# Homework 1

推导公式(2.14)，(2.15)

解：Schrödinger eq. $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ ①

其中 $H=\frac{1}{2\mu}(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})^2+q\varphi$

由①得 $-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = H^*\psi^*$ ②

于是 $\begin{cases}\psi^* i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \psi^* H\psi \\ -\psi\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \psi H^*\psi^*\end{cases}$

两式相减得 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = \psi^* H\psi - \psi H^*\psi^*$

$$= \psi^*\left(\frac{1}{2\mu}(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})^2\right)\psi - \psi\left(\frac{1}{2\mu}(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})^2\right)^*\psi^*$$

$$= \frac{1}{2\mu}\Big(\psi^*(-\hbar^2\nabla^2+\frac{q^2}{c^2}A^2-\frac{q}{c}(2\vec{p}\cdot\vec{A}))\psi - \psi(-\hbar^2\nabla^2+\frac{q^2}{c^2}A^2-\frac{q}{c}(2\vec{p}\cdot\vec{A}))^*\psi\Big)$$

$$= \frac{1}{2\mu}\Big(\psi^*(-\hbar^2\nabla^2-\frac{q}{c}(2\vec{p}\cdot\vec{A}))\psi - \psi(-\hbar^2\nabla^2-\frac{q}{c}(2\vec{p}\cdot\vec{A}))^*\psi^*\Big)$$

$$= \frac{1}{2\mu}\Big(-\hbar^2(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*)-\frac{2q}{c}(\psi^*\vec{p}\cdot\vec{A}\psi-\psi\vec{p}^*\cdot\vec{A}\psi^*)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\mu}\Big(-\hbar^2\vec{\nabla}\cdot(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)+\frac{2i\hbar q}{c}(\psi^*\nabla\cdot(\vec{A}\psi)+\psi\nabla\cdot(\vec{A}\psi^*))\Big)$$

$$= \frac{1}{2\mu}\Big(-\hbar^2\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)+\frac{2i\hbar q}{c}(\vec{A}\cdot\psi^*\nabla\psi+\vec{A}\cdot\psi\nabla\psi^*)\Big)$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu}\Big(-\hbar\,\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)+\frac{2iq}{c}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}(\psi^*\psi)\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) = \frac{1}{2\mu i}\Big(-\hbar\,\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)+\frac{2qi}{c}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}(\psi^*\psi)\Big)$$

$$= \frac{i\hbar}{2\mu}\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)+\frac{q}{\mu c}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}(\psi^*\psi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)+\vec{\nabla}\cdot\Big(-\frac{i\hbar}{2\mu}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)-\frac{q}{\mu c}\vec{A}(\psi^*\psi)\Big)=0$$

定义 $\rho=\psi^*\psi$, $\vec{j}=-\frac{i\hbar}{2\mu}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)-\frac{q}{\mu c}\vec{A}(\psi^*\psi)$

$$= -\frac{i\hbar}{2\mu}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)-\frac{q}{\mu c}\vec{A}\rho$$

则 $\frac{\partial}{\partial t}\rho+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$ (2.14)证毕

下证 $\vec{j}$ 的定义相当于原来的几率流定义中 $\vec{p}$ 换为机械动量：

$$\frac{1}{2\mu}\left(\psi^*\left(\vec{p}-\frac{q\vec{A}}{c}\right)\psi+\psi\left(\vec{p}-\frac{q\vec{A}}{c}\right)^*\psi^*\right)$$

$$=\frac{1}{2\mu}\left(-i\hbar\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)-\frac{2q}{c}\vec{A}(\psi^*\psi)\right)$$

$$=\frac{-i\hbar}{2\mu}\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)-\frac{q}{\mu c}\vec{A}(\psi^*\psi)$$

$$=\frac{-i\hbar}{2\mu}\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)-\frac{q}{\mu c}\vec{A}\rho$$ 与之前定义的 $\vec{j}$ 相同. (2.15)证毕.

# Homework 2

1. 推导讲义中对易式(2.38).

解: $\vec{\pi}=\vec{P}-q\vec{A}/c$

$$\forall\psi,\ [\pi_i,\pi_j]\psi=\left[P_i-\frac{qA_i}{c},\ P_j-\frac{qA_j}{c}\right]\psi$$

$$=\left(P_iP_j-\frac{q}{c}P_iA_j-\frac{q}{c}A_iP_j+\frac{q^2}{c^2}A_iA_j\right)\psi$$

$$-\left(P_jP_i-\frac{q}{c}P_jA_i-\frac{q}{c}A_jP_i+\frac{q^2}{c^2}A_jA_i\right)\psi$$

$$=(P_iP_j-P_jP_i)\psi-\frac{q}{c}(P_iA_j-A_jP_i)\psi+\frac{q}{c}(P_jA_i-A_iP_j)\psi$$

$$=-\frac{q}{c}\Big(\psi(\nabla A_j)_i+A_j(\nabla\psi)_i-A_j(\nabla\psi)_i-\psi(\nabla A_i)_j$$
$$-A_i(\nabla\psi)_j+A_i(\nabla\psi)_j\Big)(-i\hbar)$$

$$=\frac{i\hbar q}{c}\left(\psi(\nabla A_j)_i-\psi(\nabla A_i)_j\right)$$

$$=\frac{i\hbar q}{c}\left((\nabla A_j)_i-(\nabla A_i)_j\right)\psi$$

$$\Rightarrow[\pi_i,\pi_j]=\frac{i\hbar q}{c}\left((\nabla A_j)_i-(\nabla A_i)_j\right)\quad ①$$

考虑到 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\Rightarrow B_1=(\vec{\nabla}\times\vec{A})_1=\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}$

$$B_2=(\vec{\nabla}\times\vec{A})_2=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_3=(\vec{\nabla}\times\vec{A})_3=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\left|\begin{matrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{matrix}\right.$$

所以①表明 $[\pi_i,\pi_j]=\frac{i\hbar q}{c}\varepsilon_{ijk}B_k$. 其中 $\varepsilon_{ijk}$ 为三阶全反称张量. □

2. 利用该对易式，类似角动量上升下降算符，可定义产生消灭算符 $a$，$a^+$ 满足 $[a,a^+]=1$。对比谐振子哈密顿，写出 z 方向匀强磁场 B 中移动电子的能级公式。

$$E_{k,n}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

其中 $\omega=eB/mc$。

解：定义 $a=\sqrt{\frac{c}{2\hbar qB}}(\pi_x+i\pi_y)$ $\quad a^+=\sqrt{\frac{c}{2\hbar qB}}(\pi_x-i\pi_y)$

则 $[a,a^+]=\frac{c}{2\hbar qB}[\pi_x+i\pi_y,\ \pi_x-i\pi_y]$

$$=\frac{c}{2\hbar qB}\left([\pi_x,-i\pi_y]+[i\pi_y,\pi_x]\right)$$

$$=\frac{c}{2\hbar qB}\left(-i\cdot\frac{i\hbar q}{c}B-i\cdot\frac{i\hbar q}{c}B\right)$$

$$=\frac{c}{2\hbar qB}\cdot\left(\frac{2\hbar qB}{c}\right)=1\Rightarrow aa^+=a^+a+1$$

$\pi_x=\sqrt{\frac{\hbar qB}{2c}}(a+a^+)$ $\quad \pi_y=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar qB}{2c}}(a-a^+)$

$$H=\frac{1}{2\mu}\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2+q\varphi=\frac{1}{2\mu}\left(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

分离变量 $\psi=\psi(x,y)e^{ik_zz}$，z 方向自由运动，$E_z=\frac{\hbar^2k_z^2}{2\mu}$

$$H_{xy}=\frac{1}{2\mu}[\pi_x^2+\pi_y^2]=\frac{1}{2\mu}\frac{\hbar qB}{2c}[(a^2+a^{+2}+aa^++a^+a)-(a^2+a^{+2}-aa^+-a^+a)]$$

$$=\frac{\hbar qB}{2\mu c}(aa^++a^+a)=\frac{\hbar qB}{2\mu c}(2a^+a+1)$$

$$=\frac{\hbar qB}{\mu c}\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)\quad 其中\ \omega=\frac{qB}{\mu c}$$

谐振子哈密顿 $H=\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ $\quad$ 能级 $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

可见二者形式一致！于是能级公式为（对于电子，$q=e$，$\mu$ 替换为 $m$）

$$E_n=E_{zn}+E_{xyn}=\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\quad 其中\ \omega=\frac{eB}{mc}$$

# Homework 3

对称规范下，计算基态简并度。

解、基态情况下 $n_r=0$，$m=0,-1,-2,\cdots$（即 $n=0$）

故波函数中合流超几何级数项 $F(0,|m|+1,\alpha^2r^2)=1$

$dp=2\pi r|\psi|^2dr=2\pi\chi^2dr \qquad \chi=r^{|m|+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2r^2}$

在最可几半径 $r=r_{max}$ 处，$dp=2\pi\chi^2dr$ 最大

即 $\frac{d(2\pi\chi^2)}{dr}=\frac{d}{dr}(r^{2|m|+1}e^{-\alpha^2r^2})=(2|m|+1)r^{2|m|}e^{-\alpha^2r^2}$

$\qquad -2\alpha^2r\,r^{2|m|+1}e^{-\alpha^2r^2}$

$=r^{|2m|}e^{-\alpha^2r^2}(2|m|+1-2\alpha^2r^2)$ 在 $r=r_{max}$ 时为 0

$\Rightarrow r_{max}=\sqrt{\frac{2|m|+1}{2\alpha^2}}$

波函数能放在盘中的条件是 $r_{max}<R$

即 $2|m|+1<2\alpha^2R^2$

$\Rightarrow \quad |m|<\alpha^2R^2-\frac{1}{2}$

又由 $m$ 取非正整数知

$m$ 可能的取值为 $0,-1,-2,\cdots,-[\alpha^2R^2-\frac{1}{2}]$

总取值个数为 $[\alpha^2R^2-\frac{1}{2}]+1$ 即为简并度

其中方括号代表取整 $\quad \alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega_L}{\hbar}}=\sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}}$

可见基态简并度仍可写成 $\frac{BA}{hc/e}$ 的形式.

# Homework 4

1.带电粒子在互相垂直的磁场和电场中运动。求能级。

$\vec{\mathcal{E}}=(0,\mathcal{E},0)$ $\quad\vec{B}=(0,0,B)$ $\quad\phi=-\mathcal{E}y$ $\quad\vec{A}=(-By,0,0)$

粒子的哈密顿量 $H=\frac{1}{2\mu}[(P_x+\frac{q}{c}By)^2+P_y^2+P_z^2]-q\mathcal{E}y$

选取力学量完全集为$(H,P_x,P_z)$，它们的共同本征函数

$$\psi=\psi(y)\exp(i\frac{P_x}{\hbar}x)\exp(i\frac{P_z}{\hbar}z)$$

$$H=\frac{1}{2\mu}[(P_x+\frac{q}{c}By)^2+P_y^2+P_z^2]-q\mathcal{E}y$$

$$=\frac{1}{2\mu}[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2P_x\frac{q}{c}By+\frac{q^2}{c^2}B^2y^2-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}]-q\mathcal{E}y$$

$$=\frac{1}{2\mu}(\frac{q^2}{c^2}B^2y^2+2P_x\frac{q}{c}By-2\mu q\mathcal{E}y)-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2\mu}(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

$$=\frac{q^2B^2}{2\mu c^2}(y-y_0)^2-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{q^2B^2}{2\mu c^2}y_0^2+\frac{-\hbar^2}{2\mu}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

其中 $y_0=\frac{c^2\mu}{q^2B^2}(q\mathcal{E}-\frac{P_xq}{c\mu}B)$

可见类似于一维谐振子（y方向）

$\omega^2=\frac{q^2B^2}{\mu^2c^2}\Rightarrow\omega=\frac{qB}{\mu c}$（q为带电量的绝对值）

$\Rightarrow$能级 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega+\frac{P_x^2}{2\mu}+\frac{P_z^2}{2\mu}-\frac{q^2B^2}{2\mu c^2}y_0^2$ ，$n=0,1,2,\cdots$

其中 $\omega,y_0$ 的定义在前面已经给出，$P_x$，$P_z$可以取任意值.

2. 中子干涉实验：一个中子的波函数分成2束。其中一束通过宽为$l$的磁场B，两束飞过相等距离后汇合干涉。证明调节磁场相邻2个峰满足$\Delta B=\frac{4\pi\hbar c}{eg_n\lambda l}$，其中 $g_n\cdot\frac{-e\hbar}{2m_nc}$是中子磁矩，$\lambda$为中子波长.

解：中子在磁场中的势能 $V=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=\frac{g_ne\hbar B}{2m_nc}$

中子波长与速度的关系是 $\lambda=\frac{h}{p}=\frac{2\pi\hbar}{m_nv}\Rightarrow v=\frac{2\pi\hbar}{m_n\lambda}$

所以中子在磁场中运动的时间 $t=\frac{l}{v}=\frac{lm_n\lambda}{2\pi\hbar}$

类比AB效应，$\Delta\phi=\frac{1}{\hbar}\int_0^t V\,dt=\frac{1}{\hbar}Vt=\frac{1}{\hbar}\frac{g_ne\hbar B}{2m_nc}\frac{lm_n\lambda}{2\pi\hbar}=\frac{g_neBl\lambda}{4\pi\hbar c}$

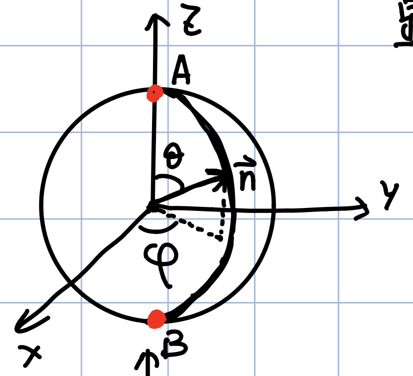
对于相邻的两个峰，$\Delta\phi=2\pi$．于是相邻两个峰满足

$$\Delta B=\frac{4\pi\hbar c}{g_nel\lambda}\cdot2\pi=\frac{8\pi^2\hbar c}{g_nel\lambda}$$

# Homework 5

考虑由自旋$\frac{1}{2}$粒子构成的纯态系综，知道$\langle\sigma_x\rangle$，$\langle\sigma_y\rangle$，$\langle\sigma_z\rangle$的符号，你能定出态来吗？为什么？

对于纯态系综，总可以把它的密度矩阵写成 $\rho=|\alpha\rangle\langle\alpha|$，其中$\langle\alpha|=\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ 粒子的自旋有确定的指向 $\vec{n}$. 而此时$\langle\sigma_x\rangle=\sin\theta\cos\varphi$，$\langle\sigma_y\rangle=\sin\theta\sin\varphi$，$\langle\sigma_z\rangle=\cos\theta$




显然，若$\langle\sigma_x\rangle=\langle\sigma_y\rangle=0$，$\langle\sigma_z\rangle>0$ 对应北极A：

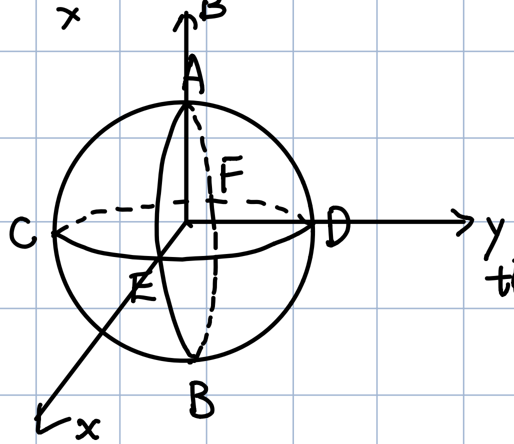
$\langle\sigma_x\rangle=\langle\sigma_y\rangle=0$，$\langle\sigma_z\rangle<0$ 对应南极B.

$\langle\sigma_x\rangle=\langle\sigma_z\rangle=0$，$\langle\sigma_y\rangle>0$，对应 D

$\langle\sigma_x\rangle=\langle\sigma_z\rangle=0$，$\langle\sigma_y\rangle<0$，对应 C

$\langle\sigma_y\rangle=\langle\sigma_z\rangle=0$，$\langle\sigma_x\rangle>0$，对应 E

$\langle\sigma_y\rangle=\langle\sigma_z\rangle=0$，$\langle\sigma_x\rangle<0$，对应 F




其余情况下只能确定$\vec{n}$在球面上的哪些区域而不能确定具体位置.（注：表中区域均不含边界）

| $\langle\sigma_x\rangle$ | $\langle\sigma_y\rangle$ | $\langle\sigma_z\rangle$ | 区域 | $\langle\sigma_x\rangle$ | $\langle\sigma_y\rangle$ | $\langle\sigma_z\rangle$ | 区域 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | 面AED | 0 | − | − | 弧CB |
| + | + | − | 面BED | + | 0 | + | 弧AE |
| + | − | + | 面ACE | + | 0 | − | 弧EB |
| − | + | + | 面AFD | − | 0 | + | 弧FA |
| + | − | − | 面CBE | − | 0 | − | 弧BF |
| − | + | − | 面DFB | + | + | 0 | 弧ED |
| − | − | + | 面AFC | + | − | 0 | 弧CE |
| − | − | − | 面CFB | − | + | 0 | 弧FD |
| 0 | + | + | 弧AD | − | − | 0 | 弧CF |
| 0 | + | − | 弧BD | | | | |
| 0 | − | + | 弧AC | | | | |

# Homework 6

1. 两个自旋$\frac12$粒子构成的系统哈密顿为 $H=\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$. 处于温度为T的平衡状态.（取$\hbar=1$）

(1) 在$(S^2,S_z)$表象写出其密度矩阵，指出该系统由哪些纯态系综按什么几率混合而成.

记$\alpha$为自旋$|+,z\rangle$的态，$\beta$为自旋$|-,z\rangle$的态，下角标1,2分别代表2个自旋$\frac12$粒子.

则$(S^2,S_z)$的共同本征态与H的本征值为

singlet: $\frac{1}{\sqrt2}(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)=|\text{①}\rangle$ H本征值 $E_1=-\frac34$

triplet: $\frac{1}{\sqrt2}(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)=|\text{②}\rangle$ $E_2=\frac14$

$\alpha_1\alpha_2=|\text{③}\rangle$ $E_3=\frac14$

$\beta_1\beta_2=|\text{④}\rangle$ $E_4=\frac14$

配分函数 $Z=\sum_{i=1}^{4}e^{-\beta E_i}=e^{\frac34\beta}+3e^{-\frac14\beta}$ 其中 $\beta=\frac{1}{k_BT}$

$\rho_{11}=\frac{\exp(-\beta E_1)}{Z}=\frac{1}{1+3e^{-\beta}}$ $\rho_{22}=\rho_{33}=\rho_{44}=\frac{\exp(-\frac14\beta)}{Z}=\frac{e^{-\beta}}{1+3e^{-\beta}}$

密度矩阵 $\rho=\frac{1}{1+3e^{-\beta}}\begin{pmatrix}1&&&\\&e^{-\beta}&&\\&&e^{-\beta}&\\&&&e^{-\beta}\end{pmatrix}$

该系综由$|\text{①}\rangle,|\text{②}\rangle,|\text{③}\rangle,|\text{④}\rangle$四种纯态以各自几率分别为 $\frac{1}{1+3e^{-\beta}}$, $\frac{e^{-\beta}}{1+3e^{-\beta}}$, $\frac{e^{-\beta}}{1+3e^{-\beta}}$, $\frac{e^{-\beta}}{1+3e^{-\beta}}$ 混合而成

(2) 在$(S^2,S_x)$表象写出其密度矩阵，指出该系综由哪些纯态混合而成？将该密度矩阵变换到$(S^2,S_z)$表象

记$|+\rangle$为自旋$|+,x\rangle$的态，$|-\rangle$为自旋$|-,x\rangle$的态. 则$(S^2,S_x)$的共同本征态与本征值为

$\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle_1|-\rangle_2-|-\rangle_1|+\rangle_2)=|1^\circ\rangle$, $E_1=-\frac34$. $\frac{1}{\sqrt2}(|+\rangle_1|-\rangle_2+|-\rangle_1|+\rangle_2)=|2^\circ\rangle$, $E_2=\frac14$

$|+\rangle_1|+\rangle_2=|3^\circ\rangle$, $E_3=\frac14$ $|-\rangle_1|-\rangle_2=|4^\circ\rangle$, $E_4=\frac14$

类似(1)的过程，密度矩阵数值同上（但选取的基矢已经不同）

该系综由$|1^\circ\rangle,|2^\circ\rangle,|3^\circ\rangle,|4^\circ\rangle$四种纯态以各自几率分别为 $\frac{1}{1+3e^{-\beta}}$, $\frac{e^{-\beta}}{1+3e^{-\beta}}$, $\frac{e^{-\beta}}{1+3e^{-\beta}}$, $\frac{e^{-\beta}}{1+3e^{-\beta}}$ 混合而成

$|1^\circ\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac12(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)-\frac12(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)\right)=\frac{1}{\sqrt2}(-\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)=-|\text{①}\rangle$

$|2^\circ\rangle=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac12(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)+\frac12(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)\right)=\frac{1}{\sqrt2}(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)=\frac{1}{\sqrt2}(|\text{③}\rangle-|\text{④}\rangle)$

$|3^\circ\rangle=(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)\cdot\frac12=\frac12(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)=\frac12(|\text{③}\rangle+|\text{④}\rangle+\sqrt2|\text{②}\rangle)$

$|4^\circ\rangle=(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\cdot\frac12=\frac12(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2))=\frac12(|\text{③}\rangle+|\text{④}\rangle-\sqrt2|\text{②}\rangle)$

$\therefore U=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$　　$\therefore$变换到$(S^2,S_z)$表象为 $U^{-1}\rho U=\frac{1}{1+3e^{-\beta}}\begin{pmatrix}1&&&\\&e^{-\beta}&&\\&&e^{-\beta}&\\&&&e^{-\beta}\end{pmatrix}$

与(1)得到的结果相同.

(3) 求出$S_1$的约化密度矩阵,计算$\langle(S_x(1),S_y(1),S_z(1))\rangle$.

$$\rho_1=tr_2\rho=\frac{1}{1+3e^{-\beta}}[(\langle\alpha_2|①\rangle\langle①|\alpha_2\rangle+\langle\beta_2|①\rangle\langle①|\beta_2\rangle)+e^{-\beta}(\langle\alpha_2|②\rangle\langle②|\alpha_2\rangle+\langle\beta_2|②\rangle\langle②|\beta_2\rangle$$
$$+\langle\alpha_2|③\rangle\langle③|\alpha_2\rangle+\langle\beta_2|③\rangle\langle③|\beta_2\rangle+\langle\alpha_2|④\rangle\langle④|\alpha_2\rangle+\langle\beta_2|④\rangle\langle④|\beta_2\rangle)]$$
$$=\frac{1}{1+3e^{-\beta}}[(\tfrac{1}{2}|\beta_1\rangle\langle\beta_1|+\tfrac{1}{2}|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|)+e^{-\beta}(\tfrac{1}{2}|\beta_1\rangle\langle\beta_1|+\tfrac{1}{2}|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|+|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|+|\beta_1\rangle\langle\beta_1|)]$$

约化密度矩阵: $\rho_1=\frac{1}{1+3e^{-\beta}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-\beta}&0\\0&\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-\beta}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}I$

$\langle S_x(1)\rangle=\frac{1}{2}tr(\rho\sigma_x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}tr\left(I\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=0$

同理:

$\langle S_y(1)\rangle=\frac{1}{2}tr(\rho\sigma_y)=0$　　$\langle S_z\rangle=\frac{1}{2}tr(\rho\sigma_z)=0$

$\therefore\langle(S_x(1),S_y(1),S_z(1))\rangle=(\langle S_x(1)\rangle,\langle S_y(1)\rangle,\langle S_z(1)\rangle)=(0,0,0)$

2. 计算纠缠熵证明 $|\alpha\rangle=\frac{1}{2}(|0\rangle_A|1\rangle_B+|1\rangle_A|1\rangle_B+|0\rangle_A|0\rangle_B+|1\rangle_A|0\rangle_B)$不是纠缠态。

解: $\rho_{AB}=|\alpha\rangle\langle\alpha|$

选$H_B$的基矢为$|0\rangle_B$和$|1\rangle_B$,则约化密度算符

$$\rho_A=tr_B\rho_{AB}={}_B\langle0|\alpha\rangle\langle\alpha|0\rangle_B+{}_B\langle1|\alpha\rangle\langle\alpha|1\rangle_B$$
$$=\frac{1}{4}[(|0\rangle_A+|1\rangle_A)({}_A\langle0|+{}_A\langle1|)+(|0\rangle_A+|1\rangle_A)({}_A\langle0|+{}_A\langle1|)]$$
$$=\frac{1}{2}(|0\rangle_A\langle0|+|0\rangle_A\langle1|+|1\rangle_A\langle0|+|1\rangle_A\langle1|)$$

选$H_A$的基矢为$|0\rangle_A$和$|1\rangle_A$,则约化密度矩阵

$\rho_A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{对角化}}\rho_A=\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}\Rightarrow S=-tr\rho_A\log\rho_A=-1\cdot\log1=0$

纠缠熵为0,故$|\alpha\rangle$不是纠缠态.

# Homework 7

证明:传播子$U(x',t';x,t)$可以写为$\sum_a \langle x'|a\rangle\langle a|x\rangle e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}$,其中$A|a\rangle=a|a\rangle$,
$[A,H]=0$. 并由此证明$U(x',t';x,t)$满足Seq.(注:$x,t$固定,$U$是$x',t'$的函数,初始条件$\lim_{t'\to t} U(x',t';x,t)=\delta(x'-x)$)

证明:已知$\psi(x',t')=\langle x'|\psi(t')\rangle=\int\langle x'|U(t',t)|x\rangle\langle x|\psi(t)\rangle dx$

$$=\int U(x',t';x,t)\,\psi(x,t)\,dx$$

$\therefore U(x',t';x,t)=\langle x'|U(t',t)|x\rangle=\langle x'|e^{-iH(t'-t)/\hbar}|x\rangle$

$[A,H]=0 \Rightarrow A$与$H$有共同本征态

而$A$的本征态为$\{|a\rangle\}$,不妨设$H|a\rangle=E_a|a\rangle$

$\therefore e^{-iH(t'-t)/\hbar}|a\rangle=e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}|a\rangle \Rightarrow \langle a|e^{-iH(t'-t)/\hbar}=\langle a|e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}$

$$\therefore U(x',t';x,t)=\langle x'|e^{-iH(t'-t)/\hbar}|x\rangle=\sum_a\langle x'|a\rangle\langle a|e^{-iH(t'-t)/\hbar}|x\rangle$$
$$=\sum_a\langle x'|a\rangle\langle a|x\rangle e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}U(x',t';x,t)=i\hbar\cdot\frac{-i}{\hbar}\sum\langle x'|a\rangle\langle a|x\rangle E_a e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}$$
$$=\sum E_a\langle x'|a\rangle\langle a|x\rangle e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}$$

同时$HU(x',t';x,t)=H\sum\langle x'|a\rangle\langle a|x\rangle e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}$

$=\sum H\langle a|x\rangle\langle x'|a\rangle e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}$ (结合公理)

$=\sum E_a\langle a|x\rangle\langle x'|a\rangle e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}$

$=\sum E_a\langle x'|a\rangle\langle a|x\rangle e^{-iE_a(t'-t)/\hbar}$

于是$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}U=HU$,即$U$满足Seq.