

Rapport de projet : Problème à N-corps et collision de galaxies

CORAP Xavier, PRETO Anna, STEIN Eliot

1 Introduction

1.1 Sujet

L'étude des galaxies constitue un domaine fondamental de la cosmologie moderne, offrant un aperçu précieux de l'évolution et de la dynamique à grande échelle de l'univers. Alors que les images époustouflantes de galaxies spirales et elliptiques semblent figer ces structures dans l'immensité, la réalité est bien plus dynamique. Les galaxies sont des systèmes dynamiques en constante évolution, résultant de processus complexes de formation, de fusion et d'interaction gravitationnelle.

Un exemple frappant de cette dynamique est la future collision entre Andromède et la Voie lactée, prévue dans plusieurs milliards d'années. Cette rencontre, bien que lointaine dans le temps, soulève des questions cruciales sur l'évolution et le comportement des galaxies lors de telles interactions. Malheureusement, la manipulation directe des galaxies pour étudier ces phénomènes reste hors de notre portée. Cependant, grâce aux simulations numériques, nous pouvons explorer ces scénarios de manière approfondie et précise.

Dans ce contexte, notre projet vise à modéliser numériquement l'évolution des galaxies lors de collisions et d'interactions. Notre approche consiste à construire un modèle représentatif de galaxies à l'équilibre en tenant compte de diverses caractéristiques telles que la distribution des étoiles, la masse, et la morphologie. Ensuite, nous perturberons ces modèles en simulant l'impact d'une petite galaxie sur la galaxie en place, en variant les paramètres tels que la masse de l'impacteur, sa vitesse et l'angle d'incidence.

L'objectif est d'analyser l'effet de ces perturbations sur la structure initiale de la galaxie et d'évaluer dans quelle mesure celle-ci peut retrouver un état d'équilibre après l'interaction. Pour ce faire, nous utiliserons une approche numérique basée sur la résolution de l'équation de Boltzmann sans collision, connue sous le nom d'équation de Vlasov-Poisson. Cette méthode, basée sur une approche particule-maille, nous permettra de capturer les interactions gravitationnelles entre les étoiles tout en contournant la complexité calculatoire associée à la simulation de chaque étoile individuelle.

1.2 Etat de l'art et contexte

Les premières observations d'interactions galactiques remontent à une époque où nous ne savions pas encore que les galaxies étaient composées d'étoiles, de poussière et de matière sombre. William Parsons, troisième comte de Rosse, a dessiné en 1845 la Galaxie du Tourbillon (Messier 51 figure 1.2) avec son télescope de 1,8 mètre (72 pouces), montrant la structure spirale et les bras connectés à sa galaxie compagne. L'utilisation croissante de la photographie et des télescopes plus grands a permis de détecter un nombre croissant de systèmes en interaction, suscitant l'intérêt des chercheurs.

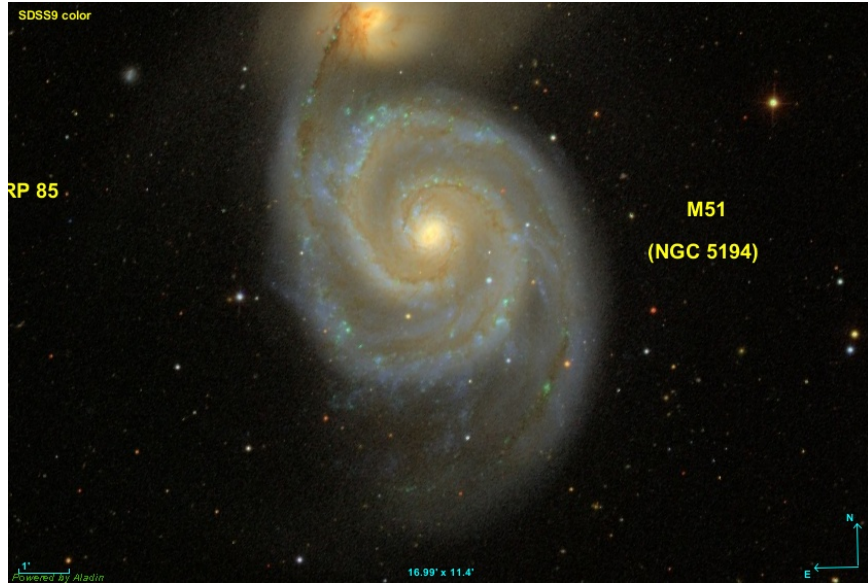


Figure 1: Messier 51 crédits : Pelletier 2021

Dans les années 1940, l’astronome suédois Erik Holmberg a catalogué des paires de galaxies proches et a commencé à se demander quelles seraient les conséquences de leur rapprochement. Ses expériences, menées pendant la Seconde Guerre mondiale, ont permis de simuler la collision de galaxies en utilisant des ampoules pour représenter la distribution stellaire et des cellules photoélectriques pour mesurer les forces gravitationnelles. Holmberg a ainsi démontré que de telles collisions pouvaient rapprocher et fusionner les galaxies, et a prédit la formation de structures telles que les queues et les ponts de marée.

L’œuvre pionnière de Holmberg a été confirmée des décennies plus tard, tandis que les observations de galaxies en collision, notamment à partir de l’Enquête du Ciel de Palomar, ont permis de documenter une variété impressionnante de formes. Boris A. Vorontsov-Velyaminov à Moscou a publié en 1959 le premier catalogue d’interactions galactiques, contribuant ainsi à élargir notre compréhension de ces phénomènes fascinants (Vorontsov-Velyaminov 1959).

Les frères Toomre ont utilisé des méthodes informatiques, considérées comme rudimentaires par rapport aux standards modernes, pour simuler la Galaxie du Tourbillon ainsi que des paires galactiques intrigantes comme les Souris et les galaxies des Antennes (J. Toomre and A. Toomre 1972). Contrairement à l’intuition générale, leur travail a révélé que l’influence de la gravité sur les galaxies est complexe, étant donné la répartition étendue de la matière dans ces systèmes. Malgré les limitations technologiques de l’époque, leurs simulations ont permis de comprendre les caractéristiques de marée de manière convaincante. Au fil des progrès technologiques, les simulations sont devenues de plus en plus réalistes, reproduisant de mieux en mieux les formes et les mouvements des galaxies ainsi que la répartition de la matière.

Pour reprendre l’exemple précédent, la collision entre la Voie Lactée et Andromède a été étudiée par Robertson et al. 2006. Leur simulation numérique de cette collision a fourni des prédictions précieuses sur l’évolution probable de ces deux galaxies en interaction. En effet, leurs résultats suggèrent que la galaxie résultante de cette fusion adoptera probablement une forme elliptique.

Ainsi au cours des deux derniers siècles, un grand nombre de recherches ont été menées pour explorer les interactions entre galaxies. Ce projet s’inscrit dans cette lignée de travaux visant à mieux comprendre ces phénomènes.

1.3 Objectifs et plan méthodologique

La structure des galaxies suit une dynamique complexe. Selon le scénario communément admis, ces galaxies se formeraient de manière hiérarchique, à force de collisions et de fusions. Nous cherchons ici à apporter un élément de réponse pour expliquer comment cette structure galactique se forme et évolue au fil des collisions. Notre méthodologie repose sur une approche numérique à N -corps combinant Fortran et Python pour simuler l’évolution des galaxies lors de collisions et d’interactions.

La première étape de notre méthodologie consiste à définir les conditions initiales du système. Nous utilisons généralement le profil de Plummer pour représenter la distribution initiale des étoiles et de la matière dans les galaxies en interaction. Ce profil fournit une approximation réaliste de la structure interne des galaxies et permet de générer des conditions ini-

tiales cohérentes pour nos simulations. Nous approfondirons cette partie en section 3 après avoir défini quelques concepts préliminaires.

Après avoir généré un système, nous simulerons son évolution dans le temps, en suivant une méthode Particule-Maille consistant à discrétiser l'espace en une grille de dimension 3, pour ensuite y évaluer successivement la densité, le potentiel gravitationnel puis le champ gravitationnel, pour enfin intégrer les équation de mouvement de nos particules, et recommencer pour chaque pas de temps. Nous présenterons ces méthodes en détail dans la section 2.

2 Méthodologie et description du modèle

2.1 Approche Newtonienne

À l'échelle galactique, l'interaction dominante est l'interaction gravitationnelle. Nous nous plaçons dans un cadre non relativiste en faisant l'hypothèse de champ faible et de faibles accélérations et vitesses. Dans ce cadre, la gravitation peut être décrite à travers la formule de Newton. Pour résoudre le problème à N -corps, on peut alors opter pour cette approche, dite Particule-Particule (PP). Elle consiste à effectuer la sommation directe des interactions gravitationnelles des $\frac{N(N-1)}{2}$ paires de particules en utilisant une loi de Newton modifiée (Aarseth 1963):

$$F_i = -Gm_i \sum_{j \neq i}^N m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

où F_i est la force appliquée sur la particule i , G est la constante gravitationnelle, m_i et m_j sont les masses des particules i et j tandis que \vec{r}_i et \vec{r}_j sont leurs positions. Enfin, ϵ est la "softening length" permettant d'éviter les divergences lors de collisions entre particules. Toutefois, le nombre d'opération augmente en N^2 , ce qui rend cette méthode difficilement applicable pour des problèmes de l'ordre des millions de corps. Notre projet n'utilisant pas de parallélisation ni de super calculateurs, nous utiliserons alors une autre méthode.

2.2 Approche statistique

Nous avons vu qu'il nous faut réduire la taille de nos lots de données. Ainsi, nous pouvons utiliser une approche moyennée en introduisant une fonction de distribution $f(t, \vec{x}, \vec{v})$ lisse et C^∞ qui permet de caractériser la densité de masse dans l'espace des phases. Si l'on considère un système sans collision (comme pour notre galaxie, voir Tremaine 2005), alors le théorème de Liouville stipule que cette fonction de distribution est conservée. On peut alors écrire l'équation de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \vec{a} = 0$$

avec $\vec{a} = -\vec{\nabla} \phi$. Cette fonction de distribution f permet également, lorsqu'elle est intégrée par rapport aux vitesses \vec{v} , d'obtenir la densité $\rho(t, \vec{x})$. Enfin, en définissant la fonction

$$E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E : \vec{u} \mapsto \frac{-1}{4\pi\|\vec{u}\|}$$

On peut alors écrire:

$$\phi(t, \vec{x}) = -G \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(t, \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} d\vec{x}' = 4\pi G (\rho(t, \cdot) * E(\cdot))(\vec{x})$$

On note que $\Delta E = \delta_0$ (Marco n.d.) et on retrouve alors l'équation de Vlasov-Poisson

$$\Delta \phi(t, \vec{x}) = 4\pi G \rho(t, \vec{x})$$

Toutefois, trouver une solution analytique à cette équation n'est pas trivial. Pour résoudre notre équation de Vlasov-Poisson via l'approche à N -corps, nous utiliserons donc l'approche dite Particule-Maille (PM) où l'espace est discrétisé en une grille tridimensionnelle. Ainsi, à chaque pas de temps, nous suivrons cette procédure:

1. Nous utilisons la méthode cloud-in-cell (CIC) qui attribue la densité de matière à chaque cellule en fonction de la distribution des particules dans l'espace.
2. Nous résolvons les équations de Vlasov-Poisson dans cette grille pour modéliser l'évolution de la distribution des étoiles sous l'influence de la gravité. Pour cela, nous utilisons la méthode de Jacobi et celle du Gradient Conjugué, des méthodes itérative permettant de résoudre numériquement cette équation aux dérivées partielles elliptiques.
3. Nous calculons ensuite le gradient du potentiel gravitationnel à l'aide de la formule de Taylor. Cela nous permet de déterminer les forces gravitationnelles locales agissant sur les particules dans chaque cellule.
4. Ensuite, nous utilisons une technique d'interpolation du champ gravitationnel, basée sur la méthode CIC inversée, pour attribuer une accélération à chaque particule en fonction du gradient du potentiel gravitationnel local. Cela nous permet de calculer les trajectoires des particules dans le champ de gravité généré par les galaxies en interaction.
5. Enfin, nous intégrons le système dynamique à chaque pas de temps pour mettre à jour les positions et vitesses de chaque particule. L'ensemble de ce processus itératif nous permet alors de suivre l'évolution temporelle des galaxies et d'observer les interactions complexes qui se produisent au fil du temps.

2.3 Cloud-In-Cell

La méthode cloud-in-cell (CIC) utilisée dans notre code est une technique de discrétisation de l'espace en une grille tridimensionnelle afin de calculer la densité de matière dans chaque cellule de cette grille pour éviter de calculer chaque interaction.

Tout d'abord, la grille tridimensionnelle est initialisée avec une densité de matière nulle dans chaque cellule. Ensuite, la taille de chaque cellule de la grille est calculée en fonction du pas de grille (dx) spécifié dans le code.

Pour chaque particule (représentant une étoile) dans le système, la méthode CIC détermine les coordonnées de la cellule dans laquelle la particule réside. Cela se fait en prenant en compte la position de la particule par rapport aux bords de la cellule et en attribuant des poids en fonction de cette position.

Ensuite, la densité de matière est répartie entre les cellules de la grille en utilisant une interpolation trilinéaire. Les poids sont calculés en fonction de la position de la particule par rapport au centre de la cellule et sont utilisés pour répartir la masse de manière pondérée entre les cellules voisines.

La boucle sur toutes les particules du système est réalisée de manière parallèle pour optimiser les performances de calcul. Chaque thread parallèle est responsable du calcul de la densité dans une ou plusieurs cellules de la grille.

À la fin de la boucle sur toutes les particules, la densité de matière dans chaque cellule est normalisée en divisant par le volume de chaque cellule, fournissant ainsi une estimation de la densité de matière moyenne dans chaque cellule de la grille.

2.4 Résolution des équations de Vlasov-Poisson

2.4.1 Méthodes itératives et convergence

Il est impossible de résoudre analytiquement cette équation dans le cas de cette étude. Pour obtenir le champ de potentiel gravitationnel sur notre grille discrétisée, nous utiliserons des méthodes itératives de résolution du système matriciel $Ax = b$ où la solution est $b = 4\pi G\rho$, notre inconnue est le champ de potentiel gravitationnel $x = \phi$, et la matrice A représente le Laplacien. Nous traiterons ici de 2 méthodes pour résoudre ce système: la méthode de Jacobi en 2.4.2, puis celle du gradient conjugué en 2.4.3.

Ces méthodes construisent des suites qui convergent vers la solution. Il convient alors de définir un critère d'arrêt. Pour cela, nous évaluerons le résidu : c'est la différence entre la solution théorique b et notre solution Ax . La grille de densité étant fixée à cette étape, il nous faut alors discrétiser le Laplacien. En partant de la définition du taux d'accroissement, nous obtenons:

$$\Delta\phi \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta y^2} + \frac{\phi_{k+1} - 2\phi_k + \phi_{k-1}}{\Delta z^2} = 4\pi G\rho_{ijk}$$

Ainsi, nous obtenons ce résidu pour chaque point de cette grille à 3 dimensions. Nous arrêtons les itérations lorsque la valeur maximale absolue du résidu converge. En pratique, nous définissons le paramètre ϵ , à fixer en fonction de la méthode utilisée (voir section 2.4.5: Résidu). Le critère d'arrêt est alors :

$$\left\| \frac{MAXVAL(\|r_{k+1}\|) - MAXVAL(\|r_k\|)}{MAXVAL(\|r_k\|)} \right\| < \epsilon$$

2.4.2 Jacobi

Une astuce pour résoudre l'équation de Vlasov-Poisson (F. Lepetit [n.d.](#)) consiste à utiliser une méthode de relaxation en remplaçant le problème de la résolution de l'équation de Poisson en résolution d'une équation de diffusion de la forme $\frac{\partial\phi}{\partial t} = D\Delta\phi - 4\pi G\rho$ dans le cas d'une solution stationnaire, c'est-à-dire $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, et avec un coefficient de diffusion $D = 1$. Sous cette forme, il est alors possible d'utiliser le schéma "forward time-centered space" (FTCS)¹. On obtient alors

$$\frac{\phi_{i,j,k}^{n+1} - \phi_{i,j,k}^n}{\Delta t} = D \left(\frac{\phi_{i+1,j,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \frac{\phi_{i,j,k+1}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} \right) - 4\pi G\rho_{i,j,k}^n$$

En posant $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ et en cherchant pour $\phi_{i,j,k}^{n+1}$, on peut écrire

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (\phi_{i+1,j,k}^n + \phi_{i-1,j,k}^n + \phi_{i,j+1,k}^n + \phi_{i,j-1,k}^n + \phi_{i,j,k+1}^n + \phi_{i,j,k-1}^n - 6\phi_{i,j,k}^n - \frac{4\pi G\rho_{i,j,k}^n \Delta x^2}{D}) + \phi_{i,j,k}^n$$

Dans cette approche, l'analyse de stabilité de Von Neumann montre que la méthode FTCS est stable si et seulement si $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{6D}$. En choisissant alors le pas le plus grand possible, on obtient la solution

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{6} (\phi_{i+1,j,k}^n + \phi_{i-1,j,k}^n + \phi_{i,j+1,k}^n + \phi_{i,j-1,k}^n + \phi_{i,j,k+1}^n + \phi_{i,j,k-1}^n - 4\pi G\rho_{i,j,k}^n \Delta x^2)$$

Dans cette équation, on remarque qu'à chaque pas successif, la solution ne se propage qu'aux cellules directement adjacentes. On voit ici la limite de cette méthode: atteindre les bords d'une grille de grande taille peut alors prendre beaucoup d'itération, et converger vers une valeur proche de la solution demande encore plus de temps. La résolution de l'équation de Poisson étant la partie la plus lourde à calculer à chaque pas de temps, nous avons donc choisi de développer une seconde méthode à convergence plus rapide.

2.4.3 Gradient Conjugué

Si l'on considère l'équation de Poisson sous la forme $Ax = b$, on peut aisément construire une fonction $f(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$ dont les racines sont solution de notre problème. La méthode du gradient conjugué revient alors à considérer la résolution de l'équation de Poisson à travers la minimisation de la fonction $F : \vec{x} \mapsto \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} - \vec{x}^T \vec{b}$. En effet, cette fonction quadratique est une primitive de notre problème, telle que $\vec{\nabla} F = f$, ainsi trouver le minimum de F revient à trouver les racines de f , et donc à résoudre notre problème.

Sachant que $\vec{\nabla} F(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$, alors la méthode de la descente de gradient consiste à suivre la direction opposée à chaque pas d'itération \vec{p}_k , c'est à dire la direction donnée par le résidu $\vec{r}_k = \vec{b} - A\vec{x}_k$ défini en section 2.4.1. Toutefois, cette méthode présente une convergence linéaire, qui nécessite généralement un nombre infini d'itération. Il est possible de converger en un nombre fini d'itération si l'on contraint les pas \vec{p}_k faits à chaque itération à être A -conjugués, c'est-à-dire si $\vec{p}_i^T A \vec{p}_j = 0, \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$. Les résidus seront alors également A -conjugués entre eux.

De manière pratique, il faut alors construire \vec{p}_k à partir du résidu actuel et de toutes les directions de recherche précédentes. En commençant avec une estimation initiale \vec{x}_0 et $\vec{p}_0 = \vec{r}_0$, nous pouvons définir un algorithme itératif: on commence par construire le coefficient

$$\alpha_k = \frac{\vec{r}_k^T \vec{r}_k}{\vec{p}_k^T A \vec{p}_k}$$

¹Il est intéressant de noter que le "temps" discrétisé ici est en réalité une quantité permettant de décrire l'évolution de la suite à chaque itération, sans que cela n'aie de signification physique. On rappelle qu'à cette étape, le temps réel est fixé, et le but est de trouver le potentiel à cet instant

On peut alors actualiser la solution ainsi que le résidu

$$\begin{aligned} \vec{x}_{k+1} &= \vec{x}_k + \alpha_k \vec{p}_k \\ \vec{r}_{k+1} &= \vec{r}_k - \alpha_k A \vec{p}_k \end{aligned}$$

Il reste alors à actualiser notre pas tel que

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{\vec{r}_{k+1}^T \vec{r}_{k+1}}{\vec{r}_k^T \vec{r}_k} \\ \vec{p}_{k+1} &= \vec{r}_{k+1} - \beta_k \vec{p}_k \end{aligned}$$

On remarquera que les coefficients α et β permettent d'optimiser la distance parcourue à chaque pas.

2.4.4 Condition aux bords

Nous pouvons noter que pour calculer le résidu d'une cellule, nous avons besoin des cellules adjacentes à cette dernière. Il est alors nécessaire de définir les conditions aux bords de notre grille, ce qui influera sur la convergence du résidu et les performances globales du code. Nous avons choisi d'utiliser une méthode générique qui permet de comparer aisément plusieurs conditions différentes: la méthode du buffer. Cela consiste à ajouter 6 faces extérieures à notre cube (les zones fantôme, contrairement à l'intérieur du cube que l'on appellera la zone utile). Ainsi, nous pouvons définir ces nouvelles faces de la manière souhaitée.

Nous avons alors comparé 3 conditions aux bords différentes:

1. Potentiel nul à l'extérieur
2. Potentiel périodique
3. Potentiel multipolaire

Le premier est intuitif: toute la zone fantôme est définie égale à 0. Le second, implique une boucle du système dans l'espace : la force perçue par une particule au bord de la grille est alors amoindrie, car elle sera également attirée par le système fantôme voisin. Enfin la dernière condition est dérivée d'un développement multipolaire au voisinage du centre de gravité du système, additionnée au potentiel exact généré par les $n \ll N$ particules excentrées. Il faut alors commencer par déterminer le centre de gravité du système et évaluer la distance des particules par rapport à ce point. La distance limite pour le développement multipolaire sera explorée dans la section 2.4.5: Développement multipolaire. Un nouveau centre de gravité est évalué à partir des particules à l'intérieur de cette sphère, qui sera utile pour le développement multipolaire.

Le calcul est alors divisé en deux parties. D'un côté, traitons les particules traitées individuellement. Le potentiel gravitationnel qu'ils génèrent en chaque point des 6 faces du buffer est simplement additionné suivant la formule classique $\phi = -\frac{Gm_i}{r_i}$ où r_i est la norme de la distance entre la particule et la cellule du buffer. Pour compléter, nous utilisons les premiers moments dipolaires

$$\begin{aligned} \phi_0 &= -\frac{GM}{R} \\ \phi_1 &= -\frac{GM}{R^3} \vec{R} \cdot \vec{P} \\ \phi_2 &= -\frac{GM}{R^5} \sum_{i,j} Q_{i,j} \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j \end{aligned}$$

où M est la masse totale contenue dans la sphère, \vec{R} est la position du point où l'on évalue le potentiel (donc les cellules des 6 faces du buffer) par rapport au centre de gravité du développement multipolaire. Les coefficients multipolaires sont données par les formules

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \\ Q_{i,j} &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{3}{2} r_\alpha r_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} r^2 \right); \alpha, \beta \in \{x, y, z\} \end{aligned}$$

où \vec{r} est la position de la particule par rapport au centre de gravité du développement multipolaire, et $\delta_{\alpha\beta}$ est le delta de Kronecker.

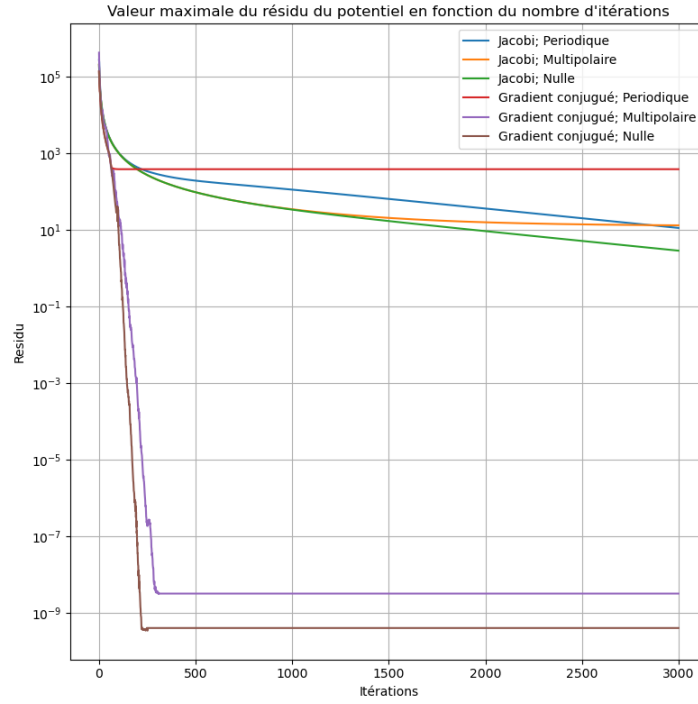


Figure 2: Valeur maximale absolue du résidu en fonction des itération, pour 2 solveurs et 3 conditions aux bords différentes

2.4.5 Validation

1. Développement multipolaire

La distance maximale autorisée pour effectuer un développement multipolaire est un équilibre entre le temps de calcul et la précision. En effet, le temps de calcul augmente selon $6N_{grille}^2n$ avec 6 pour le nombre de face, N_{grille} le nombre de cellules par dimension, et n le nombre de particules à l'extérieur de ce rayon limite. Bien que linéaire en n , ce nombre grandira très vite lorsque des particules sont éjectées, comme lors des collisions entre galaxies. Nous nous fixons donc une limite arbitraire de précision de 1%. Pour l'évaluer, nous nous proposons de tracer la "colormap" du potentiel projeté sur un axe de 2 particules à équidistance du centre de gravité. La figure 14 (en annexe) illustre cette évaluation pour 1%, 5%, 10% et 15% de la taille de la grille. Le modèle (a) "Multipolaire" utilise une condition aux bords évaluée par développement multipolaire, tandis que le modèle (b) "Exact" utilise la valeur exacte du potentiel sur les bords. Enfin, le graphique (c) "Différence" représente la différence (a)-(b). On voit alors que pour rester sur une différence maximale absolue entre les deux modèles inférieure à 1%, nous limiterons ce rayon à 15% de la taille de la grille.

2. Résidu

Une première façon de comparer nos différentes méthodes est de mener une étude sur le résidu. Cette quantité est centrale dans l'évaluation du potentiel. En effet, cela permet de quantifier les différences entre notre solution et la théorie, et ainsi de rendre compte de la qualité des solutions et la vitesse de convergence. Ainsi, nous avons choisi de représenter la valeur maximale absolue du résidu à chaque itération pour nos différentes méthodes dans le graphique 2. Le potentiel est généré par la présence d'une unique masse centrale. On remarque alors deux comportements différents: celle de la méthode de Jacobi, qui converge d'abord rapidement, puis ralentit; tandis que la méthode du gradient conjugué maintient son allure jusqu'à convergence. On voit là une différence fondamentale entre les deux méthodes: si celle de Jacobi permettrait d'atteindre une meilleure précision pour un nombre infini d'itérations, le gradient arrive à sa meilleure solution en un nombre fini d'itérations.

Ainsi, l'utilisation d'un critère d'arrêt basé sur l'évolution du résidu par rapport à l'itération précédente est justifié. De cette manière, l'algorithme ne s'arrête pas tant que la solution continue d'évoluer et de gagner en précision. Dans le cas du gradient conjugué, ce ne sera pas avant que la précision maximale soit atteinte, soit vers 300 itérations, la valeur de ϵ important peu. Au contraire, pour Jacobi, la valeur du seuil est importante. Différentes possibilités sont regroupées dans le tableau suivant:

ϵ	5×10^{-3}	10^{-3}	5×10^{-4}	10^{-4}	5×10^{-5}	10^{-5}
$\frac{R_0}{R_f}$	1.9×10^3	1.6×10^4	2.4×10^4	3.0×10^{-4}	3.2×10^{-4}	3.2×10^{-4}
Itérations	300	1275	1775	2850	3250	4275

Dans ce tableau, le rapport $\frac{R_0}{R_f}$ indique le gain entre le résidu initial et le résidu final. En cohérence avec la figure 2, on remarque qu'un ϵ trop bas n'améliore que très peu le rapport, ainsi, nous choisissons arbitrairement $\epsilon = 10^{-4}$. D'autre part, des simulations faites avec 10^2 , 10^4 et 10^6 particules montre que la forme des courbes reste la même. Si la valeur du résidu augmente proportionnellement au nombre de particules, le rapport $\frac{R_0}{R_f}$ reste sensiblement le même. On note toutefois que pour $N > 1$, les conditions aux bords nulles et celles multipolaires donnent un résidu du même ordre de grandeur. Par ailleurs, pour la suite de notre projet, la valeur du résidu, pour la méthode de Jacobi, est choisie telle que $res = \max(\frac{abs(4\pi\rho G - \Delta\Phi)}{\max(4\pi\rho G)})$. Cela peut paraître contre intuitif (puisque l'on semble sous estimer le résidu avec $\max(4\pi\rho G)$ au dénominateur), mais nos résultats se sont avérés meilleurs avec ce résidu. La condition d'arrêt du gradient conjugué était malheureusement trop exigeante ce qui impliquait des calculs trop longs. Une autre approche était d'utiliser la norme euclidienne plutôt que le maximum au numérateur et dénominateur, mais cette condition s'est avérée trop indulgente.

Une manière de visualiser le fonctionnement des différentes méthodes est de tracer le graphique de la "colormap" du résidu pour différentes itérations, comme sur les figures 15, 16, 17 et 18 de l'annexe. On voit la propagation sphérique du résidu, et donc de la même manière du potentiel, et les différentes vitesses de minimisation du résidu également. Les conditions multipolaires permettent également aux solutions de se propager depuis les bords car le potentiel n'y est pas nul. Aussi, on note que, comme le laisser penser la figure 2, les conditions aux bords périodiques ne sont pas adaptées pour la méthode du gradient conjugué. En effet, retrouver un potentiel similaire dans la zone fantôme adjacente oriente le gradient conjugué dans une direction erronée.

3. Force

Après avoir évalué les performances des solveurs, nous pouvons maintenant nous intéresser à leur fiabilité. Pour cela, nous étudions la force exercée sur une particule en fonction de sa position sur la grille. Nous plaçons alors une particule massive au centre de la grille pour obtenir un potentiel simple à théoriser, et des particules de masse négligeable alignées sur l'axe x de la grille. Sur la figure 3, les ratios de forces par rapport à la théorie sont représentés en fonction de la distance au centre de la grille (unité en taille de grille), pour les deux conditions aux bords principales: Périodique et Multipolaire. Les courbes théoriques sont représentées par des traits pleins, tandis que les points donnent les valeurs trouvées par le code à N -corps. Dans le cas des conditions aux bords périodiques, plusieurs courbes sont exposées: $f1$ représente la force théorique exercée sur une particule par la particule centrale massive ainsi que sa réplique directement adjacente créée par la périodicité du potentiel. $f124$ représente alors la force des 124 répliques les plus proches. $f0$ donne alors la force exercée sur une particule lorsqu'il n'existe aucune réplique: c'est le cas de la condition aux bords multipolaire.

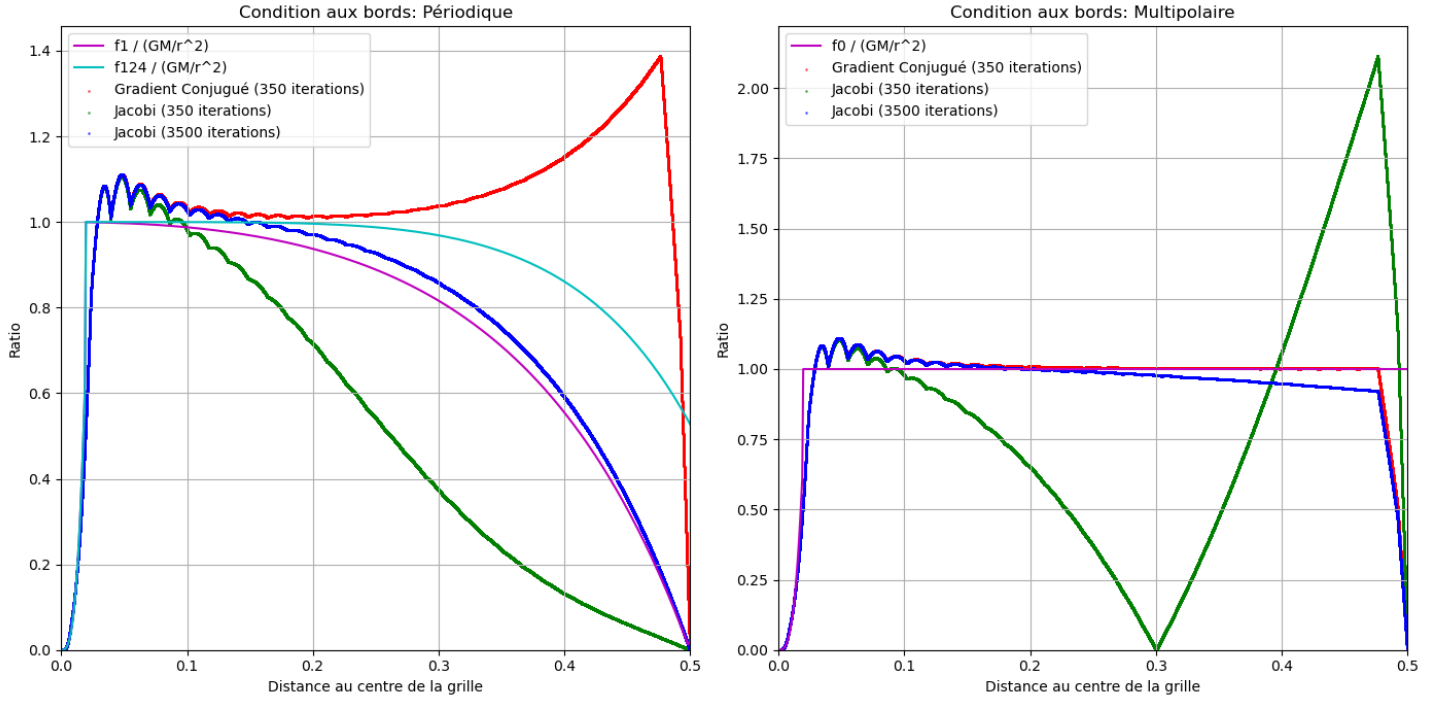


Figure 3: *Ratio des forces en fonction du rayon pour la méthode de Jacobi et du gradient conjugué. N particules de masse négligeable sont alignées selon l'axe x . A gauche, conditions aux bords périodique et à droite, conditions aux bords multipolaire*

On remarque que proche du centre de la grille, la force tends vers 0. Cela est dû au CIC: la particule centrale étant "éclatée" sur les 8 cellules centrales, alors, d'après le théorème de la coquille de Newton, la force gravitationnelle due aux masses à l'extérieur de la sphère de rayon séparant une particule du centre de gravité est annulée par symétrie. Toutefois, notre problème n'est pas tout à fait isotropique car les cellules sont cubiques. Cela explique l'écart entre la courbe théorique et la force trouvée par notre programme. De la même manière, lorsque les particules s'approchent du bord extérieur (à partir d'une cellule du bord), la force diminue également. En effet, la particule joue alors sur les deux faces de la grille. Enfin, il est intéressant de noter que la force dépasse celle attendue entre les distances de 0.03 et 0.15 de manière oscillatoire.

Intéressons-nous d'abord aux conditions périodiques. On remarque d'abord qu'un potentiel fournit par un Jacobi insuffisamment itéré ne donne pas des valeurs acceptables, qui sont bien inférieures à ce que l'on attend. C'est dû au fait que cette méthode prend du temps à se propager, le potentiel ne s'est presque pas actualisé à grande distance. Le gradient conjugué, qui converge beaucoup plus rapidement, n'est pas beaucoup plus fiable. La seule méthode envisageable dans un tel système est donc celle de Jacobi suffisamment itérée. Cependant, on remarque que 3500 itérations suffisent à peine pour rendre compte de cet espace répliqué à l'infini. Si l'on s'intéresse maintenant aux conditions multipolaires, les résultats sont plus proche de la théorie avec une excellente performance du gradient conjugué. Le Jacobi peine à combler l'écart avec 10 fois plus d'itérations.

Après avoir vu les capacités des deux solveurs, nous pouvons alors tenter de remplir cet espace graphique en disposant des particules de masse négligeable aléatoirement dans cette grille. Pour éviter de saturer l'espace, nous afficherons la meilleure méthode pour chacune des deux conditions aux bords. Ces graphiques montrant une symétrie sphérique, nous utiliserons un mélange de distribution de Plummer pour remplir les régions centrales, et une distribution uniforme pour remplir le reste de cet espace. Cela est illustré figure 4. On note que la distance maximale du graphique a augmenté: en effet, nous travaillons dans un cube, les diagonales sont donc potentiellement plus longues. C'est également pour cette raison que l'on observe toute cette dispersion. La particule massive centrale se disperse dans un cube central, ce qui provoque un potentiel qui n'est pas à symétrie sphérique. Cela provoque certaines formes: sur le graphique des conditions périodiques, on remarque 3 "pattes" en 0.5, 0.71 et 0.86, qui sont les 3 distances maximales, la première vers une face de la grille, la seconde vers une arête et la dernière vers un coin de notre espace. La dispersion est due aux particules ayant des coordonnées entre ces extrêmes. Sur le graphique multipolaire, on remarque la même chose, mais en plus marqué: on retrouve là le problème d'une particule trop proche du bord qui s'efface partiellement.

4. Optimisation

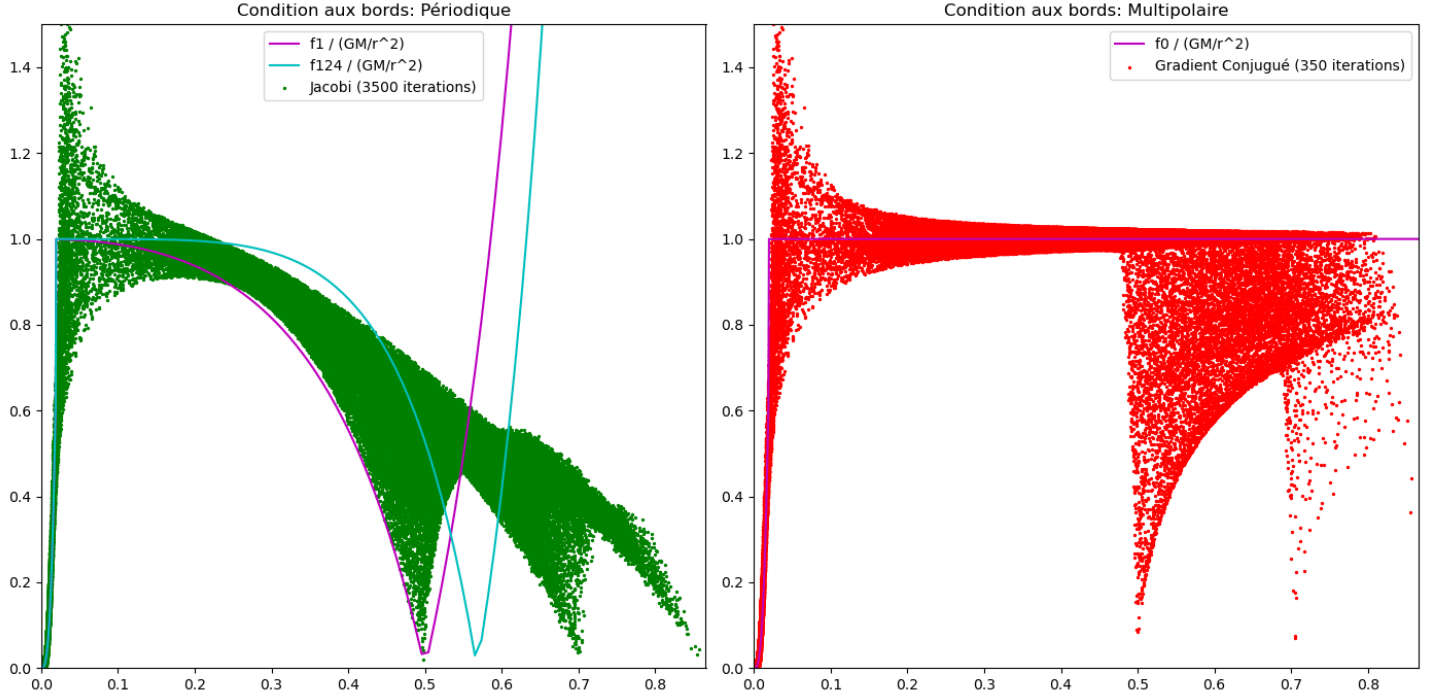


Figure 4: *Ratio des forces en fonction du rayon. N particules de masse négligeable sont placées aléatoirement sur la grille. pour la méthode de Jacobi avec conditions aux bords périodique à gauche et du Gradient conjugué avec conditions aux bords multipolaires à droite*

Pour trouver un compromis entre optimisation du temps de calcul et lisibilité du code, nous avons fait le choix de boucles imbriquées pour traiter les calculs sur chacune des cellules individuellement. Il aurait également été possible d'écrire les formules s'appliquant sur la grille à 3 dimensions entières, mais cela rend difficile l'appropriation du code par les membres du groupe et les partis extérieurs, ainsi que la détection d'erreurs d'inattention. Une comparaison effectuée entre un Jacobi optimisé et non optimisé (condition aux bords périodiques) révèle un gain de temps négligeable sur la durée totale de la subroutine.

2.5 Calcul du gradient du potentiel

L'accélération étant l'opposé du gradient du potentiel par la formule $a = g = -\vec{\nabla}\Phi$, il nous est nécessaire de calculer numériquement le gradient de celui-ci pour chaque cellule de notre modèle numérique. Pour cela, nous exprimons par la formule de Taylor le voisinage de x_i pour $\Phi(x_i)$:

$$\Phi(x_{i+1}) \approx \Phi(x_i) + \Delta x \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\Phi(x_{i-1}) \approx \Phi(x_i) - \Delta x \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Où i est l'indice de cellule de la composante x du potentiel. Ainsi on obtient, en combinant ces deux formules :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_{i-1}))}{2\Delta x} \quad (1)$$

Ce qui nous donne une approximation au second ordre de cette dérivée du potentiel. Il nous suffit ensuite de procéder de la même manière pour toutes les composantes du potentiel et nous obtenons alors les forces de gravité de chaque cellule. Cela nous permettra, par la suite, le calcul de l'accélération de chaque particule.

2.6 Interpolation du champ gravitationnel

Dans notre code, l'interpolation inverse est utilisée pour estimer les valeurs du champ gravitationnel aux positions des particules à l'intérieur de chaque cellule de la grille. Cette méthode consiste à pondérer les contributions des valeurs du champ gravitationnel des cellules voisines à la position de chaque particule, puis à effectuer une interpolation trilineaire pour estimer la valeur du champ à cette position. Cette approche nous permet de calculer efficacement les forces gravitationnelles agissant sur les particules dans chaque cellule de la grille, ce qui est essentiel pour suivre l'évolution dynamique du système simulé.

2.7 Intégration des équations du mouvement

Maintenant que l'on connaît, la position des particules et le champ gravitationnel à leur emplacement, on déduit leur accélération directement du principe fondamental de la dynamique. Il nous faut désormais intégrer ces équations du mouvement. Toutefois, nous devons utiliser des méthodes dites symplectiques, c'est-à-dire qu'elle conserve l'énergie. De manière équivalente, le volume occupé par toutes les particules dans l'espace des phases est conservé. En mécanique hamiltonienne, cela est équivalent à un changement de coordonnées canoniques. En effet, une intégration classique permet d'intégrer de manière approchée un hamiltonien exact de notre système. Cela mène alors à une dérive plus ou moins lente de la solution (en fonction du pas de temps), car les intégrales premières du mouvement (notamment le hamiltonien H) ne sont pas conservées. En faisant le choix d'un intégrateur symplectique, nous intégrons alors de manière exacte un hamiltonien approché (Boué [n.d.](#)).

Nous pouvons prendre un exemple simple: $H(\vec{p}, \vec{q}) = A(\vec{p}) + B(\vec{q})$. Ainsi, les équations du mouvement sont données par le champ de vecteur $\vec{X} = (-\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \frac{\partial H}{\partial \vec{p}})$. Si l'on suit un schéma d'Euler classique avec un pas de temps τ , on obtient de nouvelles coordonnées:

$$(\vec{p}', \vec{q}') = \Phi_\tau^H(\vec{p}, \vec{q}) = (\vec{p} - \tau \frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \vec{q} + \tau \frac{\partial H}{\partial \vec{p}})$$

Il est alors possible de vérifier que ce changement de variable n'est pas canonique. L'énergie contenue dans le Hamiltonien n'est plus la même. Procédons maintenant à une séparation des flots du hamiltonien tel que $\Phi_\tau^K = \Phi_\tau^B \circ \Phi_\tau^A$. On obtient alors

$$(\vec{p}'', \vec{q}'') = \Phi_\tau^K(\vec{p}, \vec{q}) = \Phi_\tau^B(\vec{p}', \vec{q}') = (\vec{p}' - \tau \frac{\partial H(\vec{p}', \vec{q}')}{\partial \vec{q}}, \vec{q}' + \tau \frac{\partial H(\vec{p}', \vec{q}')}{\partial \vec{p}})$$

Cette transformation est symplectique, toutefois, il est possible de démontrer en développant cette composition des flots par développement de Taylor de la dérivée de Lie que $K = A + B + \frac{\tau^2}{2}A, B + O(\tau^2)$

De manière pratique, faire une composition des flots revient à intégrer le couple de variables canoniques en différé. Ainsi, on peut citer la méthode du "leapfrog" parfois appelée "saute-mouton" en français, telle que

$$\begin{aligned}\vec{x}_{n+1} &= \vec{x}_n + \vec{v}_n \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_n \Delta t^2 \\ \vec{v}_{n+1} &= \vec{v}_n + \frac{1}{2} (\vec{a}_n + \vec{a}_{n+1}) \Delta t\end{aligned}$$

avec \vec{x} , \vec{v} et \vec{a} les vecteurs position, vitesse et accélération respectivement. n indique l'itération et Δt le pas de temps d'intégration. Dans notre projet, nous utiliserons la méthode "kick-drift-kick" qui consiste en cet algorithme:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{n+\frac{1}{2}} &= \vec{v}_n + \frac{\vec{a}_n \Delta t}{2} \\ \vec{x}_{n+1} &= \vec{x}_n + \vec{v}_{n+\frac{1}{2}} \Delta t \\ \vec{v}_{n+1} &= \vec{v}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\vec{a}_{n+1} \Delta t}{2}\end{aligned}$$

Après cette dernière étape, il faut alors recommencer toute la procédure pour faire évoluer notre système dans le temps. Le choix sur le pas de temps Δt est détaillé section [3](#).

3 Conditions initiales

Avant d'engager la génération de notre galaxie, il nous faut paramétrer les différentes constantes. Nous prenons alors les valeurs suivantes pour N le nombre d'étoiles, Δx , la taille d'une cellule, M_e , la masse d'une étoile et N_{grille} , le nombre de cellules sur une largeur de notre espace :

- $N = 100000$
- $M_p = 10^5 M_\odot$
- $\Delta x = \frac{30kpc}{N_{grille}}$
- $N_{grille} = 128$

Toutes ces constantes ont été choisies de manière à avoir une masse totale des étoiles ($\sim 10^{10} M_\odot$) et une vitesse moyenne ($\sim 100 km/s$) de celles-ci qui correspondent approximativement à celles de la Voie Lactée. N_{grille} est, quant à lui, un compromis entre un temps de calcul suffisamment court et une bonne précision. Il fallait également qu'on puisse interpréter le pas de temps simplement dont on rappelle l'expression donnée par le polycopié de ce sujet :

$$\Delta t = MIN(C_{vel} \frac{\Delta x}{v}, C_{dyn} \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}})$$

Avec $C_{vel} < 1$ et $C_{dyn} < 1$. Ce pas de temps est choisi pour qu'aucune particule ne puisse se déplacer de plus d'une cellule à l'itération temporelle suivante (première expression dans le MIN), et pour que celui-ci soit plus petit que le temps dynamique local (deuxième expression dans le MIN). On a alors $\Delta t \sim 200\,000$ ans.

Par la suite, pour mettre en place notre problème, nous avons besoin de disposer de conditions initiales d'une galaxie stable. Pour cela, nous utiliserons dans un premier temps les conditions initiales du modèle de Plummer, puis nous examinerons la condition initiale du modèle de Miyamoto-Nagai.

3.1 Modèle de Plummer

Le modèle de Plummer, ou sphère de Plummer, est une condition initiale à symétrie sphérique. Initialement utilisé pour modéliser les amas globulaires, il s'agit tout de même d'une modélisation suffisamment réaliste pour les galaxies sphériques. Ce modèle se caractérise par la densité et le potentiel suivants :

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a^2}} \quad (2)$$

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3)$$

Où M est la masse totale de notre galaxie, $G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ la constante gravitationnelle et a est le rayon d'échelle de notre sphère.

Génération des positions

Pour pouvoir générer les positions de nos étoiles, il nous faut exprimer la masse $M(r)$ qu'on peut exprimer comme suit :

$$M(r) = \iiint_V \rho(r) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = M \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left[1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

On réexprime alors r en fonction de la variable $y = \frac{M(r)}{M}$:

$$r(y) = a \sqrt{\frac{1}{y^{\frac{-2}{3}} - 1}} \quad (4)$$

Ainsi, pour tirer la coordonnée r selon la loi de distribution 3, il suffit de tirer y selon une loi uniforme entre 0 et 1 exclus. Cependant, il nous faut ensuite tirer θ et ϕ aléatoirement de manière uniforme sur toute la sphère de rayon r . Une simple loi uniforme pour ces deux variables ne suffit pas pour donner lieu à une répartition uniforme sur une sphère. On utilise alors la méthode suivante (voir <https://mathworld.wolfram.com/SpherePointPicking.html> pour plus de détails) :

- Tirer deux lois uniformes U et V entre 0 et 1 exclus ;
- appliquer $\theta = 2\pi U$
- appliquer $\phi = \cos^{-1}(2V - 1)$

Ainsi nous avons généré la position d'une étoile suivant la loi de densité isotrope 3.

Génération des vitesses

Pour générer les vitesses de chaque étoile, il nous faut utiliser l'équation d'inversion d'Eddington dans le cas d'une symétrie sphérique (formule fournie avec le polycopié du sujet)

$$f(E) = \frac{2^{-\frac{2}{3}}}{\pi^2} \int_E^0 \frac{d^2\rho}{d\psi^2} \frac{dx}{\sqrt{x-E}}$$

où $f(E)$ est la fonction de distribution dépendant de l'énergie total $E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi$. Dans le cas du modèle de Plummer (Bjerkel 2007) :

$$f(E) = \frac{24\sqrt{2}}{7\pi^2} \frac{R^2}{M^4 G^5} (-E)^{\frac{7}{2}} \quad (5)$$

Finalement, on tire aléatoirement une vitesse comprise entre 0 et v_e la vitesse de libération définie comme $v_e = \sqrt{2|\Phi|} = (\frac{2GM}{a})^{\frac{1}{2}}(1 + (\frac{r}{a})^2)^{-\frac{1}{4}}$. On calcule ensuite l'énergie totale E avec cette vitesse v :

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \Phi(r)$$

Puis on utilise une méthode de rejet avec une loi uniforme u entre 0 et 1 pour garder uniquement les valeurs de f (calculée avec E) en dessous de la fonction de distribution 5. Pour cela, il est nécessaire que $u < f(E)/\max(f)$. Pour revenir à notre polycopié de sujet, cela revient à une distribution des vitesses $g(q) \propto (1 - q^2)^{\frac{7}{2}} q^2$ (donné par la polycopié) avec $q = \frac{v}{v_e}$. On normalise par la suite cette loi avec la constante fournie 0.042951, puis il suffit de tracer cette distribution (avec $q \in [0, 1]$) et on trouve facilement un majorant de cette loi (2.15 par exemple dans notre code). Plus le majorant trouvé est proche de maximum de cette loi, plus la méthode de rejet est efficace. Ainsi, la méthode de rejet est possible.

Finalement, nous avons maintenant les positions et les vitesses de chaque étoile selon un profil de Plummer.

3.2 Profil de Miyamoto-Nagai

Ce profil de galaxie a été introduit par Miyamoto-Nagai en 1975. Nous utiliserons essentiellement la référence Bjerkel 2007 et Hernquist 1993. Ce modèle se définit par la densité volumique et le potentiel suivants :

$$\Phi(r, z) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}} \quad (6)$$

$$\rho(r, z) = \frac{b^2 M}{4\pi} \frac{ar^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{(r^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2)^{\frac{5}{2}}(z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Où a et b sont des constantes qui vont définir la géométrie de notre galaxie, et M est la masse totale de notre galaxie. On en déduit directement la vitesse circulaire d'une particule qui nous sera utile par la suite (Bjerkel 2007).

$$v_c(r, z) = \sqrt{r \frac{d\Phi(r)}{dr}} = \frac{GM}{(r^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

Génération des positions

On ne peut utiliser ici la même méthode que pour le profil de Plummer. Il nous faut alors une nouvelle fois utiliser la méthode numérique de rejet. On choisit alors pour commencer de tirer selon une loi uniforme r et z . Cependant, la difficulté est de choisir un intervalle suffisamment grand pour ces deux coordonnées afin d'avoir une répartition réaliste des étoiles dans notre galaxie. Nous avons choisi arbitrairement $r \in]0, 100a[$ et $z \in]-20b, 20b[$ qui nous fournit un profil de galaxie qui semble suffisamment réaliste pour notre problème. On tire ensuite un nombre selon la loi uniforme entre 0 et $\max(\rho(r, z)) = \rho(0, 0)$ qui est une loi qui majore la distribution $\rho(r, z)$ et on ne garde que les points se situant en dessous de celle-ci. On obtient ainsi la répartition spatiale de chaque étoile dans notre galaxie.

Génération des vitesses

Pour la répartition des vitesses, nous pourrions simplement utiliser la loi 8 à l'aide de nos coordonnées générés précédemment. Cependant, l'article Bjerkel 2007 nous informe que cela ne mène pas à une galaxie stable au cours du temps. Il nous faut pour cela ajouter de la dispersion sur chaque coordonnées de nos vitesses. On commence par définir κ la fréquence épicyclique et Ω la vitesse angulaire d'une étoile :

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{r} \frac{d\Phi(r, 0)}{dr}} = \frac{GM}{(r^2 + (a+b)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa = \sqrt{r \frac{d\Omega^2}{dr} + 4\Omega^2} = \sqrt{-3 \frac{GM r}{(r^2 + (a+b)^2)^{\frac{5}{2}}} + 4\Omega^2}$$

Bjerkel 2007 nous fournit alors :

$$\sigma_z^2 = \pi G \Sigma(r) z_0$$

Où $\Sigma(r)$ est la densité surfacique défini ici comme $\Sigma(r) = \Sigma(0) e^{-\frac{r}{a}}$ et z_0 une constante d'échelle sur l'axe z .

$$\sigma_r = \frac{3.36 Q G \Sigma(r)}{\kappa}$$

Où Q est le paramètre de Toomre qui doit être supérieur à 1 pour une galaxie stable au cours du temps.

$$\sigma_\theta^2 = \sigma_r^2 \frac{\kappa^2}{\Omega^2}$$

$$< v_\theta > = \sqrt{v_c^2 + \sigma_r^2 \left(1 - \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} - 2\frac{r}{a}\right)}$$

Ainsi, on assigne $< v_\theta >$ à la composante angulaire de la vitesse de notre étoile, puis on assigne à toutes les composantes une dispersion suivant une gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type σ_i avec $i = r, \theta, z$.

Cependant une difficulté subsiste puisqu'il arrive que $< v_\theta >$ soit imaginaire parfois. En réalité cela dépend de la valeur de Σ_0 que l'on prend pour la densité surfacique. L'article Hernquist 1993 suggère de remplacer la loi de densité $\sigma(r)$ par

$\Sigma(r) = \Sigma_0 e^{-\frac{\sqrt{r^2 + (\frac{a}{4})^2}}{2a}}$ lorsque $< v_\theta >$ est imaginaire ce que nous avons fait.

4 Résultats et discussion

Dans toute la suite de nos discussions, nous avons uniquement utilisé la méthode de Jacobi car nous n'avons pas eu un temps suffisant pour optimiser le gradient conjugué. En effet, même si celui-ci nécessite beaucoup moins d'itérations pour une meilleure précision, celles-ci ont des calculs beaucoup plus longs.

4.1 Stabilité du modèle de Plummer

Dans le cadre de notre étude, nous avons d'abord examiné la stabilité d'un modèle de Plummer positionné au centre de la grille de simulation. La simulation a été exécutée sur une durée de 1 milliard d'années et avec un paramètre $a = 0.05$ kpc.

Les résultats de cette simulation ont été analysés à l'aide de différents graphiques : un graphique 3D des particules a été généré pour visualiser leur répartition spatiale dans la grille, une carte en densité intégrée selon Z , un graphe de la distribution de matière et un de la distribution des vitesses pour vérifier si nos deux lois de distribution ont bien été respecté.

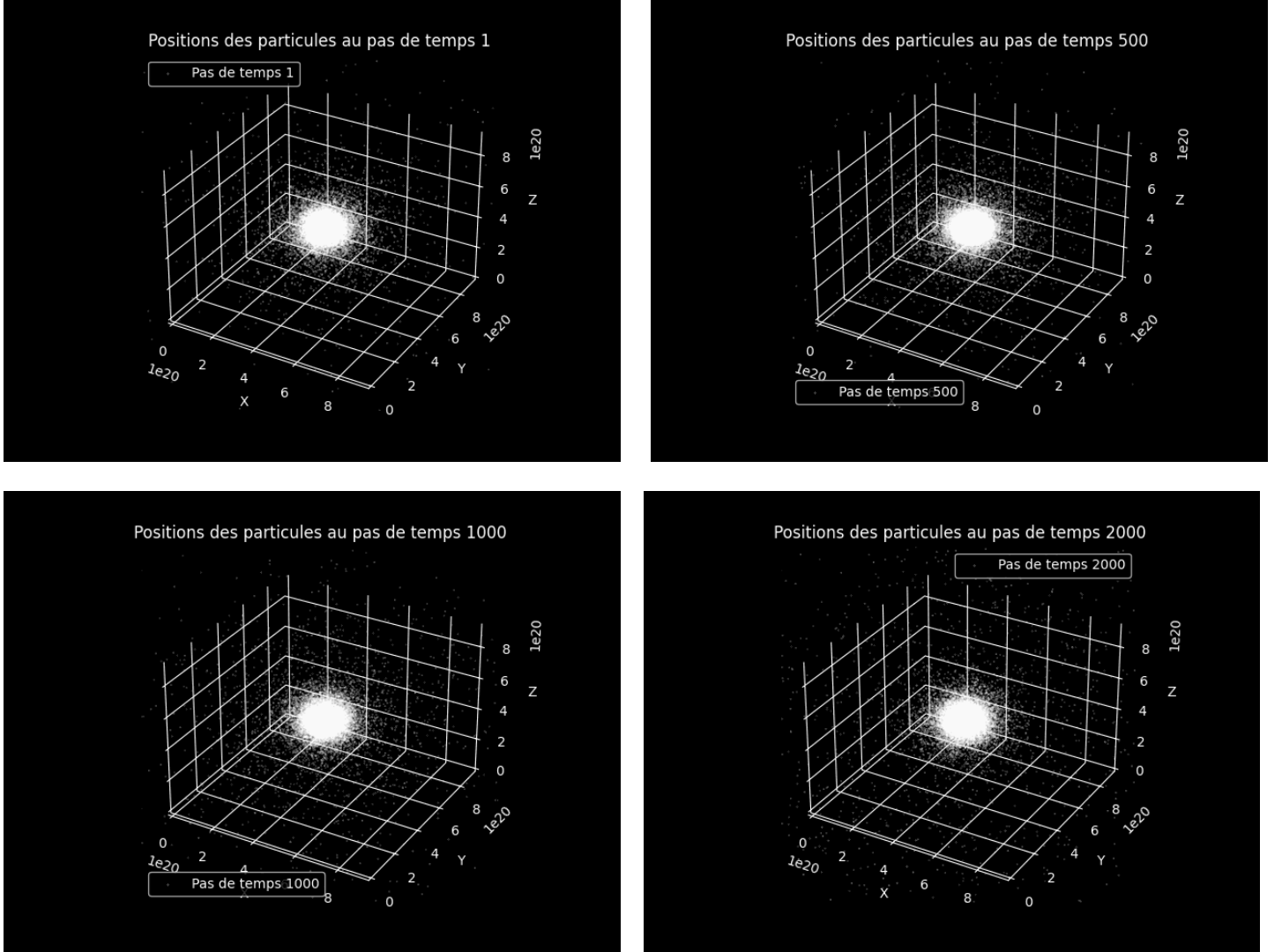


Figure 5: Graphiques des positions à différents pas de temps où les trois axes sont exprimés en mètres.

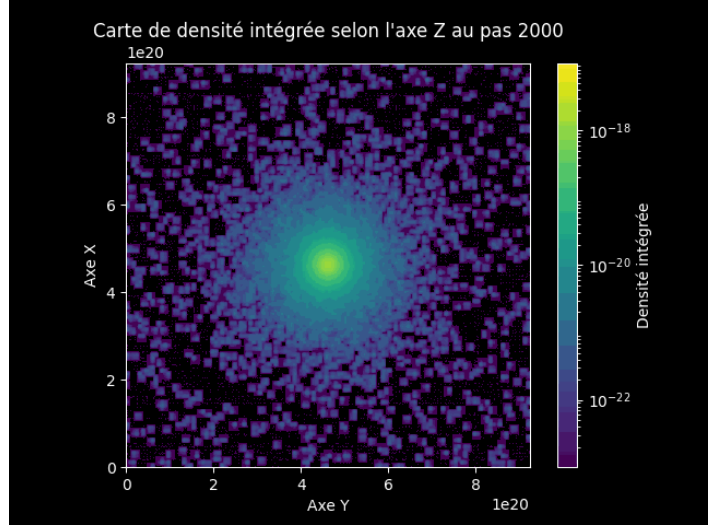
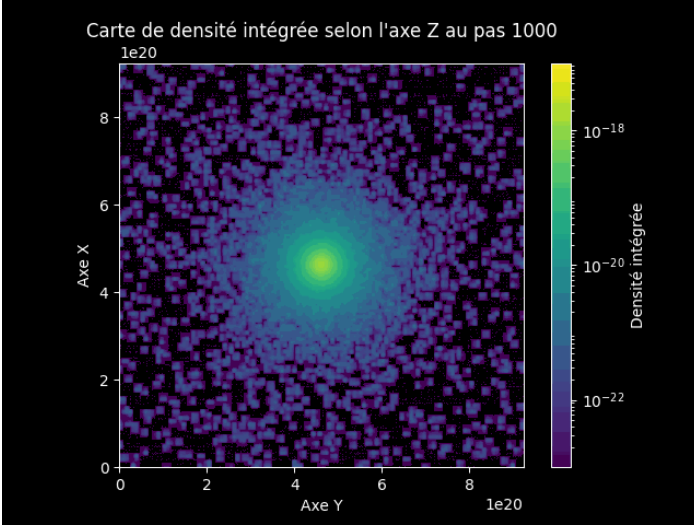
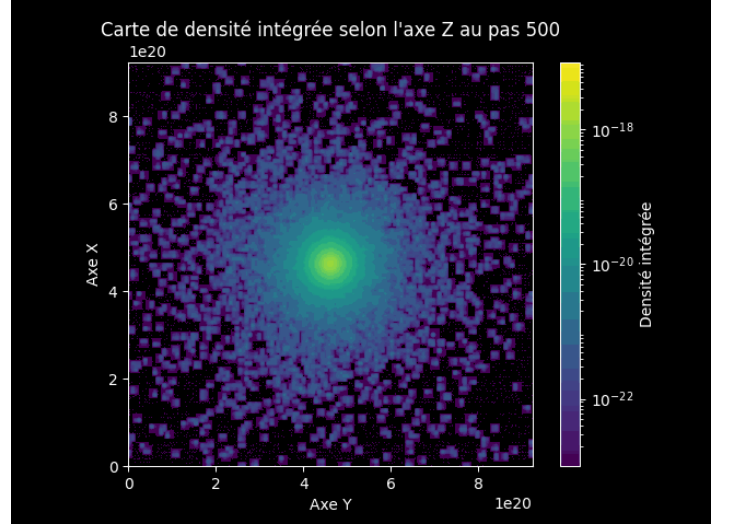
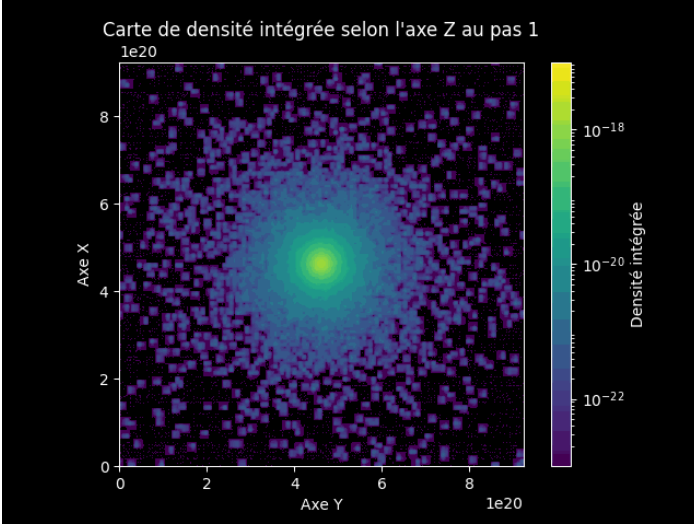


Figure 6: *Cartes de densité intégrée selon l'axe z à différents pas de temps. Chaque pixel représente ici une cellule de largeur $\Delta x \approx 0.23kpc$.*

Les figures 5 et 6 nous montrent, pour commencer, que l'aspect de symétrie sphérique est bien conservé au cours du temps.

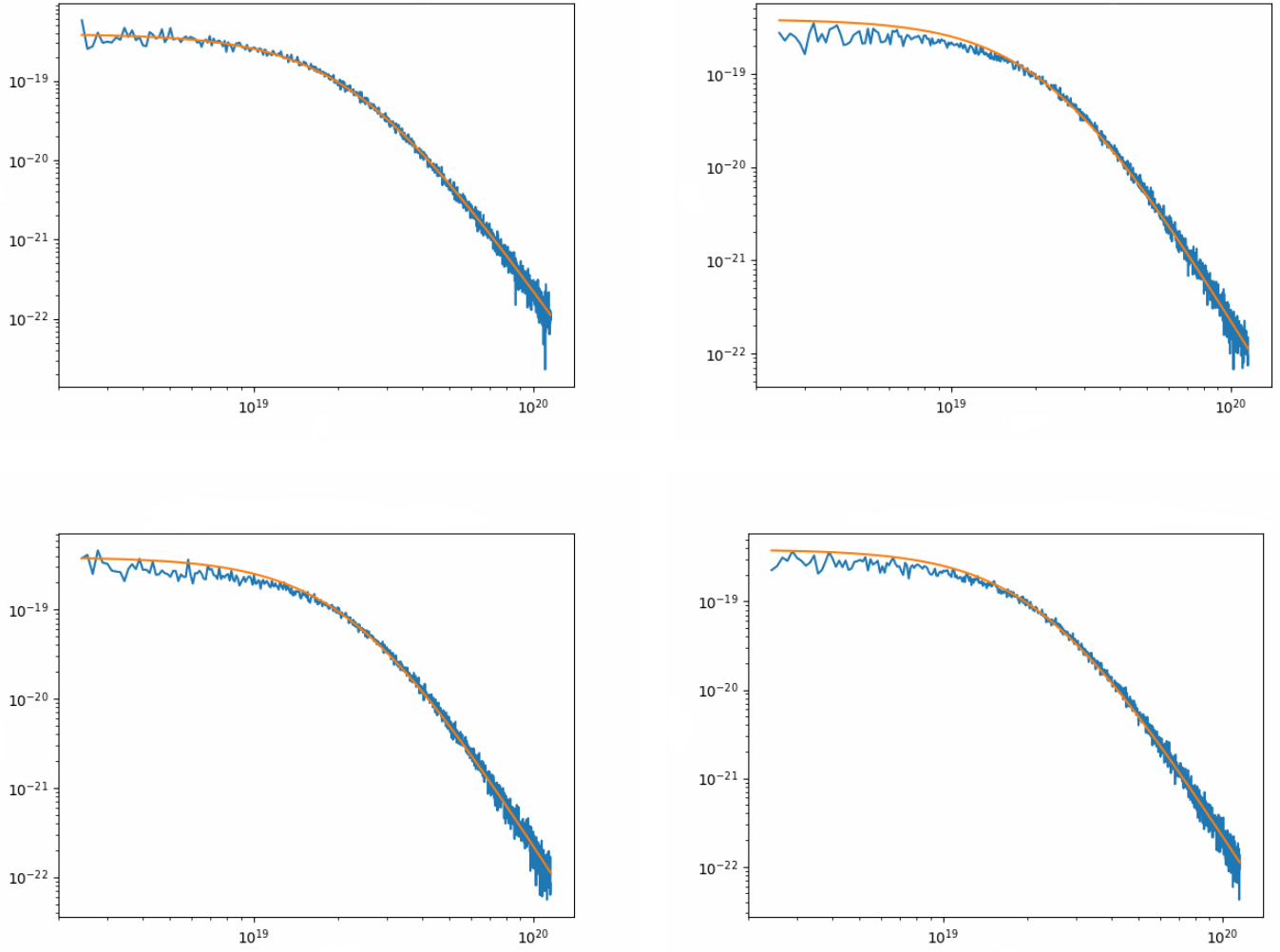


Figure 7: *Profils de densité volumique (exprimés en kg/m^3) en fonction de la distance au centre r ici exprimée en mètres, au même pas de temps que les figures précédentes.*

Sur la figure 7, on remarque qu'au cours du temps le profil de densité de Plummer est bien conservé. Cependant on distingue une anomalie pour les distances r faibles. En effet, on observe une légère baisse par rapport à la courbe théorique ce qui signifie que certaines étoiles se sont échappées au cours de la simulation et probablement réparties le long de distances plus grandes. Néanmoins ce phénomène semble se produire aux premiers pas de temps puisque cela ne s'accroît pas au cours du temps. Le profil en densité est alors globalement conservé.

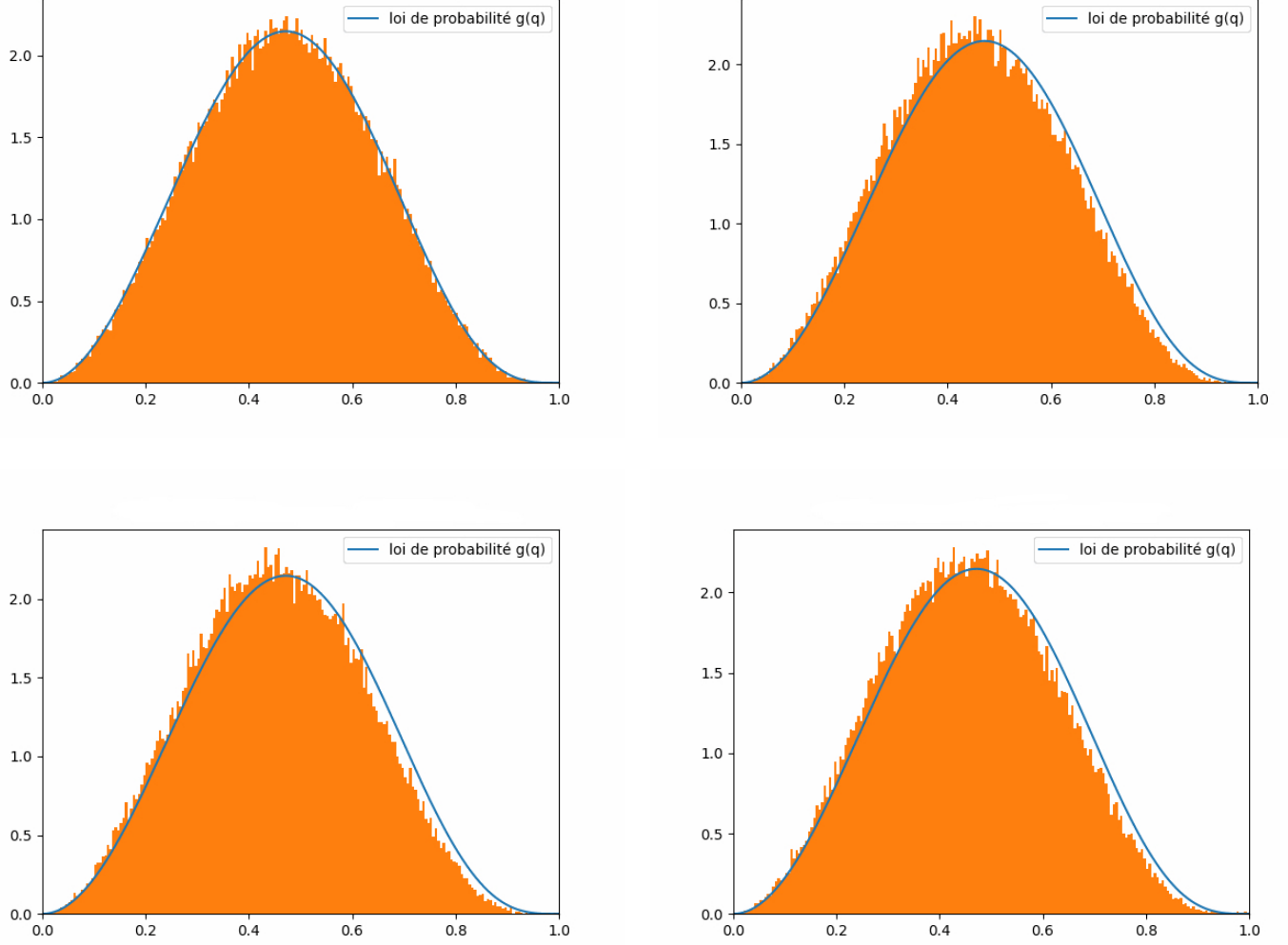


Figure 8: *Profils de vitesse à différents pas de temps en fonction de q .*

Sur la figure 8, on observe un phénomène similaire aux courbes de densité : le profil de vitesse semble se décaler légèrement vers la gauche. Cela se produit également sur la même échelle de temps que l'anomalie des courbes de densité mais ce phénomène semble une nouvelle fois léger.

Pendant nos simulations, nous observons, à l'aide d'images générées tous les 25 pas de temps, que certaines étoiles s'échappent du centre de la galaxie pendant les premiers pas de temps. Ce phénomène observé est probablement rattaché aux anomalies que nous avons observées sur nos différents profils obtenus.

En résumé, nos résultats ont montré que le modèle de Plummer positionné au centre de la grille de simulation était stable pendant la durée de la simulation, et que la distribution de matière et de vitesse des particules correspondait aux prédictions théoriques basées sur le modèle de Plummer.

4.2 Stabilité modèle de Miyamoto-Nagai

Pour cette section, nous verrons que celle-ci n'est pas aussi aboutie car beaucoup plus complexe que la précédente. Nous prenons le même paramètre $a = 0.05$ kpc que précédemment, puis nous choisissons $b = 0.1a$, $z_0 = 0.2a$, $\Sigma_0 = 10^8 M_\odot / \text{kpc}^2$ et $Q = 1.2$ en nous inspirant des articles Hernquist 1993 et Bjerkel 2007. Pour visualiser nos résultats, nous allons uniquement visualiser des cartes de densité intégrées selon Z ainsi que des graphes en deux dimensions selon les axes X et Y puisque

nous sommes sur un disque galactique.

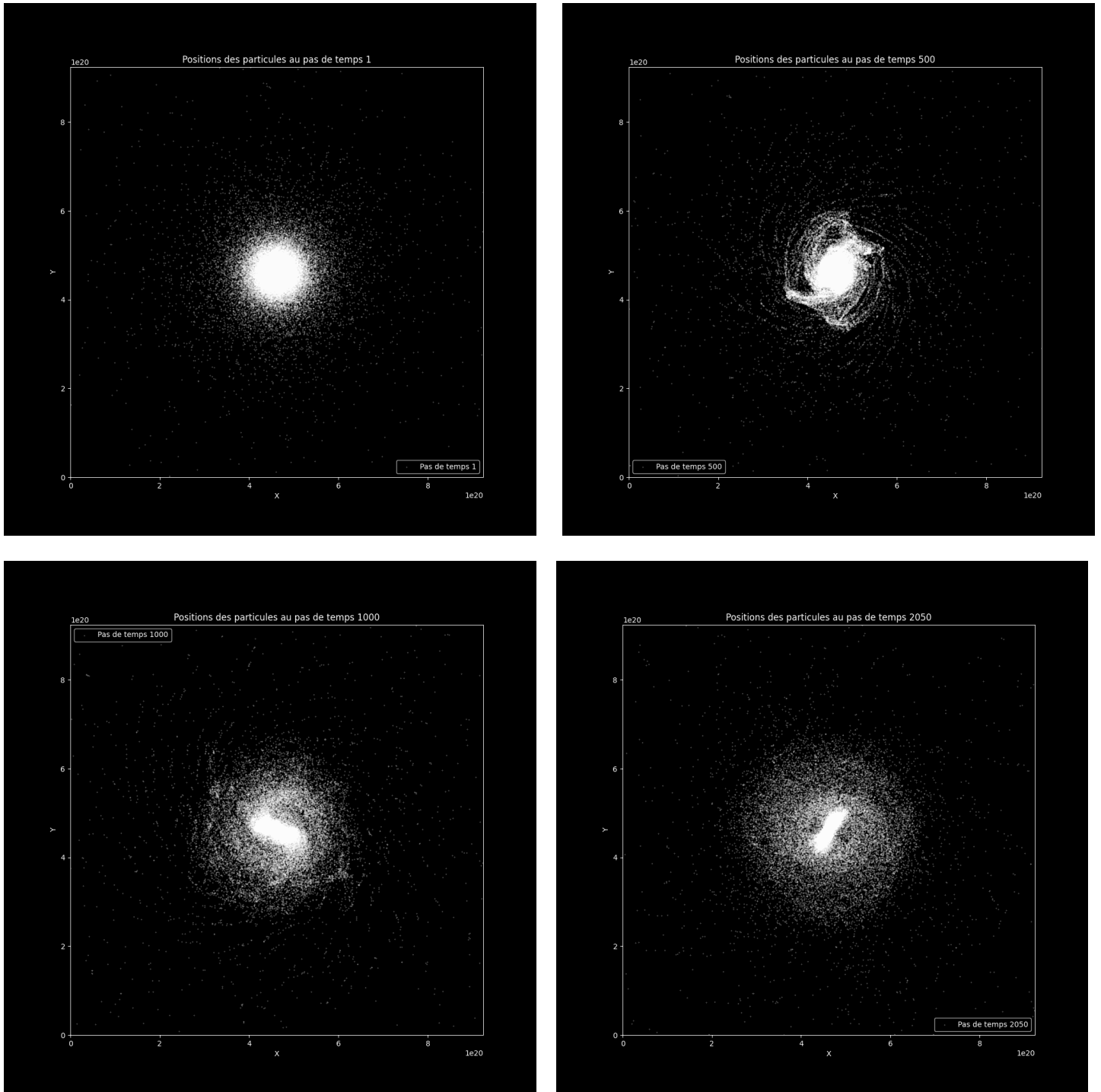


Figure 9: *Graphiques des positions pour le modèle de Miyamoto-Nagai à différents pas de temps selon les axes X et Y exprimés en mètres.*

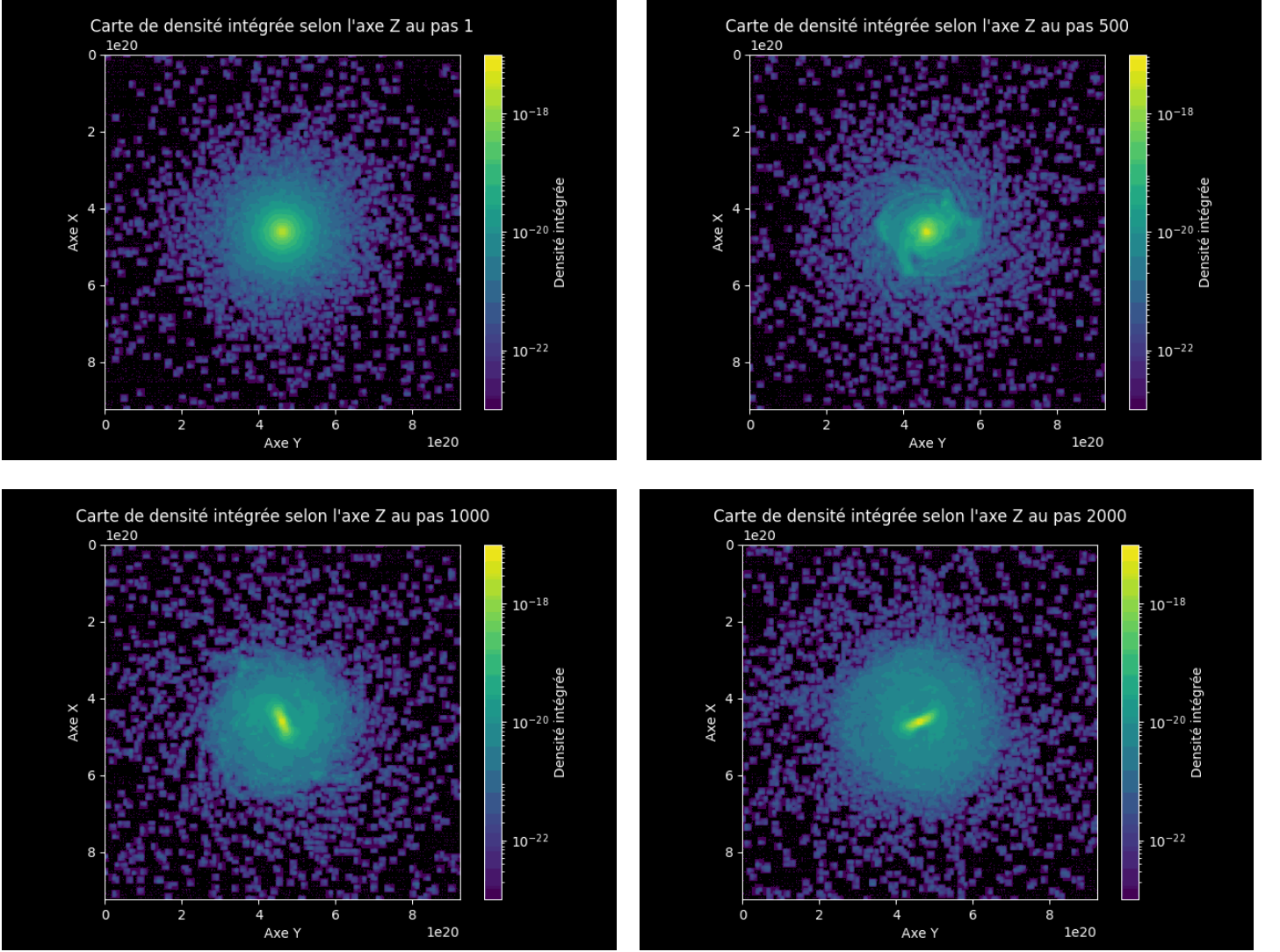


Figure 10: Cartes de densité pour le modèle de Miyamoto-Nagai à différents pas de temps où chaque pixel représente une cellule de taille $\Delta x \approx 0.23 \text{ kpc}$.

Sur les figures 10 et 9, on remarque que le profil initial n'est pas conservé au cours du temps. Au pas de temps 500, le système semble se contracter laissant place à des spirales. Puis le disque finit par se stabiliser pour les pas de temps 1000 et 2000. Une barre se forme au centre au cours du temps ce qui va en contradiction avec les résultats des articles Hernquist 1993 et Bjerkel 2007. Cependant, après un test avec un nombre de cellules doublé, il s'est avéré que la barre située au centre semblait plus faible, mais les temps de calculs sont beaucoup plus long. Nous craignons, de ce fait, que notre programme ne soit pas suffisamment performant pour rendre ce profil de galaxie stationnaire. De plus, on fournit en annexe une comparaison de côté au pas de temps initial et final. Le plan galactique a également effectué une rotation au cours de la simulation ce qui accentue la propriété non stationnaire de notre galaxie. Néanmoins il serait intéressant d'effectuer divers tests avec des paramètres a , b , z_0 , Q et Σ_0 différents pour vérifier la stabilité. Mais cela n'a pas pu être fait par manque de temps. Le profil initial n'étant pas conservé, nous avons choisi de ne pas utiliser ce modèle pour effectuer des collisions.

4.3 Influence de la masse

Nous avons mené une étude qualitative pour observer l'influence du rapport de masse dans la collision. Nous nous intéressons à la taille de la galaxie qui suit le profil de Plummer. La vitesse relative de la galaxie ponctuelle est de 120

$km.s^{-1}$ et le rayon initial de la galaxie est de 6.2kpc. Sur la figure 4.3 nous observons deux simulations superposées après 1 milliard d’années, où les deux galaxies ont fusionné. Nous voyons que plus la galaxie principale possède une masse élevée en comparaison de la galaxie ponctuelle plus elle sera déformée. En effet, la galaxie du haut a tendance à voir son rayon diminuer. La galaxie de la simulation du bas possède un rayon plus proche de la galaxie initiale.

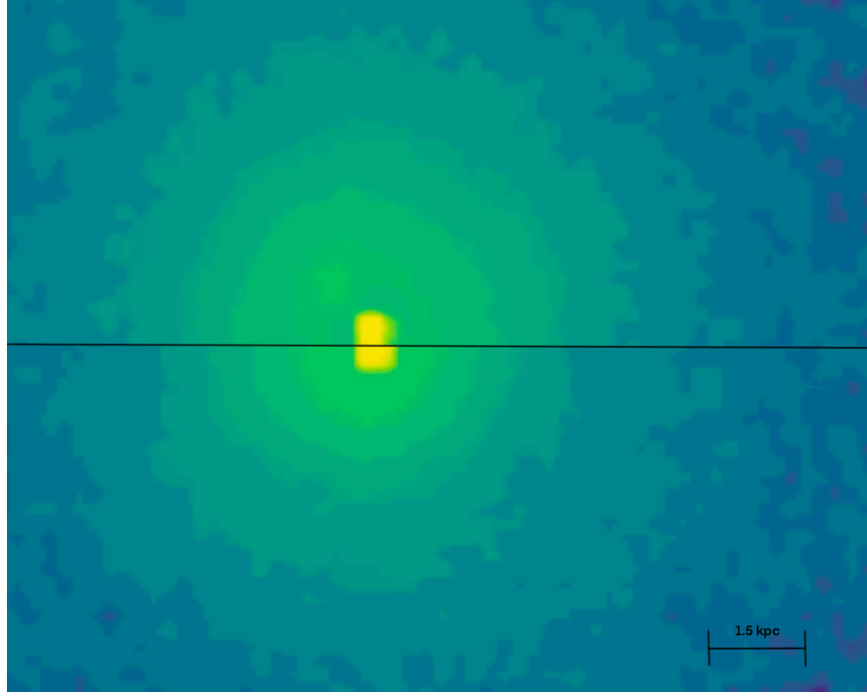


Figure 11: Carte en densité avec la même échelle que précédemment. Résultat final de deux simulations avec des masses différentes. Celle du haut : $\frac{M_{plummer}}{M_{ponctuelle}} = 0.8$ et celle du bas : $\frac{M_{plummer}}{M_{ponctuelle}} = 1.2$

4.4 Etude de cas : Collision entre Andromède et la Voie Lactée et influence de la vitesse

La Voie lactée et la Galaxie d’Andromède (M31) sont étroitement liées, malgré le fait que la vitesse relative de M31 ne soit pas précisément déterminée à l’heure actuelle. Leur trajectoire orbitale est largement influencée par les conditions initiales, mais la plupart des travaux suggèrent une rencontre proche dans les 3 à 5 prochains milliards d’années. Ainsi nous avons simulé cette fusion avec différents paramètres de notre modèle. Dans le cadre de notre étude, nous avons donc simulé cette fusion en utilisant différents paramètres dans notre modèle. En raison de limitations de puissance de calcul, nous avons opté pour des conditions spatiales initiales différentes des autres études, en positionnant nos galaxies déjà relativement proches l’une de l’autre (quelques kpc).

Nous avons choisi de garder le rapport de masse de 1.14 de l’article Schiavi 2020 mais de changer le nombre de particules par souci de temps de calcul. Nous avons représenté des clusters d’étoiles pour atteindre une masse totale équivalente à celle approximée pour les deux galaxies. Dans les graphes suivants, M31 est représentée par une masse ponctuelle tandis que la Voie Lactée, notre galaxie, est modélisée par un profil de Plummer. Le nombre de particules est fixé à 100 000 pour la Voie Lactée et 87 000 pour M31, soit respectivement une masse de $10^{10}M_{\odot}$ et $0.9M_{\odot}$.

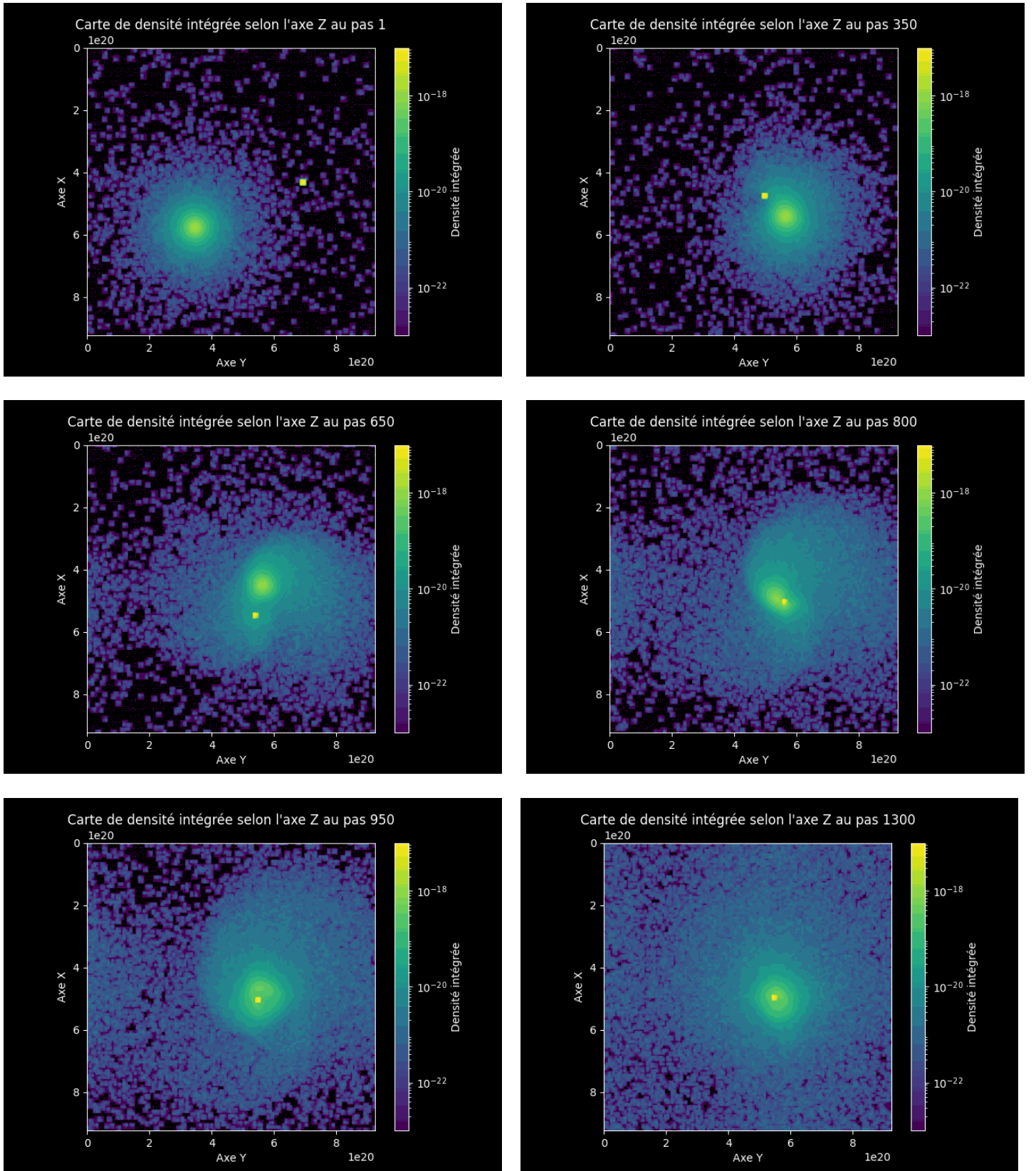


Figure 12: Carte en densité selon plusieurs pas de temps. Les axes représentés sont en $\frac{1}{3}m$ pour une boîte totale de 30kpc de côté. La vitesse relative de M31 est de $146m.s^{-1}$

On observe sur la figure 12 que l'approche d'Andromède déforme progressivement le disque de notre galaxie via des forces de marée. Les bras spiraux externes se forment et sont tirés vers Andromède. Le disque subit une distorsion grandissante au fur et à mesure que la masse d'Andromède se rapproche. Cette simulation permet de comprendre l'influence gravitationnelle considérable qu'aura la galaxie Andromède lors de sa collision future avec notre Voie Lactée. Même représentée par une simple masse ponctuelle, Andromède parvient à perturber et déstructurer significativement le disque galactique de notre Voie Lactée bien avant la collision proprement dite. Ce phénomène de déformation par effet de marée sera déterminant pour l'évolution morphologique des deux galaxies lors de leur fusion.

Cette déformation va être particulièrement dirigée par les conditions initiales comme la masse, la vitesse initiale relative d'Andromède ou le paramètre d'impact.

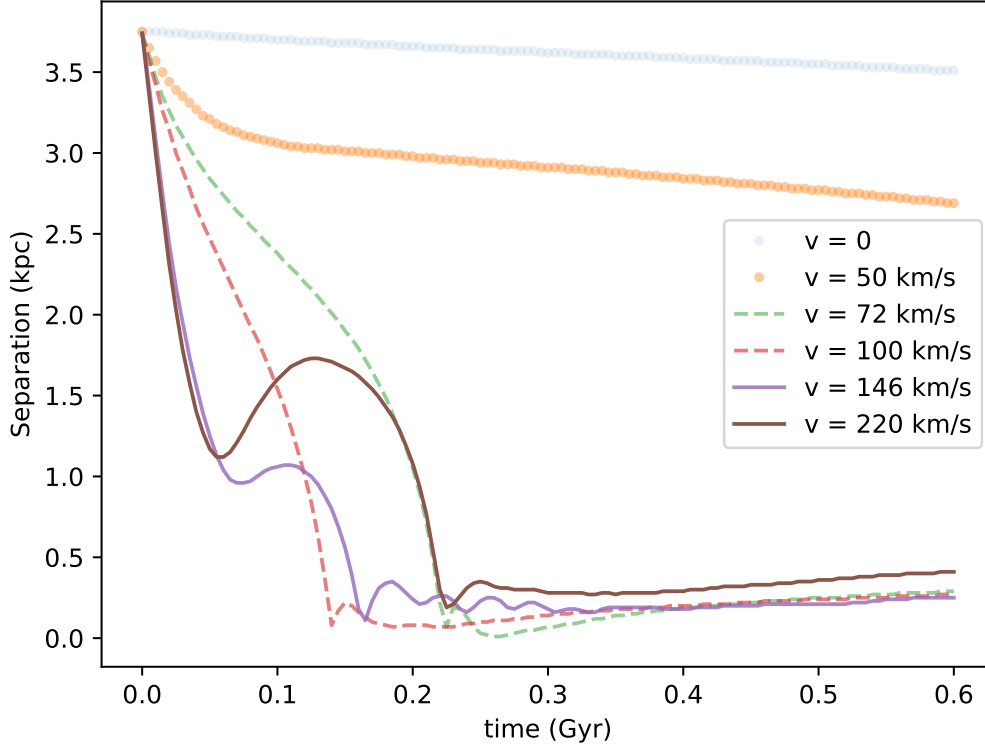


Figure 13: Séparation entre les deux galaxies en fonction du temps pour six valeurs différentes de vitesse.

Sur la figure 4.4 l'étude paramétrique de la cinématique d'approche en faisant varier la vitesse radiale initiale révèle une dynamique riche et non-linéaire. Ainsi, on peut distinguer trois régimes sur le graphe. Pour des faibles vitesses inférieures à 50 km/s, la décroissance quasi-linéaire de la distance intergalactique en fonction du temps indique un régime balistique simple dominé par le terme d'inertie. Au delà de 100 km/s émerge un comportement fortement non-linéaire caractéristique d'un régime dominé par l'attraction gravitationnelle mutuelle. On observe alors pour les vitesses les plus élevées une phase oscillatoire initiale où la distance décroît, passe par un minimum, puis croît à nouveau temporairement. Ce profil sigmoïdal résulte d'un effet de rebond gravitationnel permise par la conservation du moment cinétique total du système isolé. L'amplitude du premier rebond dépend fortement de la vitesse initiale et semble plus forte lorsque la vitesse est plus élevée. Les galaxies s'approchent sous l'effet conjoint de leur vitesse initiale et de l'accélération mutuelle, mais leur énergie cinétique est insuffisante pour les séparer à nouveau complètement. Elles demeurent liées dans une orbite oscillante décroissante aboutissant in fine à la coalescence galactique.

5 Conclusion

En conclusion, ce projet a permis d’explorer les interactions complexes entre galaxies en utilisant une approche numérique combinant Fortran et Python. Nous avons réussi à simuler avec succès l’évolution des galaxies lors de collisions et d’interactions, en utilisant le profil de Plummer pour définir les conditions initiales du système. Les résultats obtenus ont fourni des informations précieuses sur la stabilité de Plummer, l’impact de la masse sur l’évolution des galaxies, ainsi qu’une étude de cas sur la collision entre Andromède et la Voie lactée.

Cependant, ce projet présente également des limites et des pistes d’amélioration. Bien que nous ayons obtenu des résultats significatifs, il reste encore beaucoup à explorer. Par exemple, il serait intéressant de tester d’autres morphologies que Plummer (notamment le modèle de Miyamoto-Nagai qui aurait nécessité plus de temps pour trouver des conditions stables), et d’évaluer l’efficacité du gradient conjugué par rapport à la méthode de Jacobi pour prolonger la durée des simulations ce qui aurait alors nécessité une optimisation de celui-ci. Une parallélisation a également été envisagée mais sans résultats significatifs.

En outre, le code source contient plusieurs simulations avec différents paramètres enregistrés, ce qui offre une opportunité pour une analyse plus approfondie des résultats et une exploration plus poussée des pistes mentionnées ci-dessus.

References

- Aarseth, S. J. (Jan. 1963). “Dynamical evolution of clusters of galaxies, I”. In: 126, p. 223. DOI: [10.1093/mnras/126.3.223](https://doi.org/10.1093/mnras/126.3.223).
- Bjerkel, Per (2007). *N-body simulations of interacting galaxies*.
- Boué, G. (n.d.). “Gravitation Classique et Mécanique Celeste”.
- F. Lepetit Z. Méliani, Y. Ratera (Proposant) (n.d.). “Collision et structure des galaxies: Méthodes N-corps et résolution des équations de Vlasov-Poisson”.
- Hernquist, Lars (1993). “N-BODY REALIZATIONS OF COMPOUND GALAXIES”. In: *The Astrophysical Journal*.
- Marco, J.P. (n.d.). “Equations cinétiques pour les systèmes à grand nombre de particules”.
- Pelletier, Donald (2021). *Image créée à l’aide du logiciel Aladin Sky Atlas du Centre de Données astronomiques de Strasbourg et des données publiques en format FIT de SDSS (Sloan Digital Sky Survey)*. Travail personnel. Consulté le 12 juillet 2021, depuis <https://exemplelienverslimage.com>.
- Robertson, Brant et al. (2006). “The role of mergers and interactions in driving the evolution of galaxies over the last 8 billion years”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 384.1, pp. 386–401.
- Schiavi, Riccardo (2020). “The collision between the Milky Way and Andromeda Galaxy and the fate of their Supermassive Black Holes”. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 497.
- Toomre, J. and A. Toomre (1972). “Galactic Bridges and Tails”. In: *Astrophysical Journal* 178, pp. 623–666. DOI: [10.1086/151823](https://doi.org/10.1086/151823).
- Tremaine, Scott (2005). “Galactic Dynamics”. In: URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:2479533>.
- Vorontsov-Velyaminov, Boris (1959). *Atlas and Catalogue of Interacting Galaxies*. Moscow: Moscow University Press.

6 Annexe

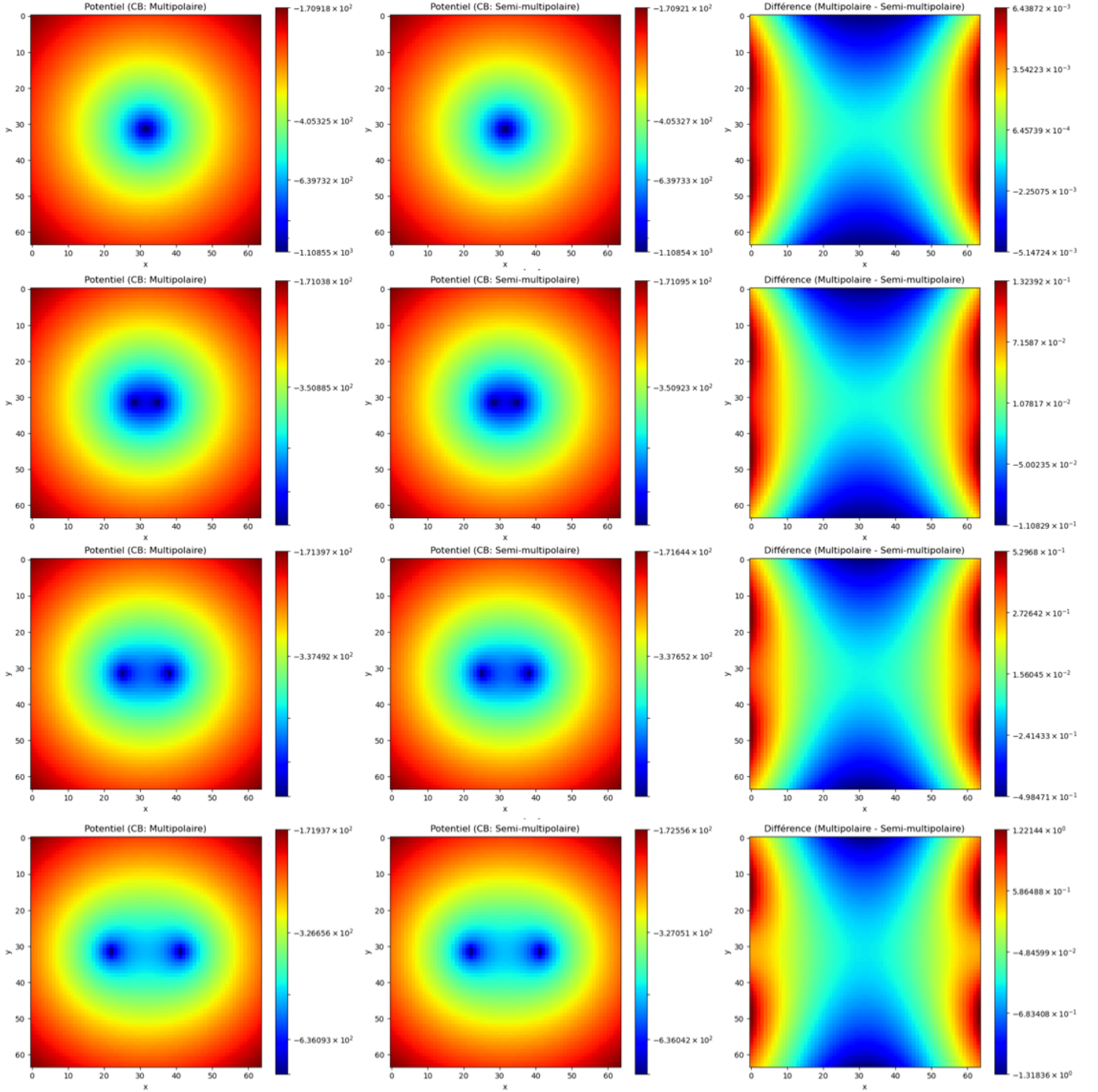


Figure 14: Colormap du potentiel généré par deux particules de même masse à équidistance du centre de la grille. De haut en bas, la distance du centre est 1%, 5%, 10% et 15% de la taille de la grille. De gauche à droite, le potentiel est évalué par gradient conjugué avec des conditions aux bords multipolaire, exactes puis la différence des deux.

Colormap du résidu du gradient conjugué pour plusieurs itération
Conditions aux limites Multipolaire

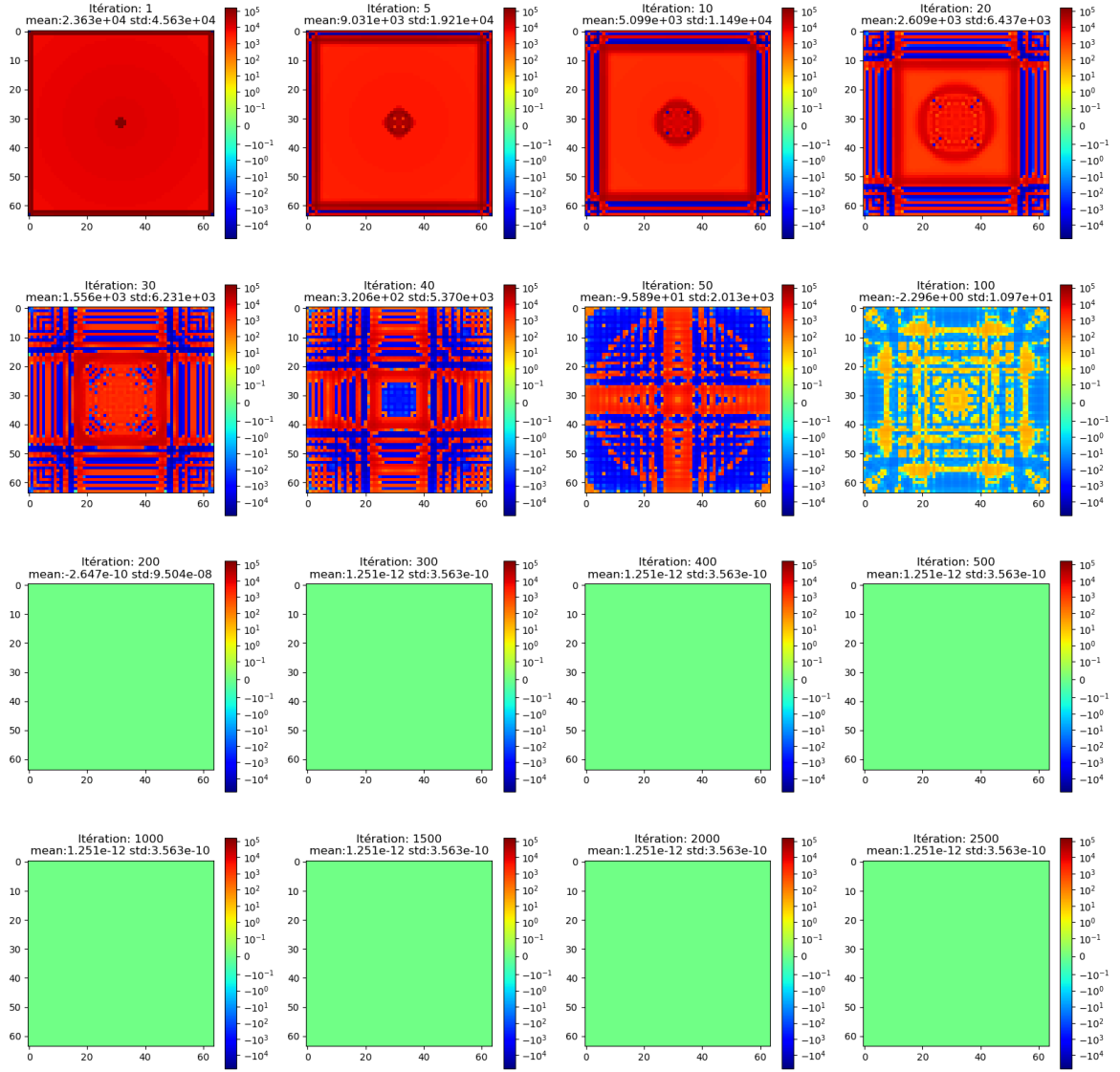


Figure 15: Colormap du résidu du gradient conjugué projeté sur l'axe z pour plusieurs itérations. Conditions aux bords multipolaires

Colormap du résidu du gradient conjugué pour plusieurs itération
Conditions aux limites Periodique

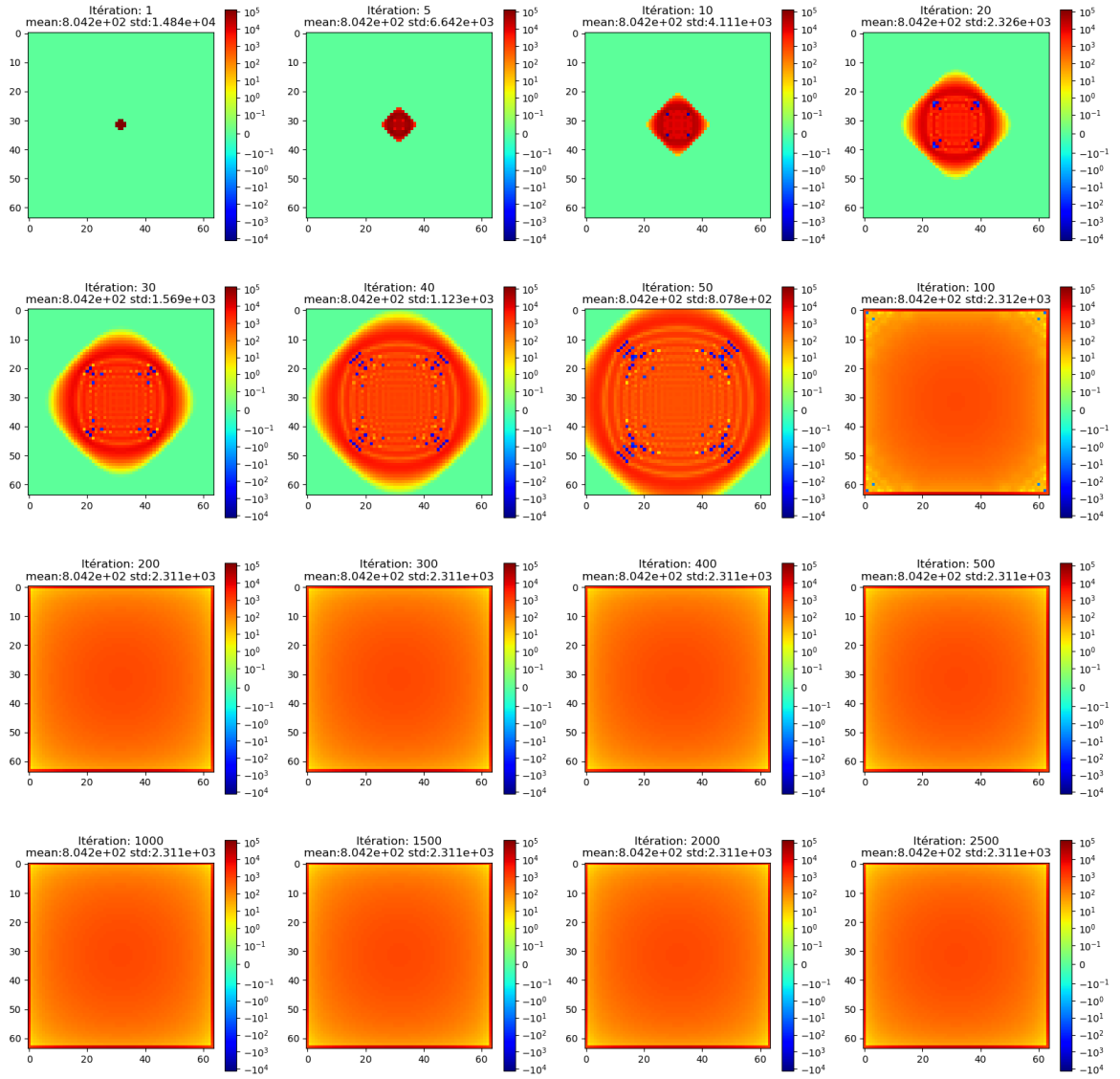


Figure 16: Colormap du résidu du gradient conjugué projeté sur l'axe z pour plusieurs itérations. Conditions aux bords périodique

Colormap du résidu du Jacobi pour plusieurs itération
Conditions aux limites Multipolaire

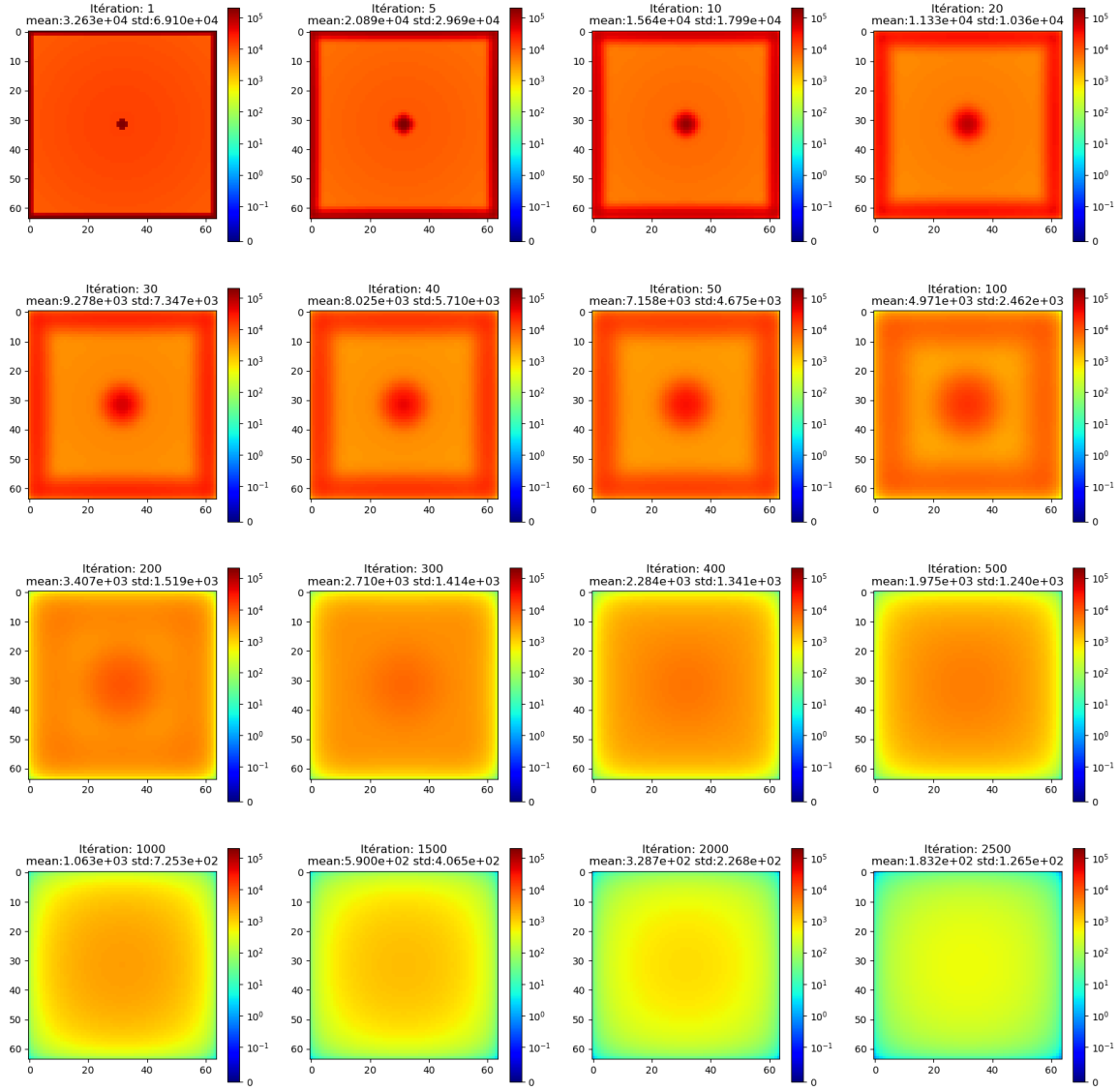


Figure 17: Colormap du résidu du Jacobi projeté sur l'axe z pour plusieurs itérations. Conditions aux bords multipolaires

Colormap du résidu du gradient conjugué pour plusieurs itération
Conditions aux limites Periodique

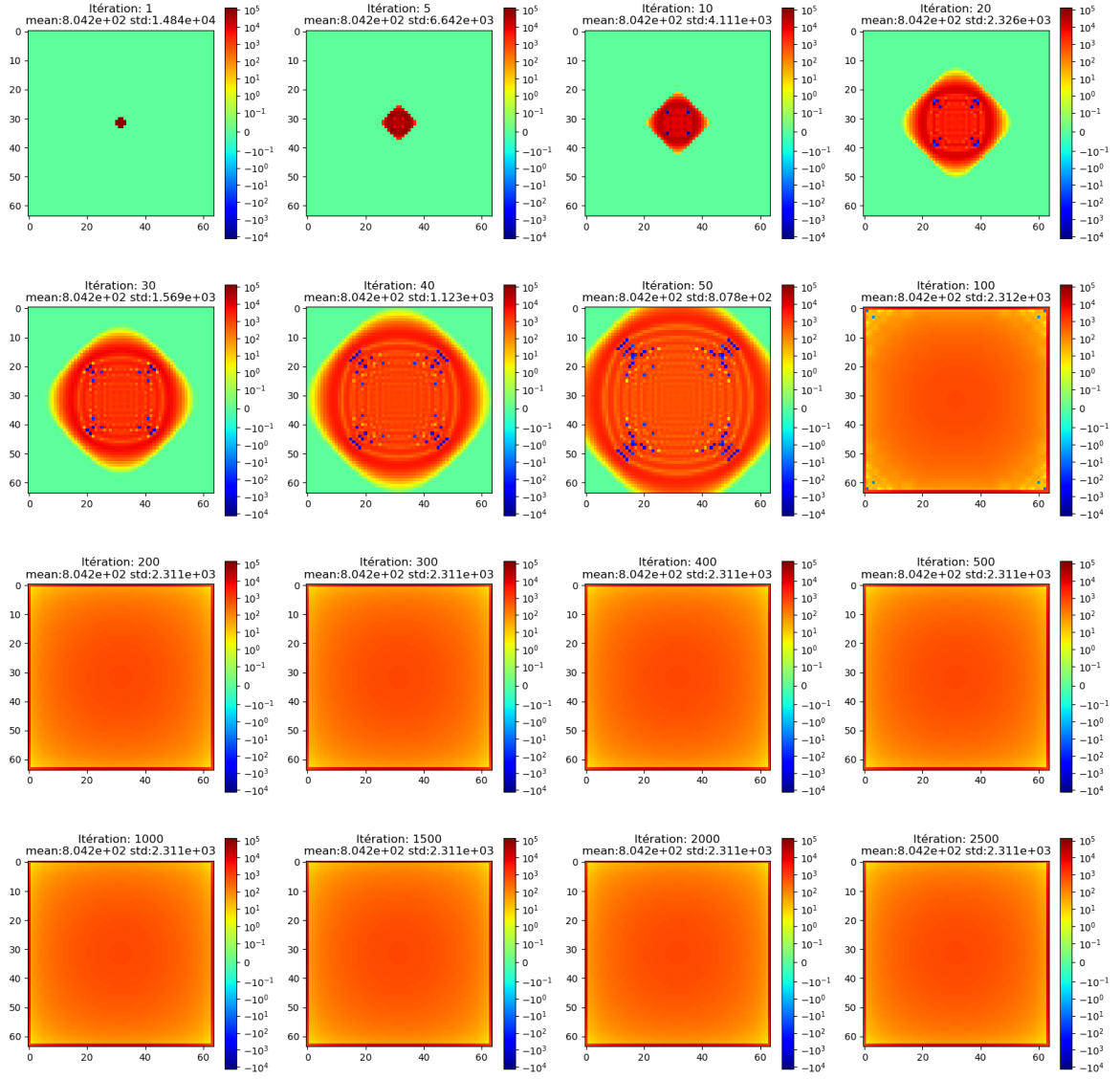


Figure 18: Colormap du résidu du Jacobi projeté sur l'axe z pour plusieurs itérations. Conditions aux bords périodique

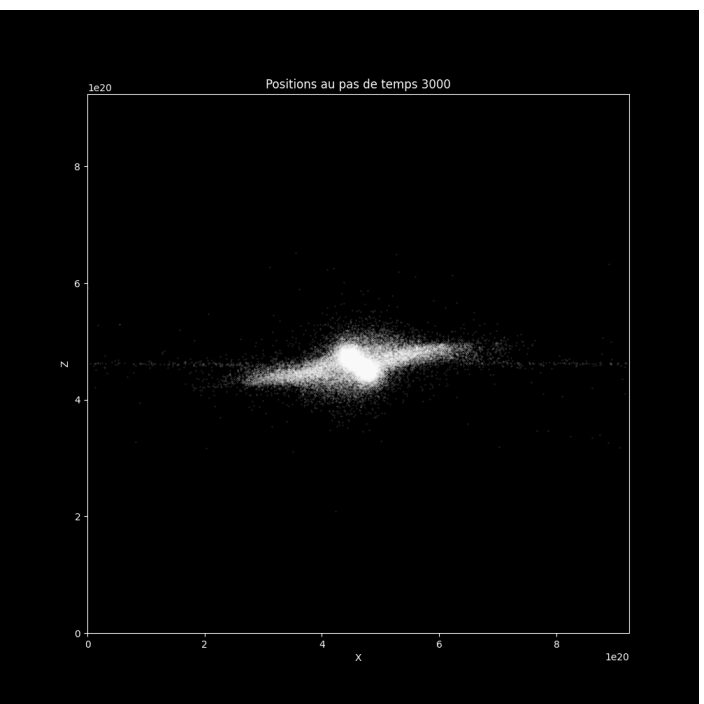
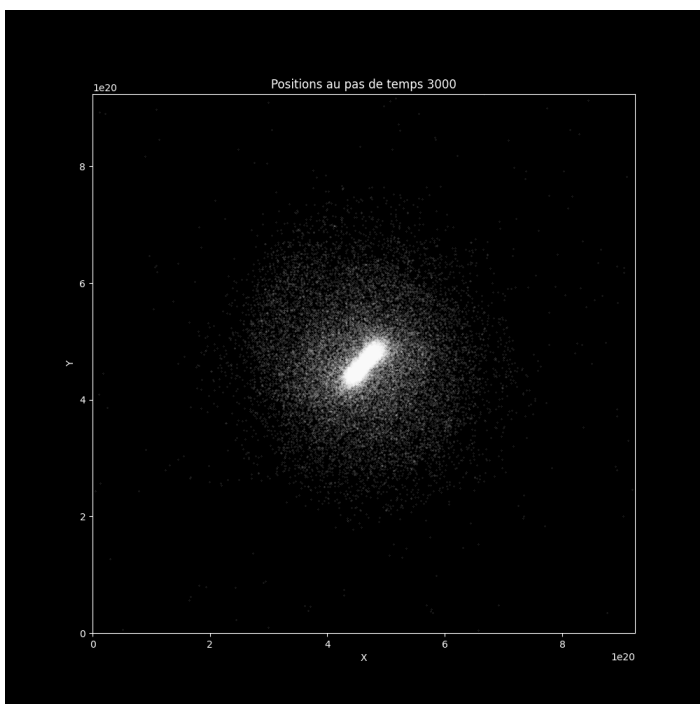
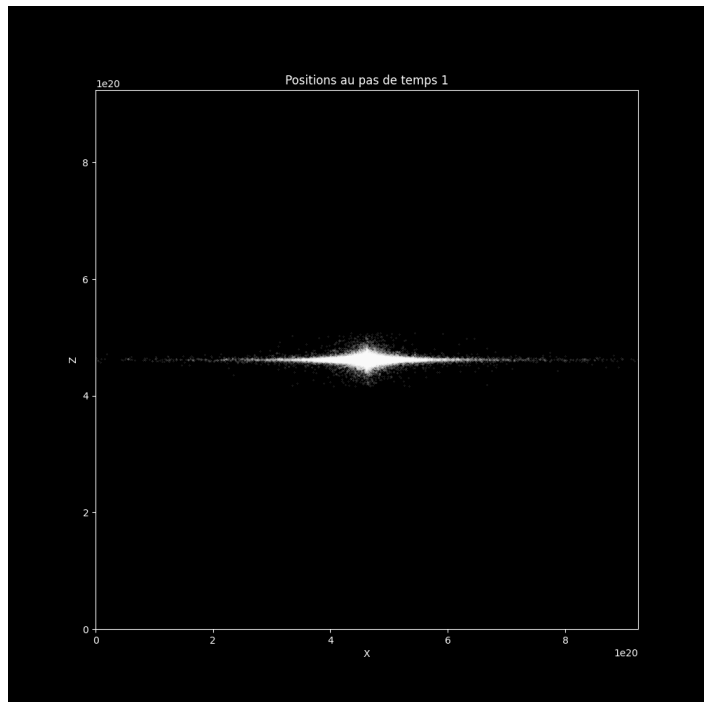
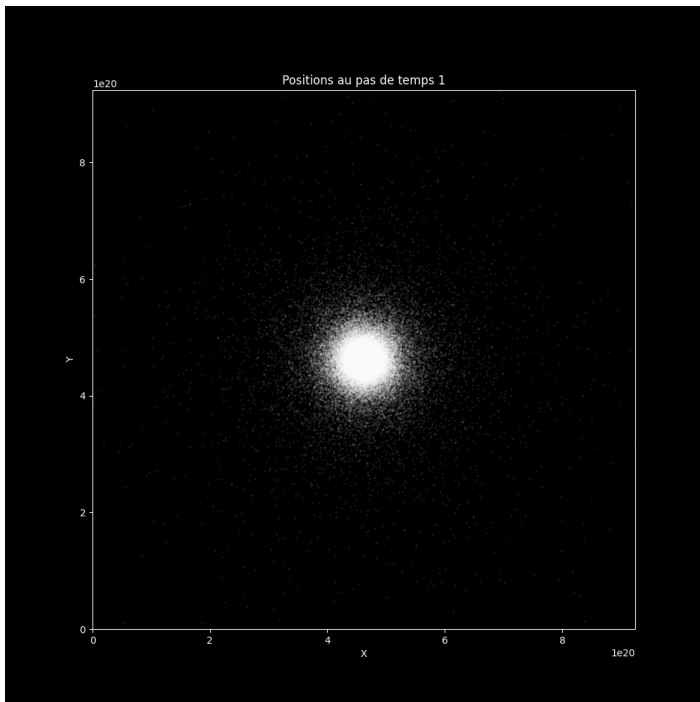


Figure 19: Graphiques des positions du modèle de Miyamoto-nagai au pas de temps 1 (en haut) et au pas de temps 3000 (en bas) avec un point de vue de côté (à droite) et de haut (à gauche). Les axes sont toujours exprimés en m.