

Formation des structures à grande échelle de l'Univers

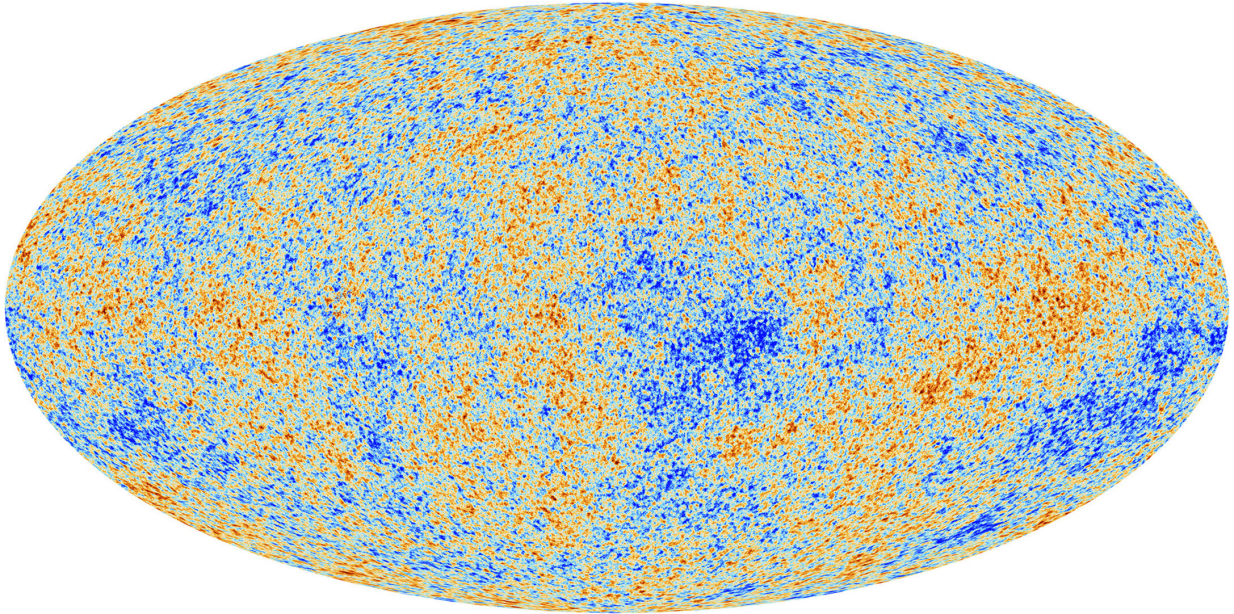


Figure 1: Carte du fond diffus cosmologique produite par le satellite Planck, Crédit:ESA

Juste après le "Big Bang" l'Univers est essentiellement un plasma chaud et dense composé de rayonnement électromagnétique et de matière. Les restes de cette période nous apparaissent sous la forme du fond diffus cosmologique, un rayonnement quasi homogène et isotrope à quelques centaines de GHz dans le domaine radio. En ce qui concerne la matière à cette époque, les observations du fond diffus cosmologique nous indiquent que la matière ordinaire, que l'on appelle les baryons (principalement des électrons et des protons), ne représente environ que 1/6 de la matière totale. Les 5/6 restants sont sous forme d'une composante dont la nature exacte reste inconnue et qui est uniquement sensible à l'interaction gravitationnelle, la matière noire.

Le but de ce projet est d'étudier la physique du plasma primordial. L'évolution de ce dernier peut être séparée en deux composantes, l'évolution de la partie homogène et celle de petites perturbations autour de cette dernière. La partie homogène va dicter l'évolution globale de l'univers, soit son expansion, alors que les fluctuations vont s'effondrer sous l'influence de la gravité pour former les grandes structures de l'Univers que l'on observe aujourd'hui, telles que les galaxies. Nous commencerons par résoudre l'évolution de l'univers homogène avant de calculer l'évolution des perturbations.

1 L'Univers homogène

Le modèle standard de la cosmologie moderne est le modèle Λ CDM. Les principaux ingrédients de ce modèle sont l'énergie noire décrite par la constante cosmologique Λ et la matière noire froide (*Cold Dark Matter* en anglais). Ces deux composantes représentent respectivement environ 70% et 25% du budget énergétique de l'Univers. Les 5% restants correspondent à la matière ordinaire et le rayonnement. Ce modèle est capable d'expliquer de nombreuses observations du fond diffus cosmologique et l'expansion de l'univers, jusqu'à la formation des galaxies, avec un nombre restreint de paramètres. Les paramètres décrivant l'évolution de l'Univers homogène sont les suivants :

- $\Omega_{m,0}$ le paramètre de densité de matière totale,
- $\Omega_{b,0}$ le paramètre de densité de baryons,
- $\Omega_{r,0}$ le paramètre de densité de radiation,
- H_0 le paramètre de Hubble.

L'indice $_0$ marque le fait que l'on fait référence à une quantité mesurée à notre époque, en effet ces paramètres varient au cours du temps à cause de l'expansion de l'Univers. Les trois paramètres de densité nous permettent de connaître les proportions des différentes composantes de l'Univers. Ce dernier étant plat, un quatrième paramètre, le paramètre de densité d'énergie noire, s'écrit $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0}$. Le paramètre de Hubble nous indique la vitesse d'expansion actuelle de l'Univers.

Avec ces paramètres il est possible d'exprimer l'historique d'expansion de l'Univers. Ceci est fait en introduisant le facteur d'échelle $a(t)$, le rapport entre la taille de l'univers au temps t et aujourd'hui. L'évolution temporelle de ce facteur d'échelle en fonction des paramètres cosmologiques est donné par l'équation de Friedmann,

$$\frac{\dot{a}}{a} = H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}}. \quad (1)$$

En traçant la courbe $a(t)$ on voit apparaître plusieurs régimes qui correspondent aux ères de domination des différentes composantes. Chaque paramètre de densité est défini comme le rapport de la densité moyenne d'une composante avec la densité critique de l'univers,

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)} \quad \text{avec} \quad \rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (2)$$

où G est la constante gravitationnelle de Newton. La densité moyenne évolue au cours du temps de manière différente pour chaque espèce. Pour la matière non-relativiste (noire ou ordinaire) on a $\rho_m(t) = \rho_{m,0} a^{-3}(t)$. En effet, la quantité de matière étant conservée, sa densité diminue de manière inversement proportionnelle à l'augmentation de volume causé par l'expansion. Dans le cas des photons, en plus de la dilution par le volume, ces derniers voient leur longueur d'onde étirée par l'expansion. C'est le phénomène de décalage vers le rouge cosmologique. En conséquence la densité d'énergie de la radiation évolue suivant $\rho_r(t) = \rho_{r,0} a^{-4}(t)$. L'énergie noire quant à elle possède une densité d'énergie constante au cours du temps $\rho_{\Lambda}(t) = \rho_{\Lambda,0}$. L'évolution de ces ρ_i couplé avec celle de ρ_c nous donne l'évolution des paramètres de densité Ω_i .

2 Perturbations linéaires

Maintenant que nous avons l'évolution de l'Univers homogène nous pouvons passer à l'évolution des fluctuations autour de la moyenne. Nous allons plus particulièrement nous intéresser aux fluides de matière noire et de baryons. Ces derniers peuvent être décrit comme des fluides de densité ρ_i et de vitesse \mathbf{u}_i . Les équations de la dynamique des fluides nous donnent,

$$\partial_t \rho_i + a^{-1} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_i) = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_i + a^{-1} (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + H \mathbf{u}_i = -a^{-1} \frac{\nabla P_i}{\rho_i} - a^{-1} \nabla \phi, \quad (4)$$

$$a^{-2} \nabla^2 \phi = 4\pi G (\rho_m - \bar{\rho}_m). \quad (5)$$

Les deux premières équations correspondent à l'équation de continuité et l'équation d'Euler respectivement. La dernière équation est simplement l'équation de Poisson de la gravité Newtonienne. Il est important de remarquer que les trois équations ont des termes en a et H supplémentaires par rapport aux formes habituelles. Ces termes prennent en compte le fait que les fluides évoluent dans un univers en expansion. Notons que l'équation (5) couple les deux fluides en faisant intervenir le potentiel gravitationnel total ϕ , calculé à partir de la densité totale de matière $\rho_m = \rho_b + \rho_c$, où ρ_c est la densité de matière noire froide. Considérons maintenant des perturbations de densité du fluide de telle sorte que $\rho_i = \bar{\rho}_i (1 + \delta_i)$ et que la vitesse \mathbf{u}_i soit petite par rapport à la vitesse du son dans le fluide. Nous pouvons alors linéariser le système et introduire la divergence du champ de vitesse $\theta_i = \nabla \cdot \mathbf{u}_i$ et la vitesse du son $\nabla P_i = \frac{\partial P_i}{\partial \rho_i} \nabla \rho_i = c_{s,i}^2 \nabla \rho_i$:

$$\partial_t \delta_i + a^{-1} \theta_i = 0, \quad (6)$$

$$\partial_t \theta_i + H \theta_i = -\frac{c_{s,i}^2}{a} \nabla^2 \delta_i - a^{-1} \nabla^2 \phi, \quad (7)$$

$$a^{-2} \nabla^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho}_m \delta_m. \quad (8)$$

Nous obtenons un système de 4 équations, 2 par fluide ($i = \{c, b\}$), qui décrit la dynamique couplée des perturbations dans les deux fluides. Pour résoudre ce système d'équation on préfère passer dans l'espace de Fourier qui a pour effet de transformer les opérateur de différentiation spatiale en multiplications avec un vecteur d'onde $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$. On se retrouve donc avec un système de 4 équations linéaires du premier ordre pour 7 inconnues, $\delta_c, \theta_c, \delta_b, \theta_b, c_{s,i}^2, a$. Afin de pouvoir le résoudre il faut que l'on rajoute l'équation de Friedmann (1) pour a , ainsi qu'une description de la vitesse du son de chaque espèce $c_{s,i}$.

Le cas de la matière noire est le plus simple. En effet celle-ci n'interagit pas autrement que par la gravité. Elle ne possède donc pas de pression et par conséquent sa vitesse du son est nulle $c_{s,c} = 0$. La description de la vitesse du

son des baryons demande un peu plus de travail. Dans le modèle Λ CDM on distingue deux régimes, avant et après la recombinaison qui a lieu à $a_{\text{rec}} \simeq 10^{-3}$. Avant la recombinaison, le bain de photons dans lequel baignent les baryons a suffisamment d'énergie pour ioniser les atomes d'hydrogène et empêche donc leur formation. Le plasma primordial est donc totalement ionisé. Au cours de l'expansion, la température de ce bain de photons baisse (à cause du décalage vers le rouge cosmologique) jusqu'à ce qu'il n'ait plus assez d'énergie pour ioniser l'hydrogène. À ce moment, les électrons libres se lient aux protons pour former des atomes d'hydrogène neutre : c'est la recombinaison. Le fluide de baryons devient alors neutre et les photons n'interagissent plus avec lui. C'est à cet instant que sont émis les photons du fond diffus cosmologique qu'on peut observer de nos jours dans le ciel (cf. Fig. 1). En résumé, la recombinaison correspond à l'époque où le plasma primordial devient un gaz monoatomique neutre et se comporte ensuite comme un gaz parfait. Avant la recombinaison les baryons interagissent très fortement avec les photons et on admettra que ceci implique que $c_{s,b} = c/\sqrt{3}$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Après la recombinaison le fluide de baryons se comporte comme un gaz parfait. En considérant que la recombinaison soit instantanée on a donc,

$$c_{s,b} := \begin{cases} c/\sqrt{3} & \text{pour } a < a_{\text{rec}} \\ \sqrt{\frac{\gamma k_B T_b}{\mu m_H}} & \text{pour } a \geq a_{\text{rec}} \end{cases} \quad (9)$$

avec $\gamma = 5/3$ l'indice adiabatique d'un gaz parfait monoatomique, $\mu = 1.22$ le poids moléculaire moyen, k_B la constante de Boltzmann, m_H la masse de l'atome d'hydrogène et T_b la température du gaz. Pour décrire l'évolution de la température du gaz de baryons, on utilise le modèle de Tseliakhovich & Hirata (2010),

$$T_b = \frac{T_{\text{CMB},0}}{a} \left[1 + \frac{a/a_1}{1 + (a_2/a)^{3/2}} \right]^{-1}, \quad (10)$$

avec $T_{\text{CMB},0} = 2.726$ K, $a_1 = 1/119$ et $a_2 = 1/115$.

Nous pouvons alors résoudre le système d'équations pour plusieurs vecteurs d'onde \mathbf{k} et calculer l'évolution temporelle des $\delta_i(k, t)$. On remarquera que le couplage entre les baryons et les photons fait apparaître des oscillations dans δ_b . Connues sous le nom d'Oscillations Acoustiques des Baryons (BAO en Anglais), elles sont caractéristiques du modèle Λ CDM et peuvent être retrouvées dans le spectre du fond diffus cosmologique et la distribution de galaxies dans l'univers. Les BAOs peuvent donc servir à mieux comprendre la composition de celui-ci.

3 Régime non-linéaire

Au delà de la recombinaison l'effondrement gravitationnel l'emporte et localement δ croît rapidement. Le formalisme linéarisé n'est alors plus suffisant pour décrire la dynamique du champ de densité, on rentre dans le régime dit non-linéaire.

Il est néanmoins possible de décrire les débuts de ce régime à l'aide d'une seconde approximation, surnommée l'approximation de Zel'dovich. On ne considère plus des perturbations de densité mais le déplacement du fluide. Il s'agit d'une théorie des perturbations lagrangienne.

On considère donc la position \mathbf{x} et la vitesse \mathbf{u} d'un élément de fluide. On appelle \mathbf{q} la position initiale de chaque élément et $\Delta\mathbf{x}$ le champ de déplacement de tel sorte que :

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \Delta\mathbf{x}. \quad (11)$$

Le champ de déplacement étant régi par la vitesse des élément du fluide,

$$\Delta\mathbf{x} = \int_0^t a^{-1} \mathbf{u} dt, \quad (12)$$

il faut calculer cette dernière. Pour ce faire on part de l'équation d'Euler sous forme lagrangienne,

$$\partial_t \mathbf{u} + H \mathbf{u} = -a^{-1} \nabla \phi, \quad (13)$$

et on isole \mathbf{u} ,

$$\frac{1}{a} \partial_t a \mathbf{u} = -a^{-1} \nabla \phi \Rightarrow \mathbf{u} = -\frac{1}{a} \int \nabla \phi dt. \quad (14)$$

Afin de pouvoir se défaire de cette intégrale, l'approximation de Zel'dovich considère que seul l'amplitude du potentiel ϕ change au cours du temps et qu'il garde sa forme initiale ϕ_i . On fait appel alors à la théorie linéaire afin de déduire l'évolution de l'amplitude du potentiel. L'équation de Poisson pouvant être réécrite sous la forme,

$$\nabla^2 \phi = \frac{3}{2} H_0 \Omega_{m,0} a^{-1} \delta, \quad (15)$$

on voit que l'évolution temporelle du potentiel est donnée par $a^{-1}\delta$. On considère alors l'évolution temporelle de $\delta = D(t)\delta_i(t=0, \mathbf{x})$ en introduisant le taux de croissance linéaire des structures $D(t)$. En reprenant les équations linéaires on peut alors montrer que D suit l'équation différentielle,

$$\ddot{D} + 2H\dot{D} - \frac{3H_0^2}{2a^3}\Omega_{m,0}D = 0, \quad (16)$$

qui a pour solution,

$$D(a) \propto \frac{H(a)}{H_0} \int_0^a [\Omega_{m,0}a'^{-1} + \Omega_{\Lambda,0}a'^2 + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})]^{-3/2} da'. \quad (17)$$

En prenant par convention la valeur aujourd'hui, $D(a=1) = 1$, on peut alors écrire le potentiel $\phi = \frac{D}{a}\phi_i$ et en déduire la vitesse,

$$\mathbf{u} = -\frac{\nabla\phi_i}{a} \int \frac{D}{a} dt = -\frac{a\dot{D}}{\frac{3}{2}H_0^2\Omega_{m,0}} \nabla\phi_i, \quad (18)$$

la seconde égalité provenant de l'Eq. (16) en introduisant $\partial_t(a^2\dot{D}) = a^2\ddot{D} + 2a^2H\dot{D}$. On a alors,

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + D\nabla\psi \quad (19)$$

$$\mathbf{u} = a\dot{D}\nabla\psi \quad (20)$$

avec $\psi = -\left(\frac{3}{2}H_0^2\Omega_{m,0}\right)^{-1}\phi_i$. On voit alors que dans l'approximation de Zel'dovich la dynamique des éléments de fluide est décrite par des trajectoires balistiques (lignes droites) qui sont complètement déterminée par le potentiel initial. On considère par ailleurs cette approximation valide jusqu'au moment où deux trajectoires se croisent ("shell-crossing" en anglais) ce qui a lieu dans les zones de sur-densité typiquement là où les objets, galaxies et amas, vont se former. À partir de ce moment là, il est nécessaire d'avoir recours à des simulations à N-corps. Celles-ci permettent de résoudre exactement l'évolution des sur-densité, même dans le régime très fortement non-linéaire. Cependant, elles sont très coûteuses en temps de calcul.