Apuntes de Física de Fluidos en la UNED

Resumen

Xavi Aznar

http://FisicaUNED.wordpress.com

Índice alfabético

C

Convección, 11

D

Densidad de flujo de entropía $\mathbf{j} = \rho s \mathbf{v}$, 6

Densidad de flujo másico $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, 5

E

Ecuación de Bernoulli en un campo gravitatorio $\frac{1}{2}v^2 + w + gz = const$, 13

Ecuación de Bernoulli $\frac{1}{2}v^2 + w = const$, 13

Ecuación de continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathrm{div}\,(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\rho$, 5

Ecuación de Euler (en la que interviene sólo la velocidad) $\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = \mathbf{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v})$, 7

Ecuación de Euler (versión termodinámica) $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}w$, 7

Ecuación de Euler $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p$, 6

F

Fluido ideal, 6

Flujo estacionario, 12

L

Línea de corriente, 12

T

Tensor de densidad de flujo de impulso Π_{ik}, 16

Capítulo 1

Fluidos ideales

Consideraciones previas

El estudio del movimiento de los fluidos (líquidos y gases) se denomina *dinámica de fluidos*.

Los fenómenos en dinámica de fluidos son macroscópicos, por lo que se considera al fluido como un medio continuo. Un volumen infinitamente pequeño del fluido es *pequeño* comparado con el volumen de un cuerpo o del sistema que consideramos pero *grande* en comparación con la distancia entre las partículas del mismo.

La descripción matemática del estado del fluido se consigue mediante la distribución de velocidades $\mathbf{v}\,(x, y, z, t)$ y dos magnitudes termodinámicas cualquiera, como la presión p y la densidad ρ del fluido

$$\text{Estado del fluido} = \begin{cases} \mathbf{v}\,(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z) & \text{Distribución de velocidades} \\ p\,(x, y, z, t) & \text{Presión} \\ \rho\,(x, y, z, t) & \text{Densidad} \end{cases}$$

Todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de **dos** de ellas junto con las ecuaciones de estado.

1.1. Ecuación de continuidad (B)

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la materia.

Empezamos considerando un volumen V_0. Si ρ es la densidad del fluido, la masa contenida en este volumen es

$$\int_{V_0} \rho dV$$

La masa de fluido que atraviesa una unidad de superficie $d\mathbf{f}$ es $\rho\mathbf{v}$, donde $d\mathbf{f}$ es un vector normal a la superficie (apuntando hacia afuera) y $|d\mathbf{f}| = \mathbf{n}df$, (con $\mathbf{n}$ un vector unitario) y df igual al área de la superficie. De manera que integrando sobre toda la superficie que rodea V_0 tenemos la masa total de fluido que la atraviesa

$$\oint \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

La disminución de la masa contenida en V_0 debe ser igual a la que atraviesa la superficie, de manera que

$$-\frac{d}{dt}\int_{V_0}\rho dV = \oint \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} \tag{1.1.1}$$

Podemos transformar la integral de superficie en una integral de volumen

$$-\frac{d}{dt}\int_{V_0}\rho dV = \oint \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \int_{V_0}\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})$$

La derivada total se convierte en partial al incluirla en la integral de volumen, por lo que

$$\int_{V_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right)dV = 0$$

Pero como la integral debe ser cero para cualquier V_0, el integrando debe ser cero:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1.1.2}$$

Desarrollando la divergencia, podemos escribir la **ecuación de continuidad** como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}(\mathbf{v})+\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\rho = 0 \tag{1.1.3}$$

El vector

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \tag{1.1.4}$$

se denomina **densidad de flujo másico**: su dirección coincide con la del movimiento del fluido y su módulo es la cantidad de masa de fluido que circula por unidad de tiempo a través de una superficie perpendicular a la velocidad.

1.2. Ecuación de Euler (B)

La ecuación de Euler es la versión *para fluidos* de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

La fuerza total que **actúa** [1] sobre un volumen de fluido es[2]$-\oint p\,d\mathbf{f}$ y transformando la integral de superficie en una integral de volumen tenemos $-\int_{V_0}\mathbf{grad}p\cdot d\mathbf{f}$.

Por otro lado, para $m\mathbf{a}$ escribimos $\int_{V_0}\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dV$. Pero el problema es que esta derivada expresa la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula de fluido (que se mueve) y nosotros queremos magnitudes

[1] De aquí el signo menos.

[2] $p = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}} \Rightarrow \mathbf{F} = p\mathbf{S}$

que se refieren a puntos fijos en el espacio. Por tanto:

$$\frac{d\mathbf{v}\left(\mathbf{r},t\right)}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}}\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\right)\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$

Esta expresión indica la variación de la velocidad entre dos puntos separados $d\mathbf{r}$ (que es lo que se ha movido la partícula de fluido en un intervalor de tiempo dt) y la velocidad en un punto fijo.

Así que solucionar este detalle, ya podemos escribir, para un elemento de volumen:

$$-\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\right)\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \tag{1.2.1}$$

Esta es la ecuación de movimiento del fluido: **ecuación de Euler**. Es una de las **ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos**.

Si el fluido está en un campo gravitatorio, sobre cualquier elemento de volumen actúa una fuerza adicional ρg, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse a la fuerza que actúa sobre cada elemento del volumen:

$$\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\right)\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p+\mathbf{g} \tag{1.2.2}$$

En todos los razonamientos hasta ahora no se ha tenido en cuenta la viscosidad o la conducción térmica del fluido. Un fluido de este tipo se denomina **fluido ideal**:

$$\text{Fluido ideal}\iff\nexists\begin{cases}\text{Viscosidad }\nu\\ \text{Conducción térmica}\end{cases}$$

En un fluido ideal no hay conductividad térmica, por lo que el movimiento a través del fluido es *adiabático*.

$$\text{Movimiento adiabático}\iff\frac{ds}{dt}=0 \tag{1.2.3}$$

donde s es la entropía de una partícula de fluido. Como antes, esta derivada se refiere a la partícula de fluido *en movimiento*, mientras que nosotros queremos expresar las ecuaciones respecto a puntos fijos del espacio:

$$\frac{ds}{dt}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}s+\frac{\partial s}{\partial t}=0 \tag{1.2.4}$$

Esta forma nos recuerda la ecuación (1.1.2), por lo que podemos escribir una *ecuación de continuidad para la entropía*:

$$\frac{\partial\left(\rho s\right)}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\rho s\mathbf{v}\right)=0 \tag{1.2.5}$$

donde ρsv se denomina **densidad de flujo de entropía**.

En general la entropía es constante en todo el fluido, por lo que si tiene un valor específico en un instante inicial, el valor se mantiene en cualquier instante posterior; esto significa que podemos simplificar la ecuación (1.2.5) y dejarla simplemente en

$$s = constante \tag{1.2.6}$$

En adelante, suponemos que la entropía es constante en todo el fluido. En este caso el movimiento del fluido se denomina **isoentrópico**.

Ecuación de Euler (versión termodinámica). Si suponemos que el movimiento es isoentrópico, por lo que podemos utilizar la relación termodinámica:

$$dw = T ds + V dp$$

donde w es la entalpía por unidad de masa del fluido, $V = 1/\rho$ el volumen específico y T la temperatura. Como s es constante, tenemos

$$dw = V dp = \frac{dp}{\rho}$$

y por tanto

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p = \mathbf{grad}w$$

Así, la ecuación (1.2.1) puede escribirse como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}w \tag{1.2.7}$$

que es la versión termodinámica de la ecuación de Euler.

Ecuación de Euler (en función sólo de v). Usando la relación proveniente del análisis vectorial:

$$\frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2 = \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$$

podemos escribir (1.2.7) en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + +\frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}w \tag{1.2.8}$$

Tomando rotacionales a los dos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta que el rotacional de un gradiente es cero, tenemos una forma de la ecuación de Euler en la que interviene sólo la velocidad:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = \mathbf{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}) \tag{1.2.9}$$

Condiciones límite para un fluido ideal. Las ecuaciones de movimiento deben complementarse con las condiciones límite que debe satisfacer el fluido en las superficies que lo limitan.

En el caso de un fluido ideal, la condición límite indica que **el fluido no puede penetrar una superficie sólida**. De forma matemática, esta condición es

$$v_n = 0 \tag{1.2.10}$$

Es decir, la componente de la velocidad normal a la superficie debe anularse si la superficie está en reposo. Si la superficie está en movimiento

$$v_n = v_{sup}$$

Si es una superficie entre dos fluidos inmiscibles:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ v_{n_1} &= v_{n_2} \end{aligned}$$

Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

Ecuaciónes de Euler (x, y, z)	$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad} p$
Ecuación de continuidad	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathrm{div}\,(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\rho = 0$
Ecuación adiabática	$s = constante$

CUADRO 1. Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

1.3. Hidrostática (G)

Consideramos el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme. Como el fluido está en reposo, $\mathbf{v} = 0$, de manera que la ecuación de Euler (1.2.2) toma la forma

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{g} \tag{1.3.1}$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido.

Densidad constante en todo el fluido. Suponemos que ρ es constante en todo el volumen (es decir, no hay compresión significativa del fluido debida a la gravedad). Tomando el eje z vertical y hacia arriba, tenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

De manera que

$$p = -\rho g z + constante$$

Si el fluido tiene una superficie libre a una altura h, donde se le aplica una presión externa p_0 (igual en todos los puntos), esta superficie estará en el plano horizontal $z = h$. Estas condiciones límite nos permiten encontrar la constante, que resulta $p_0 + \rho g h$, y al final

$$p = p_0 + \rho g\,(h - z) \tag{1.3.2}$$

Densidad no constante en el fluido (gran volumen). En el caso de masas grandes de fluido ρ no puede suponerse constante.

Ahora suponemos que el fluido está tanto en equilibrio mecánico como térmico, por lo que la temperatura es igual en todos sus puntos. Usaremos la relación termodinámica:

$$dG = -sdT + V dp$$

donde G es el potencial termodinámico por unidad de masa (entalpía libre o potencial de Gibbs). Si $T = constante$

$$dG = V dp = \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow \mathbf{grad} G = \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

Así que ahora, la ecuación de Euler para una *gran* masa de fluido en reposo (1.3.1) puede escribirse como

$$\mathbf{grad} G = \mathbf{g}$$

Si la gravedad g es un vector constante dirigido hacia el eje z negativo,

$$\mathbf{g} = -\mathbf{grad}\,(gz)$$

por lo que combinando las dos ecuaciones anteriores:

$$\mathbf{grad}\,(G - gz) = 0 \Rightarrow G + gz = constante \tag{1.3.3}$$

donde gz es la energía potencial del elemento de masa del fluido en el campo gravitatorio.

Dependencia sólo de z. Como consecuencia de la ecuación (1.3.1) deducimos que si un fluido está en equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, la presión sólo puede ser función de la altura z (si la presión fuera diferente en distintos puntos a la misma altitud no estaría en equilibrio). A partir de (1.3.1) vemos que

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{1.3.4}$$

la densidad también es sólo una función de z.

$$p = p(z) \Rightarrow \rho = \rho(z) \Rightarrow T = T(z)$$

Es decir,

$$\text{Equilibrio mecánico en campo gravitatorio} \Rightarrow p, \rho, T = f(z)$$

Masa muy grande de fluido (unidas por la atracción gravitatoria). En este caso consideramos una masa muy grande de fluido que se mantiene unido mediante la atracción gravitatoria (como una estrella). Si ϕ es el potencial gravitatorio newtoniano, satisface la ecuación diferencial

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{1.3.5}$$

donde G es la constante de la gravitación de Newton. La aceleración gravitatoria será $\mathrm{g} = -\mathbf{grad}\phi$, por lo que la ecuación de Euler (1.3.1) en este caso queda:

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p = -\mathbf{grad}\phi$$

Tomando la divergencia

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p\right) = -\Delta\phi = -4\pi G\rho \tag{1.3.6}$$

Obtenemos la ecuación que nos da el equilibrio mecánico de la estrella (aunque no presupone la existencia de equilibrio térmico completo).

Si el cuerpo no está girando, será esférico y tanto las distribuciones de presión y densidad serán esféricas, por lo que la ecuación (1.3.6) quedará

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{1.3.7}$$

1.4. Caso en que la convección está ausente (G)

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico.

$$\text{Equilibrio mecánico} \nRightarrow \text{Equilibrio térmico}$$

Si el fluido verifica la ecuación (1.3.1) pero el fluido no está en equilibrio térmico, el equilibrio mecánico sólo es estable si se dan ciertas condiciones.

En caso contrario, el equilibrio es inestable, de manera que se producen corrientes de fluido que tienden a mezclarlo, igualando la temperatura hasta que se alcanza el equilibrio térmico; este movimiento se denomina **convección**. La condición para que el equilibrio mecánico sea estable es la ausencia de convección.

$$\text{Equilibrio estable} \iff \nexists \text{ convección}$$

Para que el equilibrio sea estable es necesario (pero no suficiente) que la fuerza sobre el elemento que se desplaza tienda a devolverlo a su lugar inicial. Es decir, que el fluido desplazado tiene que ser más pesado que el volumen que ha ocupado su lugar. Si $V(p,s)$ es el volumen del elemento a una altura z (donde p y s son la presión y entropía de equilibrio a la altura z) y el desplazamiento es adiabático, el elemento en su nueva posición tiene $V(p',s)$, con $p' = p(z+\xi)$ (situación (1) en la figura (1)). El elemento de volumen en equilibrio en $z+\xi$ es $V(p',s')$ (con $s' = s(z+\xi)$). Así, la condición de equilibrio es

$$V(p',s') - V(p',s) > 0$$

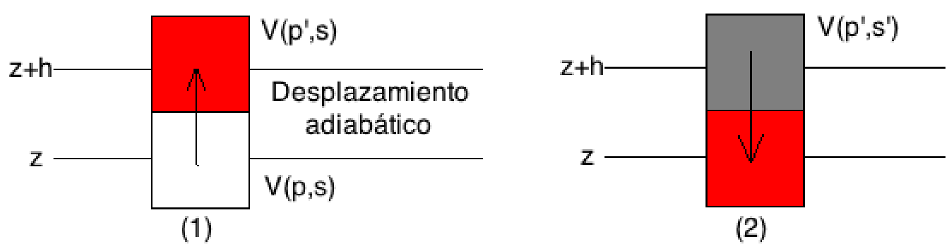

FIGURA 1. Condición de equilibrio: el elemento que ha sido desplazado (gris oscuro) debe ser más pesado que el elemento que lo desplaza (en rojo), de manera que tiende a devolverlo a su posición inicial, manteniendo el equilibrio y evitando las corrientes de convección.

Desarrollando en serie de potencias $s' - s = \xi \frac{ds}{dz}$ de donde obtenemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \qquad (1.4.1)$$

Las fórmulas de la termodinámica dan:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

en donde c_p es el calor específico a presión constante. c_p y T son positivos, de manera que (1.4.1) puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \tag{1.4.2}$$

La mayoría de las sustancias se dilatan cuando se calientan, es decir, $(\partial V/\partial T)_p > 0$ así que la condición de ausencia de convección se reduce a

$$\frac{ds}{dz} > 0 \tag{1.4.3}$$

que la entropía aumente con la altura.

A partir de aquí encontramos la condición para el gradiente de temperaturas. Desarrollando ds/dz

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0$$

Usando la expresión dada en (1.3.4) $\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V}$ se obiene

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_pV}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.4.4}$$

En resumen, un fluido en equilibrio mecánico verifica la ecuación (1.3.1). Si no está en equilibrio térmico, el equilibrio será estable en ausencia de convección. La convección se puede dar si

$$\begin{cases} T \downdownarrows & \text{cuando } z \upuparrows \\ \frac{dT}{dz} > & -\frac{gT}{c_pV}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \end{cases}$$

1.5. Ecuación de Bernoulli (G)

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se simplifican en el caso de un flujo estacionario. Un **flujo** es **estacionario** si la velocidad es constante en el tiempo en todo el fluido.

$$\text{Flujo estacionario} \iff \begin{matrix} \mathbf{v} \neq f(t) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z) \end{matrix} \iff \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

En esta situación la ecuación de Euler (en versión termodinámica) *tuneada* con la relación del análisis vectorial (1.2.8) queda

$$\frac{1}{2}\mathbf{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = -\mathbf{grad}\, w \tag{1.5.1}$$

Introducimos el concepto de **línea de corriente**: la tangente en cualquier punto a una línea de corriente indica la dirección de la velocidad en ese punto. Estas líneas quedan determinadas por las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{1.5.2}$$

En flujo estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo y coinciden con la trayectoria de las partículas (cosa que no sucede en flujo no estacionario).

Hacemos el producto escalar de la ecuación (1.5.1) con un vector unitario $\mathbf{l}$ tangente a la línea de corriente. La proyección del gradiente en una dirección es la derivada en esa dirección, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \mathbf{grad}\, w \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial l} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{v} \perp \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \parallel \mathbf{l} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

Así que la ecuación (1.5.1) queda como

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) = 0$$

De manera que

$$\frac{1}{2}v^2 + w = constante \quad \text{a lo largo de una línea de corriente} \tag{1.5.3}$$

(La constante es diferente en cada línea de corriente). La ecuación anterior es la **ecuación de Bernoulli**.

Flujo estacionario en un campo gravitatorio. Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, tenemos que sumar la gravedad g al segundo miembro de la ecuación (1.5.1). Si la dirección de la gravedad es el eje z, entonces el ángulo formado por g y l es la derivada -dz/dl, por lo que la proyección de g sobre l es $-g\frac{dz}{dl}$ y la ecuación de Bernoulli en un campo gravitatorio resulta:

$$\frac{1}{2}v^2 + w + gz = constante \tag{1.5.4}$$

1.6. Flujo de energía (B)

Seleccionamos un volumen fijo cualquiera y estudiamos cómo varía la energía del fluido con el tiempo. Si la energía del volumen seleccionado es $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon$ (energía cinética e interna, donde ϵ es la energía interna por unidad de masa), estamos interesados en calcular

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right)$$

Para ello, nos centraremos en cada término por separado.

Término $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=\frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$

O utilizando la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación de Euler (1.2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=-\frac{1}{2}v^2\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})-\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p-\rho\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$$

Y ahora el último término lo modificamos:

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}=\frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2$$

Y para $\mathbf{grad}\,p$ usamos la relación termodinámica $dw=Tds+\frac{1}{\rho}dp$, con lo que

$$\mathbf{grad}\,p=\rho\mathbf{grad}\,w-\rho T\mathbf{grad}\,s$$

con lo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) &= -\frac{1}{2}v^2\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})-\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,w+\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,w+\rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s-\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right)= \\ &= -\frac{1}{2}v^2\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})-\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)+\rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s\end{aligned}$$

Término $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon)$. Utilizamos la relación termodinámica

$$d\epsilon=Tds-pdV=Tds+\frac{p}{\rho^2}d\rho$$

Como $\epsilon+\frac{p}{\rho}$ es la entalpía por unidad de masa

$$d\,(\rho\epsilon)=\rho d\epsilon+\epsilon d\rho=w\,d\rho+\rho T\,ds$$

y por tanto

$$\frac{\partial\,(\rho\epsilon)}{\partial t}=w\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho T\frac{\partial s}{\partial t}$$

Utilizamos la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación adiabática general (1.2.4)[3] para obtener

$$\frac{\partial\,(\rho\epsilon)}{\partial t}=-w\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})-\rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}s$$

Combinando los resultados para los dos términos tenemos finalmente para la variación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})-\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)$$

[3]La “ecuación de continuidad de la entropía”.

o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-\mathrm{div}\left(\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right) \tag{1.6.1}$$

Integrando esta expresión respecto al volumen considerado tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)dV &= -\int \mathrm{div}\left(\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right)dV= \\ &= -\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\cdot d\mathbf{f} \end{aligned}\tag{1.6.2}$$

Como vemos, el primer miembro es la variación de energía del fluido por unidad de tiempo mientras que el segundo término es la energía que sale del volumen. Por tanto,

$$\text{Densidad de flujo de energía}\qquad \rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right) \tag{1.6.3}$$

1.7. Flujo de impulso (B)

Hacemos los mismos razonamientos que en la secció anterior, pero interesándonos en la cantidad de movimiento del fluido. El impulso por unidad de volumen es $\rho\mathbf{v}$, de manera que buscamos $\partial\left(\rho\mathbf{v}\right)/\partial t$ (usando notación tensorial):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right)=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Usamos la ecuación de continuidad (1.1.2) en la forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_i\right)}{\partial x_i}=0$$

y la ecuación de Euler (1.2.1) en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right) &= -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-v_i\frac{\partial\left(\rho v_k\right)}{\partial x_k}= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho v_i v_k\right)\end{aligned}$$

Reescribimos el primer término del segundo miembro como

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}=\delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

y finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right)=-\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.7.1}$$

donde Π_{ik} es el tensor simétrico:

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{1.7.2}$$

Como antes, integrando sobre todo el volumen considerado tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV &= -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = \\ &= -\oint \Pi_{ik} df_k \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

El primer miembro es la variación de la componente i del impulso en el volumen, y por tanto, el segundo miembro es la cantidad de impulso que atraviesa la superficie por unidad de tiempo. Si escribimos $df_k = n_k df$ donde $\mathbf{n}$ es un vector normal a la superficie (apuntado hacia afuera), $\Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k$, o de forma vectorial:

$$\Pi = p\mathbf{n} + \rho \mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) \tag{1.7.4}$$

Así, Π_{ik} es la componente i de impulso que fluye a través del área perpendicular al eje k de la superficie por unidad de tiempo. Π_{ik} se denomina **tensor de densidad de flujo de impulso**.

1.8. Conservación de la circulación (G)

PAG19