PROBLEMAS DE AUTOEVALUACIÓN
L2-PROB1-PAG103

XAVIER AZNAR
HTTP://FISICAUNED.WORDPRESS.COM

Problema. Determinar la fuerza de rozamiento sobre cada uno de los dos planos paralelos entre los cuales existe una capa de fluido viscoso cuando uno de ellos oscila sobre su propio plano.

Demostración. Consideramos que los planos que limitan el fluido son paralelos al plano xy. El plano oscilante se encuentra en $x = 0$ y el segundo en $x = x_1$. La velocidad a la que se mueve el primer plano la escribimos como la parte real de

$$u = u_0 e^{-i\omega t}$$

Por la simetría del ejercicio, todas las variables deben depender únicamente de x y t,

$$v_y = v_y\left(x, t\right)$$

La velocidad del fluido debe satisfacer las condiciones límite

$$\begin{cases} v_x = v_z = 0, v_y = u & x = 0 \\ v_x = v_y = v_z = 0 & x = x_1 \end{cases}$$

Si el fluido es incompresible, la ecuación de continuidad

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = constante$$

Aplicando las condiciones límite, tenemos que esta constante debe ser cero, ya que $v_x = 0$ en $x = 0$.

En cuanto a la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p + \nu\Delta\mathbf{v} \Rightarrow \begin{cases} x) & 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 0 \\ y) & \frac{\partial v_y}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \\ z) & 0 = 0 \end{cases}$$

De la componente x obtenemos que $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow p = constante$.

El siguiente paso es solucionar la ecuación para v_y. La solución será de la forma

$$v = (A\sin kx + B\cos kx)e^{-i\omega t}$$

donde las constantes A y B quedarán determinadas por las condiciones límite. Para $v_y = u$ (en $x = 0$)

$$v_y = u = u_0 e^{-i\omega t} = B e^{-i\omega t} \Rightarrow B = u_0$$

En cuanto a v_y en $x = x_1$ tenemos:

$$\begin{aligned} v_y &= 0 = A \sin(kx_1) + u_0 \cos(kx_1) = 0 \\ A &= -u_0 \frac{\cos(kx_1)}{\sin(kx_1)} \end{aligned}$$

Con lo que la velocidad del fluido es

$$\begin{aligned} v_y &= \left(-u_0 \frac{\cos(kx_1)}{\sin(kx_1)} \sin(kx) + u_0 \cos(kx) \right) e^{-i\omega t} = \\ &= u_0 \frac{\sin(kx_1)\cos(kx) - \sin(kx)\cos(kx_1)}{\sin(kx_1)} e^{-i\omega t} = \\ &= u(t) \frac{\sin(k(x_1 - x))}{\sin(kx_1)} \end{aligned}$$

La fuerza de rozamiento por unidad de superficie para el plano oscilante viene dada por

$$P_y|_{x=0} = \sigma_{yx} \hat{n_x} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_{x=0} = -k\eta u \frac{\cos kx_1}{\sin kx_1}$$

y para el plano estático

$$P_y|_{x=x_1} = -\eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_{x=x_1} = \frac{k\eta u}{\sin kx_1}$$

□