

Apuntes de Física de Fluidos en la UNED

Resumen

Xavi Aznar

<http://FisicaUNED.wordpress.com>

Índice alfabético

C

Circulación de la velocidad, 16
Convección, 11

D

Densidad de flujo de entropía $\mathbf{j} = \rho s \mathbf{v}$, 6
Densidad de flujo másico $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, 5

E

Ecuación de Bernoulli, 21
Ecuación de Bernoulli en un campo
gravitatorio $\frac{1}{2}v^2 + w + gz = \text{const}$, 13
Ecuación de Bernoulli $\frac{1}{2}v^2 + w = \text{const}$,
13
Ecuación de continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) =$
 $0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho$, 5
Ecuación de Euler (en la que interviene
sólo la velocidad)
 $\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \mathbf{v}) = \text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v})$, 7
Ecuación de Euler (versión
termodinámica)
 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} w$, 7
Ecuación de Euler
 $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$, 6

F

Fluido ideal, 6
Flujo estacionario, 12
Flujo irrotacional, 18
Flujo potencial, 18
Flujo rotacional, 18

L

Ley de conservación de la circulación
 $\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante}$, 17
Línea de corriente, 12

P

Potencial de velocidad ϕ , 21

T

Tensor de densidad de flujo de impulso
 Π_{ik} , 16
Teorema de Kelvin
 $\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante}$, 17

Fluidos ideales

Consideraciones previas

El estudio del movimiento de los fluidos (líquidos y gases) se denomina *dinámica de fluidos*.

Los fenómenos en dinámica de fluidos son macroscópicos, por lo que se considera al fluido como un medio continuo. Un volumen infinitamente pequeño del fluido es *pequeño* comparado con el volumen de un cuerpo o del sistema que consideramos pero *grande* en comparación con la distancia entre las partículas del mismo.

La descripción matemática del estado del fluido se consigue mediante la distribución de velocidades $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ y dos magnitudes termodinámicas cualquiera, como la presión p y la densidad ρ del fluido

$$\text{Estado del fluido} = \begin{cases} \mathbf{v}(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z) & \text{Distribución de velocidades} \\ p(x, y, z, t) & \text{Presión} \\ \rho(x, y, z, t) & \text{Densidad} \end{cases}$$

Todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de **dos** de ellas junto con las ecuaciones de estado.

1.1. Ecuación de continuidad (B)

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la materia.

Empezamos considerando un volumen V_0 . Si ρ es la densidad del fluido, la masa contenida en este volumen es

$$\int_{V_0} \rho dV$$

La masa de fluido que atraviesa una unidad de superficie $d\mathbf{f}$ es $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$, donde $d\mathbf{f}$ es un vector normal a la superficie (apuntando hacia afuera) y $|d\mathbf{f}| = n df$, (con \mathbf{n} un vector unitario) y df igual al área de la superficie. De manera que integrando sobre toda la superficie que rodea V_0 tenemos la masa total de fluido que la atraviesa

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

La disminución de la masa contenida en V_0 debe ser igual a la que atraviesa la superficie, de manera que

$$(1.1.1) \quad -\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

Podemos transformar la integral de superficie en una integral de volumen

$$-\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$$

La derivada total se convierte en parcial al incluirla en la integral de volumen, por lo que

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$$

Pero como la integral debe ser cero para cualquier V_0 , el integrando debe ser cero:

$$(1.1.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Desarrollando la divergencia, podemos escribir la **ecuación de continuidad** como

$$(1.1.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0$$

El vector

$$(1.1.4) \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

se denomina **densidad de flujo másico**: su dirección coincide con la del movimiento del fluido y su módulo es la cantidad de masa de fluido que circula por unidad de tiempo a través de una superficie perpendicular a la velocidad.

1.2. Ecuación de Euler (B)

La ecuación de Euler es la versión *para fluidos* de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

La fuerza total que **actúa**¹ sobre un volumen de fluido es² $-\oint p d\mathbf{f}$ y transformando la integral de superficie en una integral de volumen tenemos $-\int_{V_0} \operatorname{grad} p \cdot d\mathbf{f}$.

Por otro lado, para $m\mathbf{a}$ escribimos $\int_{V_0} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$. Pero el problema es que esta derivada expresa la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula de fluido (que se mueve) y nosotros queremos magnitudes

¹De aquí el signo menos.

² $p = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}} \Rightarrow \mathbf{F} = p\mathbf{S}$

que se refieren a puntos fijos en el espacio. Por tanto:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Esta expresión indica la variación de la velocidad entre dos puntos separados $d\mathbf{r}$ (que es lo que se ha movido la partícula de fluido en un intervalo de tiempo dt) y la velocidad en un punto fijo.

Así que solucionar este detalle, ya podemos escribir, para un elemento de volumen:

$$(1.2.1) \quad -\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

Esta es la ecuación de movimiento del fluido: **ecuación de Euler**. Es una de las **ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos**.

Si el fluido está en un campo gravitatorio, sobre cualquier elemento de volumen actúa una fuerza adicional $\rho \mathbf{g}$, donde \mathbf{g} es la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse a la fuerza que actúa sobre cada elemento del volumen:

$$(1.2.2) \quad (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{g}$$

En todos los razonamientos hasta ahora no se ha tenido en cuenta la viscosidad o la conducción térmica del fluido. Un fluido de este tipo se denomina **fluido ideal**:

$$\text{Fluido ideal} \iff \nexists \begin{cases} \text{Viscosidad } \nu \\ \text{Conducción térmica} \end{cases}$$

En un fluido ideal no hay conductividad térmica, por lo que el movimiento a través del fluido es *adiabático*.

$$(1.2.3) \quad \text{Movimiento adiabático} \iff \frac{ds}{dt} = 0$$

donde s es la entropía de una partícula de fluido. Como antes, esta derivada se refiere a la partícula de fluido *en movimiento*, mientras que nosotros queremos expresar las ecuaciones respecto a puntos fijos del espacio:

$$(1.2.4) \quad \frac{ds}{dt} = \mathbf{v} \cdot \text{grad} s + \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

Esta forma nos recuerda la ecuación (1.1.2), por lo que podemos escribir una *ecuación de continuidad para la entropía*:

$$(1.2.5) \quad \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \text{div} (\rho s \mathbf{v}) = 0$$

donde $\rho s \mathbf{v}$ se denomina **densidad de flujo de entropía**.

En general la entropía es constante en todo el fluido, por lo que si tiene un valor específico en un instante inicial, el valor se mantiene en cualquier instante posterior; esto significa que podemos simplificar la ecuación (1.2.5) y dejarla simplemente en

$$(1.2.6) \quad s = \text{constante}$$

En adelante, suponemos que la entropía es constante en todo el fluido. En este caso el movimiento del fluido se denomina **isoentrópico**.

Ecuación de Euler (versión termodinámica). Si suponemos que el movimiento es isoentrópico, por lo que podemos utilizar la relación termodinámica:

$$dw = Tds + Vdp$$

donde w es la entalpía por unidad de masa del fluido, $V = 1/\rho$ el volumen específico y T la temperatura. Como s es constante, tenemos

$$dw = Vdp = \frac{dp}{\rho}$$

y por tanto

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} w$$

Así, la ecuación (1.2.1) puede escribirse como

$$(1.2.7) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = -\text{grad} w$$

que es la versión termodinámica de la ecuación de Euler.

Ecuación de Euler (en función sólo de \mathbf{v}). Usando la relación proveniente del análisis vectorial:

$$\frac{1}{2} \text{grad} v^2 = \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$$

podemos escribir (1.2.7) en la forma

$$(1.2.8) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = -\text{grad} w$$

Tomando rotacionales a los dos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta que el rotacional de un gradiente es cero, tenemos una forma de la ecuación de Euler en la que interviene sólo la velocidad:

$$(1.2.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \mathbf{v}) = \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v})$$

Condiciones límite para un fluido ideal. Las ecuaciones de movimiento deben complementarse con las condiciones límite que debe satisfacer el fluido en las superficies que lo limitan.

En el caso de un fluido ideal, la condición límite indica que **el fluido no puede penetrar una superficie sólida**. De forma matemática, esta condición es

$$(1.2.10) \quad v_n = 0$$

Es decir, la componente de la velocidad normal a la superficie debe anularse si la superficie está en reposo. Si la superficie está en movimiento

$$v_n = v_{sup}$$

Si es una superficie entre dos fluidos inmiscibles:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ v_{n_1} &= v_{n_2} \end{aligned}$$

Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

$$\text{Ecuaciones de Euler } (x, y, z) \quad (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

$$\text{Ecuación de continuidad} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho = 0$$

$$\text{Ecuación adiabática} \quad s = \text{constante}$$

CUADRO 1. Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

1.3. Hidrostática (G)

Consideramos el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme. Como el fluido está en reposo, $\mathbf{v} = 0$, de manera que la ecuación de Euler (1.2.2) toma la forma

$$(1.3.1) \quad \text{grad} p = \rho \mathbf{g}$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido.

Densidad constante en todo el fluido. Suponemos que ρ es constante en todo el volumen (es decir, no hay compresión significativa del fluido

debida a la gravedad). Tomando el eje z vertical y hacia arriba, tenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

De manera que

$$p = -\rho g z + \text{constante}$$

Si el fluido tiene una superficie libre a una altura h , donde se le aplica una presión externa p_0 (igual en todos los puntos), esta superficie estará en el plano horizontal $z = h$. Estas condiciones límite nos permiten encontrar la constante, que resulta $p_0 + \rho g h$, y al final

$$(1.3.2) \quad p = p_0 + \rho g (h - z)$$

Densidad no constante en el fluido (gran volumen). En el caso de masas grandes de fluido ρ no puede suponerse constante.

Ahora suponemos que el fluido está tanto en equilibrio mecánico como térmico, por lo que la temperatura es igual en todos sus puntos. Usaremos la relación termodinámica:

$$dG = -s dT + V dp$$

donde G es el potencial termodinámico por unidad de masa (entalpía libre o potencial de Gibbs). Si $T = \text{constante}$

$$dG = V dp = \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow \text{grad} G = \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

Así que ahora, la ecuación de Euler para una *gran* masa de fluido en reposo (1.3.1) puede escribirse como

$$\text{grad} G = \mathbf{g}$$

Si la gravedad \mathbf{g} es un vector constante dirigido hacia el eje z negativo,

$$\mathbf{g} = -\text{grad}(gz)$$

por lo que combinando las dos ecuaciones anteriores:

$$(1.3.3) \quad \text{grad}(G - gz) = 0 \Rightarrow G + gz = \text{constante}$$

donde gz es la energía potencial del elemento de masa del fluido en el campo gravitatorio.

Dependencia sólo de z . Como consecuencia de la ecuación (1.3.1) deducimos que si un fluido está en equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, la presión sólo puede ser función de la altura z (si la presión fuera diferente en distintos puntos a la misma altitud no estaría en

equilibrio). A partir de (1.3.1) vemos que

$$(1.3.4) \quad \rho = -\frac{1}{g} \frac{dp}{dz}$$

la densidad también es sólo una función de z .

$$p = p(z) \Rightarrow \rho = \rho(z) \Rightarrow T = T(z)$$

Es decir,

$$\text{Equilibrio mecánico en campo gravitatorio} \Rightarrow p, \rho, T = f(z)$$

Masa muy grande de fluido (unidas por la atracción gravitatoria).

En este caso consideramos una masa muy grande de fluido que se mantiene unido mediante la atracción gravitatoria (como una estrella). Si ϕ es el potencial gravitatorio newtoniano, satisface la ecuación diferencial

$$(1.3.5) \quad \Delta\phi = 4\pi G\rho$$

donde G es la constante de la gravitación de Newton. La aceleración gravitatoria será $g = -\text{grad}\phi$, por lo que la ecuación de Euler (1.3.1) en este caso queda:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = -\text{grad}\phi$$

Tomando la divergencia

$$(1.3.6) \quad \text{div} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) = -\Delta\phi = -4\pi G\rho$$

Obtenemos la ecuación que nos da el equilibrio mecánico de la estrella (aunque no presupone la existencia de equilibrio térmico completo).

Si el cuerpo no está girando, será esférico y tanto las distribuciones de presión y densidad serán esféricas, por lo que la ecuación (1.3.6) quedará

$$(1.3.7) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G\rho$$

1.4. Caso en que la convección está ausente (G)

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico.

Equilibrio mecánico \nRightarrow Equilibrio térmico

Si el fluido verifica la ecuación (1.3.1) pero el fluido no está en equilibrio térmico, el equilibrio mecánico sólo es estable si se dan ciertas condiciones.

En caso contrario, el equilibrio es inestable, de manera que se producen corrientes de fluido que tienden a mezclarlo, igualando la temperatura

hasta que se alcanza el equilibrio térmico; este movimiento se denomina **convección**. La condición para que el equilibrio mecánico sea estable es la ausencia de convección.

$$\text{Equilibrio estable} \iff \nexists \text{ convección}$$

Para que el equilibrio sea estable es necesario (pero no suficiente) que la fuerza sobre el elemento que se desplaza tienda a devolverlo a su lugar inicial. Es decir, que el fluido desplazado tiene que ser más pesado que el volumen que ha ocupado su lugar. Si $V(p, s)$ es el volumen del elemento a una altura z (donde p y s son la presión y entropía de equilibrio a la altura z) y el desplazamiento es adiabático, el elemento en su nueva posición tiene $V(p', s)$, con $p' = p(z + \xi)$ (situación (1) en la figura (1)). El elemento de volumen en equilibrio en $z + \xi$ es $V(p', s')$ (con $s' = s(z + \xi)$). Así, la condición de equilibrio es

$$V(p', s') - V(p', s) > 0$$

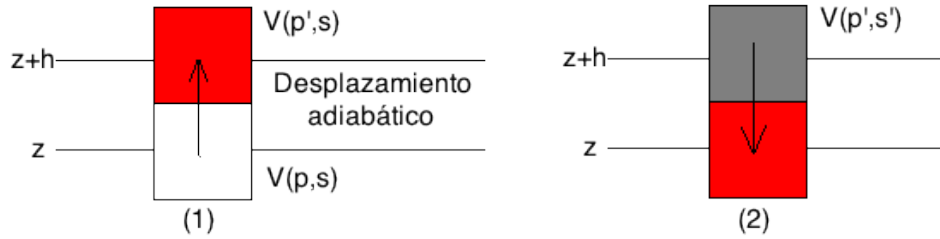


FIGURA 1. Condición de equilibrio: el elemento que ha sido desplazado (gris oscuro) debe ser más pesado que el elemento que lo desplaza (en rojo), de manera que tiende a devolverlo a su posición inicial, manteniendo el equilibrio y evitando las corrientes de convección.

Desarrollando en serie de potencias $s' - s = \xi \frac{ds}{dz}$ de donde obtenemos

$$(1.4.1) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

Las fórmulas de la termodinámica dan:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

en donde c_p es el calor específico a presión constante. c_p y T son positivos, de manera que (1.4.1) puede escribirse como

$$(1.4.2) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{ds}{dz} > 0$$

La mayoría de las sustancias se dilatan cuando se calientan, es decir, $(\partial V / \partial T)_p > 0$ así que la condición de ausencia de convección se reduce a

$$(1.4.3) \quad \frac{ds}{dz} > 0$$

que la entropía aumente con la altura.

A partir de aquí encontramos la condición para el gradiente de temperaturas. Desarrollando ds/dz

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dz} > 0$$

Usando la expresión dada en (1.3.4) $\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V}$ se obtiene

$$(1.4.4) \quad \frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

En resumen, un fluido en equilibrio mecánico verifica la ecuación (1.3.1). Si no está en equilibrio térmico, el equilibrio será estable en ausencia de convección. La convección se puede dar si

$$\begin{cases} T \Downarrow & \text{cuando } z \Uparrow \\ \frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \end{cases}$$

1.5. Ecuación de Bernoulli (G)

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se simplifican en el caso de un flujo estacionario. Un **flujo** es **estacionario** si la velocidad es constante en el tiempo en todo el fluido.

$$\text{Flujo estacionario} \iff \begin{matrix} \mathbf{v} \neq f(t) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) \end{matrix} \iff \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

En esta situación la ecuación de Euler (en versión termodinámica) *tuneada* con la relación del análisis vectorial (1.2.8) queda

$$(1.5.1) \quad \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} = -\text{grad} w$$

Introducimos el concepto de **línea de corriente**: la tangente en cualquier punto a una línea de corriente indica la dirección de la velocidad en

ese punto. Estas líneas quedan determinadas por las ecuaciones diferenciales:

$$(1.5.2) \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

En flujo estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo y coinciden con la trayectoria de las partículas (cosa que no sucede en flujo no estacionario).

Hacemos el producto escalar de la ecuación (1.5.1) con un vector unitario \mathbf{l} tangente a la línea de corriente. La proyección del gradiente en una dirección es la derivada en esa dirección, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \mathbf{grad} w &\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial l} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v} \perp \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \parallel \mathbf{l} &\Rightarrow \mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{rot} \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

Así que la ecuación (1.5.1) queda como

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0$$

De manera que

$$(1.5.3) \quad \frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante} \quad \text{a lo largo de una línea de corriente}$$

(La constante es diferente en cada línea de corriente). La ecuación anterior es la **ecuación de Bernoulli**.

Flujo estacionario en un campo gravitatorio. Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, tenemos que sumar la gravedad g al segundo miembro de la ecuación (1.5.1). Si la dirección de la gravedad es el eje z , entonces el ángulo formado por g y \mathbf{l} es la derivada $-dz/dl$, por lo que la proyección de g sobre \mathbf{l} es $-g \frac{dz}{dl}$ y la ecuación de Bernoulli en un campo gravitatorio resulta:

$$(1.5.4) \quad \frac{1}{2} v^2 + w + gz = \text{constante}$$

1.6. Flujo de energía (B)

Seleccionamos un volumen fijo cualquiera y estudiamos cómo varía la energía del fluido con el tiempo. Si la energía del volumen seleccionado es $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon$ (energía cinética e interna, donde ϵ es la energía interna por unidad de masa), estamos interesados en calcular

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right)$$

Para ello, nos centraremos en cada término por separado.

Término $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right)$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

O utilizando la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación de Euler (1.2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p - \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$$

Y ahora el último término lo modificamos:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{grad} v^2$$

Y para $\mathbf{grad} p$ usamos la relación termodinámica $dw = Tds + \frac{1}{\rho} dp$, con lo que

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{grad} w - \rho T \mathbf{grad} s$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} w + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} w + \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} v^2 \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s \end{aligned}$$

Término $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon)$. Utilizamos la relación termodinámica

$$d\epsilon = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Como $\epsilon + \frac{p}{\rho}$ es la entalpía por unidad de masa

$$d(\rho \epsilon) = \rho d\epsilon + \epsilon d\rho = w d\rho + \rho T ds$$

y por tanto

$$\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} = w \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}$$

Utilizamos la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación adiabática general (1.2.4)³ para obtener

$$\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} = -w \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho T \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s$$

Combinando los resultados para los dos términos tenemos finalmente para la variación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = - \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right)$$

³La “ecuación de continuidad de la entropía”.

o lo que es lo mismo

$$(1.6.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) = -\text{div} \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right)$$

Integrando esta expresión respecto al volumen considerado tenemos:

$$(1.6.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) dV &= - \int \text{div} \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \right) dV = \\ &= - \oint \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right) \cdot d\mathbf{f} \end{aligned}$$

Como vemos, el primer miembro es la variación de energía del fluido por unidad de tiempo mientras que el segundo término es la energía que sale del volumen. Por tanto,

$$(1.6.3) \quad \text{Densidad de flujo de energía} \quad \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + w \right)$$

1.7. Flujo de impulso (B)

Hacemos los mismos razonamientos que en la sección anterior, pero interesándonos en la cantidad de movimiento del fluido. El impulso por unidad de volumen es $\rho \mathbf{v}$, de manera que buscamos $\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t$ (usando notación tensorial):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Usamos la ecuación de continuidad (1.1.2) en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

y la ecuación de Euler (1.2.1) en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) \end{aligned}$$

Reescribimos el primer término del segundo miembro como

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

y finalmente

$$(1.7.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

donde Π_{ik} es el tensor simétrico:

$$(1.7.2) \quad \Pi_{ik} = \delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

Como antes, integrando sobre todo el volumen considerado tenemos:

$$(1.7.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV &= - \int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = \\ &= - \oint \Pi_{ik} df_k \end{aligned}$$

El primer miembro es la variación de la componente i del impulso en el volumen, y por tanto, el segundo miembro es la cantidad de impulso que atraviesa la superficie por unidad de tiempo. Si escribimos $df_k = n_k df$ donde \mathbf{n} es un vector normal a la superficie (apuntado hacia afuera), $\Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k$, o de forma vectorial:

$$(1.7.4) \quad \Pi = p \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$$

Así, Π_{ik} es la componente i de impulso que fluye a través del área perpendicular al eje k de la superficie por unidad de tiempo. Π_{ik} se denomina **tensor de densidad de flujo de impulso**.

1.8. Conservación de la circulación (G)

La integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

a lo largo de un contorno cerrado se denomina **circulación de la velocidad**.

Consideramos la circulación sobre contorno fluido en un instante determinado. Queremos saber qué ocurre a medida que pasa el tiempo. Como el contorno se ha tomado sobre partículas del fluido, el contorno se despalza con éstas, por lo que queremos averiguar:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Tomamos la derivada total porque debemos tener en cuenta tanto la variación de la velocidad como el de $d\mathbf{l}$, al desplazarse el contorno con las partículas. Así⁴:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{l}}{dt}$$

Nos concentramos en el segundo término:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = \delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \Rightarrow \oint \delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = 0$$

⁴Utilizamos δ para distinguir el diferencial de la derivada y no liarnos.

Pero la integral a lo largo de un camino cerrado de una diferencial total es cero, así que

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l}$$

Utilizando el teorema de Stokes $\int_S \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, de manera que:

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{f}$$

Finalmente, teniendo en cuenta $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = -\mathbf{grad}w$, y que el rotacional de un gradiente es cero⁵ tenemos:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{f} = \int_S \mathbf{rot}(\mathbf{grad}w) \cdot d\mathbf{f} = 0$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$(1.8.1) \quad \Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{constante}$$

En un fluido ideal, la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno *fluido* cerrado es constante en el tiempo (Teorema de Kelvin o Ley de conservación de la circulación).

Hemos utilizado la ecuación de Euler 1.2.7, en la que interviene que el flujo es isoentrópico, por lo que **el resultado no es válido si el fluido no es isoentrópico**.

1.9. Flujo potencial (G)

Suponemos un flujo estacionario. Consideramos una línea de corriente de la que sabemos que, en un determinado punto tiene vorticidad cero $\omega \equiv \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$. Si elegimos un camino cerrado alrededor de la línea de corriente, la circulación de la velocidad será

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_S \omega \cdot d\mathbf{f} = 0$$

Es decir, vemos que la circulación es cero. A medida que el contorno se mueve con el fluido siguiendo la línea de corriente, la ley de conservación de la circulación nos dice que este valor no se altera, por tanto, la vorticidad ω también se mantendrá igual a cero a lo largo de toda la línea de corriente.

⁵Si el fluido ideal está sometido a un campo gravitatorio \mathbf{g} también se verifica la ley de conservación de la circulación, porque $\mathbf{rot} \mathbf{g} = 0$.

Por tanto, si $\omega = \text{rot } \mathbf{v} = 0$ en un punto de la línea de corriente, es igualmente cero en toda la línea de corriente.

$$\omega(x) = 0 \Rightarrow \omega(x') = 0 \quad \forall x' \in \text{línea de corriente}$$

Consideramos un flujo estacionario incidiendo sobre un cuerpo. Como el flujo es uniforme en el infinito, su velocidad \mathbf{v} es una constante, de manera que $\omega = 0$ en todas las líneas de corriente. Con el resultado anterior se concluye entonces que $\omega = 0$ para todas las líneas de corriente del fluido, o lo que es lo mismo, $\omega = 0$ en todo el fluido.

$$\begin{aligned} \text{Flujo estacionario} &\Rightarrow \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \omega(\infty) = 0 \quad \forall \text{ líneas de corriente} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega = 0 \quad \text{todo el fluido} \end{aligned}$$

Un flujo en el cual $\omega = 0$ en todo el espacio se denomina **flujo potencial** o **flujo irrotacional**. Por el contrario, un flujo en el que ω no es nula en todos los puntos se denomina **flujo rotacional**.

Si en un instante determinado tenemos un flujo potencial en todo el volumen del fluido. Entonces, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno cerrado cualquiera será cero. Por la ley de conservación de la circulación, también será cero en cualquier instante futuro, por lo que si existe un flujo potencial en un instante cualquiera, tendremos un flujo potencial en cualquier instante futuro.

Flujo potencial en t (en todo el fluido)

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \text{const} \quad \forall \text{ contorno cerrado} \\ &\text{Flujo potencial } \forall t' > t \end{aligned}$$

De hecho, esto coincide con el hecho de que si $\omega = 0$, entonces la ecuación de Euler (en función sólo de la velocidad) 1.2.9 se satisface automáticamente.

Todas estas conclusiones tienen validez limitada.

El resultado de que la vorticidad $\omega = 0$ para toda línea de corriente no es válida para líneas de corriente contenidas en la superficie de un sólido junto al cual circula un flujo. La presencia del cuerpo sólido impide construir un contorno cerrado alrededor de la línea de corriente. Las ecuaciones del movimiento admiten soluciones en las que se produce una separación en la superficie del cuerpo: algunas líneas de corriente que han seguido la superficie del cuerpo empiezan a separarse de ella y siguen dentro del fluido. El flujo se caracteriza por una superficie de discontinuidad tangencial que sale del cuerpo. En esta superficie una capa se desliza

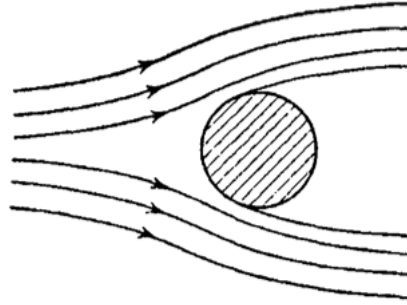


FIGURA 2. Separación sobre la superficie de un cuerpo sólido junto al que circula un flujo

sobre la otra. Desde el punto de vista matemático la discontinuidad en la componente tangencial corresponde a una superficie en la cual la vorticidad ω es nula.

Si incluimos estos flujos discontinuos, la solución de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal la solución no es única; sin embargo todas las soluciones discontinuas no tienen significado físico ya que las discontinuidades tangenciales son inestables y el flujo se haría turbulento.

El problema físico real del flujo alrededor de un cuerpo tiene una solución única. Esta solución única viene determinada por las propiedades de la **capa límite**. Esta capa límite es una capa delgada de fluido que circula junto al cuerpo. Como los fluidos ideales no existen, todos tienen una cierta viscosidad, aunque sea pequeña. En esta capa cercana al cuerpo la viscosidad no puede despreciarse. En función de las características de esta capa, se selecciona una de las infinitas soluciones de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal. Así, siempre despreciaremos las soluciones que dan lugar a separación ya que si hay separación se producirá turbulencia.

El estudio de las soluciones de las ecuaciones de movimiento para un flujo estacionario continuo que circula junto a cuerpos en movimiento aporta resultados interesantes para cuerpos de forma *aerodinámica*. En estos casos el flujo difiere muy poco de un flujo potencial, excepto en una capa límite y en una *estela* estrecha detrás del mismo.

Otro caso en el que es importante el estudio del flujo potencial es cuando existen oscilaciones pequeñas de un cuerpo inmerso en un fluido. De hecho, si la amplitud a de las oscilaciones es pequeña comparadas con la dimensión l del cuerpo ($a \ll l$), el flujo que circula junto al cuerpo es

potencial.

$$\text{Flujo potencial} \iff \begin{cases} \text{Formas aerodinámicas} & \text{(excepto en capa límite y estela)} \\ \text{Cuerpo oscilando} & a_{osc} \ll l_{cuerpo} \text{ (osc. pequeñas)} \end{cases}$$

La velocidad \mathbf{v} varía apreciablemente en una cantidad del mismo orden que la velocidad u del cuerpo oscilante a lo largo de una longitud del orden de la dimensión l del cuerpo $\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \equiv \text{grad } \mathbf{v} \sim \frac{u}{l}$. La magnitud de \mathbf{v} es del orden de u (a pequeñas distancias del cuerpo), de manera que

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \sim \frac{u^2}{l}$$

La derivada $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \omega u$, donde ω es la frecuencia de las oscilaciones. Y como $\omega \sim u/a$, tenemos $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \frac{u^2}{a}$. Como nos centramos en oscilaciones pequeñas, $a \ll l$, $(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ y puede despreciarse, por lo que la ecuación de Euler queda:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } w$$

Tomando el rotacional en ambos miembros

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } (\text{grad } w) = 0 \Rightarrow \text{rot } \mathbf{v} = \text{constante}$$

Pero en un movimiento oscilante el promedio temporal de la velocidad es cero, por lo que $\text{rot } \mathbf{v} = \text{Vorticidad} = \omega = \text{constante} = 0$. Por tanto, en primera aproximación

$$\text{Cuerpo oscilante} \iff \text{Flujo potencial}$$

Propiedades del flujo potencial. La ley de conservación de la circulación se basa en que el flujo es isoentrópico. Sólo el flujo isoentrópico puede ser potencial. Usando el teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

Para un flujo potencial $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ (vorticidad), por lo que

$$(1.9.1) \quad \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Es decir, la circulación alrededor de cualquier contorno cerrado es nula \Rightarrow no pueden existir líneas de corriente cerradas en un flujo potencial. Como la dirección de una línea de corriente es en todos los puntos la dirección de la velocidad, la circulación a lo largo de esta línea no puede ser cero (pues significaría que no hay flujo, que el fluido está estático).

Si tenemos un campo vectorial con un rotacional cero, la velocidad en el flujo potencial puede expresarse como gradiente de un escalar; en este

caso se denomina **potencial de velocidad**.

$$(1.9.2) \quad \mathbf{v} = \text{grad}\phi$$

Escribiendo la ecuación de Euler en la forma 1.2.8

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \text{grad} w$$

y sustituyendo $\mathbf{v} = \text{grad}\phi$ tenemos

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w \right) = 0$$

de donde

$$(1.9.3) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + w = f(t)$$

donde $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo. Como la velocidad es la derivada espacial de ϕ podemos sumar ϕ a cualquier función del tiempo; cambiando ϕ por $\phi + \int f(t) dt$ tenemos cero en el segundo miembro de (1.9.3)

En el caso de un flujo estacionario (considerando ϕ independiente del tiempo), $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, $f(t) = \text{constante}$ y entonces (1.9.3) se transforma en la **ecuación de Bernoulli**.

$$(1.9.4) \quad \frac{1}{2} v^2 + w = \text{constante}$$