Apuntes de Física de Fluidos en la UNED

Resumen

Xavi Aznar

http://FisicaUNED.wordpress.com

Índice alfabético

Capítulo 1

Fluidos ideales

Consideraciones previas

El estudio del movimiento de los fluidos (líquidos y gases) se denomina *dinámica de fluidos*.

Los fenómenos en dinámica de fluidos son macroscópicos, por lo que se considera al fluido como un medio continuo. Un volumen infinitamente pequeño del fluido es *pequeño* comparado con el volumen de un cuerpo o del sistema que consideramos pero *grande* en comparación con la distancia entre las partículas del mismo.

La descripción matemática del estado del fluido se consigue mediante la distribución de velocidades $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ y dos magnitudes termodinámicas cualquiera, como la presión p y la densidad ρ del fluido

$$\text{Estado del fluido} = \begin{cases} \mathbf{v}(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z) & \text{Distribución de velocidades} \\ p(x, y, z, t) & \text{Presión} \\ \rho(x, y, z, t) & \text{Densidad} \end{cases}$$

Todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de **dos** de ellas junto con las ecuaciones de estado.

1.1. Ecuación de continuidad (B)

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la materia.

Empezamos considerando un volumen V_0. Si ρ es la densidad del fluido, la masa contenida en este volumen es

$$\int_{V_0} \rho dV$$

La masa de fluido que atraviesa una unidad de superficie $d\mathbf{f}$ es $\rho\mathbf{v}$, donde $d\mathbf{f}$ es un vector normal a la superficie (apuntando hacia afuera) y $|d\mathbf{f}| = \mathbf{n}df$, (con $\mathbf{n}$ un vector unitario) y df igual al área de la superficie. De manera que integrando sobre toda la superficie que rodea V_0 tenemos la masa total de fluido que la atraviesa

$$\oint \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$$

La disminución de la masa contenida en V_0 debe ser igual a la que atraviesa la superficie, de manera que

$$-\frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \tag{1.1.1}$$

Podemos transformar la integral de superficie en una integral de volumen

$$-\frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$$

La derivada total se convierte en partial al incluirla en la integral de volumen, por lo que

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\right) dV = 0$$

Pero como la integral debe ser cero para cualquier V_0, el integrando debe ser cero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.1.2}$$

Desarrollando la divergencia, podemos escribir la **ecuación de continuidad** como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\rho = 0 \tag{1.1.3}$$

El vector

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \tag{1.1.4}$$

se denomina **densidad de flujo másico**: su dirección coincide con la del movimiento del fluido y su módulo es la cantidad de masa de fluido que circula por unidad de tiempo a través de una superficie perpendicular a la velocidad.

1.2. Ecuación de Euler (B)

La ecuación de Euler es la versión *para fluidos* de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

La fuerza total que **actúa** [1] sobre un volumen de fluido es[2] $-\oint p\, d\mathbf{f}$ y transformando la integral de superficie en una integral de volumen tenemos $-\int_{V_0} \mathbf{grad}p \cdot d\mathbf{f}$.

Por otro lado, para $m\mathbf{a}$ escribimos $\int_{V_0} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$. Pero el problema es que esta derivada expresa la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula de fluido (que se mueve) y nosotros queremos magnitudes

[1] De aquí el signo menos.

[2] $p = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}} \Rightarrow \mathbf{F} = p\mathbf{S}$

que se refieren a puntos fijos en el espacio. Por tanto:

$$\frac{d\mathbf{v}\left(\mathbf{r},t\right)}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}}\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\right)\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$$

Esta expresión indica la variación de la velocidad entre dos puntos separados $d\mathbf{r}$ (que es lo que se ha movido la partícula de fluido en un intervalor de tiempo dt) y la velocidad en un punto fijo.

Así que solucionar este detalle, ya podemos escribir, para un elemento de volumen:

$$-\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\right)\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} \tag{1.2.1}$$

Esta es la ecuación de movimiento del fluido: **ecuación de Euler**. Es una de las **ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos**.

Si el fluido está en un campo gravitatorio, sobre cualquier elemento de volumen actúa una fuerza adicional ρg, donde g es la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse a la fuerza que actúa sobre cada elemento del volumen:

$$\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\right)\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p+\mathbf{g} \tag{1.2.2}$$

En todos los razonamientos hasta ahora no se ha tenido en cuenta la viscosidad o la conducción térmica del fluido. Un fluido de este tipo se denomina **fluido ideal**:

$$\text{Fluido ideal} \iff \nexists \begin{cases}\text{Viscosidad } \nu\\ \text{Conducción térmica}\end{cases}$$

En un fluido ideal no hay conductividad térmica, por lo que el movimiento a través del fluido es *adiabático*.

$$\text{Movimiento adiabático} \iff \frac{ds}{dt}=0 \tag{1.2.3}$$

donde s es la entropía de una partícula de fluido. Como antes, esta derivada se refiere a la partícula de fluido *en movimiento*, mientras que nosotros queremos expresar las ecuaciones respecto a puntos fijos del espacio:

$$\frac{ds}{dt}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}s+\frac{\partial s}{\partial t}=0 \tag{1.2.4}$$

Esta forma nos recuerda la ecuación (1.1.2), por lo que podemos escribir una *ecuación de continuidad para la entropía*:

$$\frac{\partial\left(\rho s\right)}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho s\mathbf{v}\right)=0 \tag{1.2.5}$$

donde ρsv se denomina **densidad de flujo de entropía**.

En general la entropía es constante en todo el fluido, por lo que si tiene un valor específico en un instante inicial, el valor se mantiene en cualquier instante posterior; esto significa que podemos simplificar la ecuación (1.2.5) y dejarla simplemente en

$$s = constante \tag{1.2.6}$$

En adelante, suponemos que la entropía es constante en todo el fluido. En este caso el movimiento del fluido se denomina **isoentrópico**.

Ecuación de Euler (versión termodinámica). Si suponemos que el movimiento es isoentrópico, por lo que podemos utilizar la relación termodinámica:

$$dw = T ds + V dp$$

donde w es la entalpía por unidad de masa del fluido, $V = 1/\rho$ el volumen específico y T la temperatura. Como s es constante, tenemos

$$dw = V dp = \frac{dp}{\rho}$$

y por tanto

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p = \mathbf{grad}w$$

Así, la ecuación (1.2.1) puede escribirse como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}w \tag{1.2.7}$$

que es la versión termodinámica de la ecuación de Euler.

Ecuación de Euler (en función sólo de v). Usando la relación proveniente del análisis vectorial:

$$\frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2 = \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}$$

podemos escribir (1.2.7) en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + + \frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}w \tag{1.2.8}$$

Tomando rotacionales a los dos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta que el rotacional de un gradiente es cero, tenemos una forma de la ecuación de Euler en la que interviene sólo la velocidad:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = \mathbf{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}) \tag{1.2.9}$$

Condiciones límite para un fluido ideal. Las ecuaciones de movimiento deben complementarse con las condiciones límite que debe satisfacer el fluido en las superficies que lo limitan.

En el caso de un fluido ideal, la condición límite indica que **el fluido no puede penetrar una superficie sólida**. De forma matemática, esta condición es

$$v_n = 0 \tag{1.2.10}$$

Es decir, la componente de la velocidad normal a la superficie debe anularse si la superficie está en reposo. Si la superficie está en movimiento

$$v_n = v_{sup}$$

Si es una superficie entre dos fluidos inmiscibles:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ v_{n_1} &= v_{n_2} \end{aligned}$$

Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

Ecuaciónes de Euler (x, y, z)	$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p$
Ecuación de continuidad	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathrm{div}\,(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\rho = 0$
Ecuación adiabática	$s = constante$

CUADRO 1. Sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos

1.3. Hidrostática (G)

Consideramos el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme. Como el fluido está en reposo, $\mathbf{v} = 0$, de manera que la ecuación de Euler (1.2.2) toma la forma

$$\mathbf{grad}p = \rho \mathbf{g} \tag{1.3.1}$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido.

Densidad constante en todo el fluido. Suponemos que ρ es constante en todo el volumen (es decir, no hay compresión significativa del fluido debida a la gravedad). Tomando el eje z vertical y hacia arriba, tenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

De manera que

$$p = -\rho g z + constante$$

Si el fluido tiene una superficie libre a una altura h, donde se le aplica una presión externa p_0 (igual en todos los puntos), esta superficie estará en el plano horizontal $z = h$. Estas condiciones límite nos permiten encontrar la constante, que resulta $p_0 + \rho g h$, y al final

$$p = p_0 + \rho g (h - z) \tag{1.3.2}$$

Densidad no constante en el fluido (gran volumen). En el caso de masas grandes de fluido ρ no puede suponerse constante.

Ahora suponemos que el fluido está tanto en equilibrio mecánico como térmico, por lo que la temperatura es igual en todos sus puntos. Usaremos la relación termodinámica:

$$dG = -s dT + V dp$$

donde G es el potencial termodinámico por unidad de masa (entalpía libre o potencial de Gibbs). Si $T = constante$

$$dG = V dp = \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow \mathbf{grad} G = \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$$

Así que ahora, la ecuación de Euler para una *gran* masa de fluido en reposo (1.3.1) puede escribirse como

$$\mathbf{grad} G = \mathbf{g}$$

Si la gravedad g es un vector constante dirigido hacia el eje z negativo,

$$\mathbf{g} = -\mathbf{grad}\,(gz)$$

por lo que combinando las dos ecuaciones anteriores:

$$\mathbf{grad}\,(G - gz) = 0 \Rightarrow G + gz = constante \tag{1.3.3}$$

donde gz es la energía potencial del elemento de masa del fluido en el campo gravitatorio.

Dependencia sólo de z. Como consecuencia de la ecuación (1.3.1) deducimos que si un fluido está en equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, la presión sólo puede ser función de la altura z (si la presión fuera diferente en distintos puntos a la misma altitud no estaría en equilibrio). A partir de (1.3.1) vemos que

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{1.3.4}$$

la densidad también es sólo una función de z.

$$p = p\left(z\right) \Rightarrow \rho = \rho\left(z\right) \Rightarrow T = T\left(z\right)$$

Es decir,

$$\text{Equilibrio mecánico en campo gravitatorio} \Rightarrow p, \rho, T = f\left(z\right)$$

Masa muy grande de fluido (unidas por la atracción gravitatoria). En este caso consideramos una masa muy grande de fluido que se mantiene unido mediante la atracción gravitatoria (como una estrella). Si ϕ es el potencial gravitatorio newtoniano, satisface la ecuación diferencial

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{1.3.5}$$

donde G es la constante de la gravitación de Newton. La aceleración gravitatoria será $\mathrm{g} = -\mathbf{grad}\phi$, por lo que la ecuación de Euler (1.3.1) en este caso queda:

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p = -\mathbf{grad}\phi$$

Tomando la divergencia

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p\right) = -\Delta\phi = -4\pi G\rho \tag{1.3.6}$$

Obtenemos la ecuación que nos da el equilibrio mecánico de la estrella (aunque no presupone la existencia de equilibrio térmico completo).

Si el cuerpo no está girando, será esférico y tanto las distribuciones de presión y densidad serán esféricas, por lo que la ecuación (1.3.6) quedará

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{1.3.7}$$

1.4. Caso en que la convección está ausente (G)

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico.

$$\text{Equilibrio mecánico} \nRightarrow \text{Equilibrio térmico}$$

Si el fluido verifica la ecuación (1.3.1) pero el fluido no está en equilibrio térmico, el equilibrio mecánico sólo es estable si se dan ciertas condiciones.

En caso contrario, el equilibrio es inestable, de manera que se producen corrientes de fluido que tienden a mezclarlo, igualando la temperatura hasta que se alcanza el equilibrio térmico; este movimiento se denomina **convección**. La condición para que el equilibrio mecánico sea estable es la ausencia de convección.

$$\text{Equilibrio estable} \iff \nexists \text{ convección}$$

Para que el equilibrio sea estable es necesario (pero no suficiente) que la fuerza sobre el elemento que se desplaza tienda a devolverlo a su lugar inicial. Es decir, que el fluido desplazado tiene que ser más pesado que el volumen que ha ocupado su lugar. Si $V(p,s)$ es el volumen del elemento a una altura z (donde p y s son la presión y entropía de equilibrio a la altura z) y el desplazamiento es adiabático, el elemento en su nueva posición tiene $V(p',s)$, con $p' = p(z+\xi)$ (situación (1) en la figura (1)). El elemento de volumen en equilibrio en $z+\xi$ es $V(p',s')$ (con $s' = s(z+\xi)$). Así, la condición de equilibrio es

$$V(p',s') - V(p',s) > 0$$

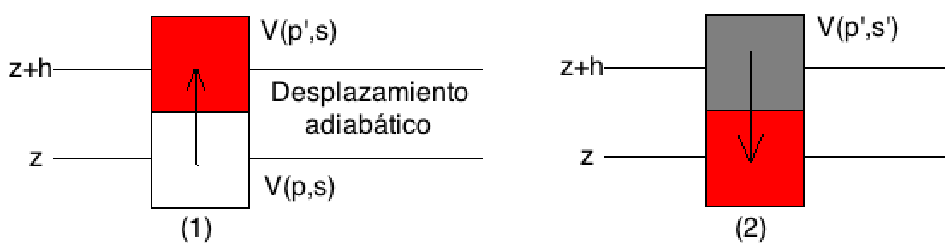

FIGURA 1. Condición de equilibrio: el elemento que ha sido desplazado (gris oscuro) debe ser más pesado que el elemento que lo desplaza (en rojo), de manera que tiende a devolverlo a su posición inicial, manteniendo el equilibrio y evitando las corrientes de convección.

Desarrollando en serie de potencias $s' - s = \xi\frac{ds}{dz}$ de donde obtenemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \tag{1.4.1}$$

Las fórmulas de la termodinámica dan:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

en donde c_p es el calor específico a presión constante. c_p y T son positivos, de manera que (1.4.1) puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \tag{1.4.2}$$

La mayoría de las sustancias se dilatan cuando se calientan, es decir, $(\partial V/\partial T)_p > 0$ así que la condición de ausencia de convección se reduce a

$$\frac{ds}{dz} > 0 \tag{1.4.3}$$

que la entropía aumente con la altura.

A partir de aquí encontramos la condición para el gradiente de temperaturas. Desarrollando ds/dz

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0$$

Usando la expresión dada en (1.3.4) $\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V}$ se obiene

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.4.4}$$

En resumen, un fluido en equilibrio mecánico verifica la ecuación (1.3.1). Si no está en equilibrio térmico, el equilibrio será estable en ausencia de convección. La convección se puede dar si

$$\begin{cases} T \downdownarrows & \text{cuando } z \upuparrows \\ \frac{dT}{dz} > & -\frac{gT}{c_p V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \end{cases}$$

1.5. Ecuación de Bernoulli (G)

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se simplifican en el caso de un flujo estacionario. Un **flujo** es **estacionario** si la velocidad es constante en el tiempo en todo el fluido.

$$\text{Flujo estacionario} \iff \begin{matrix} \mathbf{v} \neq f(t) \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) \end{matrix} \iff \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

En esta situación la ecuación de Euler (en versión termodinámica) *tuneada* con la relación del análisis vectorial (1.2.8) queda

$$\frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,w \tag{1.5.1}$$

Introducimos el concepto de **línea de corriente**: la tangente en cualquier punto a una línea de corriente indica la dirección de la velocidad en ese punto. Estas líneas quedan determinadas por las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{1.5.2}$$

En flujo estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo y coinciden con la trayectoria de las partículas (cosa que no sucede en flujo no estacionario).

Hacemos el producto escalar de la ecuación (1.5.1) con un vector unitario l tangente a la línea de corriente. La proyección del gradiente en una dirección es la derivada en esa dirección, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{l}\cdot\mathbf{grad}\, w \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial l} \\ \mathbf{v}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\perp\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}\parallel\mathbf{l} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{l}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

Así que la ecuación (1.5.1) queda como

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) = 0$$

De manera que

$$\frac{1}{2}v^2 + w = constante \quad \text{a lo largo de una línea de corriente} \tag{1.5.3}$$

(La constante es diferente en cada línea de corriente). La ecuación anterior es la **ecuación de Bernoulli**.

Flujo estacionario en un campo gravitatorio. Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, tenemos que sumar la gravedad g al segundo miembro de la ecuación (1.5.1). Si la dirección de la gravedad es el eje z, entonces el ángulo formado por g y l es la derivada -dz/dl, por lo que la proyección de g sobre l es $-g\frac{dz}{dl}$ y la ecuación de Bernoulli en un campo gravitatorio resulta:

$$\frac{1}{2}v^2 + w + gz = constante \tag{1.5.4}$$

1.6. Flujo de energía (B)

Seleccionamos un volumen fijo cualquiera y estudiamos cómo varía la energía del fluido con el tiempo. Si la energía del volumen seleccionado es $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon$ (energía cinética e interna, donde ϵ es la energía interna por unidad de masa), estamos interesados en calcular

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right)$$

Para ello, nos centraremos en cada término por separado.

Término $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = \frac{1}{2}v^2\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

O utilizando la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación de Euler (1.2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\frac{1}{2}v^2 \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, p - \rho\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$$

Y ahora el último término lo modificamos:

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{grad} v^2$$

Y para $\mathbf{grad}\, p$ usamos la relación termodinámica $dw = Tds + \frac{1}{\rho}dp$, con lo que

$$\mathbf{grad}\, p = \rho\mathbf{grad}\, w - \rho T\mathbf{grad}\, s$$

con lo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) &= -\frac{1}{2}v^2 \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, w + \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, w + \rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, s - \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \\ &= -\frac{1}{2}v^2 \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) + \rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, s\end{aligned}$$

Término $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon)$. Utilizamos la relación termodinámica

$$d\epsilon = Tds - pdV = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

Como $\epsilon + \frac{p}{\rho}$ es la entalpía por unidad de masa

$$d(\rho\epsilon) = \rho d\epsilon + \epsilon d\rho = w\, d\rho + \rho T\, ds$$

y por tanto

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = w\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t}$$

Utilizamos la ecuación de continuidad (1.1.2) y la ecuación adiabática general (1.2.4)[3] para obtener

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = -w\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) - \rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad} s$$

Combinando los resultados para los dos términos tenemos finalmente para la variación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = -\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right)\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right)$$

[3]La “ecuación de continuidad de la entropía”.

o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)=-\mathrm{div}\left(\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right) \tag{1.6.1}$$

Integrando esta expresión respecto al volumen considerado tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon\right)dV &= -\int \mathrm{div}\left(\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right)dV= \\ &= -\oint \rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\cdot d\mathbf{f} \qquad (1.6.2)\end{aligned}$$

Como vemos, el primer miembro es la variación de energía del fluido por unidad de tiempo mientras que el segundo término es la energía que sale del volumen. Por tanto,

$$\text{Densidad de flujo de energía} \qquad \rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right) \tag{1.6.3}$$

1.7. Flujo de impulso (B)

Hacemos los mismos razonamientos que en la secció anterior, pero interesándonos en la cantidad de movimiento del fluido. El impulso por unidad de volumen es $\rho\mathbf{v}$, de manera que buscamos $\partial\left(\rho\mathbf{v}\right)/\partial t$ (usando notación tensorial):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right)=\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Usamos la ecuación de continuidad (1.1.2) en la forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v_i\right)}{\partial x_i}=0$$

y la ecuación de Euler (1.2.1) en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right) &= -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-v_i\frac{\partial\left(\rho v_k\right)}{\partial x_k}= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho v_i v_k\right)\end{aligned}$$

Reescribimos el primer término del segundo miembro como

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}=\delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

y finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right)=-\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.7.1}$$

donde Π_{ik} es el tensor simétrico:

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{1.7.2}$$

Como antes, integrando sobre todo el volumen considerado tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV &= -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = \\ &= -\oint \Pi_{ik} df_k \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

El primer miembro es la variación de la componente i del impulso en el volumen, y por tanto, el segundo miembro es la cantidad de impulso que atraviesa la superficie por unidad de tiempo. Si escribimos $df_k = n_k df$ donde $\mathbf{n}$ es un vector normal a la superficie (apuntado hacia afuera), $\Pi_{ik}n_k = pn_i + \rho v_i v_k n_k$, o de forma vectorial:

$$\Pi = p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) \tag{1.7.4}$$

Así, Π_{ik} es la componente i de impulso que fluye a través del área perpendicular al eje k de la superficie por unidad de tiempo. Π_{ik} se denomina **tensor de densidad de flujo de impulso**.

1.8. Conservación de la circulación (G)

La integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}$$

a lo largo de un contorno cerrado se denomina **circulación de la velocidad**.

Consideramos la circulación sobre contorno fluido en un instante determinado. Queremos saber qué ocurre a medida que pasa el tiempo. Como el contorno se ha tomado sobre partículas del fluido, el contorno se despalza con éstas, por lo que queremos averiguar:

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}$$

Tomamos la derivada total porque debemos tener en cuenta tanto la variación de la velocidad como el de $d\mathbf{l}$, al desplazarse el contorno con las partículas. Así[4]:

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{l} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{l} + \oint \mathbf{v}\cdot\frac{d\delta\mathbf{l}}{dt}$$

Nos concentramos en el segundo término:

$$\mathbf{v}\cdot\frac{d\delta\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v}\cdot\delta\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v} = \delta\left(\frac{1}{2}v^2\right) \Rightarrow \oint\delta\left(\frac{1}{2}v^2\right) = 0$$

[4]Utilizamos δ para distinguir el diferencial de la derivada y no liarnos.

Pero la integral a lo largo de un camino cerrado de una diferencial total es cero, así que

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot\delta l = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{l}$$

Utilizando el teorema de Stokes $\int_S \mathbf{rot}\,(\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$, de manera que:

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\cdot d\mathbf{f}$$

Finalmente, teniendo en cuenta $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}w$, y que el rotacional de un gradiente es cero[5] tenemos:

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\cdot d\mathbf{f} = \int_S \mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}w)\cdot d\mathbf{f} = 0$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = constante \tag{1.8.1}$$

En un fluido ideal, la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno *fluido* cerrado es constante en el tiempo (Teorema de Kelvin o Ley de conservación de la circulación).

Hemos utilizado la ecuación de Euler 1.2.7, en la que interviene que el flujo es isoentrópico, por lo que **el resultado no es válido si el fluido no es isoentrópico**.

1.9. Flujo potencial (G)

Suponemos un flujo estacionario. Consideramos una línea de corriente de la que sabemos que, en un determinado punto tiene vorticidad cero $\omega \equiv \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$. Si elegimos un camino cerrado alrededor de la línea de corriente, la circulación de la velocidad será

$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_S \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f} = \int_S \omega\cdot d\mathbf{f} = 0$$

Es decir, vemos que la circulación es cero. A medida que el contorno se mueve con el fluido siguiendo la línea de corriente, la ley de conservación de la circulación nos dice que este valor no se altera, por tanto, la vorticidad ω también también se mantendrá igual a cero a lo largo de toda la línea de corriente.

[5] Si el fluido ideal está sometido a un campo gravitatorio $\mathbf{g}$ también se verifica la ley de conservación de la circulación, porque $\mathbf{rot}\,\mathbf{g} = 0$.

Por tanto, si $\omega = \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$ en un punto de la línea de corriente, es igualmente cero en toda la línea de corriente.

$$\omega\,(x) = 0 \Rightarrow \omega\,(x') = 0 \quad \forall x' \in \text{línea de corriente}$$

Consideramos un flujo estacionario incidiendo sobre un cuerpo. Como el flujo es uniforme en el infinito, su velocidad $\mathbf{v}$ es una constante, de manera que $\omega = 0$ en todas las líneas de corriente. Con el resultado anterior se concluye entonces que $\omega = 0$ para todas las líneas de corriente del fluido, o lo que es lo mismo, $\omega = 0$ en todo el fluido.

$$\text{Flujo estacionario} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \omega\,(\infty) = 0 \quad \forall \text{ líneas de corriente} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega = 0 \quad \text{todo el fluido}$$

Un flujo en el cual $\omega = 0$ en todo el espacio se denomina **flujo potencial** o **flujo irrotacional**. Por el contrario, un flujo en el que ω no es nula en todos los puntos se denomina **flujo rotacional**.

Si en un instante determinado tenemos un flujo potencial en todo el volumen del fluido. Entonces, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno cerrado cualquiera será cero. Por la ley de conservación de la circulación, también será cero en cualquier instante futuro, por lo que si existe un flujo potencial en un instante cualquiera, tendremos un flujo potencial en cualquier instante futuro.

$$\begin{array}{c} \text{Flujo potencial en } t \text{(en todo el fluido)} \\ \Downarrow \\ \text{Flujo potencial } \forall \text{ t'>t} \end{array} \qquad \oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = const \quad \forall \text{ contorno cerrado}$$

De hecho, esto coincide con el hecho de que si $\omega = 0$, entonces la ecuación de Euler (en función sólo de la velocidad) 1.2.9 se satisface automáticamente.

Todas estas conclusiones tienen validez limitada.

El resultado de que la vorticidad $\omega = 0$ para toda línea de corriente no es válida para líneas de corriente contenidas en la superficie de un sólido junto al cual circula un flujo. La presencia del cuerpo sólido impide construir un contorno cerrado alrededor de la línea de corriente. Las ecuaciones del movimiento admiten soluciones en las que se produce una separación en la superficie del cuerpo: algunas líneas de corriente que han seguido la superficie del cuerpo empiezan a separarse de ella y siguen dentro del fluido. El flujo se caracteriza por una superficie de discontinuidad tangencial que sale del cuerpo. En esta superficie una capa se desliza

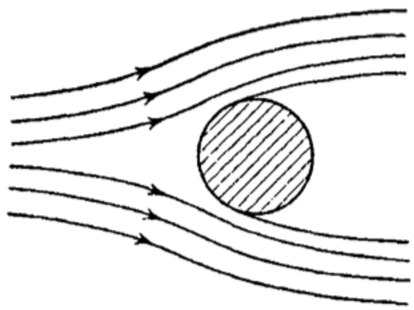

FIGURA 2. Separación sobre la superficie de un cuerpo sólido junto al que circula un flujo

sobre la otra. Desde el punto de vista matemático la discontinuidad en la componente tangencial corresponde a una superficie en la cual la vorticidad ω es nula.

Si incluimos estos flujos discontinuos, la solución de las ecuaciones de movimiento para un fluido ideal la solución no es única; sin embargo todas las soluciones discontinuas no tienen significado físico ya que las discontinuidades tangenciales son inestables y el flujo se haría turbulento.

El problema físico real del flujo alrededor de un cuerpo tiene una solución única. Esta solución única viene determinada por las propiedades de la **capa límite**. Esta capa límite es una capa delgada de fluido que circula junto al cuerpo. Como los fluidos ideales no existen, todos tienen una cierta viscosidad, aunque sea pequeña. En esta capa cercana a cuerpo la viscosidad no puede despreciarse. En función de las características de esta capa, se selecciona una de las infinitas soluciones de las ecuaciones de movimiento para un fluido idea. Así, siempre despreciaremos las soluciones que dan lugar a separación ya que si hay separación se producirá turbulencia.

El estudio de las soluciones de las ecuaciones de movimiento para un flujo estacionario continuo que circula junto a cuerpos en movimiento aporta resultados interesantes para cuerpos de forma *aerodinámica*. En estos casos el flujo difiere muy poco de un flujo potencial, excepto en una capa límite y en una *estela* estrecha detrás del mismo.

Otro caso en el que es importante el estudio del flujo potencial es cuando existen oscilaciones pequeñas de un cuerpo inmerso en un fluido. De hecho, si la amplitud a de las oscilaciones es pequeña comparadas con la dimensión l del cuerpo $(a \ll l)$, el flujo que circula junto al cuerpo es potencial.

$$\text{Flujo potencial} \iff \begin{cases} \text{Formas aerodinámicas} & \text{(excepto en capa límite y estela)} \\ \text{Cuerpo oscilando} & a_{osc} \ll l_{cuerpo} \text{ (osc. pequeñas)} \end{cases}$$

La velocidad $\mathbf{v}$ varía apreciablemente en una cantidad del mismo orden que la velocidad $\mathbf{u}$ del cuerpo oscilante a lo largo de una longitud del orden de la dimensión l del cuerpo $\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \equiv \mathbf{grad}\,\mathbf{v} \sim \frac{u}{l}$. La magnitud de $\mathbf{v}$ es del orden de u (a pequeñas distancias del cuerpo), de manera que

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} \sim \frac{u^2}{l}$$

La derivada $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \omega u$, donde ω es la frecuencia de las oscilaciones. Y como $\omega \sim u/a$, tenemos $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \frac{u^2}{a}$. Como nos centramos en oscilaciones pequeñas, $a \ll l$, $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ y puede despreciarse, por lo que la ecuación de Euler queda:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad} w$$

Tomando el rotacional en ambos miembros

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{grad} w) = 0 \Rightarrow \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = constante$$

Pero en un movimiento oscilante el promedio temporal de la velocidad es cero, por lo que $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ = Vorticidad $= \omega = constante = 0$. Por tanto, en primera aproximación

$$\text{Cuerpo oscilante} \iff \text{Flujo potencial}$$

Propiedades del flujo potencial. La ley de conservación de la circulación se basa en que el flujo es isoentrópico. Sólo el flujo isoentrópico puede ser potencial. Usando el teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}$$

Para un flujo potencial $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$ (vorticidad), por lo que

$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{1.9.1}$$

Es decir, la circulación alrededor de cualquier contorno cerrado es nula $\Rightarrow$ no pueden existir líneas de corriente cerradas en un flujo potencial. Como la dirección de una línea de corriente es en todos los puntos la dirección de la velocidad, la circulación a lo largo de esta línea no puede ser cero (pues significaría que no hay flujo, que el fluido está estático).

Si tenemos un campo vectorial con un rotacional cero, la velocidad en el flujo potencial puede expresarse como gradiente de un escalar; en este caso se denomina **potencial de velocidad**.

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi \tag{1.9.2}$$

Escribiendo la ecuación de Euler en la forma 1.2.8

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{grad}v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{grad}w$$

y sustituyendo $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi$ tenemos

$$\mathbf{grad}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + w\right) = 0$$

de donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + w = f\,(t) \tag{1.9.3}$$

donde $f\,(t)$ es una función arbitraria del tiempo. Como la velocidad es la derivada espacial de ϕ podemos sumar ϕ a cualquier función del tiempo; cambiando ϕ por $\phi + \int f\,(t)\,dt$ tenemos cero en el segundo miembro de (1.9.3)

En el caso de un flujo estacionario (considerando ϕ independiente del tiempo), $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, $f\,(t) = constante$ y entonces (1.9.3) se transforma en la **ecuación de Bernoulli.**

$$\frac{1}{2}v^2 + w = constante \tag{1.9.4}$$

1.10. Fluidos incompresibles (G)

En muchos fluidos la densidad se puede considerar constante $\rho = const$, es decir, no se observa ninguna compresión/diletación apreciable en todo el fluido. En este caso denominamos al **fluido incompresible**. En este caso las ecuaciones de la dinámica se simplifican mucho.

$$\text{Flujo incompresible} \iff \left\{ \begin{array}{c} \nexists \text{ compresión} \\ \nexists \text{ dilatación} \end{array} \right. \iff \rho = constante$$

En esta situación las ecuaciones de la dinámica se simplifican mucho.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{g} \tag{1.10.1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.10.2}$$

En el caso de la ecuación de Euler podemos incluir ρ denro del operador gradiente, mientras que en el caso de la ecuación de continuidad queda muy simplificada.

Como la densidad deja de ser una variable desconocida, las ecuaciones de la dinámica pueden considerarse como un conjunto de ecuaciones en el que sólo es necesario especificar la velocidad:

$$\text{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.10.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = \mathbf{rot}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) \tag{1.10.4}$$

En este caso la ecuación de Bernoulli también puede escribirse de manera más sencilla. La ecuación (1.10.1) difiere de la ecuación de Euler (1.2.7), en general, en que hay que escribir **grad** (p/ρ) en lugar de **grad**w. Por tanto, podemos escribir la ecuación de Bernoulli cambiando la entalpía en (1.5.4) por p/ρ

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = constante \tag{1.10.5}$$

En el caso de un fluido incompresible también podemos escribir p/ρ en lugar de w en la expresión (1.6.3) que da el flujo de energía

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right) \tag{1.10.6}$$

Sabemos de la termodinámica que la variación de la energía interna es:

$$d\epsilon = Tds - pdV$$

que en el caso de $s = const$ y $V = 1/\rho = const$ resulta en $d\epsilon = 0 \Rightarrow \epsilon = const$. Como los términos constantes en la energía no tienen importancia, podmeos omitir ϵ en $w = \epsilon + p/\rho$.

Las ecuaciones todavía se simplifican más en el caso de un flujo potencial de fluido incompresible.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Flujo potencial} & \Longleftrightarrow & \omega = 0 = \mathbf{rot}\,\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi \\
\text{Fluido incompresible} & \Longleftrightarrow & \rho = const \\
 & \Downarrow & \\
\text{Ecuación de Euler} & \rightarrow & \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = \mathbf{rot}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) \Rightarrow 0 = 0 \\
\text{Ecuación de continuidad} & \rightarrow & \text{div}\mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi \Rightarrow \Delta\phi = 0
\end{array}$$

Es decir, sólo tenemos que resolver la ecuación de Laplace para el potencial ϕ.

$$\Delta\phi = 0 \tag{1.10.7}$$

Debemos completar las ecuaciones anteriores con condiciones límite en las superficies en las que el fluido se encuentra con cuerpos sólidos:

$$\begin{aligned} v_n^{fluido} &= v_n^{superficie} = \begin{cases} v_n^{fluido} = 0 & \text{Superficie fija} \\ v_n^{fluido} = v_n^{sup} = f(t) & \text{Superficie móvil} \end{cases} \\ v_n &= \frac{\partial \phi}{\partial n} \end{aligned}$$

En general la velocidad normal es la derivada en la dirección normal a la superficie del potencial ϕ, por lo que en general las condiciones límite son una determinada función de las coordenadas y del tiempo en los límites.

En el caso del flujo potencial la velocidad está relacionada con la presión mediante la ecuación (1.9.3). En un fluido incompresible, podemos sustituir w por p/ρ, de manera que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t) \tag{1.10.8}$$

Observamos la siguiente propiedad de un flujo potencial de un fluido incompresible; si el cuerpo sólido está en movimiento a través del fluido y resulta en un flujo potencial, en un instante cualquiera sólo depende de la velocidad del cuerpo móvil (y no, por ejemplo, de su aceleración). La ecuación de Laplace para el potencial (1.10.7) no depende explícitamente del tiempo, que sólo entra en la solución a través de las condiciones límite (y éstas sólo contiene la velocidad del cuerpo). A partir de la ecuación de Bernoulli observamos que en el flujo estacionario de un fluido incompresible la presión máxima se presenta en puntos donde la velocidad se anula $v = 0$

$$p = \rho \times const - \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow p^{max} = \rho \times const$$

Este punto normalmente está en la superficie del cuerpo a lo largo del cual se está moviendo el fluido (el punto O de la figura (3)) y se denomina **punto de estancamiento**. Si u es la velocidad de la corriente incidente (es decir, la velocidad $\mathbf{u}(\infty)$ y $p_0 = p(\infty)$), la presión en el punto de estancamiento es

$$p_{max} = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2 \tag{1.10.9}$$

Flujo bidimensional. Si la distribución de velocidades en un fluido móvil sólo depende de dos coordenadas y la velocidad en todas partes es paralela al plano xy entonces el flujo se denomina **bidimensional** o **flujo plano**. En este caso es conveniente expresar la velocidad en función de lo que se denomina **función de corriente** $\psi(x, y)$. Apartir de la ecuación

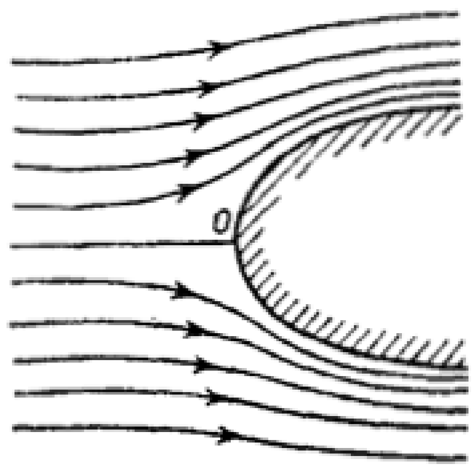

FIGURA 3. Punto de estancamiento

de continuidad $\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$, de manera que las componentes de la velocidad se pueden escribir como

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.10.10}$$

De esta manera la ecuación de continuidad se satisface automáticamente. Por lo que entonces sólo nos queda obtener la ecuación de Euler (1.10.4) en función de la función de corriente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi = 0 \tag{1.10.11}$$

Es decir, que si conocemos la función de corriente ψ podemos determinar inmediatamente la forma de las líneas de corriente en un flujo estacionario. La ecuación diferencial de la línea de corriente (en flujo bidimensional) es $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow v_y dx - v_x dy = 0$, expresa el hecho de la dirección de la tangente a una línea de corriente es la dirección de la velocidad. Sustituyendo (1.10.10) tenemos

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{dy}dy = d\psi = 0$$

de donde $\psi = constante$. Es decir, las líneas de corriente son la familia de curvas obtenidas haciendo la función de corriente $\psi(x, y)$ igual a una constante arbitraria.

El flujo de masa Q entre dos puntos fijos en el plano xy viene dado por la diferencia de la función de corriente entre estos dos puntos, independientemente de cuál sea la curva que una los puntos. Si v_n es la componente de la velocidad normal a la curva en un punto cualquiera, entonces:

(1.10.12)
$$Q = \rho \oint_A^B v_n dl = \rho \oint_A^B (-v_y dx + v_x dy) = \rho \int_A^B d\psi \Rightarrow Q = \rho\,(\psi_B - \psi_A)$$

Existen potentes métodos para resolver problemas de flujo potencial bidimensional en el caso de un fluido incompresible que rodea a cuerpos de diversos perfiles en los que interviene la teoría de funciones de variable compleja.

En cuanto a la condición para que un fluido pueda considerarse incompresible, está relacioanda con la velocidad del sonido c en el fluido. Cuando la presión varía en Δp, la densidad lo hace en $\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \Delta p$. Pero según la ecuación de Bernoulli, en flujo estacionario, $\Delta p \sim \rho v^2$, de manera que $\Delta\rho \sim \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \rho v^2$. Más adelante veremos que $\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s = c^2$, de manera que al final

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\rho}{\rho} &\ll 1 \iff \text{Fluido incompresible (flujo estacionario)} \\ v &\ll c \end{aligned} \tag{1.10.13}$$

es decir, que considerar al fluido incompresible es equivalente a que la velocidad del fluido sea pequeña en comparación con la del sonido en el fluido. Pero esta condición sólo es suficiente en flujo estacionario. Cuando el flujo no es estacionario necesitamos una condición adicional. Si τ y l es un tiempo y una longitud del orden de los tiempos y distancias en lo que la velocidad del fluido sufre una variación significativa. Entonces, el fluido (en flujo no estacionario) puede considerarse incompresible si además de (1.10.13) se cumple

$$\tau \gg \frac{l}{c} \tag{1.10.14}$$

La condición (1.10.14) indica que el tiempo $\frac{l}{c}$ que tarda una señal sonora en recorrer la distancia l debe ser pequeño en comparación con el tiempo τ durante el cual el flujo varía apreciablemente. De esta manera las interacciones en el fluido pueden considerarse instantáneas.

Si se satisfacen simultáneamente las condiciones (1.10.13) y (1.10.14) el fluido puede considerarse incompresible:

$$\text{Fluido incompresible} \iff \begin{cases} v \ll c \\ \tau \gg \frac{l}{c} \end{cases}$$

1.11. Fuerza de arrastre en un flujo potencial que rodea un cuerpo

En esta sección nos preocupamos del problema de un flujo potencial de un fluido incompresible que rodea un cuerpo sólido. Ésto es equivalente a un problema con el cuerpo en movimiento y el fluido en reposo. Lo único que tenemos que hacer es cambiar a un sistema de referencia en el que el fluido esté en reposo en el infinito. **A partir de ahora consideramos que es el cuerpo el que se mueve a través del fluido**.

FIGURA 4. a) Flujo alrededor de un cuerpo en reposo
b) Cuerpo en movimiento a través de un fluido estático

El flujo potencial de un fluido incompresible satisface la ecuación de Laplace $\Delta\phi = 0$. Las soluciones que buscamos deben anularse en el infinito, ya que allí el fluido está en reposo. El origen de nuestro sistema de referencia está en algún punto en el interior del cuerpo. La solución de la ecuación de Laplace es de la forma $\frac{1}{r}$ y derivadas espaciales de $1/r$ de cualquier orden:

$$\phi = -\frac{a}{\mathbf{r}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}\frac{1}{\mathbf{r}} + \cdots$$

donde $a, \mathbf{A}$ son independientes de $\mathbf{r}$.

La constante a debe ser cero. Si $\phi = -\frac{a}{r}$, entonces $\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\frac{a}{\mathbf{r}} = \frac{a}{r^3}\mathbf{r}$. Pero en este caso, si calculamos el flujo de masa a través de una superficie cerrada, por ejemplo una esfera de radio R vemos que es $\rho\frac{a}{R^2}4\pi R^2 = 4\pi\rho a$. Pero para un fluido incompresible, la cantidad de fluido que entra en la superficie debe ser igual a la que sale, es decir, que el flujo de masa debe ser cero. Por ello, la única solución es que $a = 0$.

Velocidad a grandes distancias del cuerpo. Como estamos buscando la velocidad a distancias grandes del cuerpo, podemos despreciar las derivadas de orden superior y quedarnos sólo con el primer término.

$$\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}\frac{1}{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{A}}{r^2} \cdot \mathbf{n} \tag{1.11.1}$$

y la velocidad resultante

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{grad}\frac{1}{\mathbf{r}} = \frac{3\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}-\mathbf{A}}{r^3} \tag{1.11.2}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unidad en la dirección de $\mathbf{n}$. El vector $\mathbf{A}$ depende de la forma real y la velocidad del cuerpo y sólo puede determinarse resolviendo por completo la ecuación de Laplace a todas las distancias (con las condiciones límite apropiadas en la superficie del cuerpo.

Relación de $\mathbf{A}$ con el impulso y la energía del fluido. La energía cinética del fluido (la energía interna de un fluido incompresible siempre es constante) es $E = \int \frac{1}{2}\rho v^2 dV$, integrando para toda la región exterior al cuerpo. Elegimos una esfera de radio R y volumen V (después haremos tender $R \to \infty$).

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int (\mathbf{v}+\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dV$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad del cuerpo. Como $\mathbf{u}$ es independiente de las coordenadas, $\int u^2 dV = u^2 \int dV = u^2\,(V - V_0)$, donde V_0 es el volumen del cuerpo. En cuanto al segundo término, escribimos $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi$ y $\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})$, de manera que $\mathbf{v}+\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,(\phi + \mathbf{u}\cdot\mathbf{r})$

$$\int \mathbf{grad}\,(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,dV$$

Utilizamos la identidad vectorial

$$\mathrm{div}\,(f\mathbf{A}) = \mathbf{grad}f\cdot\mathbf{A} + f\mathrm{div}\mathbf{A}$$

de manera que el integrando se transforma en

$$\mathrm{div}\,[(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{v}-\mathbf{u})] + (\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,(\mathbf{v}-\mathbf{u})$$

Pero $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$ (ecuación de continuidad) y $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$, $\mathrm{div}\,(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = 0$. Así que

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int div\,[(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{v}-\mathbf{u})]\,dV$$

Y utilizando el teorema de la divergencia, transformamos el segundo término en una integral de superficie.

$$\int div\,[(\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{v}-\mathbf{u})]\,dV = \oint_{S+S_0} (\phi+\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot d\mathbf{f}$$

Pero en la superficie del cuerpo, por las condiciones límite, las componentes normales de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ son iguales, por lo que la integral $\oint_{S_0}$ se anula. Para la superficie S, sustituimos las expresiones para ϕ y $\mathbf{v}$ que hemos encontrado en (1.11.1) y (1.11.2), con lo que obtenemos:

$$\int v^2 dV = u^2 \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - V_0 \right) + \int \left[3\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\right) - \left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}^2 R^3\right) \right] do$$

donde hemos escrito $d\mathbf{f} = \mathbf{n}R^2 do$ y do es un elemento de ángulo sólido.

Al final de la integración, obtenemos para la energía total del fluido

$$E = \frac{1}{2}\rho\left(4\pi\mathbf{A}\cdot\mathbf{u} - V_0 u^2\right) \tag{1.11.3}$$

Aunque no podemos obtener $\mathbf{A}$ sin resolver la ecuación $\Delta\phi = 0$, sabemos que la ecuación es lineal en ϕ y que las condiciones límite también son ecuaciones lineales en ϕ y $\mathbf{u}$. Por tanto $\mathbf{A}$ tiene que ser una función lineal de las componentes $\mathbf{u}$. Y la energía, como hemos visto en (1.11.3) es cuadrática de las componentes de $\mathbf{u}$, así que podemos escribir

$$E = \frac{1}{2} m_{ik} u_i u_k \tag{1.11.4}$$

donde m_{ik} es es **tensor de masas asociadas**, simétrico y constante, cuyas componentes se pueden obtener a partir de $\mathbf{A}$.

Como E y $\mathbf{P}$ (el impulso total del fluido) están relacionados mediante $dE = \mathbf{u}\cdot d\mathbf{P}$ [6], entonces podemos escribir las componentes de $\mathbf{P}$ como

$$P_i = m_{ik} u_k \tag{1.11.5}$$

Y combinando (1.11.3), (1.11.4) y (1.11.5) vemos que $\mathbf{P}$ tiene que venir dado, en función de $\mathbf{A}$ por

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_0 \mathbf{u} \tag{1.11.6}$$

El impulso transmitido al fluido por el cuerpo por unidad de tiempo es $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$, es decir, la fuerza que actúa sobre el cuerpo

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{1.11.7}$$

La componente de $\mathbf{F}$ paralela a la velocidad del cuerpo se denomina **fuerza de arrastre** y la componente perpendicular **fuerza de sustentación**.

1.12. Ondas de gravedad

La superficie de un fluido en equilibrio en un campo gravitatorio es plana. Si una fuerza externa perturba la superficie y hace que se separe de la posición de equilibrio, aparece un movimiento en el fluido. Este movimiento se propaga por toda la superficie mediante lo que se denominan **ondas de gravedad** (ya que se deben a la acción del campo gravitatorio).

[6] $E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow dE = \frac{1}{2}m2\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v} = m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot d\left(m\mathbf{v}\right) = \mathbf{v}\cdot d\mathbf{P}$

Las ondas de gravedad afectan tanto a la superficie del fluido como a su interior, aunque su efecto es menor a medida que aumenta la profundidad.

Consideramos ondas de gravedad en las que la velocidad de las partículas del fluido móvil sea pequeña, de manera que

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v} \ll \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \iff a \ll \lambda \tag{1.12.1}$$

es decir, que la amplitud de las oscilaciones de la onda a debe ser pequeña comparada con su longitud de onda λ. En la sección (1.9), si despreciar el término $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\, \mathbf{v}$ es equivalente a suponer que tenemos un flujo potencial. Si además consideramos que el fluido es incompresible, podemos utilizar la ecuación de Laplace para el potencial (1.10.7) y (1.10.8), que relaciona la velocidad y la presión. En esta ecuación podemos desprecial el término $\frac{1}{2}v^2$ porque contiene el cuadrado de la velocidad. Hacemos $f(t) = 0$ e incluimos el término $\rho g z$ introducido por el campo gravitatorio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + gz &= f(t) \\ \frac{1}{2}v^2 &\to 0 \\ f(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{1.12.2}$$

Tomamos el eje z vertical, con el plano xy coincidiendo con la superficie de equilibrio del fluido y designamos ζ la coordenada z de un punto de la superficie. Como en equilibrio $\zeta = 0$, ζ nos da el desplazamiento vertical de la superficie sobre sus oscilaciones. Si sobre la superficie actúa una presión constante p_0

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Consideramos un potencial $\phi' = \phi + \frac{p_0}{\rho} t$ de manera que $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi = \mathbf{grad}\phi'$, pero nos permite eliminar el término p_0 (y prescindimos de la prima en ϕ):

$$g\zeta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = 0 \tag{1.12.3}$$

Como la amplitud de las oscilaciones de las ondas es pequeña, el desplazamiento ζ también es pequeño. En el mismo orden de aproximación suponemos que la componente vertical de la velocidad de los puntos de la superficie en la superficie es $v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, pero a su vez, $v_z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta}$, así que

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta}$$

Si despejamos ζ de la ecuación (1.12.3) y la introducimos en esta igualdad

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta}\right)=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta}=0$$

Como las oscilaciones ζ son pequeñas, $z=\zeta\sim z=0$, de manera que las ecuaciones que debemos resolver para determinar el movimiento de una superficie bajo la acción de un campo gravitatorio es:

$$\Delta\phi = 0 \tag{1.12.4}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \tag{1.12.5}$$

Supondremos que la superficie del fluido es ilimitada y que λ es pequeña comparada con la profundidad del fluido, así que podemos omitir las condiciones límite en los bordes y en la parte inferior.

Consideramos una onda de gravedad que se propaga a lo largo del eje x y que es uniforme en la dirección y (por lo que todas las magnitudes son independientes de y). Buscaremos una solución que sea una función periódica simple del tiempo y de la coordenada x

$$\phi=f(z)\cos(kx-\omega t)$$

donde

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}\qquad\lambda=\frac{2\pi}{k}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0\Rightarrow\frac{d^2f(z)}{dz^2}-k^2f(z)=0$$

Esta ecuación tiene soluciones e^{kz} y e^{-kz}. Debemos eliminar la solución e^{-kz} porque haría crecer ϕ en el interior del fluido $(z<0)$ [7]. Así que la solución es

$$f(z)=Ae^{kz}\Rightarrow\phi=Ae^{kz}\cos(kx-\omega t) \tag{1.12.6}$$

Si introducimos esta solución en la ecuación (1.12.5), que también debe satisfacerse, encontramos:

$$k-\frac{\omega^2}{g}=0\Rightarrow\omega^2=kg \tag{1.12.7}$$

[7] Es decir, si consideramos que la solución general es de la forma $f(z)=Ae^{kz}+Be^{-kz}$, tenemos una condición límite que dice que como el fluido es infinitamente profundo, $\phi(-\infty)=0\Rightarrow B=0$. O lo que es lo mismo, la perturbación de la superficie disminuye con la profundidad hasta disiparse completamente.

La ecuación (1.12.7) nos da la relación entre el número de onda y la frecuencia de la onda de gravedad.

Una vez obtenido el potencial ϕ, encontramos la distribución de velocidades,

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -Ake^{kz}\sin(kx-\omega t) \qquad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = Ake^{kz}\cos(kx-\omega t) \tag{1.12.8}$$

Más adelante se demostrará que la velocidad de propagación U de la onda viene dada por $\frac{\partial\omega}{\partial k}$; en nuestro caso:

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial\sqrt{kg}}{\partial k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \tag{1.12.9}$$

Como vemos, la velocidad de propagación aumenta con la longitud de onda λ.

1.13. Ondas de gravedad largas

> No entiendo cómo se están considerando ondas de gravedad con longitud de onda grande respecto a la profundidad pero se pueden despreciar “los términos cuadráticos de la velocidad, puesto que se supone de nuevo que es pequeña la longitud de onda” (pag 47).

1.14. Ondas en un fluido incompresible

Existe un tipo de onda de gravedad que puede propagarse en el interior de un fluido incompresible. Estas ondas se deben a una inhomogeneidad del fluido producida por el campo gravitatorio. La presión (y la entropía s) varían con la altura, por lo que cualquier desplazamiento de una partícula de fluido en altura destruye el equilibrio mecánico y produce un movimiento oscilante. El efecto, como el movimiento es adiabático, es que la partícula transporta con ella a su nueva posición toda su entropía anterior s, que no es la misma que la que corresponde al valor de equilibrio en la nueva posición.

Suponemos que la longitud de onda es pequeña en comparación con las distancias sobre las que el campo gravitatorio produce una variación notable de la densidad. También suponemos que el fluido es incompresible (podemos despreciar las variaciones producidas por la presión de la onda en la densidad). Toda la modificación de la densidad proviene de la dilatación térmica (que es la que origina la onda en este caso).

Vamos a escribir las ecuaciones hidrodinámicas para este movimiento. Utilizamos un sufijo $_0$ para distinguir los valores de las magnitudes correspondientes al equilibrio mecánico y una prima $'$ para marcar las desviaciones respecto al equilibrio.

La ecuación de conservación de la entropía $s = s_0(z) + s'$ puede escribirse, hasta primer orden

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}s_0 = 0 \tag{1.14.1}$$

En la ecuación de Euler despreciamos el término $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}$ porque las oscilaciones son pequeñas [8]. La distribución de presión en el equilibrio viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_0}\mathbf{grad}p_0 + \mathbf{g} \\ (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\,\mathbf{v}\sim 0 &\downarrow \quad \text{Oscilaciones pequeñas} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = 0 &\downarrow \quad \text{Equilibrio} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{grad}p_0 = \rho_0\mathbf{g} \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}p + \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho_0}\mathbf{grad}p' + \frac{\rho'}{\rho^2}\mathbf{grad}p_0$$

Como la variación de la densidad se debe únicamente al cambio de entropía y no a la variación de presión, podemos escribir:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s'$$

y así se obtiene entonces la ecuación de Euler en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_p s' - \mathbf{grad}\frac{p'}{\rho_0} \tag{1.14.2}$$

Podemos incluir ρ_0 bajo el operador gradiete porque siempre despreciamos la variación de la densidad de equilibrio en distancias del orden de la longitud de onda. Por esta misma razón podemos considerar constante la densidad en la ecuación de continuidad, de manera que

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.14.3}$$

Como solución de las ecuaciones (1.14.1)-(1.14.3) buscamos ondas planas, tanto para la velocidad como para s' p'te

$$\mathbf{v} = const \times e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

[8]Supongo que se refiere a que la amplitud de la onda a es pequeña comparada con la longitud de onda λ, (1.12.1).