fluido como  $x > 0$ . Tomamos el eje  $y$  en la dirección de la oscilación. La velocidad  $u$  de la superficie oscilante es una función del tiempo de la forma  $A \cos(\omega t + \alpha)$ , aunque es más conveniente escribirla como la parte real de una magnitud compleja:

$$u = \text{re}(u_0 e^{-i\omega t})$$

La constante  $u_0 = A e^{-i\alpha}$  es en general compleja, pero siempre puede hacerse real mediante una selección adecuada del origen del eje temporal.

Siempre que en los cálculos intervengan sólo operaciones lineales respecto a la velocidad  $u$  podemos omitir el operador  $\text{re}()$  y proceder como si  $u$  fuese complejo, tomando la parte real del resultado final. Así,

$$(2.9.1) \quad u_y = u = u_0 e^{-i\omega t}$$

La velocidad del fluido debe satisfacer la condición límite  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  para  $x = 0$ , es decir,  $v_x = v_z = 0$  y  $v_y = u$ .

A partir de la simetría del problema todas las magnitudes dependerán únicamente de  $x$  y de  $t$ .

De la ecuación de continuidad tenemos

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = 0$$

(ya que si  $v_x = \text{constante}$  y la condición límite es  $v_x(x=0) = 0$ ). Como todas las magnitudes son independientes de  $y$  y  $z$ ,

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0$$

(ya que  $v_x = 0$ ) de manera que la ecuación de movimiento (2.1.7) de Navier-Stokes (para fluido incompresible) queda

$$(2.9.2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

que es una ecuación lineal. La componente  $x$  es  $\partial p / \partial x = 0 \Rightarrow p = \text{constante}$ . Por la simetría del problema, la dirección de  $\mathbf{v}$  es  $y$ , de manera que

$$(2.9.3) \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

Buscamos una solución de esta ecuación que sea periódica en  $x$  y en  $t$  de la forma

$$v_y = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

con las condiciones límite  $v_y(x=0) = u$ . Sustituyendo en (2.9.3) tenemos la condición

$$i\omega = \nu k^2$$

de donde obtenemos

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \pm (i+1) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

con lo que la velocidad  $v_y$  es

$$(2.9.4) \quad v_y = u_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x} e^{i(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} x - \omega t)}$$

Se ha tomado la solución para  $k$  como si tuviera una parte imaginaria positiva, ya que en caso contrario la velocidad aumentaría sin límite en el interior del fluido (cosa que no puede suceder).

La solución obtenida representa una onda transversal, con velocidad  $v_y$  perpendicular a la dirección de propagación. La propiedad más importante es que la onda se amortigua rápidamente en el fluido: decrece exponencialmente con la distancia  $x$  respecto a la superficie sólida.

Esto supone que, aunque pueden presentarse ondas transversales en un fluido viscoso, se amortiguan rápidamente en cuanto se alejan de la superficie del cuerpo cuyo movimiento genera las ondas.

La distancia a la que la amplitud decae en un factor de  $e$  se denomina *profundidad de penetración* de la onda. A partir de (2.9.4)

$$(2.9.5) \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

Por tanto, la profundidad de penetración aumenta con la viscosidad cinemática del fluido y disminuye con la frecuencia de la oscilación.

A continuación calculamos la fuerza de rozamiento por unidad de área sobre el plano que oscila. La dirección de esta fuerza coincide con el eje  $y$  y

es igual a la componente  $\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$  del tensor de tensiones; el valor de la derivada debe tomarse sobre la superficie, es decir, en  $x = 0$ . Sustituyendo (2.9.4) tenemos:

$$(2.9.6) \quad \sigma_{xy} = \eta u_0 (i - 1) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = u_0 (i - 1) \sqrt{\frac{\omega \eta^2}{2\nu}} = u_0 (i - 1) \sqrt{\frac{\omega \eta \rho}{2}}$$

Si suponemos  $u_0$  real y tomando la parte real del resultado anterior (2.9.6) tenemos:

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\omega \eta \rho} u_0 \cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

Sin embargo, la velocidad de la superficie oscilante es

$$u = u_0 \cos \omega t$$

de manera que vemos que hay un cierto desfase entre la velocidad y la fuerza de rozamiento.

Podría calcularse el promedio temporal de la disipación de energía. Aunque puede realizarse el cálculo de manera general a partir de la ecuación (2.2.3), en este caso es más sencillo calcular el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento. La energía disipada por unidad de tiempo y por unidad de área del plano oscilante es igual al valor medio del producto de la fuerza  $\sigma_{xy}$  por la velocidad  $u_y$

$$(2.9.7) \quad -\overline{\sigma_{xy}} = \frac{1}{2} u_0^2 \sqrt{\frac{1}{2} \omega \eta \rho}$$

EJEMPLO. Podríamos solucionar el mismo escenario que en el ejemplo anterior pero para una oscilación del plano general de la forma  $u = u(t)$ . En este caso, la fórmula para la fuerza de rozamiento por unidad de área de superficie sería

$$(2.9.8) \quad \sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\eta \rho}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}}$$

EJEMPLO. Finalmente consideramos el caso general de un cuerpo oscilante de forma arbitraria. Anteriormente el término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  se anulaba, pero esto no sucede de manera general. Sin embargo, podemos considerar que este término es pequeño en comparación con los demás y que puede despreciarse. Más adelante determinaremos las condiciones en las que podemos hacer esta aproximación.

Como antes, empezamos a partir de la ecuación lineal (2.9.2). Tomamos el rotacional en ambos miembros, con lo que el término  $\nabla \times \text{grad} p = 0$ , con lo que tenemos

$$(2.9.9) \quad \frac{\partial \text{rot } \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta \text{rot } \mathbf{v}$$

es decir, que el  $\text{rot } \mathbf{v}$  satisface una ecuación térmica <sup>4</sup>. Como hemos visto en los ejemplos anteriores, la solución de una ecuación de este tipo da una disminución exponencial en la magnitud que la satisface. Por tanto podemos decir que la vorticidad ( $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$ ) disminuye hacia el interior del fluido. En otras palabras, el movimiento del fluido es rotacional en una determinada capa alrededor del fluido, mientras que a distancias mayores varía rápidamente para convertirse en un flujo potencial. La profundidad de penetración del flujo rotacional es del orden de  $\delta \sim \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$ . Tenemos dos casos límites en función de si  $\delta$  es grande o pequeño en comparación con la dimensión  $l$  del cuerpo oscilante.

**Caso 1.**  $\delta \gg l$  Esto implica que  $l^2\omega \ll \nu$ . En este caso, además, supondremos que el número de Reynolds es pequeño. Si  $a$  es la amplitud de las oscilaciones, la velocidad del cuerpo es del orden de  $a\omega$ . El número de Reynolds para el movimiento es  $\frac{\omega al}{\nu}$ . Así, suponemos

$$(2.9.10) \quad l^2\omega \ll \nu \quad \frac{\omega al}{\nu} \ll 1$$

Es decir, este es el caso de bajas frecuencias de oscilación (cosa que también significa que podemos desprestigiar la derivada  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  en la ecuación general del movimiento). El término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  puede desprestigiar porque hemos supuesto que el número de Reynolds es pequeño.

Como no tenemos el término  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ , el flujo se considera estacionario. Es decir, para  $\delta \gg l$  el flujo puede considerarse estacionario en cualquier instante. Esto significa que el flujo en dicho instante es el que aparecería si el cuerpo se estuviese moviendo uniformemente con su velocidad instantánea. Por ejemplo, si tuviéramos una esfera oscilando en las condiciones de este caso, la fuerza de arrastre sería la calculada por la fórmula de Stokes (2.5.14).

**Caso 2.**  $\delta \ll l$  Para que el término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$  pueda desprestigiar también en este caso, es necesario que la amplitud de las oscilaciones sea pequeña en comparación con las dimensiones del

<sup>4</sup>Una *ecuación térmica* o *ecuación del calor* es una ecuación diferencial en derivadas parciales de la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0$$

Se llama *ecuación del calor* porque describe la distribución del calor (o de variaciones de temperatura) en una región a lo largo del tiempo.

cuerpo:

$$(2.9.11) \quad l^2 \omega \gg \nu \quad a \ll l$$

En este caso no es necesario que el número de Reynolds sea pequeño.

La desigualdad anterior se obtiene estimando el valor del término  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$ . El operador  $(\mathbf{v} \cdot \text{grad})$  designa una derivación en la dirección de la velocidad. Pero cerca del cuerpo la velocidad es casi tangencial, y la velocidad tangencial sólo varía apreciablemente en distancias del orden de la dimensión del cuerpo  $l$ , así que

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \sim \frac{v^2}{l} \sim \frac{a^2 \omega^2}{l}$$

ya que la velocidad es del orden de  $a\omega$ . La derivada  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim v\omega \sim a\omega^2$ . Comparando las dos expresiones vemos que

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \iff a \ll l$$

Los términos  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  y  $\nu \Delta \mathbf{v}$  son aproximadamente del mismo orden. En las condiciones descritas por las ecuaciones (2.9.11) sólo tenemos una capa delgada cercana a la superficie del cuerpo en la que tenemos flujo rotacional. Fuera de esta capa tenemos un flujo potencial. Por tanto, excepto en esa capa fina, el flujo viene dado por las ecuaciones

$$(2.9.12) \quad \text{rot } \mathbf{v} = 0 \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

A partir de estas ecuaciones tenemos que  $\Delta \mathbf{v} = 0$  y la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la ecuación de Euler. Es decir, tenemos un flujo ideal en todo el fluido excepto en la capa superficial. Como esta capa es delgada, al resolver las ecuaciones de movimiento podríamos aplicar como condiciones límite las condiciones que deben verificarse en la superficie del cuerpo. Pero las soluciones para el fluido ideal no pueden satisfacer estas condiciones, así que sólo podemos aplicar la condición para la componente normal a la superficie de la velocidad del fluido. Aunque las ecuaciones (2.9.12) no pueden aplicarse en la capa superficial del fluido, la distribución de velocidades obtenida al solucionarlas verifica la condición límite para la componente normal de la velocidad, lo que significa que esta capa límite no tiene ninguna propiedad especial que afecte a la variación de



esta componente de la velocidad. En cuanto a la componente tangencial podríamos encontrarla solucionando las ecuaciones (2.9.12). Al hacerlo encontraríamos que tiene valores diferentes al de la velocidad tangencial del cuerpo (aunque deberían ser iguales). Esto significa que la velocidad tangencial debe variar rápidamente en la capa superficial.

### **2.10. Amortiguamiento de las ondas de gravedad (E)**

Esta sección trata sobre un ejemplo de la teoría, por lo que la saltamos.