Apuntes Física de Fluidos

Xavi Aznar

Índice alfabético

Capítulo 1

Fluidos Ideales

Conceptos previos

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) se denomina *dinámica de fluidos*. Los fenómenos considerados en dinámica de fluidos son macroscópicos, pues un fluido se considera medio continuo. Por tanto, cuando se habla de elemento de volumen pequeño, se considera que son pequeños en relación con el volumen del sistema pero grandes comparados con la distancia entre las moléculas. En este sentido interpretamos las expresiones *partícula o punto en un fluido*.

La descripción matemática del estado de un fluido móvil se efectúa con funciones que dan la **distribución de velocidad** del fluido $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ y *dos magnitudes termodinámicas cualesquiera* que pertenezcan al fluido, com por ejemplo la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$. Todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dadas los valores de **dos** cualesquiera de ellas junto con la **ecuación de estado**, es decir, las tres componentes de la velocidad $\mathbf{v}$, la presión p y la densidad ρ (ver esquema 1).

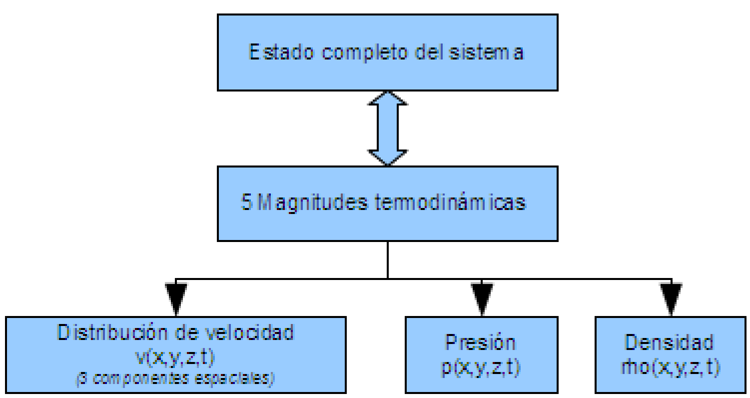

FIGURA 1. Esquema básico

En general todas las magnitudes son funciones de las coordenadas espaciales y del tiempo. Cuando especificamos, por ejemplo, la velocidad del fluido en un punto (y en un instante determinado), nos referimos a la velocidad del fluido en *ese punto*, y no a la velocidad de partículas fijas del fluido.

1.1. Ecuación de continuidad

Empezamos con la deducción de la ecuación de la conservación de la materia.

Consideramos un volumen V_0 del espacio. La masa del fluido contenida en ese volumen es

$$\int_{V_0} \rho dV$$

La masa de fluido que circula por unidad de tiempo a través de un elemento de superficie $d\mathbf{f}$ es

$$\frac{dm}{dt\, dS} = \rho \frac{dV}{dt\, dS} = \rho \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{f}\, dS}{dS} = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

El módulo del vector $d\mathbf{f}$ es igual al área del elemento de superficie y su dirección es normal a la superficie. Por convenio, $d\mathbf{f}$ se considera positivo si el fluido está saliendo del volumen, y negativo si es hacia el interior. La masa total que sale del volumen V_0 en una unidad de tiempo es

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \tag{1.1.1}$$

donde la integración se realiza sobre toda la superficie que encierra V_0. Por otro lado, la disminución de fluido en el volumen V_0 por unidad de tiempo es

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV \tag{1.1.2}$$

Por lo que igualando las ecuaciones (1.1.1) y (1.1.2) tenemos:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \tag{1.1.3}$$

Ahora la ecuación (1.1.3) se puede modificar usando el teorema de Green, convirtiendo la integral de superficie en una integral de volumen

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_{V_0} div(\rho \mathbf{v}) dV$$

Y la ecuación (1.1.3) queda:

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

Pero la ecuación anterior debe ser válida independientemente del volumen V_0, por lo que debe verificarse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{Ecuación de continuidad} \tag{1.1.4}$$

La ecuación (1.1.4) se denomina ecuación de continuidad. Si desarrollamos $div\,(\rho \mathbf{v})$ podemos re-escribir la ecuación de continuidad (1.1.4) como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div\,(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\,(\rho) = 0 \tag{1.1.5}$$

El vector $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ se llama *densidad de flujo másico*. Su dirección es la del movimiento del fluido, mientras que su módulo es igual a la masa del fluido que circula por unidad de tiempo a través de una unidad de área perpendicular a la velocidad.

1.2. Ecuación de Euler

Consideramos un cierto volumen de fluido. La fuerza total que actúa sobre el mismo es la integral de la presión sobre la superficie que limita el volumen:

$$-\oint p\, d\mathbf{f}$$

Si transformamos la integral de superficie en una integral de volumen

$$-\oint p\, d\mathbf{f} = -\int \mathbf{grad}\,(p)\, dV$$

Es decir, que el fluido que rodea cualquier elemento de volumen dV ejerce sobre el mismo una fuerza $-dV\mathbf{grad}\,(p)$. O lo que es lo mismo, sobre la unidad de volumen del fluido actúa una fuerza $-\mathbf{grad}\,(p)$.

Ahora escribimos la ecuación de movimiento de un elemento de volumen del fluido igualando la fuerza $-\mathbf{grad}\,(p)$ al producto de la masa por unidad de volumen ρ por la aceleración $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad}\,(p) \tag{1.2.1}$$

La derivada $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ representa la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio. Esta derivada debe expresarse en función de magnitudes que se refieren a punto fijos del espacio. Esta velocidad se descompone en dos partes, la variación durante dt de la velocidad en un punto fijo del espacio y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) en dos puntos separados $d\mathbf{r}$, siendo $d\mathbf{r}$ la distancia recorrida por la partícula de fluido durante el tiempo dt. La primera parte es $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt$, en donde se considera que la derivada $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ corresponde a valores x, y, z constantes, es decir, a un punto determinado del espacio. La segunda parte es

$$dx\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial zx} = (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$$

De manera que

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}dt + (d\mathbf{r} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$$

o sea, dividiendo ambos miembros por dt

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} \tag{1.2.2}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.2.1) tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,(p) \quad \text{Ecuación de Euler} \tag{1.2.3}$$

Esta es la ecuación del movimiento del fluido. Se denomina *ecuación de Euler* y es una de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos.

Si el fluido está en el interior de un campo gravitatorio, sobre cualquier unidad de volumen actúa una fuerza adicional ρg, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (1.2.1), de modo que la ecuación de Euler (1.2.3), teniendo en cuenta la gravedad, toma la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,(p) + \mathbf{g} \tag{1.2.4}$$

Para obtener las ecuaciones del movimiento no se ha tenido en cuenta los procesos de disipación de energía que se producen en el fluido como consecuencia de la fricción o rozamiento interno (*viscosidad*) ni los debidos al intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido. Es decir, que estos resultados sólo son válidos cuando en el movimiento del fluido no es importante:

- la conductividad térmica
- la viscosidad

Un fluido en el que la conductividad térmica o la viscosidad **no** es importante se denomina ***fluido ideal***.

Como suponemos que no hay intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido ideal (porque la conductividad térmica no es importante), el movimiento del fluido se considera *adiabático*. Por tanto, en el movimiento de un fluido ideal la entropía de cualquier partícula de fluido permanece constante a medida que la partícula se mueve por el espacio. Si llamamos s a la *entropía por unidad de masa*, la condición correspondiente al movimiento adiabático es:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \tag{1.2.5}$$

Como en el caso de la ecuación (1.2.1), la derivada total respecto al tiempo designa la variación respecto al tiempo de la entropía de una partícula de fluido cuando se mueve. La ecuación anterior (1.2.5) también puede escribirse como

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\,(s) = 0 \tag{1.2.6}$$

La ecuación (1.2.6) describe el movimiento adiabático de un fluido ideal.

Usando la ecuación de continuidad 1.1.4 en la página 7 podemos escribirla como una *ecuación de continuidad* para la entropía:

$$\frac{\partial\,(\rho s)}{\partial t} + div\,(\rho s \mathbf{v}) = 0 \tag{1.2.7}$$

El producto $\rho s \mathbf{v}$ es la **densidad de flujo de entropía**.

Conviene recordar que la ecuación adiabática puede ponerse de forma mucho más sencilla. Si, como suele suceder, la entropía es constante a través del volumen del fluido en un instante inicial determinado, sigue manteniendo el mismo valor constante en todo instante durante cualquier movimiento subsiguiente del fluido. En este caso, podeos escribir la ecuación adiabática, simplemente, como

$$s = \text{constante} \tag{1.2.8}$$

que es lo que haremos normalmente en adelante. En esta situación se dice que el movimiento es ***isoentrópico***.

Deducción de la Ecuación de Euler (versión termodinámica). Podemos utilizar que el movimiento es isoentrópico para poner la ecuación de movimiento 1.2.3 en la página anterior de forma ligeramente distinta. Para ello utilizaremos la relación termodinámica:

$$dw = T ds + V dp$$

donde w[1] es la *entalpía* por unidad de masa de fluido, $V = 1/\rho$ el volumen específico y T la temperatura. Como la entropía s es constante, tenemos

$$dw = V dp = \frac{dp}{\rho}$$

[1]Normalmente la entalpía se representa por la letra H, o h, si es por unidad de masa.

por tanto, $\frac{\mathbf{grad}p}{p} = \mathbf{grad}w$. De manera que la ecuación (1.2.3), ecuación de Euler, puede escribirse en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,(w) \tag{1.2.9}$$

Deducción de la Ecuación de Euler (versión sólo velocidad). Otra forma en la que puede tomar la ecuación de Euler, en la que sólo interviene la velocidad, se obtiene a partir de una identidad del análisis vectorial:

$$\frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2 = \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$$

de manera que podemos escribir la *versión termodinámica* de la Ecuación de Euler (1.2.9) como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,(\mathbf{v}) = -\mathbf{grad}w \tag{1.2.10}$$

Tomando el rotacional a ambos lados de esta ecuación tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = \mathbf{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}) \tag{1.2.11}$$

de forma que en esta forma de la ecuación de Euler, sólo interviene la velocidad.

Condiciones límite. Las ecuaciones de movimiento deben ir acompañadas de las condiciones límite que deben satisfacerse en las superficies que limitan con el fluido.

En el caso de un fluido ideal, la condición límite expresa que el fluido no puede penetrar una superficie sólida. Esto es equivalente a que la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie debe anularse si dicha superficie está en reposo:

$$v_n = 0 \tag{1.2.12}$$

En el caso general de una superficie móvil, v_n debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie.

En una superficie límite entre dos fluidos inmiscibles (que no pueden mezclarse), la condición es que la presión y la componente de velocidad normal a la superficie de separación debe ser la misma para ambos fluidos y cada una de estas componentes de velocidad debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de superficie.

PROBLEMA (pag 9)

1.3. Hidrostática

Fluido en reposo en un campo gravitatorio uniforme (equilibrio mecánico) con ρ =constante. En el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme, la ecuación de Euler 1.2.4 en la página 8 toma la forma

$$\mathbf{grad}p = \rho\mathbf{g} \tag{1.3.1}$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido. Si no existe ninguna fuerza externa, la ecuación de equilibrio es simplemente $\mathbf{grad}p = 0$, es decir, $p =$constante; la presión es la misma en todos los puntos del fluido.

La ecuación (1.3.1) puede integrarse inmediatamente si la densidad del fluido puede suponerse constante a través de todo el volumen, es decir, si no existe compresión significativa del fluido bajo la acción de una fuerza exterior. Tomando el eje z vertical hacia arriba, tenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Con lo que obtenemos:

$$p = -\rho g z + \text{constante}$$

Si el fluido en reposo tiene una superficie libre a una altura h, en la cual se aplica una presión externa p_0 para $z = h$, encontramos que la constante es $p_0 + \rho g h$, de manera que al final

$$p = p_0 + \rho g \left(h - z\right) \tag{1.3.2}$$

Fluido en equilibrio mecánico y térmico (con $\rho \neq$constante). En general, en grandes masas de líquido y para un gas, la densidad ρ no puede considerarse constante (por ejemplo, en la atmósfera). Si el fluido está en equilibrio térmico además de en equilibrio mecánico, la temperatura es la misma en todos los puntos del fluido.

En este caso, la ecuación (1.3.1) puede integrarse del siguiente modo:

$$d\Phi = -s\, dT + V\, dp$$

en donde Φ es el potencial termodinámico por unidad de masa [2]

(pag 11, 12)

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{1.3.3}$$

[2] Entalpía libre o potencial de Gibss, que suele representarse como G.

1.4. Caso en que la convección está ausente

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico. La ecuación (1.3.1), que es la condición para el equilibrio mecánico, puede satisfacerse aunque la temperatura no sea constante en el interior del fluido. En este caso la cuestión es si el equilibrio mecánico es estable. El equilibrio es estable sólo cuando se cumplen determinadas condiciones. Si no se dan, el equilibrio es inestable y se producen corrientes en el fluido que tienden a mezclarlo, de modo que se iguale la temperatura. A este movimiento se le denomina *convección*.

La condición para que un equilibrio mecánico sea estable es que no haya convección.

A continuación vamos a deducir esta condición.

Consideramos un elemento fluido a una altura z en un volumen específico $V(p,s)$, en donde p y s son la presión y entropía de equilibrio de la altura z. Suponemos que este fluido sufre un desplazamiento hacia arriba a lo largo de un pequeño intervalo ζ; su volumen específico se transforma entonces en $V(p',s)$ en donde p' es la presión a la altura $p+\zeta$. Para que el equilibrio sea estable, es necesario -aunque no suficiente, en general- que la fuerza resultante sobre el elemento tienda a devolverlo a su posición original. Esto significa que el elemento debe ser más pesado que el fluido que desplaza en su nueva posición. El volumen específico de este último es $V(p',s')$, siendo s' la entropía de equilibrio a la altura $z+\zeta$. Así, la ecuación de estabilidad es

$$V(p',s') - V(p',s) > 0$$

Desarrollando esta diferencia en potencias de $s - s' = \zeta \frac{ds}{dz}$, obtenemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \qquad (1.4.1)$$

Las fórmulas de la termodinámica dan

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

donde c_p es el calor específico a presión constante. Tanto c_p como T son positivos, de modo que (1.4.1) puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \qquad (1.4.2)$$

La mayoría de las sustancias se dilatan al calentarse, es decir, $(\partial V/\partial T)_p > 0$. La condición de que no haya convección se reduce entonces a

$$\frac{ds}{dz} > 0 \tag{1.4.3}$$

es decir, que la entropía aumente con la altura.

A partir de este resultado encontramos con facilidad la condición que debe ser satisfecha por el gradiente de temperaturas dT/dz. Desarrollando la derivada ds/dz, tenemos

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} > 0$$

Finalmente, sustituyendo la expresión dada por la ecuación 1.3.3 en la página 11, $\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V}$, se obtine:

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.4.4}$$

Puede producirse convección si la temperatura disminuye al aumentar la altura y el valor del gradiente de temperaturas excede a $\frac{gT}{c_p V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Si consideramos el equilibrio de una columna de un gas perfecto, entonces

$$\left(\frac{T}{V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 1$$

y la condición correspondiente al equilibrio estables es, simplemente:

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p} \tag{1.4.5}$$

1.5. Ecuación de Bernoulli

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se simplifican mucho en el caso de un flujo estacionario. Un *flujo estacionario* es aquel en el que la velocidad es constante en el tiempo en cada punto ocupado del fluido. En otras palabras, $\mathbf{v}$ es función sólo de las coordenadas, de manera que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \iff \text{Fluido estacionario}$$

En esta situación la ecuación (1.2.10) se reduce a:

$$\frac{1}{2}\mathbf{grad}\left(v^2\right) - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\mathbf{v} = -\mathbf{grad}w \tag{1.5.1}$$

El siguiente paso es introducir el concepto de *línea de corriente*. En una línea de corriente la tangente a ellas indica la dirección de la velocidad en ese punto. Una línea de corriente queda determinada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \iff \text{Línea de corriente} \tag{1.5.2}$$

En el caso de flujo estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo, con lo que coinciden con las trayectorias de las partículas fluidas.

Si flujo estacionario $\Rightarrow$ líneas de corriente = trayectoria de las partículas

Si el flujo no es estacionario, la situación anterior no se verifica. Cuando el flujo no es estacionario, las tangentes a las líneas de corriente dan las direcciones de las velocidades de las partículas del fluido en diversos puntos del espacio en un instante dado, mientras que las tangentes a las trayectorias de las partículas indican las direcciones de las velocidades del fluido dadas en distintos instantes de tiempo.

La proyección del gradiente en cualquier dirección es la derivada en esa dirección. Formamos el producto escalar de la ecuación (1.5.1) con el vector unitario tangente a la línea de corriente en cada punto. A este vector unitario lo llamamos l. Así, la proyección de $\mathbf{grad}w$ es $\partial w/\partial l$. El vector $\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$, mientras que l es paralelo a $\mathbf{v}$, de manera que $\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\ ) = 0$. Así, a partir de la ecuación (1.5.1) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) = 0$$

De manera que $\frac{1}{2}v^2 + w$ es constante a lo largo de una línea de corriente:

$$\frac{1}{2}v^2 + w = \text{constante} \tag{1.5.3}$$

En general, la constante toma diferentes valores para las distintas líneas de corriente. La ecuación (1.5.3) se denomina *Ecuación de Bernoulli.*

Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, la aceleración g debida a la gravedad debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (1.5.1). Si suponemos que la dirección de la gravedad es en el eje z, entonces, el coseno del ángulo formado por las direcciones de g y l es igual a la derivada $-dz/dl$, de modo que la proyección de g sobre l es

$$-\mathbf{g}\frac{dz}{dl}$$

de manera que ahora:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2 + w + gz\right) = 0$$

Por lo que la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente de un flujo en un campo gravitatorio es

$$\frac{1}{2}v^2 + w + gz = \text{constante} \tag{1.5.4}$$

1.6. Flujo de energía

Ahora nos concentramos en estudiar cómo varía la energía del fluido contenido dentro de un elemento cualquiera de volumen de fluido. La energía de la unidad de volumen de fluido es

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon$$

energía cinética y energía interna, donde ϵ es la *energía interna por unidad de masa*. La variación de esta energía es

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right)$$

Para calcular esta expresión trataremos de forma independiente los dos términos. Empezando por el primero, podemos escribirlo como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) &= \frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\frac{\partial v^2}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho 2\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\end{aligned}$$

Y ahora, utilizando la ecuación de continuidad 1.1.4 en la página 7 y la ecuación de movimiento 1.2.3 en la página 8

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) &= \frac{1}{2}v^2\left(-div\left(\rho\mathbf{v}\right)\right) - \\ &\quad -\rho\mathbf{v}\left(\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\right)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p\right)\end{aligned}$$

El término $\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\mathbf{v}$ lo podemos transformar en la forma

$$\mathbf{grad}v^2 = \frac{dv^2}{d\mathbf{r}} = 2\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2$$

El término $\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}p$ lo transformamos usando la relación termodinámica

$$dw = Tds + \frac{1}{\rho}dp$$

Dividiendo por $d\mathbf{r}$, tenemos:

$$\frac{dw}{d\mathbf{r}} = T\frac{ds}{d\mathbf{r}} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{grad}p = \rho\mathbf{grad}w - \rho T\mathbf{grad}s$$

Si utilizamos estos dos resultados,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) &= -\frac{1}{2}v^2 div\left(\rho\mathbf{v}\right)- \\ &\quad -\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}v^2-\mathbf{v}\cdot\left(\rho\mathbf{grad}w-\rho T\mathbf{grad}s\right)= \\ &= -\frac{1}{2}v^2 div\left(\rho\mathbf{v}\right)- \\ &\quad -\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)+\rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}s\end{aligned}$$

A continuación nos ocupamos de la variación temporal de la energía interna de la unidad de volumen de fluido, $\partial\left(\rho\epsilon\right)/\partial t$. Para ello, empezamos utilizando la relación termodinámica:

$$d\epsilon = Tds - pdV$$

De manera

$$d\left(\rho\epsilon\right)=\epsilon d\rho+\rho d\epsilon = w\,d\rho+\rho Tds-\rho pdV$$

(però no hi ha variació de volum)

$$\frac{\partial\left(\rho\epsilon\right)}{\partial t}=w\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho T\frac{\partial s}{\partial t}$$

Ahora utilizamos la ecuación de continuidad (1.1.4 en la página 7) y el hecho de que el fluido es adiabático (1.2.6 en la página 9) tenemos

$$\frac{\partial\left(\rho\epsilon\right)}{\partial t}=w\left(-div\left(\rho\mathbf{v}\right)\right)+\rho T\left(-\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(s\right)\right)$$

Al final del día, combinando los dos resultados que hemos encontrado por separado, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right) &= -\frac{1}{2}v^2 div\left(\rho\mathbf{v}\right)-\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)+\rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}s- \\ &\quad -w\,div\left(\rho\mathbf{v}\right)-\rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(s\right)= \\ &= -\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)div\left(\rho\mathbf{v}\right)-\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\end{aligned}$$

O sea, que finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-div\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right]\tag{1.6.1}$$

Para determinar el significado de esta ecuación, la integramos respecto a un determinado volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)dV=-\int div\left(\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right)dV$$

Convertimos la integral de volumen del segundo término en una integral de superficie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)dV=-\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\cdot d\mathbf{f} \tag{1.6.2}$$

El primer miembro es la variación por unidad de tiempo de la energía del fluido en un volumen determinado. El segundo miembro es la cantidad de energía que fluye hacia el exterior del volumen por unidad de tiempo. Por tanto, la expresión

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\quad \text{Densidad de Flujo de Energía} \tag{1.6.3}$$

se denomina *vector densidad de flujo de energía*. Su módulo es la cantidad de energía que pasa por unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular a la velocidad.

La expresión (1.6.3) muestra que cualquier unidad de masa del fluido lleva consigo en su movimiento una cantidad de energía $w+\frac{1}{2}v^2$. El hecho de que en la fórmula aparezca la entalpía w y no la energía ϵ tiene un significado físico sencillo. Haciendo $w=\epsilon+p/\rho$ podemos escribir el flujo de energía a través de una superficie cerrada en la forma:

$$-\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\epsilon\right)\cdot d\mathbf{f}-\oint p\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}$$

El primer término es la energía (cinética más interna) transportada por la masa de fluido a través de la superficie por unidad de tiempo. El segundo término es el trabajo realizado por la fuerza de presión sobre el fluido dentro de la superficie.

1.7. Flujo de impulso o cantidad de movimiento

Vamos a seguir un razonamiento similar al utilizado en la sección anterior para determinar el flujo de cantidad de movimiento por unidad de volumen.

La cantidad de movimiento por unidad de volumen es $\rho\mathbf{v}$, de manera que su variación temporal será $\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}$.

En lo que resta de sección utilizaremos notación tensorial para escribir las ecuaciones. [3]

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}=v_i\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}$$

[3] Los sufijos $i,j,\ldots$ toman valores $1,2,3$, correspondientes a las componentes x,y,z.
Las sumas del tipo $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=\sum_i A_iB_i=A_iB_i$ se escriben omitiendo el signo $\sum$, sobreentendiéndolo cuando aparecen índices repetidos.

Para el primer término, utilizamos la ecuación de continuidad, con la divergencia escrita en forma tensorial

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}$$

De manera que

$$\frac{\partial \left(\rho v_i\right)}{\partial t} = -v_i \frac{\partial \left(\rho v_k\right)}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Para el segundo término en el miembro de la derecha, utilizamos la ecuación de Euler, también en forma tensorial:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial}{x_k} v_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Con lo que tenemos

$$\frac{\partial \left(\rho v_i\right)}{\partial t} = -v_i \frac{\partial \left(\rho v_k\right)}{\partial x_k} - \rho v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Pero los dos primeros términos son la derivada del producto $\rho v_i v_k$, así que

$$\frac{\partial \left(\rho v_i\right)}{\partial t} = -\frac{\partial \left(\rho v_i v_k\right)}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Reescribimos

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(p \delta_{ik}\right)$$

De manera que al final

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v_i\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(p \delta_{ik} + \rho v_i v_k\right)$$

con lo que podemos definir el tensor simétrico Π_{ik} y

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho v_i\right) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.7.1}$$

con Π_{ik}

$$\Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{1.7.2}$$

Para obtener el significado físico del tensor Π_{ik} integramos la ecuación (1.7.1) respecto a un volumen cualquiera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV$$

El segundo miembro lo convertimos en una integral de superficie aplicando la fórmula de Green

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = -\oint \Pi_{ik} df_k \tag{1.7.3}$$

El primer miembro es la variación respecto al tiempo de la componente i del momento contenido en el volumen considerado. La integral del segundo miembro es la cantidad de impulso que fluye hacia fuera a través de la superficie por unidad de tiempo. Entonces $\Pi_{ij}df_j$ es la componente i del impulso que fluye a través del elemento de superficie $d\mathbf{f}$. Si escribimos $df_k = n_k df$, donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario (que apunta hacia fuera) normal a la superficie, entonces $\Pi_{ij}n_j$ es el flujo de la componente i del impulso a través de la superfice unidad.

Además, de acuerdo con (1.7.2)

$$\Pi_{ij}n_j = pn_i + \rho v_i v_j n_j$$

que de forma vectorial se escribe

$$p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) \tag{1.7.4}$$

Así, Π_{ij} es la componente i de la cantidad de impulso que fluye en la unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular al eje x_j. El tensor Π_{ij} se denomina *tensor densidad de flujo de impulso*.

Si el flujo de energía -que es un escalar- queda determinado por un vector, el flujo de impulso -que es un vector- queda determinado por un tensor de orden dos.

El vector de la expresión (1.7.4) da el flujo de impulso en la dirección de $\mathbf{n}$, es decir, a través de una superficie perpendicular a $\mathbf{n}$. Si tomamos $\mathbf{n}$ paralelo a la velocidad del fluido, sólo la componente longitudinal del impulso se ve transportada en dicha dirección, y su densidad de flujo es $p + \rho v^2$. En una dirección perpendicular a la velocidad sólo se transporta la componente transversal (relativa a $\mathbf{v}$) del impulso, siendo su densidad de flujo exactamente p.

1.8. Conservación de la circulación

La integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}$$

extendida a lo largo de un contorno cerrado se denomina *circulación de la velocidad* a lo largo de ese contorno.

Supongamos que tenemos un *contorno fluido*, es decir, un contorno cerrado formado por partículas del fluido. Al pasar el tiempo, las partículas se mueven (y el contorno con ellas). Queremos averiguar qué pasa con la circulación de la velocidad, es decir, calcularemos

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}$$

Calculamos la derivada total porque al pasar el tiempo, las partículas del fluido se mueven en el espacio y cambia su velocidad (no tenemos un contorno fijo en el espacio).

Para evitar confusiones, temporalmente designamos la derivada respecto a las coordenadas espaciales con el símbolo δ. También notamos que $d\mathbf{l}$ puede escribirse como la diferencia de dos radios vectores que apuntan a los extremos de $d\mathbf{l} = d\mathbf{r_2} - d\mathbf{r_1} = \delta\mathbf{r}$, de manera que escribimos

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r}$$

Ahora, al derivar esta expresión, tenemos en cuenta que no sólo varía la velocidad de las partículas del contorno fluido, sino también la posición de las mismas (es decir, que el contorno cambia). Por ello, derivamos $\mathbf{v}$ y $\delta\mathbf{r}$

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}$$

Nos concentramos en el segundo término del miembro de la derecha. La velocidad es precisamente la derivada temporal de $d\mathbf{r}$

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v} = \delta\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Con lo que

$$\oint \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \oint \delta\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Pero la derivada sobre un contorno cerrado de una diferencia total es cero, por lo que este segundo término se anula.

Así que la variación de la circulación, de momento, queda:

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r}$$

El siguiente paso es substituir la aceleración $d\mathbf{v}/dt$ por la expresión de la ecuación de Euler 1.2.9 en la página 10:

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta\mathbf{r} = -\oint \mathbf{grad}w \cdot \delta\mathbf{r}$$

Pero si ahora utilizamos la fórmula de Stokes[4] entonces

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{r} = -\oint \mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}w\right) \cdot d\mathbf{f}$$

---

[4] $\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

Pero resulta que $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}w) \equiv 0$ [5], de manera que finalmente

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r} = 0$$

O lo que es lo mismo

$$\oint \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r} = \text{constante} \tag{1.8.1}$$

Es decir, para un fluido ideal, la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno fluido cerrado es constante en el tiempo. Este resultado se conoce como *Teorema de Kelvin* o *Ley de conservación de la circulación*.

Como para obtener el resultado hemos utilizado la ecuación de Euler (1.2.9 en la página 10) y en ella interviene la hipótesis de que el flujo es isoentrópico, este resultado no es válido para fluidos que no sean isoentrópicos.

1.9. Flujo potencial

A partir de la ley de conservación de la circulación podemos obtener un resultado importante. Primero, suponemos que el flujo es estacionario, es decir, que la velocidad es constante en todo punto del fluido ($\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$). Consideramos una línea de corriente de la cual sabemos que la vorticidad $\omega \equiv \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ es cero en un punto determinado. Dibujamos un contorno cerrado arbitrario infinitamente pequeño que rodee la línea de corriente en ese punto. Según el teorema de Stokes, la circulación de la velocidad será:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \text{constante} = \cdots \\
\int_S \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} &= \oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} \text{ Teorema de Stokes} \\
\cdots &= \int_S (\mathbf{rot}\,\mathbf{v})\cdot d\mathbf{f}
\end{aligned}$$

donde $d\mathbf{f}$ es el elemento de área encerrado por el contorno.

Este contorno, como hemos indicado antes, está en un punto donde $\omega = 0 = \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$, de manera que la circulación

$$\Gamma = \text{constante} = 0$$

Al pasar el tiempo, el contorno se mueve con el fluido, pero siempre permanece infinitamente pequeño y rodeando la misma línea de corriente. Como la circulación debe permanecer constante, es decir, 0, entonces ω debe ser cero en todos los puntos de la línea de corriente.

[5]Este resultado también es válido para un fluido ideal en un campo gravitatorio, ya que $\mathbf{rot}\mathbf{g} \equiv 0$.

$$\text{(Flujo estacionario) Si } \omega = 0 \text{ en } \mathbf{r}_0 \Rightarrow \omega = 0\, \forall \mathbf{r} \in \text{línea de corriente}$$

Si el flujo **no** es estacionario, el resultado sigue siendo válido, pero considerando trayectorias de partículas, en vez de líneas de corriente (ya que en flujos no estacionarios las trayectorias y las líneas de corriente no coinciden).

$$\text{(Flujo NO estacionario) Si } \omega = 0 \text{ en } \mathbf{r}_0 \Rightarrow \omega = 0\, \forall \mathbf{r} \in \text{trayectoria}$$

Consideramos que un flujo estacionario está pasando alrededor de un cuerpo determinado. El flujo incidencte suponemos que es uniforme en el infinito, es decir, que $\mathbf{v}$ =constante. Entonces, $\omega = \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$ en **todas** las líneas de corriente (en el infinito). Pero entonces $\omega = 0$ a lo largo de la totalidad cada línea de corriente, es decir, en todo el espacio.

Un flujo para el que $\omega = 0$ en todo el espacio se denomina *flujo potencial* o *flujo irrotacional*. Un flujo para el que $\omega \neq 0$ en todos los puntos se denomina *flujo rotacional*.

$$\begin{aligned} \omega = 0\, \forall \mathbf{r} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Flujo potencial o irrotacional} \\ \omega \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Flujo rotacional} \end{aligned}$$

Llegamos a la conclusión de que, si junto a un cuerpo cualquiera pasa un flujo estacionario y uniforme, en el infinito debe ser un flujo potencial. Podemos llegar al mismo resultado a partir de la ley de conservación de la circulación de la velocidad. Supongamos que en un instante dado tenemos un flujo potencial en todo el volumen del fluido. Entonces, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno cualquiera del fluido es nula. Según el Teorema de Kelvin o conservación de la circulación de la velocidad (1.8.1 en la página anterior) esta conclusión será válida en cualquier instante futuro. Es decir, si tenemos un flujo potencial en un instante dado, entonces lo será en todo momento. En particular, cualquier flujo en el que el fluido esté inicialmente en reposo debe ser un fluido potencial. Esto está de acuerdo con el hecho de que si $\omega = \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$, la ecuación de Euler 1.2.11 en la página 10 se satisface idénticamente.

El problema es que todos los estos resultados tienen una validez limitada. Estrictamente hablando, la prueba de que $\omega = 0$ a lo largo de una línea de corriente es inválida para una línea que esté en la superficie de un sólido junto al que circula un flujo, ya que la presencia de esta superficie imposibilita dibujar un contorno cerrado que rodee la línea de corriente.

Las ecuaciones de movimiento de un fluido ideal admiten soluciones en las que se produce una *separación* en la superficie del cuerpo: las líneas de corriente que ha seguido la superficie del cuerpo durante cierta distancia empiezan a separarse de ella y continuan dentro del fluido. El esquema del flujo resultante está caracterizado por la presencia de una superficie de discontinuidad tangencial que sale del cuerpo. En esta superficie la velocidad (que es tangencial en todas partes en las dos superficies) tiene una discontinuidad, es decir, en esta superficie una capa de fluido se *desliza* sobre otra. La figura 1 muestra una superficie de discontinuidad que separa el fluido que está moviéndose en una región de otra con fluido estacionario detrás del cuerpo. Desde el punto de vista matemático, la discontinuidad en la componente tangencial corresponde a una superficie en la cual la velocidad es nula. Cuando se incluyen dichos flujos discontinuos, la solución de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal no es única: además del flujo continuo admiten también un número infinito de soluciones que poseen superficies de discontinuidad tangencial partiendo desde cualquier línea prescrita en la superficie del cuerpo por el cual está circulando el flujo en cuestión. Sin embargo, estas soluciones discontinuas no tienen significado físico, pues son inestables y el flujo se convertiría en turbulento.

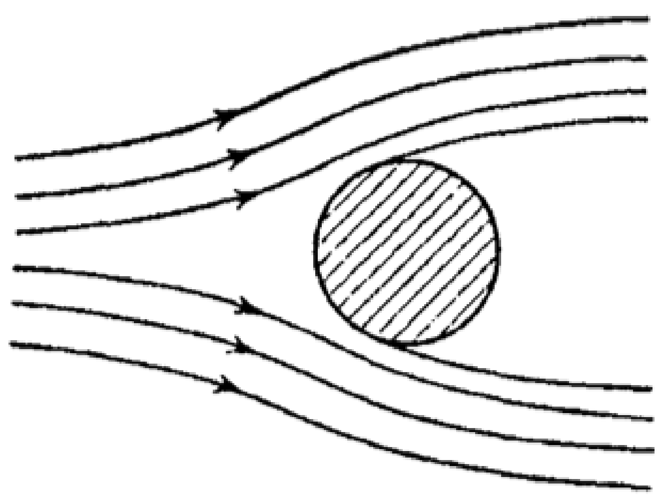

FIGURA 2. Discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad.

El problema físico real del flujo que pasa a lo largo de los cuerpos tiene una solución única. El problema es que los fluidos ideales no existen; cualquier fluido tiene una cierta viscosidad, aunque sea muy pequeña. Esta viscosidad, aunque no tenga efecto sobre el movimiento de la mayor parte del fluido, sus efectos sobre una capa delgada de fluido junto al cuerpo son importantes. Las propiedades del flujo en esta *capa límite* deciden la selección de una de las infinitas soluciones de las ecuaciones de movimento correspondientes a un fluido ideal. Así, en el caso general de un flujo que rodea a un cuerpo de forma arbitraria, deben rechazarse las soluciones de separación; si se produjese la separación daría como resultado la turbulencia.

El estudio de las soluciones de las ecuaciones de movimiento para un flujo potencial estacionario continuo que circula junto a un cuerpo de forma arbitraria sólo es interesante para cuerpos de *formas especiales* (*aerodinámicos*). En el resto de casos, el flujo real apenas tiene relación con el flujo potencial.

Para las formas aerodinámicas el flujo real y el potencial son muy parecidos, excepto en una capa delgada de fluido en la superficie del cuerpo y en una *estela* relativamente estrecha detrás del mismo.

Otro caso importante de flujo potencial se presenta cuando existen oscilaciones pequeñas de un cuerpo inmerso en un fluido. Puede demostrarse que si la amplitud a de las oscilaciones son pequeñas en comparación con la dimensión l del cuerpo ($a \ll l$), el flujo que circula junto al cuerpo será un flujo potencial.

Para demostrarlo estimaremos el orden de magnitud de los diversos términos de la ecuación de Euler.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v} = -\mathbf{grad} w$$

La velocidad $\mathbf{v}$ varía apreciablemente (en una cantidad del mismo orden que la velocidad $\mathbf{u}$ del cuerpo oscilante) a lo largo de una distancia del orden de la dimensión l del cuerpo. De aquí que las derivadas de $\mathbf{v}$ respecto a las coordenadas son del orden de u/l. El orden de magnitud de la propia $\mathbf{v}$ (a distancias relativamente pequeños del cuerpo) queda determinado por el valor de $\mathbf{u}$. Así, tenemos que $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v} \sim \frac{u^2}{l}$. La derivada $\partial \mathbf{v}/\partial t$ es del orden de ωu, siendo ω la frecuencia de las oscilaciones. Como $\omega \sim u/a$, tenemos que $\partial \mathbf{v}/\partial t \sim u^2/a$. A partir de la desigualdad $a \ll l$ tenemos que $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v}$ es pequeño comparado con $\partial \mathbf{v}/\partial t$ y puede despreciarse, de modo que la ecuación de movimiento del fluido se reduce a $\partial \mathbf{v}/\partial t = -\mathbf{grad} w$. Tomando el rotacional en ambos miembros, obtenemos $\partial \left(\mathbf{rot}\, \mathbf{v}\right)/\partial t = 0$ y por tanto $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ =constante. Sin embargo, en el movimiento oscilante, el promedio temporal de la velocidad es cero, y por tanto $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ =constante implica que $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$. Por tanto, el movimiento de un fluido que realiza pequeñas oscilaciones es un flujo potencial en primera aproximación.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} &= -\mathbf{grad}w \\
\mathbf{u} &= \text{velocidad del cuerpo oscilante} \\
l &= \text{dimensiones del cuerpo} \\
a &= \text{amplitud de las oscilaciones} \\
\omega &= \text{frecuencia de las oscilaciones} \\
&\downarrow \text{(Trabajando con los órdenes de magnitud)} \\
\mathbf{v} &\sim \mathbf{u} \\
\mathbf{grad}\,\mathbf{v} &\sim \frac{\mathbf{u}}{l} \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &\sim \omega\mathbf{u} \\
\omega &\sim \frac{\mathbf{u}}{a} \\
&\downarrow \\
\frac{u^2}{a} + \frac{u^2}{l} &\simeq -\mathbf{grad}w \\
&\downarrow (a \ll l) \\
\frac{u^2}{a} &\simeq -\mathbf{grad}w \\
&\downarrow \text{(Volviendo a las ecuaciones)} \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &\simeq -\mathbf{grad}w \\
&\downarrow \text{(Tomamos rotacionales)} \\
\frac{\partial \mathbf{rot}\,\mathbf{v}}{\partial t} &\simeq \mathbf{rot}\,(-\mathbf{grad}w) = 0 \\
\mathbf{rot}\,\mathbf{v} &\simeq \text{constante}
\end{aligned}
$$

A continuación obtendremos algunas propiedades del flujo potencial.

En la deducción de la ley de conservación de la circulación de la velocidad utlizamos la hipótesis de que el flujo era isoentrópico.

Si el flujo no es isoentrópico, la ley de conservación no se verifica, de manera que aunque tengamos un flujo potencial en un instante determinado, la voricidad no será nula en los instantes siguientes. Es decir, que sólo el flujo isoentrópico puede ser potencial.

Utilizando el teorema de Stokes:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{rot}\,\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

En el flujo potencial, la circulación de la velocidad alrededor de cualquier contorno cerrado es nula:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{1.9.1}$$

De esto se deduce que no pueden existir líneas de corriente cerradas en el flujo potencial. Como la dirección de una línea de corriente es en todos los puntos la dirección de la velocidad, la circulación a lo largo de dicho línea no puede ser nunca nula.

En el movimiento rotacional la circulación de la velocidad es, en general, no nula. En este caso pueden existir líneas de corriente cerradas, aunque el hecho de que haya líneas de corriente cerradas **no** es una propiedad del movimiento rotacional.

Como cualquier campo vectorial que tenga un rotacional igual a cero, la velocidad en el flujo potencial puede expresarse como el gradiente de un escalar.

$$\text{Flujo potencial} \to \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \to \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,\mathbf{v}) = 0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi \tag{1.9.2}$$

A este escalar se le denomina *potencial de velocidad* ϕ.

Si escribimos la ecuación de Euler en la forma expresada en 1.2.10 en la página 10

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}w$$

y sustituyendo $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi$ tenemos

$$\mathbf{grad}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + w\right) = 0$$

de donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + w = f(t) \tag{1.9.3}$$

con $f(t)$ una función arbitraria del tiempo. Esta ecuación es una primera integral de las ecuaciones del flujo potencial. La función $f(t)$ de la ecuación (1.9.3) puede ponerse igual a cero sin pérdidad de generalidad. Como la velocidad es la derivada espacial de ϕ, podemos sumar a ϕ cualquier función del tiempo, cambiando ϕ por $\phi + \int f(t)\,dt$, seguimos obteniendo cero en el segundo miembro de (1.9.3).

En el caso del flujo estacionario tenemos (suponiendo que el potencial ϕ es independiente del tiempo) $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, $f(t)$ =constante y (1.9.3) se transforma en la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}v^2 + w = \text{constante} \tag{1.9.4}$$

Existe una diferencia importante entre la ecucación de Bernoulli para el flujo potencial y la correspondiente para un flujo general (no potencial). En el caso general, la constante es diferente para las distintas líneas de corriente, mientras que en el flujo potencial es la misma constante para todo el fluido.

$$\begin{aligned} \text{Flujo general} \quad &\rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 + w = c_i \quad \text{(una } c_i \text{para cada línea de corriente)} \\ \text{Flujo potencial} \quad &\rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 + w = C \quad (\forall \text{ líneas de de corriente del fluido}) \end{aligned}$$

Ésto resalta la importancia de la ecuación de Bernoulli en el estudio del flujo potencial.

1.10. Fluidos incompresibles

En un gran número de casos el flujo de fluidos (y gases) se puede suponer que la densidad es invariable en el tiempo (a lo largo del movimiento) y en el espacio (en todo el fluido). Es decir, no existe compresión o dilatación apreciable del fluido. En este caso hablamos de un *fluido incompresible*.

$$\text{Fluido incompresible} \iff \rho = \text{constante}$$

En este caso la ecuación de Euler no varía de forma, pero podemos incluir ρ en el operador gradiente de la ecuación 1.2.4 en la página 8.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v} = -\mathbf{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{g} \tag{1.10.1}$$

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible se simplifica

$$div\, \mathbf{v} = 0 \tag{1.10.2}$$

Como ρ deja de ser una función desconocida, el sistema fundamental de ecuaciones de la dinámica de fluidos incompresible puede considerarse como un conjunto de ecuaciones en el que sólo interviene la velocidad. Por ejemplo, la ecuación de continuidad (1.10.2) y la ecuación de Euler en función sólo de la velocidad (ecuación 1.2.11 en la página 10)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\, \mathbf{v}) = \mathbf{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{v}) \tag{1.10.3}$$

La ecuación de Bernoulli para un fluido incompresible también se simplifica. La ecuación (1.10.1) difiere de la ecuación general 1.2.9 en la página 10 en que hay que escribir $\mathbf{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right)$ en lugar de $\mathbf{grad}w$. Así podemos escribir directamente la ecuación de Bernoulli cambiando la entalpía w por $\frac{p}{\rho}$.

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+gz=\text{constante} \tag{1.10.4}$$

En el caso de un fluido incompresible, podemos escribir $\frac{p}{\rho}$ en lugar de w en la expresión (1.6.3) que nos da el flujo de energía, lo que resulta en

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}\right) \tag{1.10.5}$$

A partir de la relación termodinámica sabemos que $d\epsilon = Tds - pdV$ corresponde a la variación de la energía interna. Para s =constante y $V = \frac{1}{\rho}$ =constante resulta $d\epsilon = 0$, es decir, ϵ =constante. Como los términos constantes en la energía no tienen importancia, podemos omitir ϵ en $w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$.

En el caso de un flujo potencial de un fluido incompresible, las ecuaciones se simplifican todavía más. La ecuación (1.10.3) se verifica idénticamente, pues en el flujo potencial $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$. La ecuación de continuidad (1.10.2), al sustituir $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi$ se transforma en

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0 \tag{1.10.6}$$

es decir, en la ecuación de Laplace para el potencial ϕ. Esta ecuación debe complementarse con las condiciones límite en la superficie donde el fluido se encuentra con cuerpos sólidos. En las superficies sólidas fijas la componente de la velocidad del fluido v_n normal a la superficie debe ser nula, mientras que en superficies móviles debe ser igual a la componente normal de la velocidad de la superficie (que es una función del tiempo). Pero la velocidad v_n es la derivada normal del potencial ϕ, $v_n = \frac{\partial\phi}{\partial n}$. Entonces, las condiciones límite generales son que $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ es una función determinada de las coordenadas y el tiempo en los límites del fluido.

En el flujo potencial la velocidad está relacionada con la presión mediante la ecuación (1.9.3). En un fluido incompresible podemos sustituir w por $\frac{p}{\rho}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}=f(t) \tag{1.10.7}$$

Ahora obtenemos otra importante propiedad del flujo potencial de un fluido incompresible. Suponemos que un cuerpo sólido se está moviendo a través de un fluido. Si el resultado es un flujo potencial, en un instante cualquiera depende sólo de la velocidad del cuerpo móvil en dicho instante y no, por ejemplo, de su aceleración. La ecuación de Laplace (1.10.6) no contiene explícitamente el tiempo, el cual entra en la solución sólo a través de las condiciones límite y éstas sólo contienen la velocidad del cuerpo móvil.

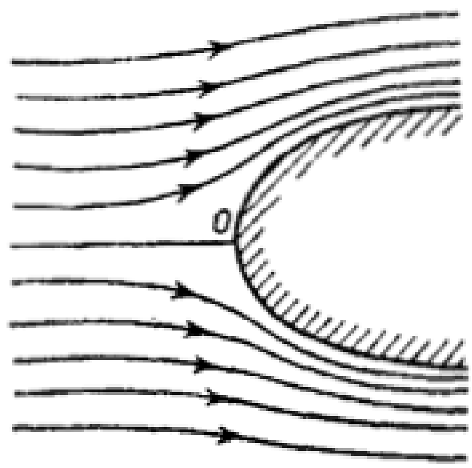

FIGURA 3. Punto de estancamiento

A partir de la ecuación de Bernoulli $\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}$ =constante vemos que el flujo estacionario de un fluido incompresible (que no está en un campo gravitatorio) la presión más alta se presenta en puntos donde la velocidad es nula. Este punto normalmente se presenta en la superficie de un cuerpo a lo largo del cual se está moviendo el fluido (el punto O en la figura (3)) y se denomina *punto de estancamiento*. Si $\mathbf{u}$ es la velocidad de la corriente incidente (es decir, la velocidad del fluido en el infinito) y p_0 es la presión en el infinito, la presión en el punto de estancamiento es:

$$p_{max} = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2 \tag{1.10.8}$$

Si la distribución de velocidades en un fluido móvil depende sólo de dos coordenadas, por ejemplo x e y, y la velocidad es en todas partes paralela al plano xy entonces se dice que el *flujo es bidimensional* o *flujo plano.*

Para resolver problemas de flujo bidimensional a veces es conveniente expresar la velocidad en función de lo que se denomina *función de corriente* ψ. A partir de la ecuación de continuidad $div\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ vemos que las ecuaciones de la velocidad pueden escribirse como derivadas de cierta función $\psi(x,y)$ denominada *función de corriente*:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.10.9}$$

La ecuación de continuidad, así, se satisface automáticamente. Para resolver el problema del flujo plano ahora vemos qué condiciones debe satisfacer ψ introduciendo (1.10.9) en la ecuación de Euler (1.10.3)[6]

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi = 0 \tag{1.10.10}$$

Si conocemos la función de corriente podemos determinar inmediatamente la forma de las líneas de corriente en el caso del flujo estacionario. La ecuación diferencial de las líneas de corriente (en el flujo bidimensional) es

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \rightarrow v_y dx - v_x dy = 0$$

Esta ecuación expresa el hecho de que la dirección de la tangente a una línea de corriente es la dirección de la velocidad. Sustituyendo la velocidad en función de la función de corriente (1.10.9) tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = d\psi = 0$$

de donde $\psi = constante$. Es decir, las líneas de corriente son la familia de curvas obtenida haciendo la función de corriente $\psi(x,y)$ igual a una constante arbitraria.

Si dibujamos una curva entre dos puntos A y B en el plano xy, el flujo de masa Q a través de esta curva viene dada por la diferencia de los valores de la función de corriente en esos dos puntos, independientemente de la forma de la curva. Porque si v_n es la componente de la velocidad normal a la curva en un puntu cualquiera, tenemos

$$Q = \rho \oint_A^B v_n dl = \rho \oint_A^B (-v_y dx + v_x dy) = \rho \oint_A^B d\psi$$

de manera que

$$Q = \rho(\psi_B - \psi_A) \tag{1.10.11}$$

[6]A continuación obtenemos el primer término de la ecuación de Euler para la función de corriente $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi\right) = \frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi$$

El resto de términos se obtienen del mismo modo.

Existen potentes métodos para resolver problemas de un flujo potencial bidimensional en el caso de un fluido incompresible que rodea a cuerpos de diversos perfiles en los que interviene la aplicación de la teoría de funciones de una variable compleja. La base de los métodos es la siguiente.

La función potencial y la corriente están relacionadas con las componentes de la velocidad por

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Estas relaciones entre las derivadas de ϕ y ψ son, matemáticamente, las mismas que las condiciones de Cauchy-Riemann para que una expresión compleja

$$w = \phi + i\psi \tag{1.10.12}$$

sea una función analítica del argumento complejo $z = x + iy$. Esto significa que la función $w(z)$ tiene en cada punto una derivada bien definida

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \phi}{\partial y} = v_x - iv_y \tag{1.10.13}$$

La función w se denomina *potencial complejo* y $\frac{dw}{dz}$ se llama *velocidad compleja*. El módulo y el argumento de esta última dan el módulo v de la velocidad y el ángulo θ formado por la dirección de la velocidad con el eje x:

$$\frac{dw}{dx} = ve^{-i\theta} \tag{1.10.14}$$

En una superficie sólida, alrededor de la cual tiene lugar el flujo, la velocidad debe estar dirigida sobre la tangente. Es decir, el contorno del perfil de la superficie debe ser una línea de corriente. O lo que es lo mismo, $\psi = constante$ a lo largo de la misma. La constante puede considerarse como cero y entonces el problema del fluo que rodea un contorno determinado se reduce a la determinación de una función analítica $w(z)$ que tome valores reales en el contorno. El enunciado del problema es más complicado cuando el fluido tiene una superficie libre.

La integral de una función analítica a lo largo de cualquier contorno cerrado C es $2\pi i$ veces la suma de los residuos de la función en sus polos simples en el interior de C.

$$\oint w' dz = 2\pi i \sum_k A_k$$

donde A_k son los residuos de la velocidad compleja. También tenemos

$$\begin{aligned} \oint w' dz &= \oint (v_x - iv_y)(dx + idy) = \\ &= \oint (v_x dx + v_y dy) + i \oint (v_x dy - v_y dx) \end{aligned}$$

La parte real de esta expresión es precisamente la circulación de la velocidad Γ a lo largo del contorno C. La parte imaginaria, multiplicada por ρ es el flujo de masa que atraviesa C. Si no existen fuentes de fluido dentro del contorno, este flujo es cero y por tanto

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k \tag{1.10.15}$$

siendo en este caso todos los residuos A_k imaginarios puros.

Para acabar, consideramos **en qué condiciones se puede considerar un fluido como incompresible**. Cuando la presión varía adiabáticamente en Δp, la densidad varía en $\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \Delta p$. Sin embargo, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, Δp es del orden de ρv^2 en flujo estacionario. De manera que $\Delta\rho \sim \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \rho v^2$. Más adelante se demostrará que la derivada $\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s$ es el cuadrado de la velocidad de sonido c en el fluido, de modo que $\Delta\rho \sim \frac{\rho v^2}{c^2}$. El fluido puede considerarse incompresible si $\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$.

$$\text{Fluido incompresible} \iff \frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$$

Una condición necesaria para que se cumpla ésto es que la velocidad del fluido sea pequeña comparada con la del sonido:

$$\text{Fluido incompresible (flujo estacionario)} \iff v \ll c \tag{1.10.16}$$

La condición (1.10.16) sólo es suficiente en flujo estacionario.

En un flujo no estacionario, debe cumplirse, además, otra condición. Sean τ y l un tiempo y una longitud del orden de los tiempos y distancias en los que la velocidad del fluido sufre una variación significativa. Si son comparables los términos $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$ y $\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p$ en la ecuación de Euler, encontramos, en términos de órdenes de magnitud, $\frac{v}{\tau} \sim \frac{\Delta p}{l\rho}$ o $\Delta p \sim \frac{l\rho v}{\tau}$, y la variación correspondiente en ρ es $\Delta\rho \sim \frac{l\rho v}{\tau c^2}$. Comparando a continuación los términos $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ y $\rho\, div\mathbf{v}$ en la ecuación de continuidad, vemos que puede despreciarse la derivada $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ (es decir, puede suponerse que ρ es constante) si $\frac{\Delta\rho}{\tau} \ll \frac{\rho v}{l}$, o sea

$$\text{Fluido incompresible (flujo no estacionario)} \iff \tau \gg \frac{l}{c} \tag{1.10.17}$$

Si se satisfacen simultáneamente las condiones (1.10.16) y (1.10.17) puede considerarse que un fluido es incompresible.

La condición (1.10.17) tiene un significado evidente: el tiempo $\frac{l}{c}$ que emplea una señal sonora en recorrer la distancia l debe ser pequeño en comparación con el tiempo τ durante el cual varía apreciablemente el flujo, de manera que la propagación de las interacciones en el fluido pueda considerarse como instantánea.

1.11. Fuerza de arrastre en un flujo potencial que rodea un cuerpo

Ahora consideramos el problema del flujo potencial de un fluido ideal incompresible que rodea un cuerpo sólido. Esto es equivalente a pensar que el fluido está en reposo y es el cuerpo el que se mueve a través de él. Lo único que tenemos que hacer para pasar de un problema a otro es cambiar a un sistema de coordenadas en las cuales el fluido está en reposo en el infinito. De hecho, a partir de ahora **siempre consideraremos que es el cuerpo el que se está moviendo a través del fluido**.

Vamos a calcular la ***distribución de velocidades del fluido a una distancia grande del cuerpo*** móvil. El flujo potencial de un fluido incompresible satisface la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$. Las soluciones que buscamos tienen que anularse en en infinito, pues allí el fluido está en reposo. Consideraremos que el origen está en algún lugar del interior del cuerpo móvil, por lo que el sistema de coordenadas se mueve con el cuerpo, aunque consideraremos la distribución de velocidades del fluido en un instante en particular. Sabemos que la ecuación de Laplace tiene una solución $\frac{1}{r}$ donde r es la distancia respecto al origen. También son soluciones el gradiente de $1/r$ y todas las derivadas espaciales de orden superior. Todas ellas y sus combinaciones lineales son soluciones que se anulan en el infinito. Por tanto, la forma general de la solución que buscamos para la ecuación de Laplace a gran distancia del cuerpo es

$$\phi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}\frac{1}{r} + \cdots$$

en donde a y $\mathbf{A}$ son independientes de las coordenadas.

Vamos a ver que la constante a debe ser nula. Para el potencial $\phi = -a/r$ se obtiene una velocidad

$$\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\left(\frac{a}{r}\right) = a\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Calculamos el flujo de masa a través de alguna superficie cerrada, como por ejemplo una esfera de radio R. En esta superficie, la velocidad es constante e igual a $\frac{a}{R^2}$. El flujo total es

$$\rho\frac{a}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi\rho a$$

Pero el flujo de un fluido incompresible a través de cualquier superficie cerrada debe ser nulo, por lo que llegamos a la conclusión de que $a = 0$.

Entonces, ϕ contiene términos de orden $\frac{1}{r^2}$ y superiores. Como estamos interesados en la velocidad a grandes distancias del cuerpo, podemos despreciar los términos de orden superior y quedarnos con

$$\phi = \mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{n}}{r^2} \tag{1.11.1}$$

y la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{grad}\frac{1}{r} = \frac{3\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}-\mathbf{A}}{r^3} \tag{1.11.2}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$. Vemos que a distancias grandes la velocidad disminuye como $1/r^3$. El vector $\mathbf{A}$ depende de la forma real y de la velocidad del cuerpo y sólo puede determinarse resolviendo por completo la ecuación $\Delta\phi = 0$ a todas las distancias, teniendo en cuenta las condiciones límites apropiadas en la superficie del cuerpo móvil.

El vector $\mathbf{A}$ que aparece en (1.11.2) está relacionado de un modo definido con el impulso y la energía totales del fluido en su movimiento alrededor del cuerpo. La energía cinética del fluido (***la energía interna de un fluido incompresible es constante***) es $E = \frac{1}{2}\int\rho v^2 dV$, integrando en todo el espacio exterior al cuerpo. Consideramos la región de integración una esfera de radio R grande, cuyo centro está en el origen y hacemos tender $R\to\infty$ después de integrar. Vamos a modificar la integral:

$$\int v^2\,dV = \int dV\left(v^2+u^2-u^2\right) = \int u^2dV + \int(\mathbf{v}+\mathbf{u})\,(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dV$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad del cuerpo. Como $\mathbf{u}$ es independiente de las coordenadas, la primera integral resulta ser $\int u^2dV = u^2\,(V-V_0)$, donde V_0 es el volumen del cuerpo. En la segunda integral, escribimos $\mathbf{v}+\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})$.

$$(\mathbf{v}+\mathbf{u})\,(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \mathbf{grad}\,(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\,(\phi)+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r} = \cdots$$

Ahora utilizamos la identidad vectorial

$$div\,(f\mathbf{A}) = (\mathbf{grad}f)\cdot\mathbf{A} + f\,(div\mathbf{A})$$

para convertir cada uno de los términos anteriores en

$$\begin{aligned}\cdots &= div\left(\mathbf{v}\left(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}\right)\right)-\left(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}\right)div\mathbf{v}+\\ &+ div\left(-\mathbf{u}\left(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}\right)\right)-\left(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}\right)div(-\mathbf{u})=\cdots\end{aligned}$$

Y ahora utilizando que $div\mathbf{v}=0$ (ecuación de continuidad) y $div\mathbf{u}=0$ (porque el cuerpo es sólido), obtenemos

$$\cdots = div\left(\left(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}\right)\right)$$

Así que al final, la integral de la energía cinética queda:

$$\int v^2 dV = u^2\left(V-V_0\right)+\int div\left(\left(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}\right)\right)dV=\cdots$$

Transformamos la segunda integral en una integral sobre la superficie S de la esfera y la superficie S_0 del cuerpo

$$\cdots = u^2\left(V-V_0\right)+\oint_{S+S_0}\left(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{v}-\mathbf{u}\right)\cdot d\mathbf{f}$$

En la superficie del cuerpo, las componentes normales de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ tienen que ser iguales (por las condiciones límite); como el vector $d\mathbf{f}$ es normal a la superficie, la integral sobre S_0 se anula ($(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot d\mathbf{f}=v_n-u_n=0$). En la superficie remota S, sustituimos las expresiones de las ecuaciones (1.11.1) y (1.11.2) para ϕ y $\mathbf{v}$ y se desprecian los términos que se anulan cuando $R\to\infty$. Escribiendo el elemento de superficie de la esfera S en la forma $d\mathbf{f}=\mathbf{n}R^2do$, donde do es un elemento de ángulo sólido, obtenemos:

$$\int v^2 dV = u^2\left(\frac{4}{3}\pi R^3-V_0\right)+\int\left[3\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)-\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right)^2R^3\right]do$$

Finalmente, realizamos la integración [7] y multiplicando por $\frac{1}{2}\rho$ tenemos la expresión para la energía total del fluido:

$$E=\frac{1}{2}\rho\left(4\pi\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}-V_0u^2\right) \tag{1.11.3}$$

El cálculo exacto del vector $\mathbf{A}$ exige una solución completa de la ecuación $\Delta\phi=0$ teniendo en cuenta las condiciones límite particulares en la

[7] La integración respecto al ángulo sólido do es equivalente a promediar integrando respecto a todas las direcciones del vector $\mathbf{n}$ y multiplicar por 4π. Para promediar las expresiones del tipo $\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\right)=\mathbf{A_i n_i B_k n_k}$, observamos que los valores medios $n_i n_k$ forman un tensor simétrico que puede expresarse en función del tensor unidad: $\delta_{ik}=n_in_k=a_{ik}\delta_{ik}$. Contrayendo respto a los sufijos i,k y recordando que $n_in_k=1$ se halla que $a=1/3$, por lo que

$$\overline{\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\right)}=\frac{1}{3}\delta_{ik}A_iB_k=\frac{1}{3}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

superficie del cuerpo. Sin embargo, podemos hacernos una idea de la dependencia de $\mathbf{A}$ con respecto a la velocidad $\mathbf{u}$ del cuerpo teniendo en cuenta que la ecuación es lineal en ϕ y que las condiciones límite son lineales tanto en ϕ como en $\mathbf{u}$. De esto deducimos que $\mathbf{A}$ debe ser una función lineal de las componentes de $\mathbf{u}$. La energía obtenida en la ecuación (1.11.3) será una función cuadrática de las componentes de $\mathbf{u}$ y podrá escribirse en la forma

$$E = \frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k \tag{1.11.4}$$

siendo m_{ik} un tensor simétrico constante cuyos términos pueden calcularse a partir de los de $\mathbf{A}$; al tensor m_{ik} se le denomina *tensor de masas asociadas*.

Conociendo la energía E podemos obtener una expresión para el impulso total $\mathbf{P}$ del fluido. Las variaciones infinitesimales en E y $\mathbf{P}$ están relacionadas mediante $dE = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{P}$, por lo que si expresamos la energía E según la ecuación (1.11.4), las componentes de $\mathbf{P}$ deben ser

$$P_i = m_{ik} u_k \tag{1.11.5}$$

Finalmente, comparando las fórmulas (1.11.3), (1.11.4) y (1.11.5) se ve que $\mathbf{P}$ viene dado en función de $\mathbf{A}$ por

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0 \mathbf{u} \tag{1.11.6}$$

El impulso transmitido al fluido por el cuerpo en la unidad de tiempo es $d\mathbf{P}/dt$. Cambiar el signo da la reacción $\mathbf{F}$ del fluido, es decir, la fuerza que actúa sobre el cuerpo:

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{1.11.7}$$

La componente de $\mathbf{F}$ paralela a la velocidad del cuerpo se denomina *fuerza de arrastre* y la componente perpendicular se denomina *fuerza de sustentación*.

Si fuese posible tener un flujo potencial en alrededor de un cuerpo moviéndose uniformemente dentro del fluido ideal ($\mathbf{u} = constante$), deberíamos tener $\mathbf{P} = constante$, y por tanto $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Es decir, no habría fuerza de arrastre o sustentación; las fuerzas de presión ejercidas sobre el cuerpo por el fluido estarían equilibradas. Este resultado se denomina Paradoja d'Alambert. Vamos a ver porqué es una paradoja. Tener una fuerza de arrastre en un movimiento uniforme significa que, para mantener el cuerpo en movimiento, debería realizarse continuamente un trabajo por alguna fuerza externa. Este trabajo se disiparía dentro del fluido o se convertiría en energía cinética del mismo. El resultado sería un flujo de energía continuo hacia el infinito en el interior del fluido. Pero en un fluido ideal no hay disipación de energía (por definición de fluido ideal). Además la velocidad del fluido puesto en movimiento por el cuerpo disminuye muy rápidamente en cuanto nos alejamos del cuerpo con lo que no puede haber flujo de energía hacia el infinito.

Sin embargo, estos argumentos sólo son válidos en relación con el movimiento de un cuerpo dentro de un volumen infinito de fluido. Si el fluido tiene una superficie libre, un cuerpo que tuviese un movimiento uniforme paralelo a esta superficie experimentaría la acción de un arrastre. La aparición de esta fuerza (denominada *resistencia de onda*) se debe a la presencia de un sistema de ondas propagadas en la superficie libre, que continuamente van eliminando energía hacia el infinito.

Si el movimiento del cuerpo es oscilante, debido a una fuerza externa f y en las condiciones consideradas en la sección anterior (1.10), el fluido que rodea el cuerpo se mueve con un flujo potencial y podemos utilizar todos los resultados obtenidos para deducir las ecuaciones de movimiento del cuerpo.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\mathbf{P}_{cuerpo} + \frac{d}{dt}\mathbf{P}_{fluido} = \frac{d}{dt}\left(M\mathbf{u}\right) + \frac{d}{dt}\mathbf{P}_{fluido} \\
f_i &= M\frac{du_i}{dt} + m_{ik}\frac{du_k}{dt}
\end{aligned}$$

que puede escribirse como:

$$\frac{du_k}{dt}\left(M\delta_{ik} + m_{ik}\right) = f_i \qquad (1.11.8)$$

Esta es la ecuación de movimiento de un cuerpo sumergido en un fluido ideal.

A continuación consideramos el problema de obtener las ecuaciones del movimiento de un cuerpo sumergido en un fluido que oscila por alguna causa externa al cuerpo [8]. Estas oscilaciones del fluido pondrán en movimiento al cuerpo.

Suponemos que la velocidad del fluido varía ligeramente en distancias del orden de la dimensión del cuerpo. Sea v la velocidad del fluido que existiría en la posición ocupada por el cuerpo si no hubiera cuerpo. Es decir, v es la velocidad del flujo no perturbado. Con esta suposición podemos

[8] Por ejemplo, una onda sonora de longitud de onda larga comparada con las dimensiones del cuerpo.

suponer que $\mathbf{v}$ es constante en todo el volumen ocupado por el cuerpo. La velocidad del cuerpo es $\mathbf{u}$, como antes.

Si el cuerpo fuera totalmente transportado por el fluido, es decir, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, la fuerza que actuase sobre él debería ser la misma que la fuerza que actua sobre el líquido en el mismo volumen si el cuerpo no estuviera. El impulso de este volumen de fluido es $\rho V_0 \mathbf{v}$, y por tanto la fuerza sobre el mismo es $\rho V_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Pero en realidad el cuerpo no es totalmente transportado con el fluido; existe un cierto movimiento respecto a éste, por lo que el fluido adquiere un cierto movimiento adicional. El impulso adicional resultante del fluido es $m_{ik}(u_k - v_k)$, ya que ahora debemos sustituir $\mathbf{u}$ por la velocidad del cuerpo respecto al fluido $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ en la ecuación (1.11.5). La variación de este impulso con respecto al tiempo da como resultado la aparición de una fuerza sobr el cuerpo $-m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k)$. Así, la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es

$$\rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k)$$

Esta fuerza tiene que igualarse a la derivada temporal del impulso del cuerpo, obteniendo la ecuación del movimiento:

$$\frac{d}{dt}(Mu_i) = \rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k)$$

Integrando ambos miembros, tenemos:

$$Mu_i = \rho V_0 v_i - m_{ik}(u_k - v_k)$$

o lo que es lo mismo:

$$(M\delta_{ik} + m_{ik})\, u_k = (m_{ik} + \rho V_0 \delta_{ik})\, v_k \tag{1.11.9}$$

Hacemos la constante de integración igual a cero, puesto que la velocidad del cuerpo en su movimiento producido por el fluido debe anularse cuando $\mathbf{v}$ se hace cero. La relación obtenida determina la velocidad del cuerpo a partir de la velocidad del fluido. Si la densidad del cuerpo es igual a la del fluido ($M = \rho V_0$), tenemos $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, como era de esperar.

1.12. Ondas de gravedad

La superficie libre de un líquido en equilibrio en un campo gravitatorio es plana. Si una perturbación externa afecta a la superficie en un punto determinado, aparece un movimiento en el líquido. El movimiento se propaga a lo largo de la superficie en forma de *ondas de gravedad*. Estas ondas afectan a la superficie y al interior del fluido, aunque su efecto disminuye con la profundidad.

Consideramos ondas de gravedad en las que la velocidad de las partículas del fluido es tan pequeña que podemos despreciar el término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ en comparación con $\partial\mathbf{v}/\partial t$ en la ecuación de Euler.

Durante el intervalor de tiempo τ, del orden del periodo de las oscilaciones de las partículas el fluido en la onda, estas recorren una distancia del orden de la amplitud de onda a. Por tanto, su velocidad es del orden de a/τ. Por tanto, la derivada temporal de la velocidad es del orden de $\frac{1}{\tau}\frac{da}{dt}\simeq\frac{v}{\tau}$ y las derivadas espaciales del orden de $\frac{d}{dr}\left(\frac{a}{\tau}\right)\simeq\frac{1}{\tau}\left(\sim\frac{1}{s}\frac{m}{m}=\frac{m/s}{m}\right)=\frac{v}{\lambda}$. Así, la condición $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}\ll\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$ es equivalente a

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2\ll\frac{a}{\tau}\frac{1}{\tau}$$

o sea,

$$a\ll\lambda \tag{1.12.1}$$

es decir, las amplitudes de las oscilaciones en la onda deben ser pequeñas en comparación con su longitud de onda. En este caso, como vimos en la sección 1.9, cuando puede despreciarse $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ en la ecuación de Euler tenemos un flujo potencial. Si además, el flujo es incompresible, podemos utilizar las ecuaciones (1.10.6) (ec. de Laplace) y (1.10.7). Podemos despreciar el término $\frac{1}{2}v^2$ porque contiene el cuadrado de la velocidad, haciendo $f(t)=0$ e incluyendo un término $\rho g z$ para tener el campo gravitario, obtenemos:

$$p=-\rho g z-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{1.12.2}$$

Tomamos el eje z como vertical hacia arriba y el plano xy sobre la superficie en equilibrio del fluido. Llamamos ζ a la coordenada z de un punto de la superficie. ζ es función de x,y,z y t. En equilibrio $\zeta=0$, de modo que ζ da el desplazamiento vertical de la superficie en las oscilaciones. Suponemos que sobre la superficie actúa una presión constante p_0. Entonces, usando (1.12.2)

$$p_0=-\rho g\zeta-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Si elegimos el potencial $\phi'=\phi+\frac{p_0}{\rho}t$ no supone ninguna diferencia, ya que $\mathbf{grad}\phi=\mathbf{grad}\phi'$. Sin embargo, de esta manera se elimina el término p_0 de la ecuación anterior (y si prescindimos de la prima), obtenemos la condición de la superficie

$$g\zeta+\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta}=0 \tag{1.12.3}$$

Cuando la amplitud de las oscilaciones es pequeña, el desplazamiento ζ también es pequeño. Aquí podemos suponer, con el mismo grado de aproximación, que la componente vertical de la velocidad de los puntos en la superficie es simplemente la derivada respecto al tiempo de ζ:

$$v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Pero $v_z = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ de modo que

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

Sustituyendo ζ a partir de (1.12.3) tenemos

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} = 0$$

Cuando las oscilaciones son pequeñas, podemos tomar el valor del paréntesis en $z = 0$ en lugar de $z = \zeta$. Así pues, tenemos un sistema de ecuaciones para determinar el movimiento de la superficie de un fluido en un campo gravitatorio:

$$\Delta \phi = 0 \tag{1.12.4}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \tag{1.12.5}$$

Suponemos que tenemos un fluido de profundidad infinita. De esta forma, el área del fluido es ilimitada y la longitud de onda será pequeña en comparación con la profundidad del fluido. En esta situación evitamos las condiciones límite en los bordes y en la parte inferior del fluido.

Consideramos una onda de gravedad que se propaga a lo largo del eje x y que es uniforme en la dirección y. En esta onda todas las magnitudes son independientes de y. Buscamos una solución que sea una función periódica simple del tiempo y de la coordenada x, es decir, de la forma

$$\phi = f(z)\cos(kx - \omega t)$$

ω es lo que se denomina *frecuencia angular* de la onda; $2\pi/\omega$ es el periodo del movimiento en un punto determinado; k se denomina *número de onda*; y $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ es la longitud de onda.

Sustituyendo en la ecuación

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

tenemos

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones e^{kz} y e^{-kz}. Elegimos la primera, porque la segunda da un aumento de ϕ cuando pasamos al interior del fluido (que ocupa la región $z < 0$). Así, obtenemos el potencial para la velocidad:

$$\phi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t) \tag{1.12.6}$$

Nos falta aplicar las condiciones límite (1.12.5). Sustituyendo (1.12.6) obtenemos

$$k - \frac{\omega^2}{g} = 0$$

O sea

$$\omega^2 = kg \tag{1.12.7}$$

Esto nos proporciona la relación existente entre el número de onda y la frecuencia de una onda de gravedad.

La distribución de velocidades en el fluido móvil se encuentra tomando las derivadas espaciales de ϕ, $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi$:

$$v_x = -Ake^{kz}\sin(kx - \omega t) \quad v_z = Ake^{kx}\cos(kx - \omega t) \tag{1.12.8}$$

Como vemos, la velocidad disminuye exponencialmente al penetrar en el fluido. En un punto determinado cualquiera del espacio (es decir, fijados x, z) el vector velocidad gira uniformemente en el plano xz, permaneciendo su módulo constante e igual a Ake^{kz}.

El siguiente paso es determinar las trayectorias de las partículas del fluido en la onda. Temporalmente designaremos por x, z las coordenadas de una partícula del fluido móvil y no las de un punto fijo del espacio, siendo x_0, z_0 los valores de x, z en la posición de equilibrio de una partícula. Entonces $v_x = \frac{dx}{dt}$ y $v_z = \frac{dz}{dt}$, y podemos aproximar el segundo miembro de (1.12.8) escribiendo x_0 y z_0, puesto que las oscilaciones son pequeñas. Una integración respecto al tiempo nos da:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\cos(kx_0 - \omega t) \\ z - z_0 &= -A\frac{k}{\omega}e^{kz_0}\sin(kx_0 - \omega t) \end{aligned} \tag{1.12.9}$$

Así pues, las partículas del fluido describen circunferencias de radio $\left(\frac{Ak}{\omega}\right)e^{kz_0}$ alrededor de los puntos (x_0, z_0); este radio disminuye exponencialmente al aumentar la profundidad.

La velocidad de propagación U de la onda es (como se demostrará más adelante) $U = \frac{\partial\omega}{\partial k}$. Sustituyendo $\omega = \sqrt{kg}$ vemos que la velocidad de propagación de las ondas de gravedad en el caso de una superficie sin limitaciones de un fluido de profundidad infinita es

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \tag{1.12.10}$$

Esta velocidad aumenta con la longitud de onda.

1.13. Ondas de gravedad largas

Hasta ahora hemos estudiado las ondas de gravedad con una longitud de onda pequeña en comparación con la profundidad del fluido. Ahora nos concentramos en el caso contrario, es decir, en ondas de longitud grande en comparación con la profundidad. Estas ondas se denominan *ondas largas*.

Para ello, vamos a estudiar la propagación de ondas largas en un canal. Se supone que el canal está dirigido a lo largo del eje x y que tiene longitud infinita. La sección recta del canal puede tener cualquier forma y puede variar a lo largo de su longitud. Denotamos el área de la sección transversal del canal como $S = S(x,t)$. Suponemos que la anchura y la profundidad del canal son pequeñas en comparación con la longitud de onda. Sólo tendremos en cuenta ondas longitudinales en las que el fluido se mueve a lo largo del canal. En este tipo de ondas la velocidad v_x es grande en comparación con las componentes v_y y v_z. Para simplificar, llamamos v a v_x y prescindimos de las otras componentes (pequeñas en comparación).

La componente x de la ecuación de Euler se escribe:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

y la componente z

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

Despreciamos los términos cuadráticos en la velocidad, porque suponemos que es pequeña en comparación con la longitud de onda. En la superficie libre ($z = \zeta$) la presión es p_0, así que a partir de la segunda ecuación:

$$p = p_0 + g\rho(\zeta - z)$$

Y ahora introduciendo este resultado en la primera ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{1.13.1}$$

Necesitamos otra ecuación para poder determinar las dos incógnitas, v y ζ. Utilizando la ecuación de continuidad en este escenario, considerando un volumen de fluido limitado por dos secciones rectas planas del canal distantes entre sí una distancia dx. En una unidad de tiempo fluye a través de los planos un volumen $(Sv)_x$ de fluido y a través del otro un volumen $(Sv)_{x+dx}$. Por tanto, el volumen de fluido entre los dos planos varía una cantidad:

$$(Sv)_{x+dx} - (Sv)_x = \frac{\partial (Sv)}{\partial x} dx$$

Pero como el fluido es incompresible, esta variación será simplemente la variación del nivel del fluido. El cambio por unidad de tiempo del volumen de fluido. El cambio por unidad de tiempo del volumen de fluido comprendido entre dos planos es $(\partial S/\partial t)\, dx$. Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{\partial S}{\partial t} dx = -\frac{\partial (Sv)}{\partial x} dx$$

es decir,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Sv)}{\partial x} = 0 \tag{1.13.2}$$

Esta es la ecuación de continuidad que buscábamos.

Si S_0 es el área de la sección recta de equilibrio del fluido del canal, entonces $S = S_0 + S'$, donde S' es la variación en la sección recta producida por la onda. Como el cambio en el nivel del fluido es pequeño, podemos escribir S' en la forma $b\zeta$, donde b es el ancho del canal en la superficie del fluido. La ecuación anterior (1.13.2) se transforma entonces en

$$b\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (S_0 v)}{\partial x} = 0 \tag{1.13.3}$$

Derivando (1.13.3) respecto a t y sustituyendo $\frac{\partial v}{\partial t}$ según lo encontrado en la ecuación (1.13.1)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(S_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.13.4}$$

Si la sección recta del canal es la misma en todos los puntos, entonces $S_0 = constante$ y

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{gS_0}{b}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \tag{1.13.5}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de onda* y corresponde a la propagación de ondas con una velocidad U que es independiente de la frecuencia y es la raíz cuadrada de $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$. Así pues, la velocidad de propagación de ondas de gravedad largas en canales es

$$U = \sqrt{\frac{gS_0}{b}} \tag{1.13.6}$$

De la misma manera podemos considerar ondas largas en un depósito grande, que podemos suponer infinito en dos direcciones (las correspondientes a x e y). Se designa h a la profundidad del fluido del depósito. En este caso ahora v_z es pequeña. La ecuación de Euler toma una forma parecida a (1.13.1).

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \tag{1.13.7}$$

Del mismo modo que antes para (1.13.2), deducimos la ecuación de continuidad como

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial (hv_y)}{\partial y} = 0$$

Si escribimos la profundidad h como $h_0 + \zeta$, donde h_0 es la profundidad de equilibrio, entonces,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h_0 v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h_0 v_y)}{\partial y} = 0 \tag{1.13.8}$$

Si el depósito tiene un fondo horizontal de manera que $h_0 = constante$, derivando (1.13.8) respecto a t y sustituyendo el valor de (1.13.7) obtenemos

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + gh\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1.13.9}$$

Esta es la ecuación de onda (bidimensional) y corresponde a ondas que se propagan con una velocidad

$$U = \sqrt{gh} \tag{1.13.10}$$

1.14. Ondas en un fluido incompresible

Existe un tipo de onda de gravedad que puede propagarse en el interior de un fluido incompresible. Dichas ondas se deben a una inhomogeneidad del fluido producida por el campo gravitatorio. La presión (y también la entropía s) varían con la altura, por lo que si desplazamos una partícula de fluido destruimos el equilibrio mecánico y se produce un movimiento oscilante. Como el movimiento es adiabático, la partícula se lleva con ella la entropía s, que no es la que corresponde a la posición de equilibrio en su nueva posición.

Suponemos que la longitud de onda es pequeña en comparación con las distancias sobre las que el campo gravitatorio produce una variación notable de la densidad, además de considerar el fluido como incompresible. Así podemos despreciar las variaciones producidas en su interior por la variación de presión de la onda. La modificación de la densidad producida por la dilatación términa no puede despreciarse, pues es la que origina el movimiento que estamos estudiando.

Vamos a buscar las ecuaciones que describen este movimiento. Utilizamos el sufijo $_0$ para distinguir los valores de las magnitudes correspondientes al equilibrio mecánico y una prima $'$ para marcar las pequeñas desviaciones de estos valores.

Con estas suposiciones podemos escribir la ecuación de conservación de la entropía $s = s_0 + s'$ hasta el primer orden,

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} s_0 = 0 \tag{1.14.1}$$

donde s_0, igual que el resto de los valores de equilibrio de otras magnitudes, es una función determinada de la coordenada vertical z.

Como antes, ahora despreciamos el término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ de la ecuación de Euler, pues las oscilaciones son pequeñas. Además, como la distribución de presiones de equilibrio viene dada por $\mathbf{grad} p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$, tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{grad} p}{\rho} + \mathbf{g} = -\frac{\mathbf{grad} p'}{\rho_0} + \frac{\mathbf{grad} p_0}{\rho_0}\rho'$$

Como hemos visto antes, la variación de la densidad se debe únicamente al cambio de entropía y no a la variación de presión, por lo que podemos escribir

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'$$

y se obtiene la ecuación de Euler en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s' - \mathbf{grad}\frac{p'}{\rho_0} \tag{1.14.2}$$

Podemos introducir ρ_0 dentro del operador gradiente, pues despreciamos la variación de la densidad de equilibrio en distancias del orden de la longitud de onda. Por esta misma razón se puede suponer constante la densidad en la ecuación de continuidad, que entonces queda:

$$div \mathbf{v} = 0 \tag{1.14.3}$$

Buscaremos una solución de las ecuaciones (1.14.1, 1.14.2, 1.14.3) en forma de onda plana

$$\mathbf{v} = constante \times e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

y análogamente para s' y p'. Sustituyendo la ecuación de continuidad (1.14.3) se tiene

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}=0 \tag{1.14.4}$$

es decir, que la velocidad del fluido es siempre perpendicular al *vector de onda* $\mathbf{k}$ (onda transversal). Las ecuaciones (1.14.1) y (1.14.2) dan

$$\begin{aligned} i\omega s' &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}s_0 \\ -i\omega\mathbf{v} &= \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\mathbf{g}-\frac{i\mathbf{k}}{\rho_0}p' \end{aligned}$$

La condición $\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}=0$ junto a la segunda de las ecuaciones da

$$ik^2p'=\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}$$

y eliminando $\mathbf{v}$ y s' de ambas ecuaciones, obtenemos la relación entre el vector de onda y la frecuencia:

$$\omega^2=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p g\frac{ds}{dz}\sin^2\theta \tag{1.14.5}$$

De ahora en adelante omitiremos el sufijo cero para los valores de equilibrio de las magnitudes termodinámicas; el eje z es vertical y hacia arriba y θ es el ángulo entre el eje z y la dirección de $\mathbf{k}$. Si la expresión en el segundo miembro de (1.14.5) es positiva, se cumple la condición para la estabilidad de la distribución de equilibrio $s(z)$ (condición de que la convección esté ausente, como se vió en la sección 1.4).

Vemos que la frecuencia depende sólo de la dirección del vector de onda y no de su valor. Para $\theta=0$ tenemos $\omega=0$, por lo que no pueden existir ondas del tipo considerado con su vector de onda vertical.

Si el fluido está en equilibrio mecánico y en equilibrio térmico, su temperatura es constante y podemos escribir

$$\frac{ds}{dz}=\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\frac{dp}{dz}=-\rho g\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$$

Finalmente, usando las relaciones termodinámicas

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T &= \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \\ \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p &= \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \end{aligned}$$

en donde c_p es el calor específico por unidad de masa, encontramos

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{c_p}\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \sin\theta} \tag{1.14.6}$$

En el caso particular de un gas perfecto:

$$\omega = \frac{g}{\sqrt{c_p T}}\sin\theta \tag{1.14.7}$$

Capítulo 2

Fluidos viscosos

2.1. Ecuación de movimiento de un fluido viscoso

Ahora estudiaremos el efecto producido por la disipación de la energía que se produce durante el movimiento del fluido sobre el propio movimiento. Este proceso es consecuencia de la irreversibilidad termodinámica del movimiento, que **siempre** está presente en alguna medida, debida a la **fricción interna (viscosidad) y** a la **conducción térmica**.

En general, para obtener las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso, tenemos que añadir algunos términos a la ecuación de movimiento del fluido ideal.

La ecuación de continuidad es válida para cualquier fluido, independientemente de si es viscoso o no.

La ecuación de Euler debe modificarse cuando el fluido es viscoso. En la sección 1.7 vimos que la ecuación de Euler puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

donde Π_{ik} es el tensor de densidad de flujos de impulso. El flujo de impulso en la fórmula (1.7.2) representa una transferencia de impulso **completamente reversible** debida al transporte mecánico de las partículas de fludio de un lugar a otro y a las fuerzas de presión que actúan en el fluido. La viscosidad (rozamiento interno) se debe a una transferencia de impulso, **irreversible**, de unos puntos donde la velocidad es grande a otros donde la velocidad es pequeña.

Por tanto, a la ecuación de movimiento de un fluido ideal (1.7.2) le añadiremos un término σ'_{ik} que tenga en cuenta la transferencia de impulso *viscoso* irreversible en el fluido.

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik} \tag{2.1.1}$$

El tensor

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \tag{2.1.2}$$

se denomina *tensor de tensiones* y σ'_{ik} es el *tensor de tensiones de la viscosidad*. σ_{ik} expresa la parte del fujo de impulso que no se debe a transferencia directa de impulso con la masa del fluido móvil.

Como el rozamiento interno aparece sólo cuando distintas partículas se mueven con velocidades diferentes, σ'_{ik} dependerá de las derivadas espaciales de la velocidad. Si los gradientes de velocidad son pequeños, podemos suponer que la transferencia de impulso debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. Con la misma aproximación podemos considerar que σ'_{ik} es una función lineal de las derivadas $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, sin términos independientes de estas derivadas, ya que σ'_{ik} tiene que anularse para $v = constante$. σ'_{ik} también tiene que anularse cuando el fluido completo está en rotación uniforme, ya que entonces tampoco hay rozamiento interno. En el caso de rotación uniforme con velocidad angular Ω, la velocidad $\mathbf{v}$ es igual a $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$. Las sumas

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

son combinaciones lineales de las derivadas $\partial v_i/\partial x_k$ y se anulan cuando $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$. De aquí deducimos que σ'_{ik} deberá contener exactamente estas combinaciones simétricas en las derivadas $\partial v_i/\partial x_k$.

El tensor más general de rango dos que satisface las condiciones anteriores es

$$\sigma'_{ik} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + b\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}$$

siendo a y b independientes de la velocidad. Sin embargo, es conveniente escribir este tensor de una forma diferente

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \tag{2.1.3}$$

La expresión entre paréntesis tiene la propiedad de anularse por contracción respecto a i y k, es decir, cuando se hace la suma de las componentes en el caso $i = k$. Las constantes η y ζ se denominan *coeficientes de viscosidad*. Más adelante veremos que los dos son positivos:

$$\eta > 0 \quad \zeta > 0 \tag{2.1.4}$$

Ahora ya podemos obtener la ecuación de Euler para un fluido viscoso, añadiendo las expresiones $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$ en el segundo miembro:

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Esta forma de la ecuación de Euler para el movimiento de un fluido viscoso es la más general de todas. Las magnitudes η y ζ son funciones de la presión y la temperatura.

$$\eta = \eta\,(p, T) \qquad \zeta = \zeta\,(p, T)$$
$$\Downarrow$$
$$p, T = f\,(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \eta, \zeta = f\,(\mathbf{x})$$

En general p y T no son constantes en todo el fluido, de manera que η y ζ no pueden extraerse fuera del operador gradiente.

Sin embargo, en la mayor parte de los casos, **los coeficientes de viscosidad no varían demasiado en el fluido, por lo que pueden considerarse como constantes**.

$$\eta, \zeta \text{ varían poco en el fluido } \Rightarrow \eta, \zeta \sim constantes$$

En este caso

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} &= \eta\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \\ &= \eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv div\mathbf{v} \qquad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \equiv \Delta v_i$$

Por lo que podemos escribir la ecuación del movimiento de un fluido viscoso en forma vectorial

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}\right] = -\mathbf{grad}p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\mathbf{grad}\,(div\,\mathbf{v}) \tag{2.1.6}$$

Si el fluido es incompresible, $div\,\mathbf{v} = 0$, por lo que el último término de (2.1.6) es cero. La ecuación de movimiento de un fluido viscoso incompresible es

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v} \tag{2.1.7}$$

Esta ecuación se denomina *Ecuación de Navier-Stokes*.

El tensor de tensiones en un fluido incompresible es

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \tag{2.1.8}$$

Como vemos, la viscosidad de un fluido incompresible queda determinada sólo por un coeficiente. Como la mayoría de los fluidos se pueden considerar como incompresibles, el coeficiente de viscosidad η es el que tiene importancia. El cociente

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{2.1.9}$$

se denomina *viscosidad cinemática* mientras que η se denomina *viscosidad dinámica*.

La viscosidad dinámica de un gas a una temperatura determinada es independiente de la presión, mientras que la viscosidad cinemática es inversamente proporcional a la presión.

$$\text{Gas (T constante)} \Rightarrow \begin{cases} \eta \neq f(p) & \text{(Viscosidad dinámica)} \\ \nu \propto \frac{1}{p} & \text{(Viscosidad cinemática)} \end{cases}$$

La presión puede eliminarse de la ecuación de Navier-Stokes del mismo modo que se hizo en la ecuación de Euler: tomando rotacionales a ambos lados de la ecuación (2.1.7)

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{rot}\left(\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\right) + \mathbf{v}\Delta\left(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\right) \tag{2.1.10}$$

El siguiente paso es escribir las condiciones límite que actúan sobre las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso.

Las fuerzas de atracción molecular entre el fluido y la pared del cuerpo sólido con el que está en contacto hacen que la capa de fluido junto al cuerpo *se pegue* y quede totalmente en reposo. Por ello, las condiciones límites exigen que la velocidad del fluido viscoso se anule en las superficies sólidas fijas:

$$\mathbf{v} = 0 \text{ en una superficie sólida fija} \tag{2.1.11}$$

Como vemos, en un fluido viscoso deben anularse tanto la componente normal como la tangencial, mientras que en un fluido ideal sólo tiene que anularse la componente normal a la superficie. En el caso de una superficie móvil, la velocidad $\mathbf{v}$ debe ser igual a la velocidad de la superficie.

Condiciones límite en contacto con una superficie sólida fija

Fluido ideal	Fluido Viscoso
$v_n = 0$	$\mathbf{v} = 0 \quad (v_n = 0, v_\parallel = 0)$

Ahora buscamos la fuerza que actúa sobre una superficie sólida que limita el fluido. La fuerza que actúa sobre un elemento de la superficie coincide con el flujo de impulso a través de dicho elemento. El flujo de impulso a través del elemento de superficie $d\mathbf{f}$ es

$$\Pi_{ik} df_k = \left(\rho v_i v_k - \sigma_{ik}\right) df_k$$

Escribiendo $df_k = n_k df$, donde $\mathbf{n}$ es un vector unidad a lo largo de la normal y teniendo en cuenta que $\mathbf{v} = 0$ en la superficie sólida, encontramos que la fuerza $\mathbf{P}$ que actúa sobre una unidad de superficie es

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k \tag{2.1.12}$$

El primer término es la presión del fluido, mientras que el segundo es la fuerza de rozamiento debida a la viscosidad. $\mathbf{n}$ apunta hacia fuera del fluido, es decir, *hacia adentro* en la superficie sólida que limita al fluido.

Si tenemos una superficie de separación entre dos fluidos inmiscibles, las velocidades de los fluidos deben ser iguales en la superficie y las fuerzas que se ejercen entre sí deben ser iguales y opuestas. Esta condición se escribe como

$$n_{1,k}\sigma_{1,ik} + n_{2,k}\sigma_{2,ik} = 0$$

donde los sufijos 1 y 2 se refieren a los dos fluidos. Los vectores normales, en este caso, tienen sentidos opuestos, por lo que $n_{1,i} = -n_{2,i} = n_i$, por lo que la condición anterior se puede escribir como

$$n_i \sigma_{1,ik} = n_i \sigma_{2,ik} \tag{2.1.13}$$

En una superificie libre del fluido debe cumplirse la condición

$$\sigma_{ik} n_k \equiv \sigma'_{ik} n_k - p n_i = 0 \tag{2.1.14}$$

Como referencia daremos las expresiones en componentes del tensor de tensiones y la ecuación en Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas r, ϕ, z.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
\sigma_{\phi\phi} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right) \\
\sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\sigma_{r\phi} &= \eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) \\
\sigma_{\phi z} &= \eta \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right) \\
\sigma_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Las tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes (en coordenadas cilíndricas):

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\phi^2}{r}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}-\frac{v_r}{r^2}\right)$$

etc...

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas esféricas r, ϕ, θ. PAG9

2.2. Disipación de energía en un fluido incompresible

La presencia de la viscosidad da como resultado disipación de energía, que finalmente se transforma en calor. El cálculo de la disipación de energía es sencillo en el caso de un fluido incompresible.

La energía cinética total de un fluido incompresible es

$$E_{cin}=\frac{1}{2}\rho\int v^2 dV$$

Si tomamos la derivada temporal de esta energía y utilizamos la ecuación de Navier-Stokes para $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) &= -\rho\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}p+v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}=\\ &= -\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}\right)+div\,(\mathbf{v}\cdot\sigma')-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\end{aligned}$$

En esta expresión $\mathbf{v}\cdot\sigma'$ designa el vector cuyas componentes son $v_i\sigma'_{ik}$. Como $div\,\mathbf{v}=0$ en el caso de un fluido incompresible, podemos escribir el primer término del segundo miembro como una divergencia:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=-div\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}\right)-\mathbf{v}\cdot\sigma'\right]-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{2.2.1}$$

La expresión entre corchetes es la densidad de flujo de energía en el fluido: el término $\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}\right)$ es el flujo de energía debido a la transferencia real de masa de fluido y equivale al flujo de energía correspondiente a un fluido ideal (ver (1.10.5 en la página 28)). El segundo término, $\mathbf{v}\cdot\sigma'$ es el flujo de energía debido a los procesos de rozamiento interno. Pero la presencia de la viscosidad da como resultado un flujo de impulso σ'_{ik}; sin embargo, en una transferencia de impulso interviene siempre una transferencia de energía y el flujo de energía es igual al producto escalar del flujo de impulso por la velocidad.

Si integramos (2.2.1) respecto a un volumen V, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{2}\rho v^2 dV = \oint \left[\rho \mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right) - \mathbf{v}\cdot\sigma'\right]\cdot d\mathbf{f} - \int \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV \tag{2.2.2}$$

El primer término del segundo miembro nos da la variación respecto al tiempo de la energía cinética del fluido contenido en V debido al flujo de energía a través de la superficie que limita a V. La integral del segundo término es la disminución por unidad de tiempo de la energía cinética debida a la disipación.

Si la integral se extiende al volumen total del fluido, la integral de superficie se anula (puesto que la velocidad se anula en el infinito) y encontramos que la energía disipada por unidad de tiempo en la totalidad del fluido es:

$$\dot{E}_k = -\int \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV$$

En fluidos incompresibles, el tensor σ'_{ik} viene dado por (2.1.8), de modo que

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

Es fácil comprobar que esta expresión se puede escribir como

$$\frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2$$

De manera que la disipación de energía en un fluido incompresible resulta:

$$\dot{E}_k = -\frac{1}{2}\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV \tag{2.2.3}$$

La disipación conduce a una disminución de energía mecánica, es decir, siempre se dará $E_{cin} < 0$. Sin embargo, la integral 2.2.3 es siempre positiva. Por tanto, se llega a la conclusión de que el coeficiente de viscosidad η es siempre positivo.

2.3. Flujo en una tubería

En esta sección nos concentramos en problemas sencillos de movimiento de un fluido viscoso incompresible.

Supongamos que el fluido está encerrado entre dos planos paralelos que se mueven con una velocidad relativa constante $\mathbf{u}$. Tomemos uno de ellos como el plano xz con el eje x en la dirección $\mathbf{u}$. Todas las magnitudes dependen únicamente de y y la velocidad del fluido siempre está en la dirección x. A partir de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido viscoso incompresible (2.1.7 en la página 50) tenemos para el flujo estacionario

$$\frac{dp}{dy} = 0 \quad \frac{d^2v}{dy^2} = 0$$

La ecuación de continuidad se satisface idénticamente.

Así, $p = constante$ y $v = ay + b$. Como $v\,(y = 0) = 0$ tenemos que $b = 0$, y $v\,(y = h) = u$ tenemos que $a = u/h$. Al final, la distribución de velocidad en el canal es lineal,

$$v = \frac{u}{h}y \tag{2.3.1}$$

La velocidad media del fluido definida como

$$\overline{v} = \frac{1}{h}\int_0^h v\,dy$$

es

$$\overline{v} = \frac{1}{2}u \tag{2.3.2}$$

Según la ecuación (2.1.12)

$$\begin{aligned} P_i &= -\sigma_{ik}n_k \\ \sigma_{ik} &= -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \end{aligned}$$

tenemos que la componente normal de la fuerza sobre cualquiera de los planos es exactamente p, mientras que la fuerza de rozamiento tangencial sobre el plano $y = 0$ es

$$\sigma_{xy} = \eta\frac{dv}{dy} = \eta\frac{u}{h} \tag{2.3.3}$$

y la fuerza sobre el plano $y = h$ es $-\eta u/h$.

A continuación consideramos el flujo estacionario entre dos planos paralelos en presencia de un gradiente de presión. Escojemos las coordenadas como antes, el eje x es el de la dirección del movimiento del fluido. Las ecuaciones de Navier-Stokes, como la velocidad sólo depende de y, son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

La segunda ecuación demuestra que la presión es independiente de y, es decir, que es constante a través de la profundidad del fluido situado entre dos planos. El segundo miembro de la primera ecuación es sólo función de x, mientras que el primero sólo es función de y. Por tanto esta igualdad sólo puede verificarse si los dos miembros son constantes. Si $\frac{\partial p}{\partial x} = constante$ entonces p es una función lineal de la coordenada x a lo largo de la dirección del flujo.

Para la velocidad obtenemos

$$v = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{dp}{dx}\right) y^2 + ay + b$$

Determinamos las constantes a partir de las condiciones límite:$v = 0$ en $y = 0$

$$v = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} y(y-h)$$

que por algún motivo que se me escapa, en el libro prefieren retorcer hasta convertirlo en

$$v = -\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(\frac{1}{4}h^2 - \left(y - \frac{1}{2}h\right)^2\right) \tag{2.3.4}$$

Así, la velocidad varía parabólicamente a través del fluido, alcanzandosu valor máximo en la mitad. La velocidad media del fluido (promediada en toda la profundidad del mismo es:

$$\overline{v} = \frac{1}{h}\int_0^h v\,dy = -\frac{h^2}{12\eta}\frac{dp}{dx} \tag{2.3.5}$$

También podemos calcular la fuerza de rozamiento $\sigma_{xy} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0}$ que actúa sobre uno de los planos fijos. La sustitución de (2.3.4) da

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{2}h\frac{dp}{dx} \tag{2.3.6}$$

Finalmente, consideramos el flujo estacionario en una tubería de sección recta arbitraria (que es la misma a lo largo de toda la longitud de la misma). Tomaremos el eje de la tubería como el eje x. La velocidad del fluido es en la dirección x en todos los puntos y es una función sólo de y y z. La ecuación de continuidad se satisface idénticamente, mientras que las componentes y y z de la ecuación de Navier-Stokes nos dan de nuevo

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

es decir, la presión es constante en toda la sección recta de la tubería. La componente x de la ecuación (2.1.7) nos da

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} \tag{2.3.7}$$

De nuevo se tiene la conclusión de que $dp/dx = constante$; el gradiente de presión puede entonces escribirse como $-\Delta p/l$, donde Δp es la diferencia de presiones entre los extremos de la tubería y l su longitud.

La distribución de velocidades correspondiente al flujo de una tubería está determinada por una ecuación bidimensional de la forma $\Delta v = constante$. Esta ecuación se tiene que resolver con la condición límite $v = 0$ en la periferia de la sección recta de la tubería. Resolveremos a continuación para una tubería de sección recta circular. Tomando el origen en el centro del círculo y usando coordenadas polares, tenemos por simetría que $v = v\,(r)$. Utilizando la expresión correspondientes a la laplaciana en coordenadas polares tenemos

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}$$

Integrando [1] obtenemos:

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \log r + b \tag{2.3.8}$$

En el centro de la tubería $r = 0 \Rightarrow \log 0 = -\infty$, lo que nos indica que $a = 0$. Para determinar b, utilizamos la condición de que $v = 0$ en $r = R$, donde R es el radio de la tubería. En este caso:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) \tag{2.3.9}$$

Por lo que vemos que la distribución de velocidades a través de la tubería es parabólica.

---

[1]Mi músculo matemático está oxidado... Así que ahí va, como recordatorio

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) &= -\frac{\Delta p}{\eta l}\\
\frac{1}{r}\left(\frac{dv}{dr} + r\frac{d^2v}{dr^2}\right) &= -\frac{\Delta p}{\eta l}\\
\frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} &= -\frac{\Delta p}{\eta l}
\end{aligned}$$

Si llamamos $v' = \frac{dv}{dr}$, tenemos

$$\frac{v'}{r} + \frac{dv'}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta l}$$

Si utilizamos que $1 = \frac{dr}{dr}$

$$v'\frac{dr}{dr} + r\frac{dv'}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta l} r$$

Usando la regla de la derivada del producto

$$\frac{d\left(v'r\right)}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta l} r$$

Ahora integramos

$$\int d\left(v'r\right) = v'r = -\frac{\Delta p}{\eta l}\int r\,dr = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r^2 + a$$

Ahora volvemos a $v' = \frac{dv}{dr}$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dr} r &= -\frac{\Delta p}{2\eta l} r^2 + a\\
\int dv &= -\frac{\Delta p}{2\eta l}\int r dr + a\int \frac{1}{r} dr\\
v &= -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \log r + b
\end{aligned}$$

Alternativamente podíamos hacer

$$\begin{aligned}
d\left(r\frac{dv}{dr}\right) &= -Cr\,dr\\
r\frac{dv}{dr} &= -C\frac{r^2}{2} + a\\
dv &= -\frac{C}{2} r\,dr + \frac{a}{r} dr\\
v &= -\frac{C}{4} r^2 + a \log r + b
\end{aligned}$$

donde $C = \frac{\Delta p}{\eta l}$.

La masa Q de fluido que pasa a través de una sección recta de la tubería por segundo se denomina *caudal*. A través de un elemento anular $2\pi r\,dr$ del área de la sección recta pasa por segundo una masa $\rho \cdot 2\pi rv\,dr$, de donde

$$Q = 2\pi \int_0^R rv\,dr$$

Utilizando (2.3.9) obtenemos

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} R^4 \tag{2.3.10}$$

La masa de fluido es proporcional a la cuarta potencia del radio de la tubería (*fórmula de Poiseuille*).