

Luis Prieto Valiente
Inmaculada Herranz Tejedor

BIOESTADÍSTICA SIN DIFICULTADES MATEMÁTICAS

**En busca de
tesoros escondidos**

Análisis estadístico de datos
en investigación médica y sociológica

Para estudiantes y profesionales

Incluye 500 ejercicios y 600 preguntas de autoevaluación
y ANEXO CON TODAS LAS SOLUCIONES

booksmedicos.org



**BIOESTADÍSTICA
SIN DIFICULTADES MATEMÁTICAS**

En busca de tesoros escondidos

**Luis Prieto Valiente
Inmaculada Herranz Tejedor**

**BIOESTADÍSTICA
SIN DIFICULTADES MATEMÁTICAS**

En busca de tesoros escondidos

Análisis estadístico de datos en
investigación médica y sociológica

Para estudiantes y profesionales
Incluye 500 ejercicios y 600 preguntas de autoevaluación
Y ANEXO CON TODAS LAS SOLUCIONES



Madrid - Buenos Aires - México, D.F. - Bogotá

© Luis Prieto Valiente, Inmaculada Herranz Tejedor, 2010

Reservados los derechos.

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

Ediciones Díaz de Santos

www.diazdesantos.es/ediciones (España)
www.diazdesantos.com.ar (Argentina)

ISBN: 978-84-7978-959-6

Depósito legal: M. 8.259-2010

Diseño de Cubierta: P55 Servicios Culturales

Fotocomposición: Estefanía Grimoldi

Impresión: FER Fotocomposición, S. A.

Este libro no hubiera sido posible
sin la presencia decisiva de:

*Blanca, Md, PhD.
Ana Belén y Luchi.
Jaime y Alfonso.
José Luis y Araceli.*

Índice

Introducción	XV
1. Estadística Descriptiva. Distribuciones de Frecuencia	1
1.1. Etapas de una investigación	1
1.2. Tabulación de datos.....	2
1.3. Frecuencias Relativas, FR	3
1.4. Distribuciones de Frecuencia, DF	4
1.5. Percentiles	6
1.6. Calculando porcentajes de porcentajes	7
1.7. Tipos de estudios en Ciencias de la Salud.....	9
No olvide recordar	10
Autoevaluación	11
Análisis de la Base de Datos DARIO.....	13
2. Estadística Descriptiva. Medidas de Centralización y de Dispersion..	15
2.1. Medidas de dispersión.....	16
2.2. Medidas de dispersión en la muestra	18
2.3. Cálculo de promedios en Distribuciones de Frecuencia	19
2.4. Valores Estandarizados	20
2.5. La media ponderada	20
No olvide recordar	22
Autoevaluación	23
Análisis de la Base de Datos DARIO.....	24
3. Estadística Descriptiva. Relación entre dos variables.....	25
3.1. Cómo se estudia la relación entre dos variables	25
3.2. Relación entre dos variables cualitativas	26
3.3. Independencia	29

3.4.	Relación entre una variable cualitativa y otra cuantitativa	32
3.5.	Relación entre dos variables cuantitativas	33
3.6.	Variables respuesta y Factores. Respuesta y Efectos	34
No olvide recordar	36	
Autoevaluación	37	
Análisis de la Base de Datos DARIO	39	
4. Relación entre tres variables. Análisis estratificado. Confusión e Interacción	43	
4.1.	Presuntas Paradojas	43
4.2.	Confusión	45
4.3.	Interacción	47
4.4.	Modos de medir el efecto y la Interacción: Aditivo y Multiplicativo..	49
4.5.	Ejemplos de Confusión y de Interacción con variable respuesta continua.....	50
4.6.	+++ Los fundamentos lógicos del Análisis Multivariado. Dos confusores simultáneamente	53
No olvide recordar	56	
Autoevaluación	57	
Análisis de la Base de Datos DARIO	59	
5. Proporciones y Probabilidad. Teorema de Bayes	61	
5.1.	Frecuencias Relativas y Probabilidades	61
5.2.	Multiplicación de Probabilidades	63
5.3.	El azar y la necesidad	64
5.4.	Probabilidades conjuntas, marginales y condicionadas	66
5.5.	Teorema de Bayes	67
5.6.	Tests Diagnósticos	70
No olvide recordar	73	
Autoevaluación	74	
6. Distribuciones de Probabilidad: Binomial y Poisson	77	
6.1.	Poblaciones y Muestras	77
6.2.	La variabilidad e incertidumbre inherente a la extracción de una muestra	78
6.3.	La Regularidad propia del Muestreo Aleatorio, MA. Distribución Binomial	79
6.4.	¿Para qué vale la Regularidad propia del MA?	82
6.5.	Distribución Binomial en general.	82
6.6.	Media y Desviación de la Distribución Binomial	84
6.7.	Distribución de Poisson. Binomial con N grande y π pequeña.....	85
6.8.	Distribución de Poisson sin haber una Binomial explícita	87
6.9.	+++ Partículas disueltas en líquidos	89
No olvide recordar	91	
Autoevaluación	92	

7. Distribución Normal y Teorema Central del Límite	95
7.1. Distribución de variables continuas	95
7.2. La Distribución Normal	97
7.3. Distribución de las Medias Muestrales en el MA	101
7.4. La DN es el límite de la Binomial con N grande y π fijo.....	104
No olvide recordar.....	107
Autoevaluación.....	108
8. Inferencia Estadística con una Proporción	111
8.1. Inferencia Estadística con una proporción	112
8.2. Intervalo de Confianza para proporción poblacional π	113
8.3. Test de Significación con una proporción	114
8.4. Valor P del test con Binomial con resultado extremo	115
8.5. El valor P del test con resultado no extremo. P de la cola	116
8.6. Probabilidad del valor encontrado en la muestra y probabilidad de la cola.....	119
8.7. Cálculo del valor P del test en Binomial con N grande. Aproximación Normal.....	122
8.8. Resultados estadísticamente “significativos” y “muy significativos”. Las barreras del 5% y del 1%	124
8.9. +++ El riesgo de rechazar H_0 equivocadamente.....	126
No olvide recordar.....	128
Autoevaluación.....	129
Análisis de la Base de Datos DARIO.....	132
9. Inferencia Estadística con una Media	133
9.1. Intervalo de Confianza para una media.....	133
9.2. El Valor P con σ desconocida y DN	134
9.3. Valor P a una cola y a dos colas	136
9.4. Test con una media no conociendo σ	137
9.5. Muestras muy pequeñas	139
9.6. El Valor P del test NO es la probabilidad de que sea cierta la H_0	140
9.7. La probabilidad de la H_0 y el Valor P del Test	141
9.8. Intervalo de Confianza <i>versus</i> Tests Estadísticos.....	142
9.9. +++ Ausencia de Normalidad y tests no paramétricos.....	144
9.10. +++ Tests de Normalidad	145
9.11. +++ Tests no paramétricos	146
9.12. +++ Estimadores sesgados y estimadores insesgados. Varianza muestral = $SC/(N-1)$	147
No olvide recordar.....	149
Autoevaluación.....	150
Análisis de la Base de Datos DARIO.....	152
10. La Inferencia Estadística con dos Medias	153
10.1. Intervalo de Confianza para diferencia de dos medias.....	154
10.2. Tests para la comparación de dos medias	155

10.3. IC para diferencia de dos medias con datos apareados	159
10.4. Tests para diferencia de dos medias con datos apareados.....	160
10.5. +++ Asunciones del test “t” para comparar dos medias	162
10.6. +++ Tests No Paramétricos	163
No olvide recordar.....	165
Autoevaluación.....	166
Análisis de la Base de Datos DARIO.....	169
 11. La Inferencia Estadística con dos Proporciones.....	 171
11.1. Intervalo de confianza para $\pi_2 - \pi_1$	171
11.2. Test para la igualdad de proporciones poblacionales.....	172
11.3. Comparación de dos proporciones con datos apareados.....	175
11.4. Dos proporciones: datos apareados versus datos independientes	176
No olvide recordar.....	178
Autoevaluación.....	179
Análisis de la Base de Datos DARIO.....	182
 12. Tamaño de muestra para estimación.....	 183
12.1. Una anécdota para llamar la atención sobre un error	184
12.2. Tamaño de muestra para estimar una proporción	184
12.3. Tamaño de muestra para estimar diferencia de dos proporciones....	186
12.4. Tamaño de muestra para estimar una media	188
12.5. Elementos de subjetividad e imprecisión al aplicar la fórmula para estimar una media	189
12.6. Tamaño de muestra para estimar diferencia de dos medias	190
12.7. Mitos y realidades en el tamaño de la muestra	192
12.8. Tamaños de muestra inadecuados	193
No olvide recordar.....	195
Autoevaluación.....	196
 13. Diseños Caso-Control	 199
13.1. Riesgo Específico y Riesgo Relativo	200
13.2. Concepto de ODD y ODD Ratio (OR)	200
13.3. En población OR(P's) = OR(R's)	202
13.4. Proximidad entre los valores de OR y RR	202
13.5. Tipos de muestreo: Prospectivos y Retrospectivos	203
13.6. Inferencias sobre OR	206
13.7. Recordando el Análisis Estratificado y la Confusión.....	208
13.8. Análisis estratificado en diseños Caso-Control.....	209
13.9. +++ Medidas de Impacto: Riesgos Atribuibles.....	212
13.10. +++ Riesgos Atribuibles: Estimadores en C-C	213
No olvide recordar.....	215
Autoevaluación.....	216
 14. Tablas de Contingencia	 219
14.1. Tablas R x C: R muestra con C categorías.....	220

14.2. Comparación de varias proporciones	222
14.3. Colapsando tablas	224
14.4. El tipo de muestreo en las Tablas de Contingencia.....	226
14.5. +++) Cálculo para tests con Tablas de Contingencia	227
14.6. +++) Una muestra con C categorías	229
No olvide recordar.....	232
Autoevaluación.....	233
 15. Análisis de Varianza	 235
15.1. La salida típica con los resultados del Anova	236
15.2. Suma de Cuadrados y Media Cuadrada Dentro de grupos	236
15.3. Suma de Cuadrados y Media Cuadrada Entre de grupos.....	237
15.4. La razón de medias cuadradas o Razón F y el valor P.....	237
15.5. Los fundamentos lógicos del Análisis de Varianza	240
15.6. +++) La Homogeneidad de Varianzas	242
15.7. +++) El test de Homogeneidad de Varianzas tiene poca potencia estadística cuando son muestras pequeñas	244
15.8. +++) Tests No Paramétricos para comparar más de dos medias	244
15.9. +++) La condición de Normalidad	247
15.10.+++) Anova con tamaños desiguales.....	247
15.11.+++) Comparaciones post-Anova	248
15.12.+++) Comparaciones a priori: dos medias o dos grupos	249
15.13.+++) Comparaciones a priori de Tendencia Lineal	251
15.14.+++) El problema de las comparaciones múltiples	253
15.15.+++) Sesgo de publicación	254
15.16.+++) Comparaciones a posteriori tras el Anova.....	255
No olvide recordar.....	258
Autoevaluación.....	260
 16. Regresión Lineal	 265
16.1. Crecimiento y decrecimiento lineal	266
16.2. Recta más ajustada a los datos. Criterio de mínimos cuadrados.....	269
16.3. Recta de Mínimos Cuadrados en la muestra	270
16.4. Coeficiente de Correlación Lineal y Coeficiente de Determinación	273
16.5. Regresión Lineal: Modelo poblacional y Muestreo	274
16.6. Inferencia en la Regresión Lineal	275
No olvide recordar.....	280
Autoevaluación.....	281
 17. La Inferencia Bayesiana.....	 285
17.1. Probabilidad “a priori” frecuentista	286
17.2. La $P_{\text{POSTERIORI}}$ depende de la P_{PRIORI}	287
17.3. La $P_{\text{POSTERIORI}}$ depende del resultado del experimento actual.....	288
17.4. Inferencia Bayesiana en la investigación real	289
17.5. La Probabilidad A_{PRIORI} “subjetiva”	291
17.6. Acotando los posibles valores de probabilidad.....	292

17.7. Si el resultado del experimento actual es muy claro las P_{PRIORI} son poco relevantes.....	293
17.8. Varios valores para la hipótesis alternativa.....	294
17.9. La Inferencia Clásica y la Inferencia Bayesiana.....	295
No olvide recordar.....	296
Autoevaluación.....	297
 18. Potencia Estadística de una investigación y tamaño de muestra para tests	 299
18.1. Error tipo I y Error Tipo II. Región Crítica de Rechazo	299
18.2. Potencia estadística de un test.....	301
18.3. Potencia estadística de un estudio con variable cualitativa.....	304
18.4. Tamaño mínimo de muestra para tests con Una Proporción.....	306
18.5. Tamaño mínimo de muestra para tests con Dos Proporciones.....	309
18.6. Tamaño mínimo de muestra para tests con Una Media	311
18.7. Tamaño mínimo demuestra para tests con Dos Medias	312
18.8. Tamaños extremadamente pequeños o grandes	314
18.9. Potencia de un estudio programada y significación estadística del resultado obtenido	315
No olvide recordar.....	318
Autoevaluación.....	319
 Apéndice A: Más sobre probabilidad	 323
Apéndice B: Más sobre el valor P del test.....	331
Apéndice C: Cálculo de la Recta de Regresión	345
Tablas Estadísticas	351
Soluciones de los ejercicios	361

Introducción

¿QUÉ ES EL ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS?

*Del salón en el ángulo oscuro,
de su dueño tal vez olvidada,
silenciosa y cubierta de polvo,
veíase el arpa.
¡Cuánta nota dormía en sus cuerdas,
como el pájaro duerme en la rama,
esperando la mano de nieve
que sabe arrancarla!
¡Ay —pensé— cuántas veces el genio
así duerme en el fondo del alma
y una voz como Lázaro espera
que le diga “levántate y anda”!*

1. El tesoro escondido

Quizá la más bella rima de Bécquer es un canto a los maestros en general, a todo el que ayuda a otro a saber más o hacer mejor, cuyo paradigma sería Ana Sullivan. Pero también alude a todos los que buscan y encuentran tesoros escondidos, como los especialistas en Análisis Estadístico de Datos, AED.

Los submarinistas bucean en los mares y encuentran galeones hundidos hace siglos con cofres repletos de joyas. Los buscadores de Alaska criban la arena de los ríos propicios y encuentran pepitas de oro. Miguel Ángel y Rodin separan del bloque de mármol los trozos periféricos no necesarios y encuentran *La Piedad*, *El David*, *El Pensador*, *El Beso*.

Los expertos en AED bucean en las bases de datos, criban grandes listas de números, desechan los no necesarios y encuentran relaciones no conocidas hasta ese momento, tales como:

- en los fumadores fallan más veces los implantes dentarios;
- los masajes oculares retrasan la aparición de “vista cansada”;
- la aspirina disminuye notablemente el riesgo de enfermedad cardiovascular.

Por ejemplo, el archivo de Historias Clínicas de un gran hospital que tiene 200 000 expedientes y unos 300 datos de interés en cada uno, contiene 60 millones de datos. Esa gran colección de números encierra información muy útil, pero solamente usando las herramientas adecuadas se pueden desenterrar los tesoros escondidos en ella. La función del AED es sacar a la luz la información inmersa en bases de datos como los archivos de hospitales, censos de población, y registros de resultados de encuestas y estudios de todo tipo.

2. Los mismos métodos en todas las aplicaciones, la misma asignatura en todas las carreras universitarias

Todas las encuestas que evalúan las opciones políticas que elegirán los votantes, los productos que prefiere el consumidor, el alivio del dolor que produce un fármaco, el perjuicio que para la salud supone el sedentarismo... son analizadas con los mismos métodos.

Así, para calcular la **media** aritmética de la edad de un grupo de personas o de la puntuación obtenida en un test de inteligencia, el procedimiento es el mismo: sumar las cantidades de todas las personas y dividir por el número de ellas. Y para calcular el **porcentaje** de matrimonios que se divorcian o de accidentes de tráfico en que el conductor iba ebrio, se divide el número de casos en que se da esa característica por el total de ellos y se multiplica por cien.

El AED es básicamente el mismo en todas las áreas: medicina, sociología, economía, control de calidad... Por ello, en Occidente esta disciplina se imparte como obligatoria en prácticamente **todas** las licenciaturas universitarias y aunque el nombre varía según la carrera, en todas ellas el contenido es esencialmente el mismo.

Conocer los fundamentos lógicos, que no matemáticos, del AED es una necesidad para el científico y el profesional de este siglo, porque ello le permite entender aspectos importantes de la información que son inaccesibles al que ignore esos conceptos básicos. Al aprender estos métodos se está adquiriendo una herramienta útil en todos los campos de investigación.

3. Una herramienta cada vez más necesaria en la investigación científica, la gestión empresarial y el control de calidad

El auge del AED en los últimos decenios se debe a dos hechos:

- a) El creciente desarrollo tecnológico permite generar información detallada masiva sobre los más diversos temas de interés.
- b) El desarrollo de la informática permite analizar esa información con rapidez, precisión y bajo costo, inimaginables hace 40 años.

Aunque de lo dicho se desprende que el AED es herramienta necesaria para analizar la información que continuamente se genera en todas las ramas de saber y de la actividad social, son especialmente clarificadoras las palabras de Deming, padre del milagro industrial japonés: “Ningún recurso es tan escaso en las empresas como el conocimiento estadístico. No hay conocimiento que pueda contribuir tanto a mejorar la calidad, la productividad y la competitividad de las empresas como el de los métodos estadísticos”. E Ishikawa, otra de las figuras claves en el desarrollo industrial nipón dice: “Las herramientas estadísticas básicas deben ser conocidas y utilizadas por todo el mundo en una empresa, desde la alta gerencia hasta los operarios en las líneas” (R. Romero y L Zúñiga. *Métodos Estadísticos en Ingeniería*. Ed. Uni. Politécnica de Valencia. 2005. Pág. 3).

4. Los investigadores y profesionales aceptan con sumisión veredictos que no entienden

Más del 90% de los profesionales desconocen los conceptos básicos (de naturaleza lógica, no matemática) manejados en el AED, a los que se enfrentan ineludiblemente cuando leen informes técnicos y cuando tienen que comunicar sus propios resultados. Los cálculos del AED son para ellos una caja negra de la que salen números o frases incomprensibles que se ven obligados a usar por imperativo de la comunidad científica. Y creyendo que para entender esos conceptos necesitan habilidades matemáticas que no tienen, se resignan a no entenderlos y se refugian en recetas simplistas, repitiendo una y otra vez frases hechas que estorban más que ayudan, pues no las entiende ni quien las enuncia ni quien las lee. Ejemplos típicos son:

“La muestra de $N = 250$ es estadísticamente representativa”
“El resultado es estadísticamente significativo ($P < 0.05$)”.

Estas son las estaciones del vía crucis que sufren muchos profesionales cuando planean un estudio, publican sus resultados o leen los publicados por otros investigadores

- 1º En primer lugar tiene que decidir el tamaño de la muestra que va a estudiar. Cree que hay fórmulas matemáticas para ello, las busca con esmero, no consigue entender cómo se aplican y suele tardar decenios en descubrir que en la decisión del tamaño de la muestra esas fórmulas tienen escaso, muchas veces nulo, peso.
- 2º Cualquier efecto de interés que encuentre en la muestra, por ejemplo, que una medicina cura más que otra, puede ser un artefacto debido a la Confusión creada por una tercera variable. Detectar factores de confusión es tarea obligada en toda investigación, pero para la mayoría de los investigadores es tarea imposible porque ignoran ese concepto.

- 3º Una vez identificado el resultado muestral correcto, hay que ver cuánta evidencia constituye a favor de la hipótesis investigada. De ello nos informa el valor P, pero el investigador no sabe interpretarlo e intenta usarlo para tomar decisiones donde no hay nada que decidir.
- 4º Finalmente, los investigadores ignoran incluso la existencia de la Inferencia Bayesiana, que debería formar parte esencial del análisis estadístico, no como alternativa, sino como complemento de los métodos clásicos.

Pero este estado de desconocimiento e insatisfacción puede ser revertido. Podemos revelarnos contra él y cambiar la caja negra por un pequeño conjunto de ideas claras que permitan interpretar correctamente los resultados del AED.

Este libro pretende colaborar a poner fin a tanta desinformación, enseñando a los investigadores esos conceptos básicos, de modo que puedan actuar cómoda y correctamente donde ahora actúan con inseguridad y muchas veces con error.

5. Una disciplina matemática al servicio de y entendible por los profesionales sin conocimientos matemáticos

El AED es, en sus fundamentos teóricos y en sus aplicaciones prácticas, una disciplina matemática, pero está al servicio de profesionales no matemáticos y *puede ser entendida y usada con eficiencia sin entrar en las razones matemáticas que la sustentan*. Los razonamientos lógicos del AED son los mismos que utiliza el hombre de la calle en la actividad cotidiana. No hay ningún proceso mental sofisticado que sea propio del análisis estadístico. Por ello pueden entenderlo todas las personas que se lo propongan, cualquiera que sea su formación previa. Ronald Fisher, la figura más destacada de la estadística teórica y aplicada de todos los tiempos dice:

“Las conclusiones lógicas que siguen a los cálculos estadísticos... son una cuestión exclusiva de la capacidad pensante de los humanos. Todas las personas inteligentes están igualmente capacitadas para ello y los estadísticos no tienen especial autoridad en ese aspecto” (Fisher, R. *The design of experiments*. Hafner Press. N.Y. 1935. Pág. 1-2).

6. El 5% de los métodos cubren el 80% de las necesidades

En este libro se ven los conceptos fundamentales y las técnicas más sencillas del AED, que integran el “Análisis Elemental”. Este *Análisis Elemental* constituye del orden del 5% de esta disciplina, pero cubre más del 80% de los análisis requeridos en las investigaciones habituales.

Un símil fiel sería el número de palabras que se usan habitualmente en un idioma. El castellano, por ejemplo, tiene más de cien mil términos, pero con el 3% de ellos (unos 3 000) se confecciona más del 80% de las conversaciones habituales.

El AED contiene cientos de técnicas, algunas muy sofisticadas y potentes, que se aplican para resolver cuestiones específicas de gran interés. Pero la inmensa

mayoría de los análisis requieren en primer lugar el uso del *Análisis Elemental* y muchos estudios quedan básicamente completados con esas técnicas básicas.

7. El AED usa valores medios

El AED opera calculando valores *medios* de las variables implicadas en ciertos grupos de individuos. En el AED no interesa el valor que la variable toma en cada individuo, sino la *media* del grupo. Así, para diagnosticar y tratar correctamente a un enfermo, el médico debe saber cuánto fuma y su tensión arterial, TA. Pero para saber si fumar aumenta la TA, el médico tiene que conocer la media de la TA en el grupo de fumadores y el grupo de no fumadores.

Muchas de las frases con que describimos los más variados aspectos del mundo en torno se refieren a valores *medios*, aunque no lo digan explícitamente. Decimos “Fumar incrementa la TA”, aunque haya fumadores con TA inferior a algunos no fumadores, porque la *media* de la TA es mayor en el colectivo de fumadores que en el de no fumadores. Decimos “Comer poco alarga la vida en los ratones”, aunque alguno de ellos con dieta escasa haya muerto antes que otros con dieta abundante, porque la *media* de supervivencia fue mayor en el primer grupo que en el segundo. Del mismo modo, muchas de las afirmaciones que describen relaciones en el mundo vivo y el inerte se refieren a medias, aunque no se hace explícito. Y calculando promedios de unas variables en distintos grupos de individuos el AED puede detectar relaciones no conocidas previamente.

En el caso de variables tipo “sí” o “no” se evalúa la *proporción* de individuos con esa característica en los grupos de interés. Así, decimos “La obesidad favorece la diabetes”, aunque haya obesos sin diabetes y delgados con ella, porque la *proporción* de diabéticos es mucho mayor en el colectivo de obesos que en el de no obesos.

8. Estadística Descriptiva e Inferencia Estadística

Pero cada vez que analizando unos datos concretos se detecta en ellos una relación interesante nos preguntamos si el hallazgo encontrado en la muestra analizada es una verdad general, válida para toda la población. Por ejemplo, si en la muestra analizada se encuentra que la media de la TA es mayor en el grupo de sedentarios que en el de deportistas, la cuestión es: ¿ocurre eso en la población general o es una anécdota de nuestra muestra? Puesto que generalmente observamos *muestras* que son solo una pequeña parte de la *población* que intentamos conocer, esa pregunta es constante en todos los campos de la actividad científica, del análisis de encuestas y del control de calidad. Por ello en el AED se distinguen dos fases claramente diferenciadas y complementarias:

- La *Estadística Descriptiva* describe las relaciones de interés en las muestras que estamos explorando, calculando medias y proporciones en ellas.
- La *Inferencia Estadística* valora en qué medida las relaciones encontradas en nuestros datos ocurren también en la población general.

9. La Estadística Descriptiva descubre las relaciones en la muestra

Calcula *medias* y *proporciones* en distintos subgrupos de individuos de las muestras analizadas. Un ejemplo típico sería: Entre 600 pacientes con cierta enfermedad tratados con el fármaco “A” curaron el **32%**, y entre otros 600 con la misma enfermedad tratados con el fármaco “B” curaron **50.3%**. La interpretación de estos resultados es obvia. Pero en otros casos la interpretación correcta de los resultados puede requerir reflexión cuidadosa, como se ve en estos ejemplos:

En una ciudad de 100 000 habitantes practican deporte (PD) 1 000, es decir, el 1%. Tras una campaña animando a los vecinos a que PD se consigue que lo hagan otros 1000. El alcalde dice que el número de personas que PD se ha duplicado, es decir, ha aumentado el **100%**. Pero la oposición dice que antes de la campaña eran sedentarias 99% y tras ella lo son 98%, es decir, el sedentarismo bajó solamente un 1%. Son dos enfoques muy diferentes de una misma realidad.

Como otro ejemplo veamos los resultados de un estudio que analiza el porcentaje de curaciones, “%+”, obtenidas con cada uno de dos tratamientos, ‘A’ y ‘B’, para la misma enfermedad.

	A		B	
	Total	+	Total	+
Mujeres	100	80	500	300
Varones	500	110	100	2
Total	600	190	600	302
		32%		50.3%

En mujeres “A” cura el 80% y “B” cura el 60%. En varones “A” cura el 22% y “B” cura el 2%. Por tanto, “A” es más efectivo que “B” tanto en mujeres como en varones. Pero si no se considera el sexo y se comparan los resultados en “personas” (última fila de la tabla), se ve que “A” es peor que “B”. Estos datos dejan confuso al investigador. Se pregunta cuál de los dos tratamientos es, según estas muestras, más efectivo, pues parece haber argumentos a favor de uno y a favor del otro. Aclarar este tipo de “contradicciones” es esencial para interpretar correctamente los datos y uno de los objetivos de la Estadística Descriptiva.

10. La Inferencia Estadística se basa en el cálculo de probabilidades

En biología, medicina, estudio de mercados y sociología hay pocas certezas. Las actitudes correctas no garantizan la respuesta buscada, solo aumentan la probabilidad de que ocurra. Suele pensarse que el cálculo de probabilidades implica notable complejidad matemática, pero la realidad es que en sus aplicaciones más frecuentes solo contiene cálculo matemático muy elemental y razonamiento lógico al alcance de todas las personas. Veamos con cuatro ejemplos algunas de sus aplicaciones.

1. El ciudadano de a pie observa admirado la vertiginosa ascensión de algunos personajes del mundo de las finanzas. Pero muchos de esos triunfadores no tienen ninguna habilidad especial, son solamente la consecuencia ne-

cesaria de las leyes del azar. Sea un millar de ejecutivos que teniendo un capital inicial de 100 000 € y mucha ambición deciden arriesgarlo todo en operaciones donde hay probabilidad 0.50 de duplicar su dinero en un año y 0.50 de perderlo todo. En el primer intento unos 500 de ellos perderán su capital inicial y los otros 500 lo duplican. Si estos últimos lo invierten todo en otra operación similar, 250 perderán todo y otros 250 tendrán 400 000 €. Si estos 250 repiten el proceso, unos 125 tendrán ahora 800 000 €. Hasta aquí los “supervivientes” se han arriesgado tres veces. El cálculo de probabilidades nos permite saber que si continúan haciéndolo hasta 8 veces, aproximadamente 4 de los 1000 iniciales van a tener éxito en los 8 intentos y su capital llegará a **25 600 000 €**, por azar e independientemente de sus habilidades. Son los triunfadores del momento. El público los mira con admiración. Pero ellos no han hecho nada especial. Todo el que conoce el cálculo elemental de probabilidades sabía desde el principio que 4 de ellos, aunque no se supiera cuales, superarían las 8 primeras apuestas.

2. En una ciudad de 4 millones de habitantes la enfermedad “E”, que es mortal si no se diagnóstica a tiempo, afecta a 4 000 de ellos. Se pone en marcha un método diagnóstico precoz que da positivo en el 99% de los enfermos, pero también da positivo (equivocadamente) en el 20% de los sanos. Se somete a ese método a todos los ciudadanos y en los que da positivo son convocados a un estudio más completo para averiguar si realmente tienen E. La mayoría de los convocados están muy asustados e incluso han hecho testamento, pues asumen que tienen alta probabilidad de tener E. Pero los pocos que conocen el cálculo elemental de probabilidades saben que su probabilidad de tener E es solamente 5 por mil.
3. En un famoso concurso de la TV el presentador muestra al concursante tres cajas iguales cerradas. Dos están vacías, la otra contiene 20 000 €. El concursante elige una y si es la del dinero se lo queda. Tras la elección del concursante, el presentador (que sabe cuál es la caja buena), para dar más animación al proceso señala una de las cajas no elegidas, le dice que esa no es la buena y le pregunta si quiere reafirmarse en su elección inicial o prefiere cambiar a la otra. El concursante se debate en la duda. Se pregunta si elegir la otra caja supone aumentar, disminuir o dejar igual la probabilidad de acertar, pero no sabe la respuesta a esa pregunta. Solamente la saben los que conocen el cálculo elemental de probabilidades.
4. Como último ejemplo de Inferencia Estadística consideremos el caso de una enfermedad para la que no hay tratamiento y cura espontáneamente en el 20% de los casos. Un investigador cree que el producto “A” cura más del 20%, lo prueba en 8 enfermos y se le curan todos. Muchos miembros de la comunidad científica objetarán que tan buen resultado puede haberse presentado por azar, sin que “A” sea realmente efectivo, ya que es una muestra muy pequeña. Es una objeción muy razonable, pero los que conocen el cálculo elemental de probabilidades enseguida comprueban que podemos tener gran confianza en que “A” es realmente efectivo.

EL LIBRO

Expone las ideas fundamentales aplicándolas siempre a situaciones concretas que entienden los estudiantes y profesionales de todas las disciplinas y sin utilizar más recursos matemáticos que las operaciones aritméticas elementales, de modo que sea accesible a todos, cualquiera que sea su nivel de formación en Ciencias. La explicación de cada nuevo concepto se sigue de numerosos ejemplos y ejercicios prácticos que deben ser resueltos para afianzar esos conocimientos. El énfasis se pone en los conceptos básicos que permiten entender los principios lógicos y procedimientos más comúnmente usados. No se entra en detalles que se usan con menor frecuencia y que el lector puede encontrar en libros más extensos, algunos de los cuales se reportan a continuación.

Para el lector interesado en realizar él mismo los cálculos más sencillos, se incluyen las fórmulas más usadas. Todos los conceptos fundamentales pueden entenderse sin conocerlas, pero conocerlas puede ayudar a entenderlos mejor y además permite aplicarlas a los propios datos sin depender de un programa informático.

Algunos capítulos incluyen uno o más apartados con explicaciones complementarias que amplían conceptos ya expuestos pero no son imprescindibles para seguir el hilo del razonamiento central. Su título aparece precedido por tres signos positivos (+++). El lector que quiera centrarse en las ideas básicas no necesita entrar en estos temas avanzados. Sin embargo, serán muy útiles al que desee adentrarse más en los fundamentos lógicos.

El *Resumen* al final de cada capítulo sintetiza las ideas fundamentales desarrolladas en él. Si el contenido de alguna frase del resumen no es claro para el lector, este debe buscar en el texto su explicación antes de pasar al siguiente capítulo.

La *Encuesta de Autoevaluación* de cada capítulo ayuda a repasar los conceptos vistos en él y a evaluar el nivel de conocimientos en ese tema. Se ha asimilado el tema cuando se han respondido correctamente más del 85% de las preguntas. Si la puntuación es inferior, se necesita revisar el capítulo.

El último apartado de algunos capítulos, *Análisis con Ordenador*, propone al lector que realice con un paquete de programas estadísticos de su elección una serie de cálculos sobre la base de datos “DARIO”, y le da los resultados que debe obtener. La presentación de esta base de datos se da a continuación y los datos están en la dirección de Internet www.metodologiadainvestigacion.es.

Contenidos peculiares del libro

Hay muchos libros —algunos muy buenos— que exponen los fundamentos del análisis de datos en ciencias biomédicas, sociales y económicas. Por ello los autores de éste se resistieron durante decenios a hacer uno más. Al fin se deciden a publicar este porque estiman que se diferencia claramente de otros en el enfoque de los siguientes temas:

- El Teorema de Bayes y su uso práctico.

- El Efecto de Confusión y su control con Análisis Estratificado.
- Las Distribuciones Estadísticas básicas.
- Los Diseños Caso-Control.
- El valor P de los tests estadísticos.
- El tamaño de Muestra.

Lecturas sugeridas

- Armitage P, Berry G. *Statistical methods for medical researchers*. Blackwell. 1996.
- Box G.E., Hunter W.G., Hunter J.S. *Statistics for experimenters*. John Wiley. 2008.
- Martín Andrés A, Luna del Castillo JD. *Bioestadística + para las Ciencias de la Salud*. Norma-Capitel. 2004.
- Prieto L, Herranz I. *¿Qué significa ‘estadísticamente significativo’? La falacia del criterio del 5% en la investigación científica*. Madrid. Díaz de Santos. 2005.
- Prieto L, Herranz I. *Bioestadística*. Madrid. Editorial universitaria. 2008.
- Romero R, Zúnica L. *Estadística*. Universidad de Valencia. 2004.
- Rothman K. *Modern Epidemiology*. Little Brown. Toronto. 1986.
- Snedecor G, Cochran WG. *Statistical Methods*. John Wiley and sons. 1982.
- García Márquez G. *Cien años de soledad*.
- Borges JL. *La Biblioteca de Babel y La Lotería de Babilonia*.
- Darío R. *La marcha triunfal, Sonatina, Canción de otoño en primavera*.

LA BASE DE DATOS DARIO

Al final de algunos capítulos se propone al lector una serie de cálculos sobre esta base de datos, para que los realice con un paquete estadístico de su elección.

300 personas fueron tomadas al azar usando el censo de la población de Granada. En cada una se evaluó 20 variables relativas a su estado de salud, a los hábitos de vida que pueden influir en ella y a su opinión sobre cuestiones de ese ámbito. En este archivo se incluyen diez de ellas, para las 200 personas que aceptaron volver a medirse la TAD tras un día de ayuno total (salvo agua).

Variable		Valores
Edad	En años	
Sexo		1 = Varón, 2 = Mujer
Deporte3	Practica ejercicio con regularidad	0 = No práctica, 1= Práctica moderada, 2 = Práctica intensa
Dieta	Hace dieta hipocalórica	0 = No, 1 = Sí
Yoga	Practica yoga con regularidad	0 = No, 1= Sí
ResisInf	Resistencia a las infecciones	0 = Baja, 1 = Moderada, 2 = Media, 3 = Alta
Ministro	Qué opinión le merecería que se designase como Ministro de Sanidad a una persona ajena a todos los ámbitos de ese tema. Escala de 0 (= muy mal) a 10 (= muy bien)	
Sanidad	Qué opinión tiene sobre la sanidad pública, en una escala de 0 (= muy mala) a 100 (= muy buena)	
Tad	Tensión arterial diastólica en mm de Hg, en condiciones basales	
Tadpost	Tensión arterial diastólica en mm de Hg, TRAS un día de ayuno total	
<i>A partir de las variables anteriores genere usted las tres siguientes:</i>		
Deporte2	0 = Sedentarios → No practica ejercicio con regularidad 1= Activos → practica ejercicio (son los '1' y '2' de "Deporte3")	
Diftad	= Tadpost - Tad	
Edad2	1 = menores de 40 años, 2 = 40 o más años	

ABREVIATURAS MÁS USADAS EN ESTE TEXTO

Cada una de las cuatro abreviaturas que siguen se usa cientos de veces en el libro.

Abreviatura	Expresión completa, descripción y apartado en que se explica
FR	<p>Frecuencia Relativa (singular o plural)</p> <p>Relacionan el tamaño de una parte con el tamaño total de un colectivo.</p> <p>Apartado 1.4</p>
DF	<p>Distribución de Frecuencias (singular o plural)</p> <p>Dice la cantidad o la FR de individuos que tienen cada valor de una variable o están incluidos en cada intervalo.</p> <p>Apartado 1.5</p>
Prob	<p>Probabilidad (singular o plural)</p> <p>La FR de veces que aparece cierto resultado si un fenómeno aleatorio se repite millones y millones (un número indefinidamente grande) de veces.</p> <p>Apartado 5.1</p>
MA	<p>Muestreo Aleatorio</p> <p>El hecho de extraer de una población millones y millones (un número indefinidamente grande) de muestras del mismo tamaño.</p> <p>Apartado 6.3</p>

Capítulo 1

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA. DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

1.1. Etapas de una investigación

En toda investigación científica pueden identificarse estas fases que siguen un orden cronológico evidente. Para llevar a cabo cada una de ellas es imprescindible que las anteriores estén correctamente realizadas.

1. Diseño del estudio
2. Recogida de la información (fase de campo)
3. Análisis de la información:
 - A. *Tabulación de los datos*
 - B. *Estadística Descriptiva*
 - C. *Inferencia Estadística*
4. Discusión y conclusiones

1. Diseño

Es la planificación de todo lo que se va a hacer. Se confecciona un *Protocolo* en el que se justifica la necesidad de esa investigación, se demuestra su viabilidad y se explican los recursos y gastos que se emplearán. La elaboración del protocolo ayuda decisivamente a clarificar y ordenar las ideas, así como a prever las dificultades y prevenir sus soluciones. Además es necesario presentarlo a los comités científicos, económicos y éticos para obtener autorización y apoyo económico.

2. Recogida de la información: recopilación de datos (fase de campo)

La calidad de los datos es requisito imprescindible para la validez de la investigación. Es fundamental la *motivación* adecuada de todas las personas implicadas. Los “decretos” pueden conseguir que se obtenga información, pero no que esta sea de calidad. Un ejemplo muy ilustrativo es el incremento del rendimiento del

Departamento de Cálculo del Proyecto Manhattan cuando al ser encargado de ello R. Feynman consiguió motivarles informándoles del objetivo de su trabajo. Un segundo ejemplo más próximo en el espacio y en el tiempo es el Estudio Español de Malformaciones Congénitas (ECEMC), en el que desde hace 30 años más de un centenar de médicos recogen meticulosamente información sobre 200 variables de cada bebé malformado nacido en su centro y de otros tantos controles sanos.

3. Análisis de la información

Comienza recopilando la información más relevante en forma de Tablas. Continúa haciendo Estadística Descriptiva de lo observado. Y culmina haciendo Inferencia Estadística para ver hasta qué punto los resultados encontrados en la *muestra* pueden extrapolarse a la *población*.

4. Discusión y conclusiones

Se elaboran teniendo en cuenta los conocimientos previos que había sobre el tema y los resultados obtenidos en esta investigación.

Esta disciplina, Análisis de Datos, cubre el tercer punto. Los cuatro primeros capítulos tratan de la Tabulación y la Estadística Descriptiva. El resto del libro se dedica a la Estadística Inferencial.

1. 2. Tabulación de datos

A lo largo de la fase de campo de un estudio la información de los distintos individuos implicados se va recogiendo en *Historias Clínicas* (estudios hospitalarios), en *Libretas de Laboratorio* (investigaciones básicas con animales o cultivos) o en *Encuestas Sanitarias* (estudios epidemiológicos). Las características evaluadas en cada uno de los individuos se denominan *variables*.

El análisis de esa información comienza con la *Tabulación* de los datos, que consiste en disponerlos en tablas donde cada fila corresponde a un individuo y cada columna corresponde a una variable. El siguiente esquema representa una tabla con datos de 200 individuos en los que se ha recogido, entre otras, las variables: sexo, grupo sanguíneo, número de caries, peso y edad. Para cada individuo, cada variable toma un valor concreto. Por ejemplo, el primer individuo, identificado con el número 1 es un hombre (codificamos con “1” a los hombres y con “2” a las mujeres), tiene grupo sanguíneo “AB”, tiene 3 caries, pesa 65.9 kg y tiene 18 años.

0BInd. nº	Sexo	Fuma	Grupo S.	...	Caries	TA	1BEdad
1	1	2	AB		3	65.9	18
4	1	2	A		3	65.0	42
8	2	2	0		2	59.4	25
---	---		---		---	---	---
200	1	2	AB		1	83.7	49

En general, las variables se clasifican en:

- **Cualitativas**, si recogen alguna cualidad no numérica del individuo. Se llaman *dicotómicas* si presentan solamente dos posibilidades y *polítómicas* si presentan varias posibilidades (ordenables o no). Los valores de este tipo de variables suelen registrarse con *códigos* numéricos, que no indican cantidad, sino un convenio, como por ejemplo 1 = Varón, 2 = Mujer.
- **Cuantitativas**, si recogen una información numérica. Pueden ser *discretas* si toman valores enteros, como número de hijos o número de caries (1, 2, 3,... caries) o *continuas* si pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo, como edad, peso, tensión arterial...

CUALITATIVA	Dicotómica. Sexo: 1=Varón, 2=Mujer
	Polítómica. Grupo Sanguíneo: 1=A, 2=B, 3=AB, 4=O
	Polítómica Ordenada. Higiene: 1=Nada, 2=Poca, 3=Media, 4=Mucha
CUANTITATIVA	Discreta. Número de Caries
	Continua. Concentración de ácido úrico, Edad, TA ...

La clasificación de los individuos en cada variable tiene que ser exhaustiva (todo individuo debe tener un grupo en el que encaje) y excluyente (cada individuo encaja solamente en un grupo).

Las tablas así creadas contienen toda la información de interés, pero en muchos casos el investigador no está interesado en el valor que toma una variable en cada individuo, sino en la proporción de ellos con cierto valor o en la media de esa variable en un grupo. Una de las variables de nuestra tabla indica si fuman o no y la otra su tensión arterial, TA. Para diagnosticar y tratar a cada sujeto el médico necesita conocer su TA y cuánto fuma. Pero para investigar si fumar favorece la aparición de hipertensión hay que formar dos grupos de personas, los que fuman y los que no, y en cada uno de ellos ver la media de la TA o la proporción de hipertensos.

Por ello el siguiente paso en el análisis de los datos es realizar la *Estadística Descriptiva*, que tiene por objeto resumir el comportamiento de cada una de las variables en el grupo estudiado y en cada subgrupo que sea de interés. Este resumen se hará de distinta forma dependiendo del tipo de variable.

En todas ellas se pueden calcular *Distribuciones de Frecuencia* y en las cuantitativas se puede, además, calcular *medias* y *desviaciones*.

1. 3. Frecuencias Relativas, FR

Las frecuencias relativas, FR, relacionan el tamaño de una parte con el tamaño total de un colectivo. Si decimos que en Oviedo hay **4 000** obesos y en Madrid hay **16 000**, es claro que en la capital de España hay muchos más casos que en la de Asturias y la cantidad de recursos necesarios para asistir a estos pacientes es mucho mayor en la primera que en la segunda.

Pero la **frecuencia relativa, FR**, de ese problema es mayor en Oviedo, ya que entre los 200 000 ovetenses los obesos son $4\ 000 / 200\ 000 = 2 / 100 = 0.02$, es decir, dos por cien o veinte por mil. Entre los 4 millones de habitantes de Madrid los obesos son $16\ 000 / 4\ 000\ 000 = 16 / 4\ 000 = 0.004$, es decir, 4 cada mil. La tabla siguiente resume estos datos:

	Frecuencia Absoluta	Núm. de habitantes	FR Proporción	FR Porcentaje	FR Tanto por mil
Oviedo	4000	200 000	0.02	2 %	20 por 1000
Madrid	16000	4 000 000	0.004	0.4 %	4 por 1000

La FR se puede dar como *proporción* (por ejemplo, 0.02) o como *porcentaje* (2%). Pero si son FR muy bajas es más útil darlas como *tanto por mil* o *por diez mil* u otra cantidad pertinente. Por ejemplo, si en Madrid hay 80 hemofílicos, la frecuencia relativa es “80 entre 4 millones”, es decir, $80 / 4\ 000\ 000 = 0.00002$ ó 0.002%. Pero esa cifra se entiende mejor expresándola como “2 por cien mil” ó “20 por millón”.

El porcentaje se calcula multiplicando la proporción por 100, es decir, corriendo la coma (hoy día el punto) dos lugares a la derecha. Si de un total de 80 personas 32 son enfermos, dividiendo 32 por 80 obtenemos la proporción de enfermos, que multiplicada por 100 nos da el porcentaje:

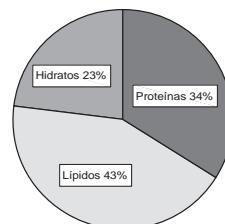
$$\text{Proporción: } 32 / 80 = 0.40 \quad , \quad \text{Porcentaje: } 0.40 \cdot 100 = 40\%$$

Tanto en Estadística Descriptiva como en la Inferencial se usa constantemente las Frecuencias Relativas. La mayoría de las veces se las refiere como “FR”.

1. 4. Distribuciones de Frecuencias, DF

El comportamiento de una variable cuantitativa en un grupo de individuos se resume dando su **Distribución de Frecuencias, DF**, que consiste en anotar la cantidad de individuos que tienen cada valor de la variable. Por ejemplo, si de cada individuo se recoge el tipo de dieta que sigue (hay tres posibilidades) la columna del medio de la siguiente tabla da la frecuencia absoluta de cada dieta:

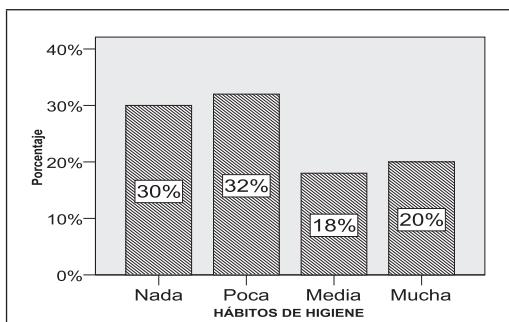
	Frecuencia	FR
Proteínas	68	0.34
Lípidos	86	0.43
Hidratos	46	0.23
Total	200	1



De los 200 individuos estudiados, 68 siguen dieta rica en proteínas, 86 dieta rica en lípidos y 46 dieta rica en hidratos. Estas cantidades forman la **DF Absolutas** (número de individuos en cada una de las categorías).

La **DF Relativas** indica la **FR** de individuos para cada valor de la variable. En nuestro ejemplo $68 / 200 = 0.34$ o 34% sigue dieta rica en proteínas, 43% en lípidos y 23% en hidratos.

Estas cantidades pueden representarse gráficamente en diagramas de sectores, donde el ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia del valor que representa. También puede presentarse en un diagrama de barras, donde la altura de cada una es proporcional a las frecuencias de cada clase



Este diagrama de barras representa la distribución de frecuencias relativa de la variable “Hábitos de Higiene” recogida en 200 individuos: el 30% presentaba nada de higiene, el 32% poca, el 18% una cantidad media y el 20% mucha.

- Si la variable en estudio es cuantitativa con pocos valores, su comportamiento se resume también dando su DF de la misma forma que con las cualitativas. Con variables cuantitativas podemos, además, calcular las llamadas *Frecuencias Acumuladas*, que indican la cantidad o FR de individuos con valor **igual o menor** que uno dado. Por ejemplo:

Num de Caries	Frecuencia absoluta	FR	FR acumulada
0	40	0.20	0.20
1	10	0.05	0.25
2	50	0.25	0.50
3	80	0.40	0.90
4	20	0.10	1

El 25% (20+5) tiene una caries o menos, el 50% (25+25) tiene 2 caries o menos,...

- Si la variable en estudio es cuantitativa discreta con muchos valores o continua se pueden hacer **intervalos** y contar el número de individuos en cada uno para hacer la correspondiente DF. Los intervalos deben cubrir todo el rango de posibles valores y no solaparse. No hay razones matemáticas ni biológicas para determinar la anchura de los intervalos. El investigador agrupa los datos como sea más útil a su estudio. Una misma variable puede ser agrupada con distintos criterios en distintos momentos. Por ejemplo, con la edad pueden formarse dos grandes grupos, niños y adultos. Y en otro momento pueden agruparse como niños, jóvenes, maduros y viejos, esta-

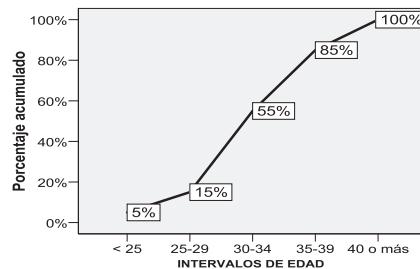
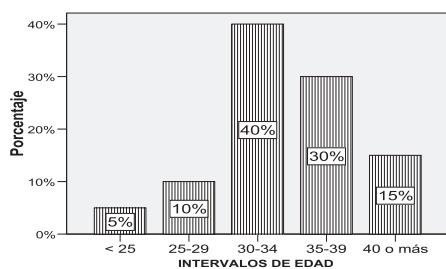
bleciendo los puntos de corte pertinentes. O pueden hacerse intervalos por decenios: de 0 a 9, de 10 a 19... de 90 a 99.

También se pueden representar las frecuencias absolutas y/o relativas de cada intervalo en diagramas de barras o sectores, y las frecuencias acumuladas en diagramas barra y de líneas.

La tabla que sigue da la DF de la edad de 200 individuos:

INTERVALOS DE EDAD

			Porcentaje
Menos de 25 años		10	5,0
25-29 años		20	10,0
30-34 años		80	40,0
35-39 años		60	30,0
40 o más años		30	15,0
Total		200	100,0



La DF acumulada —columna a la derecha— dice que el 15% de los individuos tiene 29 o menos años, el 55% tiene 34 o menos y el 85% tiene menos de 40.

Muchos investigadores tienden a tabular las variables continuas acordando una partición en intervalos y registrando para cada individuo el intervalo al que pertenece. Ello supone una notable pérdida de información que debe evitarse. Si, por ejemplo, la edad se sustituye por la década a la que pertenece, un paciente de 41 años es indistinguible de uno de 49, lo que disminuiría la posibilidad de detectar relaciones de interés. Por ello lo razonable es tabular los valores originales y en la fase de análisis agrupar por los intervalos que interesan en cada momento.

1. 5. Percentiles

Asociado al concepto de FR Acumulada está el de **Percentil**. En una DF de una variable cuantitativa el percentil que le corresponde a cada valor es el porcentaje de individuos con valor igual o menor que aquel. En la DF del número de caries, 1 carie es el percentil 25, 2 caries es el percentil 50,... En la DF de la edad, 39 años es el percentil 85. Si en la DF de la estatura de un colectivo, 177 cm es el percentil 90, quiere decir que el 90% de los individuos mide 177 o menos.

La idea de percentil es muy útil al ubicar un individuo en el contexto del grupo al que pertenece y esta ubicación relativa suele ser más útil que el valor numérico original. A unos padres preocupados por el escaso desarrollo del niño no les ayuda saber que en un test de capacidad mental alcanzó **220** puntos. Inmediatamente preguntan cuáles son las puntuaciones propias de los niños normales. Lo que necesitan es saber en qué percentil está su hijo. Si resulta ser el percentil **3**, es mala noticia, puesto que solo el 3% de los niños de esa edad tienen esa capacidad o menos. Si 220 puntos es el percentil **47** o el **55**, es una noticia tranquilizadora, puesto que el niño está en la zona media. Y si 220 puntos es el percentil **99**, de cada cien niños solo uno le supera. Los percentiles se usan constantemente en la Inferencia Estadística.

A un paciente no le dice mucho saber que su tensión arterial es 120. Lo útil para él es saber a qué percentil corresponde esa cifra. Si es el percentil **97** quiere decir que de su sexo y edad, solo 3 de cada 100 le superan. Es una cifra *relativamente* muy alta, y por ello preocupante.

En muchas ocasiones para analizar los datos hay que calcular “proporción de una proporción”. Si, por ejemplo, en un colectivo son enfermos el 10% y el 50% de los enfermos han sido operados, es claro que los operados son el 5% del colectivo (la mitad del 10%), pero con cifras menos sencillas se requiere un cálculo con el que algunos investigadores no están familiarizados. La siguiente sección lo explica.

1. 6. Calculando porcentajes de porcentajes

A. Cálculo del Total de individuos si se conoce el porcentaje

Si sabemos que de un total de 80 personas el 60% son varones, para saber la cantidad de varones se multiplica el total por la proporción: Cantidad de varones = $80 \cdot 0.60 = 48$ varones

** **Ejercicio 1.1:** En un grupo de 300 personas el 20% son fumadores. ¿Cuántos fumadores hay?

** **Ejercicio 1.2:** En un grupo de 120 personas el 30.83% son bebedores. ¿Cuántos bebedores hay?

B. Cálculo del porcentaje de un porcentaje

El porcentaje de un porcentaje se calcula multiplicando las proporciones. Si el 60% de un colectivo son varones y el 10% de los varones tienen adenoma de próstata, ¿qué porcentaje de personas tiene adenoma de próstata? Son el 10% del 60% = $0.10 \cdot 0.60 = 0.06$ o 6%

** **Ejercicio 1.3:**

- a. En otra población el 70% de los habitantes son mujeres y el 80% de ellas han parido, ¿qué porcentaje de la población ha parido?
- b. Si el 40% de las mujeres que parieron lo hicieron con cesárea, ¿qué porcentaje de la población sufrió cesárea?

- c. Si en el 20% de las mujeres que sufrieron cesárea, ésta fue transversal, ¿qué porcentaje de la población sufrió cesárea transversal?

**** Ejercicio 1.4:** En otra población el 13.8% son enfermos. El 37.4% de los enfermos están hospitalizados. El 4.3% de los hospitalizados están en la UVI y el 0.72% (no el 72%) de los que están en la UVI sufrieron traqueotomía (no se ha practicado ninguna traqueotomía fuera de la UVI). Calcule el porcentaje de la población que:

- Están hospitalizados
- Están en la UVI
- Tienen hecha traqueotomía

C. Proporción de enfermos debido a cierto factor

Para practicar el cálculo de proporciones averigüemos cuántos casos de la enfermedad “E” son atribuibles a la presencia de un factor, por ejemplo fumar, en una población. Para ello se calcula

- El total de enfermos que habría en la población si nadie fumara; y
- El total de enfermos que habrá teniendo en cuenta que parte de ella fuma.

La diferencia de esas dos cantidades es el *exceso de enfermos* debido al tabaco. Esta cantidad depende de lo perjudicial que sea fumar (cuanto aumenta el riesgo de enfermedad) y de cuan frecuentes sean la enfermedad y el hábito de fumar. Calculemos el exceso de enfermos debido al tabaco en una población donde:

- El número total de habitantes es de 1 000 000.
- La enfermedad afecta al 1% de los No-fumadores.
- Fuman el 10% de la población.
- Fumar multiplica por 4 el riesgo de contraer la enfermedad, es decir, la FR de E es 4 veces mayor entre los fumadores que entre los No-fumadores.

Se pide: 1. Calcular el **exceso** de enfermos debidos al tabaco.

2. Calcular el **porcentaje** de enfermos debidos al tabaco.

- Número de enfermos que habría si nadie fumara: 1% de 1 000 000 = 10 000
- Número de enfermos que habrá dado que fuma el 10% de la población:
Si el tabaco cuadriplica el porcentaje de enfermos → Enferman el 4% de los Fumadores. Hay 100 000 fumadores → Enferman el 4% = 4 000
Hay 900 000 No fumadores → Enferman el 1% = 9 000

Total de enfermos (fumadores y no fumadores) = 13 000

- El exceso de enfermos debido al Tabaco: $13\,000 - 10\,000 = 3\,000$
- Porcentaje de enfermos debido al tabaco: $(3\,000 / 13\,000) \cdot 100 = 23\%$

**** Ejercicio 1.5:** Calcule el exceso y el porcentaje de enfermos debidos al tabaco en una población de 1 millón de habitantes donde fuman el 60%, la enfermedad afecta al 20% de los no-fumadores y fumar multiplica por 4 el riesgo de enfermar. (Vemos que siendo el tabaco igual de perjudicial en ambas poblaciones es el causante de 3 000 enfermedades en la primera y de 360 000 en la segunda. La diferencia se debe a que en la segunda la enfermedad es más frecuente y hay más fumadores).

** **Ejercicio 1.6:** Si beber multiplica el riesgo de la enfermedad A por 3, calcule el *exceso de enfermos* debido al alcohol en una población de 2 000 000 de personas en la que A afecta al 3% de los no bebedores y beben el 20% de los individuos.

1. 7. Tipos de estudios en Ciencias de la Salud y Sociales

La lógica de la investigación es prácticamente la misma en todas las ciencias, pero en las ciencias de la salud - somática o psíquica, individual o colectiva - concurren algunas circunstancias que le confieren matices especiales. Los estudios en este campo pueden clasificarse en tres grandes categorías:

- **Estudios experimentales**

Las unidades de experimentación son animales o cultivos de células o tejidos. También se le llama “investigación básica”.

- **Estudios clínicos**

Se estudia a pacientes o grupos aquejados de enfermedades o anomalías. Dentro de este grupo los Ensayos Clínicos aleatorizados y controlados se consideran hoy día imprescindibles para demostrar la ventaja de un procedimiento terapéutico nuevo sobre sus competidores.

- **Estudios epidemiológicos**

Se estudia típicamente, aunque no siempre, a individuos sanos, para detectar factores que favorecen o dificultan la aparición de enfermedades. Este tipo de estudios son imprescindibles en Medicina y Sociología Preventivas. Téngase en cuenta que el paradigma de la Medicina no es curar todas las enfermedades, sino evitar su aparición.

NO OLVIDE RECORDAR - 1

1. La Estadística Aplicada se encarga de analizar la información recogida en cualquier investigación. El análisis comienza recopilando la información en Tablas, continúa haciendo Estadística Descriptiva (resumen de la información) y termina con la Inferencia Estadística (intento de extrapolar a la población los resultados obtenidos en la muestra).
2. Las características evaluadas en cada uno de los individuos estudiados se llaman variables. Pueden ser cualitativas (dicotómicas o polítomicas) y cuantitativas (discretas o continuas).
3. Distribución de Frecuencias, **DF**, absoluta es la cantidad de individuos en cada uno de los posibles valores de la variable o de los intervalos convenidos.
4. Los intervalos de cada variable cuantitativa los decide el investigador. No hay criterios matemáticos para ello. Pero cada individuo debe pertenecer a una categoría y solo a una (clasificación exhaustiva y excluyente). Una misma variable se puede agrupar de diferentes modos en diferentes momentos
5. Las Frecuencias Relativas, **FR**, relacionan el tamaño de una parte con el tamaño total de un colectivo. Las FR se puede dar como proporción, o porcentaje o tanto por mil o tanto por otra cantidad.
6. La DF relativas da la FR de individuos en cada uno de los posibles valores de la variable o de los intervalos convenidos.
7. Las DF se pueden representar en diagramas de sectores, barras o histogramas.
8. Con variables cuantitativas se calculan también **frecuencias acumuladas**. Si en la DF de la estatura hay, por ejemplo, 70% de individuos con estatura menor de 180 cm, se dice que 180 cm es el **percentil 70**.
9. En muchas situaciones no interesa tanto la magnitud que cierta variable toma en un individuo como el percentil que representa, la posición que ocupa en su grupo.
10. El porcentaje de un porcentaje se calcula multiplicando las proporciones.
11. Para calcular la cantidad de enfermos debida a la presencia de un factor se calcula la cantidad de ellos que hay estando presente el factor y se le resta la cantidad de enfermos que habría si nadie estuviera expuesto.
12. Las investigaciones en Ciencias de la Salud y sociales pueden clasificarse en tres grandes categorías: experimentales, clínicas y epidemiológicas.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 1

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. En todo estudio razonablemente planteado, lo primero es hacer un buen diseño con previsiones de gastos y esfuerzo que requerirá.
2. Acabada la fase de campo lo primero que se hace es una tabulación sistemática de los datos que se van a analizar.
3. A partir de las Tablas de recogida de datos se comienza con la Estadística Descriptiva.
4. La Estadística Descriptiva comienza haciendo Distribuciones de Frecuencias de las variables de interés.
5. En los estudios epidemiológicos se trabaja preferentemente con enfermos.
6. En los estudios epidemiológicos se trabaja preferentemente con animales o cultivos.
7. En los estudios epidemiológicos se trabaja con personas sanas o enfermas, tratando de identificar factores de riesgo o de prevención para una enfermedad.
8. La Tabulación es previa a la fase de campo o recogida de datos.
9. Lo habitual es que en las Tablas de recogida de datos cada individuo ocupe una columna y cada variable ocupe una fila.
10. Los códigos numéricos son números que no expresan cantidad, sino que se asocian por convenio con valores cualitativos o con intervalos.
11. Cuando en una variable numérica se hacen intervalos, hay fórmulas matemáticas para determinar la anchura idónea de ellos.
12. Al analizar los resultados de un estudio lo primero es hacer *Inferencia Estadística* sencilla y posteriormente hacer un buen estudio descriptivo de aquellos aspectos que resultaron relevantes.
13. Al analizar los resultados de un estudio lo primero es hacer *Inferencia Estadística* compleja y sofisticada y posteriormente hacer un buen estudio descriptivo de aquellos aspectos que resultaron relevantes.
14. La edad del paciente es una variable cualitativa.
15. La edad del paciente es una variable cuantitativa.
16. La edad del paciente es una variable cuantitativa que en una fase del análisis podría tratarse como dicotómica, codificando “1= niños” y “2 = adultos”.
17. La clasificación de los individuos por cualquier variable ha de ser exhaustiva y excluyente.
18. El comportamiento de una variable cualitativa en un grupo de individuos se resume dando la Distribución de Frecuencias.

19. Las **FR** pueden darse como proporción (tanto por uno), como porcentaje o como tanto por 1 000 o por diez mil o por otra cantidad cualquiera.
20. Si la estatura de Juan corresponde al percentil 37, el 37% de la población mide más que él.
21. Si el peso de Juan corresponde al percentil 2, el 2% de la población pesa igual o menos que él.
22. El 80% de un colectivo fuma. Si beben el 70% de los no fumadores y el 40% de los fumadores, la proporción total de bebedores es $0.8 \cdot 0.7 = 0.56$.
23. El 80% de un colectivo fuma. Si beben el 70% de los no fumadores y el 40% de los fumadores, la proporción total de bebedores es $0.2 \cdot 0.4 + 0.8 = 0.08 + 0.56 = 0.64$.
24. El 80% de un colectivo fuma. Si beben el 70% de los no fumadores y el 40% de los fumadores, la proporción total de bebedores es $0.2 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.7 = 0.08 + 0.56 = 0.64$.
25. En un colectivo son españoles el **30%** y el 10% de los españoles fuman.
Son belgas el **60%** y el 20% de los belgas fuman.
Son checos el **10%** y el 80% de los checos fuman.
Los fumadores son $0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.034$ del total.
26. En el colectivo anterior los fumadores son $0.3 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8 = 0.03 + 0.12 + 0.08 = 0.23$ del total.
27. Si el 8% de los políticos son inteligentes y el 6% de los políticos inteligentes son honestos, de cada 10 000 políticos, 48 son honestos e inteligentes, “hei”.
28. Según la afirmación 27 la Frecuencia Relativa, FR, de políticos “hei” es 0.0048.
29. Según la afirmación 27 la FR de políticos “hei” es 48%.
30. Según la afirmación 27 la FR de políticos “hei” es 4.8%.
31. Según la afirmación 27 la FR de políticos “hei” es 0.48%.
32. Según la afirmación 27 la FR de políticos “hei” es 4 800 por millón.

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO: ENUNCIADOS - 1

Resuma la información de cada una de las siguientes variables recogidas en la Base de Datos Darío: *sexo*, *deporte2*, *deporte3*, *dieta*, *yoga*, *resisinf* y *ministro*. Acompañe esa información con un diagrama de sectores para *deporte3*, y un diagrama de barras para *resisinf*.

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO - 1

Obtenga estas salidas con el programa informático que usted utilice. Cada programa da salidas con matices particulares, pero el contenido básico debe ser este.

sexo

	Frecuencia	Porcentaje
Válidos Varón	120	60,0
Mujer	80	40,0
Total	200	100,0

deporte2

	Frecuencia	Porcentaje
Válidos Sedentarios	72	36,0
Activos	128	64,0
Total	200	100,0

deporte3

	Frecuencia	Porcentaje
Válidos No	72	36,0
Moderado	80	40,0
Intenso	48	24,0
Total	200	100,0

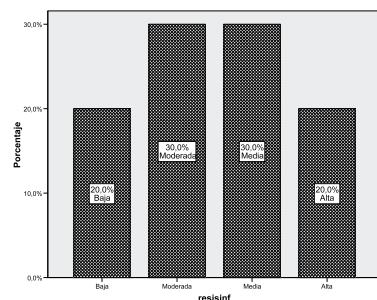
yoga

	Frecuencia	Porcentaje
Válidos No dieta	160	80,0
Si dieta	40	20,0
Total	200	100,0

	Frecuencia	Porcentaje
Válidos No Yoga	160	80,0
Si Yoga	40	20,0
Total	200	100,0

resisinf

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos Baja	40	20,0	20,0
Moderada	60	30,0	50,0
Media	60	30,0	80,0
Alta	40	20,0	100,0
Total	200	100,0	

**ministro**

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos 0	12	6,0	6,0
1	20	10,0	16,0
2	120	60,0	76,0
3	40	20,0	96,0
4	8	4,0	100,0
Total	200	100,0	

Capítulo 2

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y DE DISPERSIÓN

Con variables cuantitativas, además de resumir la información agrupando los valores en intervalos y calculando la Distribución de Frecuencias de estos, se pueden calcular las llamadas *medidas de posición* (o centralización) y de *dispersión*.

Las *medidas de posición* indican en torno a qué valores están los datos. Su significado es obvio y su cálculo no ofrece dificultades conceptuales. La más utilizada es la *media aritmética*, el promedio de los datos, que es la suma de todos los valores dividida por el número de ellos, es decir, $M = (\sum X) / N$. Algunas veces se utiliza la *mediana*, valor de la variable con frecuencia acumulada de 50%, es decir, el percentil 50, el valor situado en el centro cuando se ordenan los datos de menor a mayor valor. La *moda* es el valor más frecuente de la variable, el más repetido.

Las medidas de dispersión son menos conocidas pero no menos importantes. Dan idea de lo agrupados o dispersos que están entre sí los datos. Imagine una asignatura en que la nota final es la media de dos exámenes parciales. Si las notas del estudiante A son 4.8 y 5.2, su media es 5. Si las del estudiante B son 0 y 10 también tiene media 5, pero la situación es muy diferente del anterior. A tiene un conocimiento moderado de ambas partes de la materia, mientras que B ignora totalmente una parte y conoce perfectamente la otra.

Si una variable corporal de las muchas que se miden en Medicina presenta sistemáticamente valores muy próximos a la media, cuando en un paciente se encuentra un valor moderadamente alejado de ella se considerará indicio de enfermedad, señal de alarma. Pero en una variable que presenta espontáneamente valores muy dispersos respecto a la media, un valor moderadamente alejado de ella no se considerará un indicio de enfermedad, sino expresión de la variabilidad de esa medida.

En este capítulo se explican las medidas de dispersión más usadas de modo que todo lector entienda lo que indican. Términos como “Varianza”, “Des-

viación Estándar” y “Error Típico” no pueden ser para el investigador “índices matemáticos” o “parámetros estadísticos” de significado incierto, cuya existencia acepta como un mal menor sin entender lo que expresan. Veremos que todas son *medias* de cantidades que indican la dispersión de los valores respecto a la media aritmética y por tanto tienen una interpretación intuitiva muy sencilla.

2.1. Medidas de dispersión

Para exponer las medidas de dispersión tomemos como ejemplo dos grupos de $N = 9$ individuos cada uno, en los que se mide la variable cuantitativa “X”, cuyos valores aparecen en la primera columna de la tabla que sigue. En ambos grupos la media es $M = 10$ años. El grupo del ejemplo 1º tiene mediana y moda 10 y en el otro ambas son 13 años.

En la segunda columna de cada tabla aparece la diferencia $d = \text{valor del individuo} - \text{media del grupo}$ y en la tercera columna esa diferencia al cuadrado. Así, el primer individuo del grupo 1 tiene valor $X = 11$ y está 1 unidad por encima (signo +) de la media de su grupo y el primer individuo del segundo grupo, que tiene valor $X = 5$ y está 5 unidades por debajo (signo -) de la media de su grupo.

Ejemplo 1º Poca dispersión

X	$d = (X-M)$	$d^2 = (X - M)^2$
11	+1	1
9	-1	1
10	0	0
12	+2	4
9	-1	1
10	0	0
8	-2	4
10	0	0
11	+1	1

$$M = 10$$

$$\sum |d| = 8$$

$$SC = \sum d^2 = 12$$

Ejemplo 2º Mucha dispersión

X	$d = (X- M)$	$d^2 = (X - M)^2$
5	-5	25
13	+3	9
2	-8	64
20	+10	100
15	+5	25
4	-6	36
17	+7	49
13	+3	9
1	-9	81

$$M = 10$$

$$\sum |d| = 56$$

$$SC = \sum d^2 = 398$$

La tabla siguiente recoge las distintas medidas de dispersión.

- **El rango** nos dice entre qué mínimo y máximo están los valores de la variable.
- **La Desviación Media**, DM, es la media de los valores absolutos de las d , es decir, la suma de ellas ignorando el signo dividida por el número de casos (la suma de las d 's con su signo es cero, y por ello no informa acerca de si son grandes o pequeñas). Si la DM de un grupo es, por ejemplo, 3 quiere decir que por término medio los valores se alejan 3 de su media, unos por encima de ella y otros por debajo, no que cada uno de ellos se aleje justamente 3 (del mismo modo que si la media, M, es 10 no quiere decir que todos los valores sean 10).

MEDIDA	Fórmula	GRUPO 1	GRUPO 2
Rango o Amplitud	RA	Valores máximo y mínimo	De 8 a 12
Desviación Media	DM	$\sum d / N$	$8/9 = 0.89$
Suma de Cuadrados	SC	$\sum d^2 = \sum (X - M)^2$	12
Varianza	σ^2	SC / N	1.33
Desviación Estándar	σ	$(\text{Varianza})^{1/2}$	$(1.33)^{1/2} = 1.15$

En la siguiente lista de 4 números (7, 7, 13 y 13) con media 10, la DM es 3 y cada uno se aleja 3 de la media, los dos primeros por debajo de 10 ($d = -3$) y los otros por encima de 10 ($d = +3$).

Valores →	7	7	13	13	M = 10
Distancias →	-3	-3	+3	+3	$DM = (3 + 3 + 3 + 3) / 4 = 3$

Esta otra lista también tiene $M = 10$ y $DM = 3$. Unos se alejan 2 y otros 4, y la media de esas distancias es 3 ($DM = 3$).

Valores →	6	8	12	14	M = 10
Distancias →	-4	-2	+2	+4	$DM = (4 + 2 + 2 + 4) / 4 = 3$

En esta otra lista con media 10, las distancias individuales son 6, 0, 2 y 4 y la media de estas desviaciones es 3 ($DM = 3$).

Valores →	4	10	12	14	M = 10
Distancias →	-6	0	+2	+4	$DM = (6 + 0 + 2 + 4) / 4 = 3$

Por tanto, en una lista de valores con DM pequeña las d son pequeñas, pero generalmente no iguales, y si la DM es grande las d son en general grandes pero puede haber unas pequeñas y otras muy grandes.

- **La Suma de Cuadrados**, SC, es la suma de los d^2 ; es decir, de los cuadrados de las distancias de cada valor a la media del grupo (no debe confundirse con la suma de los valores originales al cuadrado). Para este último ejemplo es $SC = -6^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 = 56$, no $4^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2 = 456$.
- **La varianza**, σ^2 , es la media de los d^2 , es decir, la SC dividida por N.
- **La desviación estándar o típica** es la raíz cuadrada de la varianza, es decir, la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las desviaciones. Tiene valor numérico próximo a la DM y nos informa, como aquella, de cuánto, por término medio, se alejan los valores de la media aritmética. En la práctica, para resumir en un solo número el alejamiento de los valores respecto a la media, se usa la Desviación Estándar, nunca la DM. Esta última se ha mencionado aquí para facilitar la comprensión de lo que indica aquella.

2.2. Medidas de dispersión en la muestra

Llamamos *Población* al total de individuos con ciertas características y *Muestra* al conjunto de individuos extraídos de la población que observamos y/o manipulamos en un estudio, evaluando en ellos ciertas variables que son de nuestro interés. En el capítulo 6 se comentan detenidamente estos conceptos.

Es habitual representar la media poblacional por μ y la Desviación Estándar poblacional por σ . Cuando la lista de valores que tenemos corresponde a toda la población de interés, las medidas de posición y dispersión se calculan como se dijo en el apartado anterior.

Cuando la lista de valores que tenemos corresponde a una muestra, en vez de calcular la Varianza, $\sigma^2 = SC / N$, calculamos la Cuasivarianza o Varianza Muestral: $S^2 = SC / (N-1)$ y en vez de calcular la Desviación Estándar, $\sigma = (SC / N)^{1/2}$, calculamos la Desviación Estándar Muestral: $S = \{SC / (N-1)\}^{1/2}$. En el capítulo 9 se explica por qué la Desviación Estándar Muestral se calcula dividiendo la SC por $N-1$, en vez de dividirla por N . El resto de medidas se calculan como se vio anteriormente.

En la muestra se calcula también el *Error Estándar o Típico*:

$ES = S / (N)^{1/2} = [SC / N(N-1)]^{1/2}$, que va a tener especial protagonismo cuando intentamos adquirir conocimiento sobre una población a partir de la muestra.

Ejemplo: Se toma una muestra de $N = 7$ varones adultos sanos españoles y en cada uno se mide la frecuencia cardiaca, X , obteniéndose:

Resultados, X	80	83	85	78	76	86	72	$\rightarrow \sum = 560$
$d = (X - \text{Media})$	0	3	5	-2	-4	6	-8	$\rightarrow \sum = 0$
d^2	0	9	25	4	16	36	64	$\rightarrow \sum = 154$

$$\text{Media} = 560 / 7 = 80$$

$$SC = 0+9+25+4+16+36+64 = 154$$

$$\text{Cuasivarianza: } S^2 = 154 / 6 = 25.67$$

$$\text{Desviación Estándar Muestral: } S = \{ 25.67 \}^{1/2} = 5.07$$

$$\text{Error Estándar: } ES = S / (n)^{1/2} = 5.07 / 7^{1/2} = 1.9$$

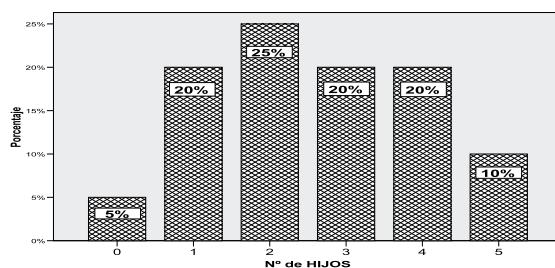
** **Ejercicio 2.1:** Calcule la Media, DM, SC, S^2 y S para cada una de las siguientes listas de valores.

- 7 – 8 – 8 – 9.
- 6 – 10 – 6 – 10.
- 4 – 8 – 8 – 12.
- ¿En qué se parecen y en qué se diferencian estas tres listas de valores?

2.3. Cálculo de promedios en Distribuciones de Frecuencia

Si la lista de valores sobre la que queremos calcular promedios contiene varios valores que se repiten varias veces, es más eficiente tratar esa información en forma de Distribución de Frecuencias. Las fórmulas para la Media, Suma de Cuadrados, Varianza, etc., son esencialmente las mismas que en el caso general, pero teniendo en cuenta que si, por ejemplo, el valor 3 se repite 60 veces, en vez de sumarlo esas 60 veces es más cómodo escribir y calcular 3×60 .

Ejemplo: En un grupo de 240 individuos se cuenta para cada uno el N° de hijos.



X _i :	0	1	2	3	4	5	Valores de la variable
n _i :	12	48	60	48	48	24	Frecuencias Absolutas
f _i :	.05	.20	.25	.20	.20	.10	Frecuencias Relativas
F _i :	.05	.25	.50	.70	.90	1.00	Frecuencias Acumuladas

MEDIDAS DE POSICIÓN:

MODA. Clase con mayor frecuencia, 2 hijos.

PERCENTIL 90 = 4 (el 90% tiene 4 hijos o menos).

MEDIANA: Es el percentil 50, 2 hijos.

$$\text{MEDIA ARITMÉTICA: } M = \frac{\sum X_i}{N} \quad , \quad M = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} \quad , \quad M = \sum f_i X_i$$

$$M = (12 \times 0 + 48 \times 1 + 60 \times 2 + 48 \times 3 + 48 \times 4 + 24 \times 5) / 240 = 624 / 240 = 2.6$$

$$M = .05 \times 0 + .20 \times 1 + .25 \times 2 + .20 \times 3 + .20 \times 4 + .10 \times 5 =$$

$$= .20 + .50 + .60 + .80 + .50 = 2.6$$

Para calcular el total de hijos se multiplica cada valor por el número de veces que se repite, es decir, por su frecuencia absoluta y se suman todos esos productos, es decir, $0 \times 12 + 1 \times 48 + 2 \times 60 + \dots = 624$. La media es ese total dividido por el número de personas. Pero si no se conocen las frecuencias absolutas, se puede calcular la media multiplicando cada valor por su Frecuencia Relativa y sumando esos productos ($0 \times 0.05 + 1 \times 0.20 + 2 \times 0.25 + \dots$). Ahora ya no hay que dividir por el total porque ya se ha dividido cada frecuencia absoluta para calcular la relativa.

** **Ejercicio 2.2:** Considere la siguiente *población* formada por $N = 20$ mujeres y la variable $X = \text{N}^{\circ}$ de hijos. Calcule la Distribución de Frecuencias y la media de hijos.

Valores:	1,2,1,3,1,0,1,0,3,0, 1,2,0,3,1,4,1,2,0,1	<i>Distribución de Frecuencias</i>
		$X_i :$ 0 1 2 3 4
		$n_i :$
		$f_i :$

** **Ejercicio 2.3:** Una *muestra* de 5 individuos tiene estos valores: 3 , 2 , 4 , 0 , 2

- ¿Tiene sentido calcular la Distribución de Frecuencias? ¿Por qué?
- Calcule M, SC, S^2 , S y ES.

2.4. Valores Estandarizados

Cuando se evalúa una variable cualitativa su distribución se concreta en la proporción de casos que presentan cada valor. Esa proporción nos da la probabilidad de encontrar individuos con ese valor en las muestras. Decimos, por ejemplo, que el 20% de los individuos son del grupo sanguíneo ‘A’, el 18% son del ‘B’, etc.

Con variable cuantitativa continua no cabe hablar de proporción de cada valor porque hay infinitos valores posibles y cada uno de ellos —considerado con total precisión— tiene proporción “casi-cero”. Lo que se hace es evaluar la proporción de valores comprendidos en *ciertos intervalos*. Diremos, por ejemplo, que el 27% de los individuos tienen Tensión Arterial, TA, entre 100 y 120, o que el 15% de los individuos tienen TA menor de 98, etc.

Es muy útil dar los intervalos usando los llamados “**Valores Estandarizados**”, que indican el número de desviaciones estándar que se aleja de la media cada valor de la variable. Por ejemplo, si un conjunto de valores tiene Media $\mu = 160$ y Desviación Estándar $\sigma = 10$, el valor 180 está 20 unidades por encima de la media, esto es, 2 desviaciones estándar por encima de la Media, y decimos que su valor estandarizado es $Z = 2$. Y el valor 150 está 10 unidades por debajo de la media, esto es 1 desviación estándar por debajo de la media y decimos que su valor estandarizado es $Z = -1$. Y el valor 168 está $8/10 = 0.8 \sigma$ por encima de μ y decimos que su valor estandarizado es $Z = 0.8$. En general, el valor estandarizado se calcula:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Para $X = 170$ es $Z = 1$, para $X = 175$ es $Z = 1.5$, para $X = 140$ es $Z = -2$ y para $X = 165$ es $Z = 0.5$. Y para esta variable es equivalente decir, por ejemplo, que el 9% de los individuos tienen valor de X entre 170 y 175 a decir que el 9% de los individuos tienen valor estandarizado entre 1 y 1.5: $P(170 < X < 175) = P(1 < Z < 1.5) = 0.09$.

2.5. La media ponderada

Para introducir este concepto consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Un alumno ha hecho en una asignatura 5 exámenes parciales de importancia similar con estas notas 7, 7, 7, 7 y 2, y el profesor le dice que la nota media del curso es la media entre 7 y 2, es decir $(7 + 2) / 2 = 4.5$. El alumno hará notar que no ha tenido un 7 y un 2, sino *cuatro* 7 y un 2, por lo que la media es $M = (7 + 7 + 7 + 7 + 2) / 5 = (7 \cdot 4 + 2 \cdot 1) / (4 + 1) = 30 / 5 = 6$. Decimos que la nota “7” se ponderó por 4, porque hay cuatro exámenes con ella, mientras que la nota 2 solamente se presentó una vez.

Ejemplo 2: En una familia de 6 personas hay 4 mujeres, cada una con 8 € y 2 varones, cada uno con 1 €. Si alguien dice que la media de euros por persona es $(8 + 1) / 2 = 4.5$ €, le corregimos haciendo notar que hay 4 personas con 8 € y 2 personas con 1 €, por lo que la media es $M = (8 \cdot 4 + 1 \cdot 2) / (4 + 2) = 34 / 6 = 5.67$

Decimos que la cantidad “8” se ponderó por 4, porque hay cuatro personas con ella, mientras que la cantidad “1” solamente se presentó 2 veces.

Ejemplo 3: Si en una fábrica hay 20 obreros con sueldo de 100 € y 5 obreros con sueldo de 300 €, la media de sueldo en la empresa **no** es $(100 + 300) / 2 = 200$, sino $M = (100 \cdot 20 + 300 \cdot 5) / (5 + 20) = 3500 / 25 = 140$.

En general se llama *media ponderada* de dos cantidades que se repiten distinto número de veces a la suma teniendo en cuenta el número de veces que se repite cada una, dividida por el número total de individuos. Es la media total de todo el colectivo.

Si lo que se evalúa en dos grupos es la proporción de individuos con cierta característica, la proporción del colectivo formado por la fusión de los dos grupos es una media de las dos proporciones, ponderada cada una por el tamaño de su grupo. En la siguiente tabla vemos que en un grupo de 8 mujeres enfermó 1, proporción = $1 / 8 = 0.125$ y en un grupo de 22 varones enfermaron 11, proporción = 0.50.

	Enfermos	Total		
Mujeres	1	8	→	$P(\text{Enf} \text{Muj}) = 1 / 8 = 0.125$
Varones	11	22	→	$P(\text{Enf} \text{Var}) = 11 / 22 = 0.500$
Todos	12	30	→	$P(\text{Enf}) = 12 / 30 = 0.400$

La proporción en el total es $12 / 30 = 0.40$ y puede escribirse como la media de las dos proporciones anteriores ponderadas por el tamaño de las muestras.

$$\begin{aligned}\text{Proporción total} &= 12 / 30 = (1 + 11) / (8 + 22) = \\ &= (8 \cdot 1 / 8 + 22 \cdot 11 / 22) / (8 + 22) = (8 \cdot 0.125 + 22 \cdot 0.50) / (8 + 22) = 0.40\end{aligned}$$

En todos los ejemplos anteriores se ve, y es una verdad general, que la media ponderada de dos cantidades es siempre un valor comprendido entre ellas y más cercano al que recibe mayor peso.

Cuando las cantidades por las que se pondera son los tamaños de dos grupos implicados, la media ponderada es la media del conjunto formado por la fusión de los dos grupos en un solo.

NO OLVIDE RECORDAR - 2

1. Con variables cuantitativas, además de resumir la información agrupando los valores en intervalos y calculando la distribución de frecuencias, DF, de estos, se pueden calcular las llamadas **medidas de posición** (o centralización) y de **dispersión**.
2. Las **medidas de posición** indican en torno a qué valores están los datos: La media aritmética nos dice “a cuánto toca cada individuo si el total se reparte por igual entre todos ellos”. La media se puede calcular a partir de la DF relativas, sin conocer ni las frecuencias absolutas ni el tamaño del grupo.
3. Otras medidas de posición son la Moda (el valor más repetido) y la Mediana (el percentil 50).
4. Las **medidas de dispersión** dan idea de lo agrupados o dispersos que están los datos entre sí. El Rango o Amplitud es la diferencia entre el mayor y el menor valor. La Desviación Media es la media del valor absoluto de las distancias de cada valor a la media aritmética. La Suma de Cuadrados es la suma de los cuadrados de esas distancias. La Varianza es Suma de Cuadrados dividida por el número de individuos, es decir, la media de esas distancias elevadas al cuadrado. La Desviación Estándar o Típica es la raíz cuadrada de la Varianza.
5. En la muestra se calculan la Cuasivarianza, Desviación Estándar Muestral y Error Estándar.
6. El valor estandarizado, Z, indica el número de desviaciones estándar que cada valor de la variable se aleja de la media.
7. La media ponderada de dos valores es un valor comprendido entre esos dos valores.
8. La media de dos medias muestrales ponderadas por el tamaño de las muestras es la media del conjunto formado por la fusión de las dos muestras en un solo grupo.
9. La media de dos proporciones muestrales ponderadas por el tamaño de las muestras es la proporción del conjunto formado por la fusión de las dos muestras en un solo grupo.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 2

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. Para resumir el comportamiento de una variable cuantitativa en un grupo se calculan medidas de centralización como la media aritmética y medidas de dispersión como la varianza.
2. Si en un colectivo hay 30% de españoles y 70% de franceses la media de la variable “país de origen” es 50%.
3. Si en un colectivo hay 30% de españoles y 70% de franceses la media de la variable “país de origen” es 1.
4. Las dos afirmaciones anteriores son una total incongruencia.
5. Para resumir el comportamiento de una variable cuantitativa en un grupo se calculan medidas de centralización como la media aritmética y medidas de dispersión como la varianza.
6. Si la media de un grupo de valores es 9, todos y cada uno de ellos es 9.
7. Si la media de un grupo de valores es 9, no quiere decir que todos sean 9.
8. Si la Desviación Media, DM, de un grupo es, por ejemplo, 5 quiere decir que cada uno de los valores se aleja justamente 5 unidades de la media, unos por encima de ella y otros por debajo.
9. Si la DM de un grupo es, por ejemplo, 5 quiere decir que por término medio los valores se alejan 5 unidades de su media, unos por encima de ella y otros por debajo, no que cada uno de ellos se aleje justamente 5 (del mismo modo que si la media es 9 no implica que todos sean 9).
10. La DM de { 7, 7, 13 y 13 } es $(3 + 3 + 3 + 3) / 4 = 12 / 4 = 3$.
11. En el ejemplo anterior la DM es 3 y además cada valor se aleja justamente 3 unidades de la media.
12. La DM de { 6, 8, 12 y 14 } es $(4 + 2 + 2 + 4) / 4 = 12 / 4 = 3$.
13. La DM de { 4, 10, 10 y 16 } es $(6 + 0 + 0 + 6) / 4 = 12 / 4 = 3$.
14. Dada una lista de números, la Suma de Cuadrados, SC, es la suma de los cuadrados de esos números.
15. La SC de { 6, 8 y 10 } es $36 + 64 + 100 = 200$.
16. Dada una lista de números, la Suma de Cuadrados, SC, es la suma de los cuadrados de las distancias de esos números a su media aritmética.
17. La SC de { 6, 8 y 10 } es $2^2 + 0^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$.
18. La SC de { 5, 5 y 8 } es $25 + 25 + 64 = 114$.
19. La SC de { 5, 5 y 8 } es $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$.

- 20.** La Varianza es una media, puesto que es la suma de un conjunto de valores dividida por el número de ellos.
- 21.** La Varianza es la media de las desviaciones de los valores respecto a la media aritmética.
- 22.** La Varianza es la media del cuadrado de las desviaciones de los valores respecto a la media aritmética.
- 23.** La desviación estándar toma valor próximo a la DM y debe ser interpretada como la DM.
- 24.** Si el 20% de un colectivo tiene 2 € y el 80% tiene 5 €, para calcular la media aritmética hay que conocer el total de personas para poder sumar el dinero de todas y dividir por el número de ellas.
- 25.** Si el 20% de un colectivo tiene 2 € y el 80% tiene 5 €, para calcular la media aritmética no es necesario conocer el total de personas. La media es $0.2 \cdot 2 + 0.8 \cdot 5 = 0.4 + 4 = 4.4$.
- 26.** Si el 10% de un colectivo tiene un hijo, el 30% tienen 2 hijos y el 60% tienen 3 hijos, la media de hijos es $0.1 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 + 0.6 \cdot 3 = 0.1 + 0.6 + 1.8 = 2.5$
- 27.** Si en un colectivo la variable X tiene Media = 20 y $\sigma = 4$, al valor X = 28 le corresponde el valor estandarizado Z = 2.
- 28.** Si en un colectivo la variable X tiene Media = 20 y $\sigma = 4$, al valor X = 16 le corresponde el valor estandarizado Z = -1.
- 29.** Si en un colectivo la variable X tiene Media = 20 y $\sigma = 10$, al valor X = 28 le corresponde el valor estandarizado Z = -2.5 .
- 30.** Si en un colectivo la variable X tiene Media = 20 y $\sigma = 10$, al valor X = 33 le corresponde el valor estandarizado Z = 3.3 .
- 31.** Si en un colectivo la variable X tiene Media = 20 y $\sigma = 10$, al valor X = 20 le corresponde el valor estandarizado Z = 0.

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO - 2

Calcule la media, valores máximo y mínimo, desviación típica y error típico de cada una de las siguientes variables recogidas en la Base de Datos Darío: *edad*, *resisinf*, *ministro*, *sanidad*, *tad*, *tadpost* y *diftad*.

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica	Error típico
EDAD	200	19	87	46,96	17,280	1,22
RESISINF	200	0	3	1,50	1,027	0,07
MINISTRO	200	0	4	2,06	0,837	0,06
SANIDAD	200	30	95	65,40	16,222	1,15
TAD	200	46	93	72,20	9,381	0,66
TADPOST	200	45	107	70,88	14,454	1,02
DIFTAD	200	-24	19	-1,32	10,924	0,77

Capítulo 3

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA. RELACIÓN ENTRE DOS VARIABLES

En los capítulos anteriores estudiábamos el comportamiento de una variable en un grupo de individuos resumiéndolo mediante medias o proporciones. Pero muy raramente el análisis de una investigación se limita a estudiar el comportamiento de cada variable por separado. Lo habitual es estudiar relaciones entre variables, viendo cómo los valores de una son distintos en los individuos con diferentes valores de otra.

Comenzaremos por explicar en qué consiste el estudio de la **relación entre dos variables**. Se trata de un principio fundamental en el análisis de datos y todo investigador debe tenerlo perfectamente claro antes de adentrarse en los modos concretos de ejecutarlo.

3.1. Cómo se estudia la relación entre dos variables

La idea básica es **siempre** la misma: estudiar el comportamiento de una de las variables (mediante medias o proporciones) en los distintos niveles de la otra.

Si el comportamiento de una de las variables es el mismo en los distintos niveles de la otra, decimos que los valores de la primera no dependen de la otra, o que las variables son Independientes. Si el comportamiento de una de las variables no es el mismo en los distintos niveles de la otra, decimos que los valores de la primera dependen de la otra, o que esas variables son Dependientes.

Esta idea tan sencilla preside continuamente el análisis de la información, cualquiera que sea la técnica concreta que se use y el nivel de complejidad de la misma. Como ejemplo sencillo podemos considerar el estudio de la relación entre sexo y cáncer de pulmón (CP) en un colectivo. Describir dicha relación es reportar la FR de CP en los varones y en las mujeres. Si esa FR es la misma en ambos géneros, decimos que la incidencia de CP es independiente del sexo. Si el CP es más frecuente en un sexo decimos esa incidencia depende del sexo.

Ejemplo más sofisticado podría ser un “Análisis de supervivencia con regresión múltiple de Cox”. Esta técnica contiene cierta complejidad conceptual y matemática. Pero el análisis termina siempre diciendo cuánto mayor es cierto coeficiente (el “Hazard” de Cox) en un sexo que en otro, o en jóvenes que en viejos o en los pacientes con un tratamiento que en los que no lo han recibido. Es decir, aquí también se cumple que **analizar la relación entre dos variables es estudiar el comportamiento de una de las ella en los distintos niveles de la otra.**

En la práctica esto se hará de distinta forma dependiendo del tipo de variables implicadas. Veremos que:

- Si las dos variables son cualitativas construiremos lo que llamaremos *Tablas de Contingencia*, y en ellas calcularemos y compararemos las *Distribuciones de Frecuencias Conjuntas, Marginales y Condicionadas*.
- Si una variable es cualitativa y la otra cuantitativa compararemos las medias y desviaciones de la cuantitativa para cada categoría de la cualitativa.
- Si las dos variables son cuantitativas haremos nubes de puntos y cálculos de *Regresión y Correlación*.

3.2. Relación entre dos variables cualitativas

Veremos esta situación sobre un ejemplo concreto. De cada uno de los individuos de un grupo de 2 000 pacientes con cáncer de pulmón, sabemos si tuvo o no fiebre inicial (Fiebre = ‘F+’ y No fiebre= ‘F-’) y si aparecieron o no metástasis a otros órganos (Sí metástasis = ‘M+’ y No metástasis = ‘M-’). Esa información estaría inicialmente recogida en una tabla como la de la izquierda:

Nº de Individuo	Fiebre	Metástasis	DF de la Fiebre	DF de las Metástasis				
Valor	n	FR	Valor	n	FR			
1	NO	SÍ	SI	600	0.30	SI	1 100	0.55
2	SÍ	NO	NO	1 400	0.70	NO	900	0.45
---	---	---	Total	2 000	1	Total	2 000	1
2 000	SÍ	NO						

Ya sabemos cómo resumir la información de cada variable en este grupo: calculando su DF. Así, en la tabla del centro vemos que de los 2 000 pacientes, 600 tuvieron fiebre (un 30%) y 1 400 no la tuvieron (un 70%) y en la tabla de la derecha vemos que 1100 presentaron metástasis (55%) y 900 no lo presentaron (45%). Pero esta información, aunque útil, no dice si fiebre y metástasis están o no relacionadas. La relación se ve calculando la FR de casos con metástasis en los individuos con fiebre y en los individuos sin fiebre. Para ello comenzamos por anotar los recuentos en una tabla de dos dimensiones:

DF CONJUNTAS Y MARGINALES ABSOLUTAS

La **DF Conjunta absoluta** se hace dando en una tabla de doble entrada la cantidad de individuos que hay en cada casilla. Sumando las frecuencias conjuntas se obtienen las **DF Marginales absolutas**

	M+	M-	Total
F+	120	480	600
F-	980	420	1 400
Total	1 100	900	2 000

DF CONJUNTAS Y MARGINALES RELATIVAS

La **DF Conjunta y Marginales RELATIVAS**, se obtienen dividiendo las frecuencias absolutas por el total de individuos estudiados (2000 pacientes)

	M+	M-	Total
F+	0.06	0.24	0.30
F-	0.49	0.21	0.70
Total	0.55	0.45	1

Vemos que de los 2 000 pacientes, 120 tuvieron fiebre y metástasis (un 6%), 480 tuvieron fiebre y no metástasis (24%), 980 tuvieron metástasis y no fiebre (49%) y 420 no tuvieron ninguna de las dos (21%). Estas 4 cantidades forman la DF conjunta.

Hubo 600 pacientes con fiebre (con o sin metástasis), lo que supone el 30% del total, y 1 400 (70%) no la tuvieron, ambas forman la DF marginal de la fiebre. De la misma forma, 1 100 pacientes (55%) no presentaron metástasis y 900 (45%) sí la presentaron, lo que forma la DF marginal de metástasis.

DF DE FIEBRE CONDICIONADA A METÁSTASIS

Dividiendo las frecuencias conjuntas por las marginales de Metástasis obtenemos las **Frecuencias Condicionadas a Metástasis**

	M+		M-
F+	120/1 100 = 0.11	480/900 = 0.53	
F-	980/1 100 = 0.89	420/900 = 0.47	
	1	1	

Así, habían tenido fiebre inicial el 11% de los pacientes que hicieron metástasis y, por tanto, no tuvieron fiebre el 89% de ellos. De los que no hicieron metástasis, tuvieron fiebre el 53% y no la tuvieron el 47%.

DF DE METÁSTASIS CONDICIONADA A FIEBRE

Dividiendo las conjuntas por las marginales de Fiebre obtenemos **Frecuencias Condicionadas a Fiebre**.

	M+		M-
F+	120/600 = 0.20	480/600 = 0.80	1
F-	980/1 400 = 0.70	420/1 400 = 0.30	1

Así, hicieron metástasis el 20% de los que habían tenido fiebre y, por tanto, no hicieron metástasis el 80% de ellos. Hicieron metástasis el 70% de los que no habían tenido fiebre y no hicieron metástasis el 30% de ellos.

** **Ejercicio 3.1:** Con los datos del ejemplo anterior:

- ¿Qué proporción de individuos fueron F-? $P(F-) =$
- ¿Qué proporción de individuos tuvieron Fiebre? $P(F+) =$
- ¿Qué proporción de individuos fueron F- y M+? $P(F- \text{ y } M+) =$
- ¿Qué proporción de individuos con metástasis fueron F-? $P(F- | M+) =$

- e. ¿Qué proporción de individuos F+ no tuvieron metástasis ? $P(M|F+) =$
- f. Entre los F-, ¿qué proporción de ellos tuvieron metástasis?
- g. ¿Qué proporción de individuos tuvieron metástasis siendo F-?
- h. ¿La frecuencia con la que aparecen metástasis es igual en los dos tipos de Fiebre, o depende de la fiebre?
- i. ¿Tener fiebre modifica el pronóstico, modifica el riesgo de hacer metástasis?

Continuamos estudiando la relación entre dos variables tomando como ejemplo la presencia o no de dos enfermedades 'A' y 'B'. Debemos tener en cuenta que conocer $P(A)$ y $P(B)$, proporción de casos con cada una de las enfermedades:

- I) **no** permite conocer cómo es la relación entre A y B, es decir, si la presencia de una favorece o estorba la presencia de la otra,
- II) **no** permite conocer $P(A \text{ y } B)$, es decir, la proporción de individuos que tienen ambas enfermedades.

Veamos ambos puntos con ejemplos:

- I) Si sabemos que en un colectivo de 2 000 personas 600 padecen la enfermedad A (el **30%**) y 800 padecen la enfermedad B (el **40%**), no podemos deducir si B es más frecuente en las personas con A que en las sin A. Véalo en estos 4 supuestos, todos con $P(A) = 0.30$ y $P(B) = 0.40$.

1º	A A-			DF de A Condicionada a B
B	500	300	800	$\rightarrow P(A B) = 500 / 800 = 0.625$
B-	100	1 100	1 200	$\rightarrow P(A B-) = 100 / 1 200 = 0.083$
	600	1 400	2 000	$P(A) = 600 / 2 000 = 0.30$

Tienen A el 62.5% de los que tienen B y el 8.3% de los que no tienen B. Es más probable tener A cuando se tiene B. Fuerte dependencia directa.

2º	A A-			DF de A Condicionada a B
B	100	700	800	$\rightarrow P(A B) = 100 / 800 = 0.125$
B-	500	700	1 200	$\rightarrow P(A B-) = 500 / 1 200 = 0.417$
	600	1 400	2 000	$P(A) = 600 / 2 000 = 0.30$

Tienen A el 12.5% de los que tienen B y el 41.7% de los que no tienen B. Es menos probable tener A cuando se tiene B. Fuerte dependencia inversa.

3º	A A-			DF de A Condicionada a B
B	240	560	800	$\rightarrow P(A B) = 240 / 800 = 0.30$
B-	360	840	1 200	$\rightarrow P(A B-) = 360 / 1 200 = 0.30$
	600	1 400	2 000	$P(A) = 600 / 2 000 = 0.30$

Tienen A el 30% de los que tienen B y el 30% de los que no tienen B. Es igual de probable tener A cuando se tiene que cuando no se tiene B. Decimos que hay **Independencia** entre ellas.

4º	A	A-	DF de A Condicionada a B
B	0	800	$P(A B) = 0 / 800 = 0$
B-	600	600	$P(A B-) = 600 / 1200 = 0.50$
	600	1400	$P(A) = 600 / 2000 = 0.30$

Tienen la enfermedad A el 0% de los individuos que tienen la B y el 50% de los que no tienen la B. No es posible tener A si se tiene B. Son características Incompatibles (máxima dependencia inversa).

En todos estos ejemplos se ve que el valor de $P(A) = 0.30$ está comprendido entre $P(A|B)$ y $P(A|B-)$. En la tercera tabla en que es $P(A|B) = P(A|B-)$ el valor de $P(A)$ es igual a los dos condicionados. Esto es una verdad general: el valor marginal está comprendido entre los condicionados y cuando estos son iguales entre sí, el marginal es igual a ellos.

** **Ejercicio 3.2:** Para cada uno de los cuatro colectivos anteriores calcule $P(B|A)$, $P(B|A-)$ y $P(B)$ y rellene esta tabla.

1	$P(B A) =$	$P(B A-) =$	$P(B) =$
2	$P(B A) =$	$P(B A-) =$	$P(B) =$
3	$P(B A) =$	$P(B A-) =$	$P(B) =$
4	$P(B A) =$	$P(B A-) =$	$P(B) =$

Vemos que la dependencia se puede estudiar comparando las DF de A condicionadas a B, como se hizo antes para los ejemplos 1º a 4º, o las DF de B condicionadas a A, como se acaba de hacer en este ejercicio 3.2, y se llega a la misma conclusión.

II) Para ver que conocer la $P(A)$ y $P(B)$ **no** permite conocer la $P(A \text{ y } B)$, es decir, la proporción de individuos que tienen ambas enfermedades, calculemos $P(A \text{ y } B)$ en los cuatro colectivos de anteriores:

$1^o \rightarrow P(A \text{ y } B) = 500 / 2000 = 0.25$	$2^o \rightarrow P(A \text{ y } B) = 100 / 2000 = 0.05$
$3^o \rightarrow P(A \text{ y } B) = 240 / 2000 = 0.12$	$4^o \rightarrow P(A \text{ y } B) = 0 / 2000 = 0$

Vemos que en los cuatro colectivos es $P(A) = 0.30$ y $P(B) = 0.40$ y, sin embargo, no es igual $P(A \text{ y } B)$.

3.3. Independencia

En la tercera tabla de arriba veíamos que la proporción de enfermos de A es la misma entre las personas con B que entre las sin B, en este caso 0.30. Es decir,

$$P(A|B) = P(A|B-)$$

A eso se llama Independencia e implica también que la proporción de enfermos de B es la misma entre las personas con A que entre las sin A, en este caso 0.40.

$$P(B|A) = P(B|A-)$$

En la independencia ocurren estos dos hechos:

I- Siempre que hay independencia, y solamente cuando la hay, la $P(A)$ marginal es igual a las $P(A)$ condicionadas a $B+$ y a $B-$:

$$P(A) = P(A|B) = P(A|B^-)$$

Es decir, la FR de casos con A en todo el colectivo es igual a la FR de casos con A entre los que tiene B y a la FR de casos con A entre los que no tiene B.

Ello se deduce del hecho de que la $P(A)$ marginal siempre es un valor comprendido entre los valores de las dos condicionadas. Si la FR marginal es un valor entre las dos condicionadas, cuando estas son iguales entre sí (lo que llamamos independencia) tiene que ser igual a ese valor único de las condicionadas. Por la misma razón es $P(B) = P(B|A) = P(B|A^-)$.

II- Siempre que hay independencia, y solamente cuando la hay, la $P(A \text{ y } B)$ es el producto de la $P(A)$ marginal por la $P(B)$ marginal: $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$

Es decir, la FR de individuos en los que se dan las dos enfermedades es el producto de las FR con las que se da cada una de ellas. Para demostrar eso recordemos que en todos los casos, con dependencia o con independencia, la FR conjunta puede verse como “proporción de una proporción”: Por ejemplo, si del total de un colectivo tienen B el 20% y el 50% de los que tienen B también tiene A, tendrán A y B el 50% del 20%, es decir, $0.50 \cdot 0.20 = 0.10$ del total.

En general, si $P(B)$ es la FR de ellos que tienen B y entre los que tienen B, $P(A|B)$ es la FR de ellos que, además, tienen A, la FR de los que tienen A y B es el producto de esas dos FR: $P(A \text{ y } B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Como vimos en el punto I, si hay independencia, y solo cuando la hay, es $P(A) = P(A|B)$, y la expresión anterior queda:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

En el ejemplo de la tercera tabla arriba, con características independientes, era $P(A) = 0.30$ y $P(B) = 0.40$ por lo que $P(A \text{ y } B)$ tiene que ser $0.30 \cdot 0.40 = 0.12$. En efecto, en la casilla superior izquierda se ve que tienen ambas enfermedades 240 personas, que sobre el total de 2000 son $240 / 2000 = 0.12$ ó 12%.

Ejemplo: En un colectivo fuman (F) el 40% y son asmáticos (A) el 70%. Con esa información no podemos saber qué proporción del total son fumadores y asmáticos. Podrían tener ambas características desde solamente el 10% hasta un máximo del 40%. Tampoco podemos saber si el asma es más frecuente en los fumadores o en los no fumadores.

Podría, por ejemplo, ocurrir esto (asma más frecuente en no fumadores):

	A	A-		DF de A Condicionada a F
F	0.12	0.28	0.40	$\rightarrow P(A F) = 0.12 / 0.40 = 0.30$
F-	0.58	0.02	0.60	$\rightarrow P(A F-) = 0.58 / 0.60 = 0.967$
	0.70	0.30		

Son fumadores y asmáticos el 12%.

Tienen asma el 30% de los fumadores y el 96.7% de los no fumadores.

Pero también podría ocurrir esto (asma independiente de fumar):

	A	A-	DF de A Condicionada a F
F	0.28	0.12	$P(A F) = 0.28 / 0.40 = 0.70$
F-	0.42	0.18	$P(A F-) = 0.42 / 0.60 = 0.70$
	0.70	0.30	

Son fumadores y asmáticos el 28%
Tienen asma el 70% de los fumadores y el 70% de los no fumadores.

** **Ejercicio 3.3:** El 20% de los individuos de un grupo tiene la enfermedad 'H' y el 30% tiene la 'K'.

- ¿Podemos deducir a partir de esos datos el porcentaje de individuos que tienen ambas enfermedades? ¿Puede ser que tengan ambas el 40% del grupo?
- Entre qué valores mínimo y máximo tiene que estar ese porcentaje de individuos con ambas enfermedades?
- ¿En qué circunstancias ocurre que tienen ambas el 6% ($0.2 \times 0.3 = 0.06$)?

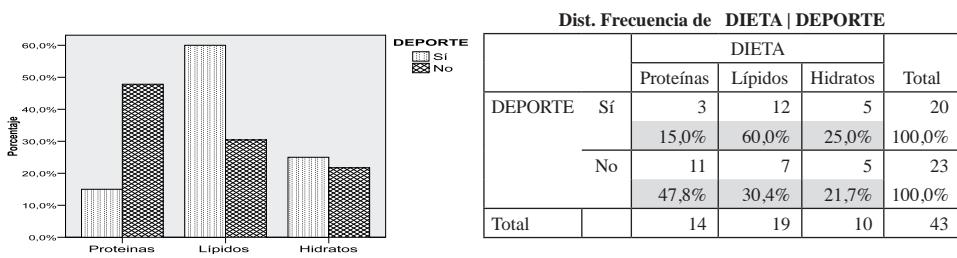
** **Ejercicio 3.4:** Para saber si en un grupo de 43 individuos hay relación entre la práctica de deporte (Sí/No) y la dieta predominante (proteínas, lípidos o hidratos) se recogen los datos en la siguiente tabla de contingencia 2 x 3 (2 categorías de deporte y 3 categorías de dieta)

Tabla de contingencia DEPORTE * DIETA

		DIETA			Total
		Proteínas	Lípidos	Hidratos	
DEPORTE	Sí	3	12	5	20
	No	11	7	5	23
Total		14	19	10	43

Para ver cómo es la dieta en los deportistas y en los no deportistas se calcula la DF de dieta condicionada a deporte, y se pueden representar en un diagrama de barras.

- En este grupo ¿son dieta y deporte dependientes o independientes?
- ¿La respuesta a la pregunta anterior sería la misma si se compararan las DF del deporte condicionado a la dieta?



3.4. Relación entre una variable cualitativa y otra cuantitativa

En una empresa se desea estudiar si el nivel de agresividad de 24 mujeres (clasificado en 4 categorías: nada, poco, medio o mucho) está relacionado con su rendimiento en el trabajo (medido en una escala de 0 a 60). La información se recoge en la tabla siguiente a la izquierda. El comportamiento de cada una de las variables se resume:

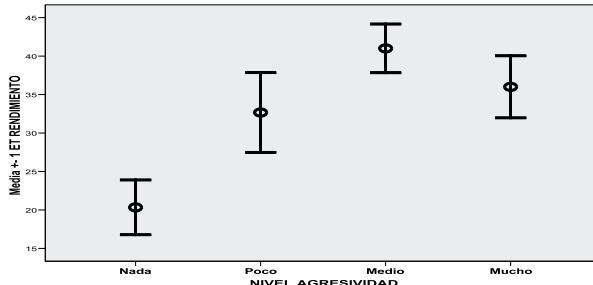
Agresividad → DF para cada categoría (hay 25% de mujeres en cada una)
 Rendimiento → Media y Desviación Estándar.

Pero esta información no permite saber si el rendimiento está relacionado con la agresividad, es decir, si a mayor agresividad corresponde mayor o menor rendimiento.

Nº de individuo	Rendimiento	Nivel agresividad	D. de F. de agresividad			Resumen de rendimiento
1	15	Nada	Nada	6	0.25	Media = 33
2	26	Poco	Poco	6	0.25	DS = 11.6
---	---	---	Medio	6	0.25	ES = 2.4
24	36	Mucho	Mucho	6	0.25	

Para ver la relación entre estos dos caracteres debemos comparar las medias y desviaciones del rendimiento en cada uno de los niveles de agresividad. Se puede resumir esta información representando en una gráfica la media de agresividad más/menos el Error Estándar.

Nivel de agresividad	Rendimiento en el trabajo						Media	S	ES
Nada	15	26	9	14	30	28	22	8.8	3.6
Poco	25	33	29	38	17	54	33	12.7	5.2
Medio	34	47	53	38	41	33	41	7.8	3.2
Mucho	35	53	38	31	23	36	36	9.8	4.0



Vemos que hay clara dependencia: en las tres primeras categorías a mayor nivel de agresividad hay mayor rendimiento, pero en las mujeres muy agresivas el rendimiento es algo menor que en el nivel medio. Hablaríamos de *dependencia* si las cuatro medias fueran similares.

Esta forma de estudiar la relación entre una variable cualitativa y otra cuantitativa es la más común, pero hay otras posibilidades:

- Si la variable cuantitativa es discreta con pocos valores puede ser tratada como cualitativa. Se estudia la relación entre ella y la cualitativa haciendo Tablas de Contingencia y comparando las DF Condicionadas.
- Si la variable cuantitativa es continua se pueden agrupar sus valores en intervalos, y hacer Tablas de Contingencia cruzándola con la cualitativa. Hay que tener en cuenta que todo agrupamiento en intervalos supone una pérdida de información, ya que todos los individuos con valores de la variable en un mismo intervalo son considerados equivalentes. Por ejemplo, si se agrupan las edades por quinquenios, serán equivalentes todos aquellos que tengan 20, 21, 22, 23 y 24 años, ya que pertenecerían al mismo quinquenio. Es preferible mantener la edad como tal.

** **Ejercicio 3.5:** Para estudiar la relación entre sexo (varón = V y mujer = H) y evolución clínica (muerte = M, secuelas = S y curación = C) en cierta enfermedad, se anotan estas dos variables en un conjunto de 20 enfermos:

V-S V-C H-M V-S V-C H-C V-C H-S H-M V-M
 V-C V-C H-S H-M V-C H-M V-C V-C V-C H-C

- Rellene la tabla de la izquierda con las DF conjunta y marginales relativas.

	M	S	C	Total		M	S	C	Total
V					H				

- Rellene la tabla de la derecha con la DF de evolución condicionada a sexo.
- ¿En qué sexo hay mejor evolución?
- ¿Sexo y evolución son dependientes?

3.5. Relación entre dos variables cuantitativas

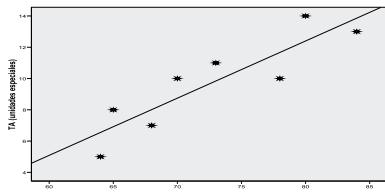
Para estudiar la relación entre dos variables cuantitativas se pueden agrupar los valores de ambas en intervalos y tratarlas como dos cualitativas (apartado 3.2) o se puede agrupar los valores de una en intervalos y ver la relación con la otra como en el apartado 3.4. Pero recordemos que esto supone cierta pérdida de información.

Otra opción es hacer un gráfico de dispersión o “nube de puntos” con los valores originales de las variables, sin agrupar en intervalos. Por ejemplo, para estudiar la relación entre la tensión arterial, TA, y la edad, en el eje horizontal se representan los valores posibles de edad y en el vertical los valores de TA. Cada individuo está representado por un punto con su edad y su TA.

$$X = \text{Edad (años)} \quad Y = \text{T.A. (unid. especiales)}$$

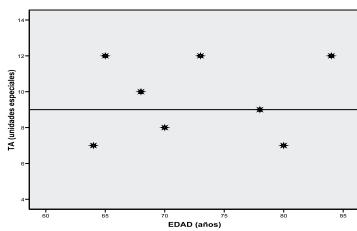
En cada uno de los 4 ejemplos siguientes aparecen los datos de 8 individuos. En el primero de ellos, el primer individuo tenía 65 años y TA de 8, el segundo 70 años y TA de 10... Para cada uno de los ejemplos, la representación de la nube de puntos nos permite ver la relación entre edad y TA.

Edad →	65	70	64	68	73	84	80	78
TA →	8	10	5	7	11	13	14	10



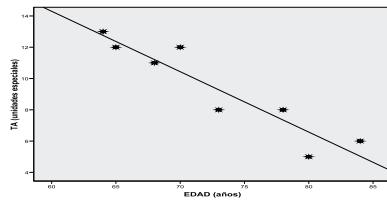
La TA aumenta linealmente con la edad: a mayor edad, mayor TA.

Edad →	65	70	64	68	73	84	80	78
TA →	12	8	7	10	12	12	7	9



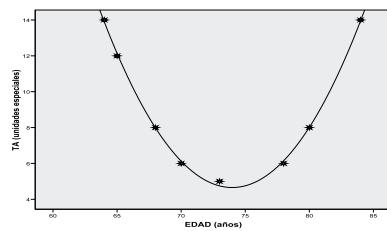
No hay relación de TA y edad: a medida que aumenta la edad, la TA no varía

Edad →	65	70	64	68	73	84	80	78
TA →	12	12	13	11	8	6	5	8



La TA disminuye linealmente con la edad: a mayor edad, menor TA.

Edad →	65	70	64	68	73	84	80	78
TA →	12	6	14	8	5	14	8	6



Relación parabólica: La TA disminuye hasta los 75 años y luego aumenta

** Ejercicio 3.6: Un grupo de 350 individuos se clasifica según dos criterios: raza (A, B o C) y número de piezas dentarias que le faltan (variable cuantitativa). La tabla de contingencia que resume esta información es la siguiente:

	0	1	2	Total
A	20	40	40	
B	120	60	20	
C	10	30		

	0	1	2	Total
A				
B				
C				

	0	1	2	Total
A				
B				
C				

- Complete las DF conjunta y marginales relativas y la de piezas faltantes condicionada a raza.
- ¿Qué probabilidad tiene un individuo de ser de la raza c?
- ¿Qué probabilidad tiene un individuo de la raza c de faltarle dos piezas?
- Calcule la media de “piezas faltantes” para cada una de las razas.
- En qué raza se caen más los dientes? En cuál se caen menos?
- Si se toman dos individuos de la raza A, ¿cuál es la probabilidad de que a ambos no le falte ninguna pieza dentaria?

3.6. Variables respuesta y Factores. Respuesta y Efectos

Al estudiar la relación entre dos variables, aquella por la que se forman los estratos se suele llamar “factor”, mientras que la otra, de la que se calcula la media o la FR para cada estrato de la anterior, se suele llamar “variable respuesta”.

- Se le suele llamar **Respuesta** a la proporción o media de la variable respuesta en cada nivel del factor implicado.
- Se le suele llamar **Efecto** a la diferencia (o cociente) entre dos respuestas.

Si, por ejemplo, se estudia la FR de enfermos en fumadores (F_+) y en no fumadores (F_-), el tabaco es el factor y la enfermedad es la variable respuesta. Si los resultados son los de esta tabla (“+” son enfermos), vemos que de 50 fumadores, 35 están enfermos (70%) y de 80 no fumadores, 24 están enfermos (30%):

F_+			F_-			Efecto de F
Total	+	%+	Total	+	%+	
50	35	0.70	80	24	0.30	$0.70 - 0.30 = 0.40$ sube 40 puntos

Decimos que la **respuesta** ha sido 30% en los no fumadores y 70% en los fumadores. Y decimos que el **efecto** del tabaco es incrementar la respuesta, es decir, el porcentaje de enfermos, en 40 (70-30) puntos.

Para saber cómo un factor influye en una variable no es suficiente conocer la respuesta en el grupo expuesto al factor. Esa respuesta solo es valorable al compararla con la respuesta en el grupo no expuesto al factor. Por ejemplo, para ver si la medicina “G” ayuda a curar la tuberculosis no basta con saber que en un grupo de 80 tuberculosos tratados con G curaron 32, el 40%. Esa cifra solo es informativa al compararla con el % de curaciones en los no tratados. Si en un grupo de 80 no tratados curaron 60 (75%), el efecto de G es disminuir el % de curados en 35 puntos.

G+			G-			Efecto de G
Total	+	%+	Total	+	%+	
80	32	0.40	80	60	0.75	$0.75 - 0.40 = 0.35$ baja 35 puntos

Pero si entre los 80 no tratados curaron 8 (10%), el efecto de G es incrementar el % de curados en 30 (40-10) puntos.

G+			G-			Efecto de G
Total	+	%+	Total	+	%+	
80	32	0.40	80	8	0.10	$0.40 - 0.10 = 0.30$ sube 30 puntos

El efecto del factor también puede expresarse como cociente entre las respuestas en individuos con y sin factor, en vez de usar las diferencias. En este último ejemplo se puede decir que el % de curaciones es 4 veces mayor en el grupo con G, o que G multiplica por 4 la proporción de curaciones ($0.40 / 0.10 = 4$).

Los dos modos de expresar el efecto, con diferencias o con cocientes, son igualmente válidos. En la vida cotidiana también usamos los dos modos. Si, por ejemplo, un sueldo pasa de 1 000 a 1 500 €, decimos que se incrementó en 500€ o que se multiplicó por 1.5. En adelante, salvo que expresamente se diga lo contrario, los efectos serán comentados como *diferencia* de respuesta.

Como ejemplo de variable respuesta cuantitativa supongamos que la media de la Tensión Arterial, TA, en un grupo de jóvenes es $M_{JOV} = 70$ y en un grupo de viejos es $M_{VIE} = 95$. Aquí el factor es la edad y la variable respuesta es la TA. La respuesta es **70** en jóvenes y **95** en viejos. El efecto de la edad es aumentar la respuesta en **25** (95-70).

NO OLVIDE RECORDAR - 3

1. Estudiar la relación entre dos variables es estudiar el comportamiento de una de las variables (dando su media o proporción) en los distintos niveles de la otra.
2. Si el comportamiento de una de las variables es el mismo en los distintos niveles de la otra, decimos que son variables Independientes; en caso contrario decimos que son Dependientes.
3. Si las dos variables son cualitativas (o cuantitativas agrupadas en intervalos) se construyen Tablas de Contingencia. Se calcula la DF Conjunta (frecuencia de individuos con las dos características sobre el total de estudiados), las Marginales (DF de cada variable, sin tener en cuenta la otra) y las Condicionadas (DF de una característica en los distintos niveles de la otra). Si estas últimas son iguales, decimos que las características son independientes.
4. En el caso de dos variables dicotómicas, A y B, la independencia consiste en que $P(AIB) = P(AIB-)$, lo que implica que $P(BIA) = P(BIA-)$.
5. Cuando hay independencia, y solamente cuando la hay, ocurre que

$$P(A) = P(AIB) = P(AIB-) \quad \text{y} \quad P(B) = P(BIA) = P(BIA-)$$
$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

6. Si una variable es cualitativa o cuantitativa agrupada en intervalos, y la otra cuantitativa, se calculan medias y desviaciones de la segunda para cada categoría de la cualitativa. Si las medias son iguales, decimos que las variables son independientes.
7. Si ambas variables son cuantitativas se representa la nube de puntos y se hacen cálculos de Regresión y Correlación. Si no existe una cierta tendencia a variar una a medida que aumenta o disminuye la otra, decimos que son independientes.
8. La variable por la que se divide en categorías o estratos se le suele llamar “**factor**” y a la otra, “**variable respuesta**”. Llamamos **Respuesta** a la media o proporción de la variable respuesta y llamamos **Efecto** a la diferencia (o cociente) entre dos respuestas.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 3

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

Un grupo de 350 individuos se clasifica según dos criterios: raza (A, B o C) y número de piezas dentarias que le faltan (variable cuantitativa, valores posibles: 0, 1 o 2). La tabla de contingencia que resume esta información es

		Piezas faltantes		
		0	1	2
R	A	20	40	40
	Z	120	60	20
A	B	10	30	
S	C			

- Puesto que la característica “piezas faltantes” es cuantitativa, se puede estudiar la relación con la “raza” calculando las medias de las piezas dentarias que les faltan a los individuos en cada una de las tres razas.
- Puesto que la característica “piezas faltantes” es cuantitativa, al tener pocos posibles valores, se puede estudiar la relación con la “raza” construyendo la tabla de contingencia y comparando sus DF condicionadas.
- Para calcular la DF marginal de la “raza” hay que ignorar el número de piezas faltantes de cada individuo.
- La DF marginal de la “raza” es el porcentaje de individuos que hay en cada raza, respecto del total de estudiados.
- El 50% de los individuos estudiados son de la raza C.
- El 85.7% de los individuos pertenecen a las razas A o B.
- En todo el conjunto de individuos el número medio de piezas faltantes es 0.77.
- La probabilidad de que un individuo sea de la raza C es 0.5.
- Al 20% de los individuos le faltan 2 piezas dentarias.
- La probabilidad de que a un individuo le falte alguna pieza dentaria es 0.57 .
- Al 57% de los individuos estudiados le falta más de 1 pieza dentaria.
- La DF conjunta de “raza” y “piezas faltantes” es el porcentaje de individuos con cada número de piezas faltantes y en cada raza.
- La DF de “raza” condicionada a “piezas faltantes” es el porcentaje de individuos con cada número de piezas faltantes en cada raza.
- La DF de “piezas faltantes” en la raza B es 60%, 30% y 10%.
- La DF de “piezas faltantes” en la raza C es 10%, 30%, 10%.
- Si un individuo es de raza C, la probabilidad de que le falten 2 piezas es 0.20.

17. Al 20% de los individuos de la raza C le faltan 2 piezas.
18. Si un individuo es de raza B, la probabilidad de que le falte alguna pieza es 0.60.
19. Si un individuo es de raza A, la prob de que le falte más de 1 pieza es 0.80.
20. El 20% de los individuos con alguna pieza faltante son de la raza C.
21. El 60% de los individuos con todas las piezas dentarias son de la raza B.
22. La probabilidad de que un individuo tenga todas las piezas dentarias es de 0.20 si es de la raza A, de 0.60 si es de la raza B y de 0.20 si es de la raza C.
23. La probabilidad de que un individuo tenga todas las piezas dentarias es de 0.429 si no se sabe de que raza es.
24. El número medio de piezas faltantes es 1 en la raza A.
25. El número medio de piezas faltantes es 0.5 en la raza B.
26. “Raza” y “piezas faltantes” son características independientes en esta muestra.
27. “Raza” y “piezas faltantes” son características dependientes porque las FR conjuntas no son iguales en las 9 casillas resultantes de 3 razas y 3 posibilidades de piezas faltantes.
28. “Raza” y “piezas faltantes” NO son características independientes en esta muestra ya que, por término medio, faltan más piezas en la raza A que en la B.
29. “Raza” y “piezas faltantes” son características dependientes porque el porcentaje de individuos con todas las piezas dentarias no es el mismo en las tres razas.

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO: ENUNCIADOS - 3

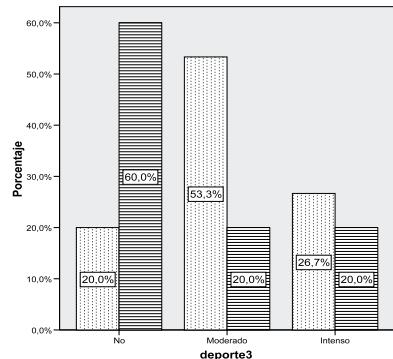
1. Analice la relación entre el *sexo* con el *deporte3* y del *sexo* con la *dieta* y del *sexo* con la *resistencia* a las infecciones. Describalas, si las hay.
2. ¿Hay relación entre la *resistencia* a las infecciones y el *deporte2*? Describala.
3. ¿Están relacionadas *edad*, *tad*, *tadpost*, *ministro* y *sanidad* con el *sexo*? ¿Y esas mismas variables con *deporte3*? Haga un gráfico que lo ilustre para alguna de las variables estudiadas.
4. ¿Hay relación entre la *opinión* sobre la *sanidad* y la *edad*? ¿Y entre la *tensión arterial* diastólica y la *edad*? ¿Cómo son esas relaciones?

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO - 3

Obtenga estas salidas con el programa informático que usted utilice. Cada programa da salidas con matices particulares, pero el contenido básico debe ser este.

Tabla de contingencia sexo * deporte3

		deporte3			Total
		No	Moderado	Intenso	
sexo	Varon	24	64	32	120
	Mujer	48	16	16	80
Total		72	80	48	200
		36,0%	40,0%	24,0%	100,0%



Hay relación entre *deporte* y *sexo* pues la mayoría de las mujeres (60%) no hacen deporte y la mayoría de varones (80%) lo hacen moderado o intenso.

Tabla de contingencia sexo * dieta

		dieta		Total
		No dieta	Si dieta	
sexo	Varon	120	0	120
	Mujer	40	40	80
		50,0%	50,0%	100,0%

Hay relación entre *dieta* y *sexo* pues hacen dieta todos los varones y solamente la mitad de las mujeres.

Tabla de contingencia sexo * resisinf

		resisinf				Total
		Baja	Moderada	Media	Alta	
sexo	Varon	24	36	32	28	120
	Mujer	16	24	28	12	80
		20,0%	30,0%	26,7%	23,3%	100,0%
		20,0%	30,0%	35,0%	15,0%	100,0%

Hay relación muy débil pues la distribución de la *resistencia* es muy parecida en los dos *sexos*.

Tabla de contingencia deporte2 * resisinf

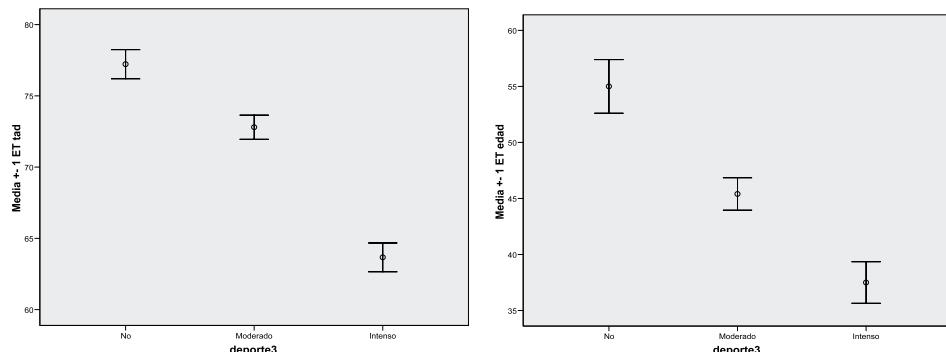
		resisinf				Total
		Baja	Moderada	Media	Alta	
deporte2	Sedentarios	32	28	12	0	72
	Activos	8	32	48	40	128
		44,4%	38,9%	16,7%	,0%	100,0%
		6,3%	25,0%	37,5%	31,3%	100,0%
Total		40	60	60	40	200
		20,0%	30,0%	30,0%	20,0%	100,0%

La mayoría de los sedentarios (83,3%) tiene baja o moderada *resistencia* mientras que la mayoría de los activos (68,8%) tienen media o alta resistencia.

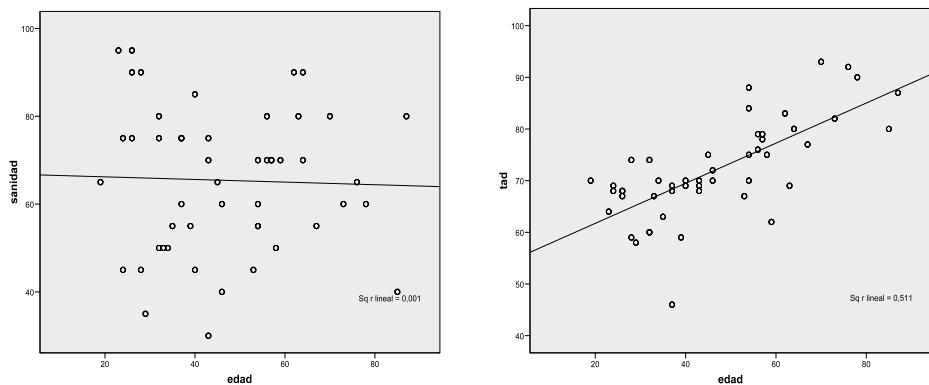
sexo		edad	tad	tadpost	ministro	sanidad
Varón	Media	46,73	71,17	61,80	2,17	68,33
	N	120	120	120	120	120
	Desv. típica	16,841	8,967	5,823	,901	15,736
	Error Típico	1,537	,819	,532	,082	1,436
Mujer	Media	47,30	73,75	84,50	1,90	61,00
	N	80	80	80	80	80
	Desv. típica	18,021	9,823	12,731	,704	16,038
	Error Típico	2,015	1,098	1,423	,079	1,793

Edad y tad tienen media similar en ambos sexos. La opinión sobre la sanidad es moderadamente mayor en varones y la tadpost es mucho menor en varones.
Ministro es menor en mujeres.

deporte3		edad	tad	tadpost	ministro	sanidad
No	Media	55,00	77,22	80,61	1,94	64,44
	N	72	72	72	72	72
	Desv. típica	20,305	8,673	17,017	,854	13,096
	Error típico	2,393	1,022	2,006	,101	1,543
Moderado	Media	45,40	72,80	67,05	2,15	64,75
	N	80	80	80	80	80
	Desv. típica	12,951	7,575	8,636	,797	13,823
	Error típico	1,448	,847	,966	,089	1,545
Intenso	Media	37,50	63,67	62,67	2,08	67,92
	N	48	48	48	48	48
	Desv. típica	12,846	6,993	9,098	,871	22,921
	Error típico	1,854	1,009	1,313	,126	3,308



La tad y la edad disminuyen al aumentar la intensidad del deporte, es decir, cuanto más intenso es el deporte menores son, por término medio, la tad y la edad.



La *opinión* sobre la sanidad disminuye muy ligeramente con la *edad* y la *tad* aumenta con la *edad*, es decir, a medida que aumenta la *edad* aumenta la *tad*.

Capítulo 4

RELACIÓN ENTRE TRES VARIABLES. ANÁLISIS ESTRATIFICADO. CONFUSIÓN E INTERACCIÓN

En el primer y segundo capítulos estudiábamos el comportamiento de una variable aislada, resumiéndolo con Distribuciones de Frecuencia (DF) y, para las cuantitativas, además con medias y desviaciones.

En el tercer capítulo estudiábamos la relación entre dos variables, calculando las DF o las medias de una variable en los distintos niveles de la otra. En este capítulo estudiaremos la relación entre tres variables.

La relación entre tres variables se aborda analizando la relación entre dos de ellas, como en el Capítulo 3, *en los distintos niveles o estratos de la tercera*. Este proceso se llama **Análisis Estratificado** y al explicarlo encontraremos situaciones curiosas y conceptos nuevos que son la base del *Análisis Multivariante* que conforma algunas de las técnicas estadísticas más sofisticadas y potentes.

Como introducción analizaremos unos supuestos que sorprenderán al lector no experto e incluso a algunos expertos.

4.1. Presuntas paradojas

** **Ejercicio 4.1:** En un Ensayo Clínico se estudia el porcentaje de curaciones, “%+”, obtenidas con cada uno de dos tratamientos, ‘A’ y ‘B’, para la misma enfermedad.

	A			B		
	Total	+	%+	Total	+	%+
Mujeres	100	80		500	400	
Varones	500	110		100	22	
Todos						

Calcule el porcentaje, %, de varones y de mujeres curados y rellene las casillas.

a. ¿Qué tratamiento funcionó mejor en *mujeres*?

b. ¿Qué tratamiento funcionó mejor en varones?

Sume mujeres y varones (última fila). Calcule % de personas curadas.

Vemos que de 100 mujeres tratadas con A curaron 80, el 80%, y de 500 tratadas con B curaron 400, el 80% también. Por tanto, ambos tratamientos son igual de eficaces en mujeres. En los varones vemos que de 500 tratados con A curaron 110, el 22%, y de 100 tratados con B curaron 22, también el 22%. Ambos tratamientos son igual de eficaces en varones. Pero si no se tiene en cuenta el sexo, A curó a 190 de las 600 personas, el 32% y B curó a 422 de 600, el 70%. Por tanto, parece mucho más efectivo B.

c. Teniendo en cuenta toda la información de esta tabla: ¿qué tratamiento es realmente más efectivo?

d. ¿Por qué parecía que era mejor el otro? (dos circunstancias).

d.1)

d.2)

**** Ejercicio 4.2:** Comparamos el porcentaje de curaciones, “%+”, en enfermos tratados con el fármaco, H, frente al %+ en enfermos no tratados.

	FÁRMACO H				NO FÁRMACO				Efecto de H		
	Tot	+	%+	→	Tot	+	%+	→			
Viejos	50	5		→	350	35		→			
Jóvenes	450	360		→	150	120		→			
Total											

a. Calcule el % de curados en jóvenes y en viejos y rellene las casillas.

b. ¿Es efectivo H en jóvenes? c. ¿Es efectivo H en viejos?

En los viejos que recibieron H curaron el 10%. Y en viejos no tratados, curaron también el 10%. En los jóvenes curaron el 80%, tanto en los que habían recibido H como en los que no. Por tanto, H no es efectivo en viejos ni en jóvenes. Sin embargo, cuando no se tiene en cuenta la edad, H parece efectivo pues curan 73% de los que lo recibieron y 31% de los que no lo recibieron.

d. ¿Es efectivo H en las personas?

e. Por tanto, ¿debe usarse H?

f. ¿Por qué parecía lo contrario? (dos circunstancias)

f.1)

f.2)

Los supuestos anteriores no son curiosidades numéricas, sino ejemplos de una realidad que puede ocurrir en cualquier investigación y que debe tenerse en cuenta para evitar llegar a conclusiones falsas, no avaladas por los datos o incluso contrarias a lo que los datos realmente dicen. No se trata de una sutileza matemática, sino de características de las muestras que pueden hacernos atribuir cierto efecto a una causa, cuando en realidad la causa es otra.

4.2. Confusión

Usaremos el ejemplo anterior para estudiar con detalle el concepto de *Confusión*.

FÁRMACO H (90% de jóvenes)			NO FÁRMACO (30% de jóvenes)			Efecto de F		
	Tot	+	%+		Tot	+	%+	
Total	500	365	0.73	→	500	155	0.31	sube 42 puntos
Viejos	50	5	0.10	→	350	35	0.10	no efecto
Jóvenes	450	360	0.80	→	150	120	0.80	no efecto

Si no se estratifica por edad el grupo con H tiene más FR de curados (0.73) que el grupo sin H (0.31), lo que lleva a pensar que H es beneficioso, siendo su efecto subir la FR de curaciones en 42 puntos porcentuales ($0.73 - 0.31 = 0.42$)

Pero viendo cada estrato de edad encontramos que H no es efectivo ni en jóvenes (10% con y sin H) ni en viejos (80% con y sin H) ¿Por qué cuando se juntan ambas edades la FR de curaciones es 42 puntos más alto con H que sin H? Porque se dan estas dos circunstancias:

- a. La FR de curaciones es mucho mayor en jóvenes (80%) que en viejos (10%), tanto en el grupo con H como en el no tratado.
- b. Hay mayor FR de jóvenes en el grupo tratado ($450 / 500 = 90\%$) que en el grupo no tratado ($150 / 500 = 30\%$).

Aun siendo el fármaco inútil en cada edad, en el total de tratados con H hay mayor FR de curaciones porque ese grupo tiene muchos más jóvenes que el otro.

Decimos que la edad *confunde* la relación entre H y curaciones. Para detectar la confusión se *estratifica por edad* y se observa el efecto del fármaco en cada estrato de edad. En general, llamamos confusión al hecho de que un factor enmascare el efecto del factor principal. Se evita haciendo *análisis estratificado*, es decir, estudiando el efecto del factor principal a *cada nivel del factor confusor*.

En el ejemplo que sigue la FR de jóvenes es la misma en ambos grupos —con y sin fármaco— y no hay Confusión: al ignorar la edad se obtiene la misma FR de curaciones con y sin fármaco. Por haber 90% de jóvenes en cada grupo (450 de 500 y 90 de 100), en el total se curan 73%, más próximo al 80% de curaciones entre los jóvenes que al 10% de curaciones entre los viejos.

FÁRMACO			NO FÁRMACO			Efecto de F		
	Tot	+	%+		Tot	+	%+	
Total	500	365	0.73	→	100	73	0.73	
Viejos	50	5	0.10	→	10	1	0.10	no efecto
Jóvenes	450	360	0.80	→	90	72	0.80	no efecto

En el ejemplo siguiente tampoco hay confusión. De nuevo la FR de jóvenes es igual en ambos grupos, 20% (100 de 500 y 20 de 100). Pero ahora los jóvenes son minoría y en el total se curan **17%**, más próximo al **10%** de curaciones de los viejos.

	FÁRMACO				
	Tot	+	% +		
Total	500	85	0.17		
Viejos	450	45	0.10	→	no efecto
Jóvenes	50	40	0.80	→	no efecto

	NO FÁRMACO				
	Tot	+	% +		
				→	no efecto
100	17	0.17		→	no efecto
90	9	0.10		→	no efecto
10	8	0.80		→	no efecto

** Ejercicio 4.3: ¿Hay confusión en el siguiente ejemplo? ¿A qué se debe?

	FÁRMACO				
	Tot	+	% +		
				→	
Viejos	200	20		→	
Jóvenes	300	240		→	

	NO FÁRMACO				
	Tot	+	% +		
				→	
50	5			→	
450	360			→	

** Ejercicio 4.4: ¿Hay confusión en el siguiente ejemplo ? ¿A qué se debe?

	FÁRMACO B				
	Tot	+	% +		
				→	
Viejos	50	5		→	
Jóvenes	450	360		→	

	NO FÁRMACO				
	Tot	+	% +		
				→	
580	116			→	
20	18			→	

** Ejercicio 4.5: ¿Hay confusión en el siguiente ejemplo ? ¿A qué se debe?

	FÁRMACO G				
	Tot	+	% +		
				→	
Viejos	50	20		→	
Jóvenes	450	360		→	

	NO FÁRMACO				
	Tot	+	% +		
				→	
400	40			→	
100	50			→	

En el Ejercicio 4.1 de la primera página de este tema la confusión se explica por el mismo proceso lógico. La FR de curaciones es mucho *mayor en mujeres* (80%) que en varones (22%), tanto en el grupo con A como en el con B. Ello no era evidente inicialmente, pero los datos lo muestran así. En el grupo con B las mujeres son el $500 / 600 = 83.3\%$ y en el grupo con A son solo el $100 / 600 = 16.7\%$. Aunque el % de curaciones es igual con ambos productos, en el grupo con B hay mayor % de curaciones, debido no al efecto de B, sino a la mayor FR de mujeres que contiene.

4.3. Interacción

En el estudio de la relación entre tres variables es fundamental el concepto de **Interacción**. Se dice que hay Interacción cuando el efecto del factor principal es distinto en los distintos niveles del tercer factor.

En todos los ejemplos anteriores el efecto o la carencia de él, era el mismo en los dos estratos del factor confusor, jóvenes y viejos. En otros casos ese efecto puede variar entre estratos.

En la tabla siguiente se ve que el fármaco K baja la FR de curación 30 puntos en viejos y 10 puntos en jóvenes y en el total lo sube en 23 puntos

	FÁRMACO K			NO FÁRMACO			Efecto de K
	Tot	+	% +	Tot	+	% +	
Total	500	365	73%	500	250	50%	→ sube 23 puntos
Viejos	50	5	10%	400	160	40%	→ baja 30 puntos
Jóvenes	450	360	80%	100	90	90%	→ baja 10 puntos

Decimos que hay **Confusión**, puesto que en cada edad K baja la FR de curaciones y cuando se ignora la edad parece que la sube sustancialmente.

Y también decimos que hay **Interacción**, porque el efecto del fármaco no es igual en las dos edades. En ambas baja el porcentaje de curaciones, pero en distinta cantidad (10 puntos en jóvenes y 30 en viejos).

Recordemos que *Efecto* de un factor, en este caso el fármaco, NO es la FR de curaciones en el grupo que lo tiene, sino la diferencia entre esa FR y la del grupo sin fármaco. La interacción se cuantifica como la diferencia de los efectos en los dos estratos, $30 - 10 = 20$. Es decir, la bajada de la FR de curaciones producida por K es 20 puntos mayor en viejos que en jóvenes.

En la siguiente tabla vemos otro ejemplo con **Interacción = 30**: el efecto del fármaco es subir 40 puntos en jóvenes y 10 puntos en viejos. El efecto del fármaco es 30 puntos mayor en jóvenes que en viejos. También hay confusión: cuando se ignora la edad el efecto aparente de F es subir 65 puntos el porcentaje de curaciones, cantidad muy superior a la ocurrida en cada estrato de edad.

	FÁRMACO			NO FÁRMACO			Efecto de F
	Tot	+	% +	Tot	+	% +	
Total	500	415	83%	500	90	18%	→ sube 65 puntos
Viejos	50	10	20%	400	40	10%	→ sube 10 puntos
Jóvenes	450	405	90%	100	50	50%	→ sube 40 puntos

En la siguiente tabla vemos otro ejemplo donde la interacción consiste, no ya en que el efecto del fármaco tenga distinta magnitud en las dos edades, sino en que es en sentido opuesto. En viejos el fármaco es perjudicial, puesto que baja en 20 puntos la respuesta, mientras que en jóvenes es beneficiosa, puesto que la sube en 40 puntos. En estos casos no cabe plantearse si hay o no confusión.

FÁRMACO			NO FÁRMACO			Efecto de F	
	Tot	+	%+		+	%+	
Total	500	415	83%	500	210	42%	sube 41 puntos
Viejos	50	10	20%	400	160	40%	baja 20 puntos
Jóvenes	450	405	90%	100	50	50%	sube 40 puntos

→ → →

- Cuando no hay interacción (el efecto del factor principal es el mismo en todos los estratos del tercer factor), se dice que hay confusión si el efecto bruto es distinto del efecto en cada nivel.
- Si hay interacción pero el efecto en ambos grupos es en el mismo sentido, se dice que hay confusión si el efecto bruto está fuera del intervalo determinado por el menor y mayor efecto en los estratos.
- Si hay interacción y el efecto en ambos grupos es en sentido opuesto, no ha lugar hablar de confusión, puesto que en ningún caso el valor del efecto bruto puede parecerse a dos valores opuestos.

	No Interacción (igual efecto en los estratos)	Interacción cuantitativa (Efectos distintos en los estratos, pero en el mismo sentido)	Interacción cualitativa (Efectos opuestos en los estratos)
No Confusión	Efecto bruto igual al de los estratos	Efecto bruto dentro del intervalo	No ha lugar
Confusión	Efecto bruto diferente del de los estratos	Efecto bruto fuera del intervalo	

** **Ejercicio 4.6:** Cada fila de la siguiente tabla resume un ejemplo. En todos ellos se da el efecto del factor F (respuestas en los F+ menos respuesta en los F-) en el estrato B+ (bebedores) y en el estrato B- (no-bebedores), así como el efecto bruto de F cuando no se estratifica por B. Por ejemplo, la fila 4 indica que F incrementa en 25 puntos el porcentaje de curaciones en los bebedores y hace lo mismo en los no bebedores (no hay interacción), pero si no se estratifica por B, parece que F disminuye la respuesta en 10 puntos (sí hay confusión). Ponga “Sí” o “No” en cada celda de las dos columnas situadas a la derecha.

	Efecto de F en los B+	Efecto de F en los B-	Efecto bruto de F sin separar B+ y B-	¿Interacción?	¿Confusión?
1	0	0	0		
2	+25	+25	+25		
3	0	0	+38		
4	+25	+25	-10	No	Sí
5	+25	+25	+10		
6	50	20	+34		
7	50	20	-15		
8	50	20	+10		
9	50	20	+65		
10	-20	+15			

4.4. Modos de medir el efecto y la Interacción: Aditivo y Multiplicativo

Hasta aquí hemos cuantificado el efecto del fármaco F como la diferencia entre la proporción de curaciones con F y sin él. Y cuantificamos la Interacción como la diferencia entre dos efectos.

Otro modo de cuantificar el efecto es mediante el cociente entre la proporción de curaciones con F y sin él. En todos los campos de la actividad humana cabe expresar la no igualdad como diferencias o como cocientes. Si el pan costaba antes 20 monedas y ahora cuesta 60, decimos que su precio aumentó en 40 monedas o que se multiplicó por 3. Son dos modos de decir lo mismo.

En el siguiente ejemplo vemos que en viejos hay más curaciones con F que sin él (40% frente a 10%) y esa ventaja puede expresarse diciendo que F incrementa el porcentaje de curaciones en 30 puntos o que lo multiplica por cuatro. No hay un modo que sea más correcto que otro. En jóvenes F hace subir el porcentaje de curaciones de 50% a 80%, y ello puede expresarse diciendo que F incrementa dicho porcentaje en 30 puntos o que lo multiplica por 1.6. Decimos que no hay interacción aditiva, puesto que en ambas edades F hace el mismo efecto: sube en 30 puntos el % de curaciones Y decimos que sí hay interacción multiplicativa, puesto que F multiplica el % de curaciones por 4 en viejos y solamente por 1.6 en jóvenes. El efecto en viejos es $4 / 1.6 = 2.5$ veces mayor que en jóvenes, la Interacción es 2.5.

FÁRMACO F			NO FÁRMACO			Efecto del fármaco		
Tot	+	% +	Tot	+	% +	ADITIVO	MULTIPLICATIVO	
Total	500	380	76%	500	90	18%	sube 58 puntos	$76 / 18 = 4.2$
Viejo	50	20	40%	→ 400	40	10%	sube 30 puntos	$40 / 10 = 4$
Joven	450	360	80%	→ 100	50	50%	sube 30 puntos	$80 / 50 = 1.6$
						No Interacción aditiva	La Interacción multiplicativa es $4 / 1.6 = 2.5$	

En el siguiente ejemplo no hay interacción multiplicativa, puesto que en ambas edades F multiplica por 4 el % de curaciones, pero sí la hay aditiva, puesto que F incrementa el % de curaciones en 45 puntos en jóvenes y solo en 30 en viejos.

FÁRMACO			NO FÁRMACO			Efecto del fármaco		
Tot	+	% +	Tot	+	% +	ADITIVO	MULTIPLICATIVO	
Total	500	290	58%	500	55	11%	sube 47 puntos	$58 / 11 = 5.3$
Viejo	50	20	40%	→ 400	40	10%	sube 30 puntos	$40 / 10 = 4$
Joven	450	270	60%	→ 100	15	15%	sube 45 puntos	$80 / 20 = 4$
						Interacción $45 - 30 = 15$	No Interacción multiplicativa	

En adelante nos referiremos siempre, salvo que explícitamente se diga lo contrario, a efectos e interacciones aditivos, es decir, expresados como diferencias de las respuestas.

Algunos investigadores tienen dificultades para entender el concepto de interacción, que también lo usamos en la vida común, aunque no le demos ese nombre. Suponga que en un país conviven dos razas, celtas y judíos. El sueldo base en las mujeres y en los hombres es:

Celtas: en mujeres **140**, y en varones **100**, es decir, **40** menos en varones
 Judíos: en mujeres **120**, en varones **110**, es decir, **10** menos en varones.

Por tanto, el efecto del género NO es igual en ambas razas, sino que en celtas es **30** unidades mayor que en judíos. Decimos que la raza **interacciona** con el efecto del género sobre el sueldo.

**** Ejercicio 4.7:** En la tabla siguiente calcule el *efecto del fumar* en los bebedores, B+, en los no bebedores, B-, y en el colectivo total, (juntando los B+ y los B-). Diga si hay Interacción y cuanto vale. Resuma los resultados en palabras sencillas.

2 variables		3 variables			
		B+		B-	
F+	F-	F+	F-	F+	F-
Enfermo = E					
Total					
% de E →					
Efecto de F					

**** Ejercicio 4.8:** En la tabla del ejercicio 4.3 calcule el *efecto de beber* sobre la enfermedad, primero en los fumadores, luego en los no fumadores y finalmente ignorando el tabaco (es decir, juntando los F+ y los F-). ¿Hay Interacción? ¿Cuánto vale? Resuma los resultados en palabras sencillas.

4.5. Ejemplos de Confusión y de Interacción con variable respuesta continua

Confusión e Interacción son dos conceptos que aparecen de modo natural al considerar la relación entre tres variables. Veamos ejemplos donde la variable respuesta no es dicotómica, como estar o no estar enfermo, sino continua. Se sospecha que el fármaco “A” aumenta el rendimiento físico, que se evaluará midiendo la distancia que cada individuo puede recorrer en un minuto.

Se administra “A” a un grupo de 100 personas y se les pide correr al máximo durante un minuto. Se encuentra que las 100 personas que recibieron “A” corrieron, por término medio, 470m, $M_{CON\ "A"} = 470\ m$. Se somete a la misma prueba a otro grupo de 100 personas sin “A” y se encuentra $M_{SIN\ "A"} = 230\ m$. Los individuos con “A” tuvieron rendimiento medio muy superior a los no tratados (470 frente a 230) y parece que “A” aumenta notablemente el rendimiento físico.

Pero si nos dicen que en el grupo con “A” la mayoría son jóvenes, y en el grupo sin “A” la mayoría son viejos, pensaremos que el mayor rendimiento en el grupo con “A” puede deberse, total o parcialmente, a la menor edad de los sujetos. Podría ser, por ejemplo, que entre los 100 sin “A” haya 10 jóvenes y entre los 100 con “A” haya 90 jóvenes y los rendimientos medios fueran los de esta tabla:

SIN A			CON A			
	N	Total		N	Total	
Total	100	23 000	230	→ 100	47 000	470
Jóvenes	10	5 000	500	→ 90	45 000	500
Viejos	90	18 000	200	→ 10	2 000	200

En estos datos la edad es factor de *Confusión* y si no se estratifica por ella parece que el fármaco hace un efecto que no es real.

** Ejercicio 4.9: Con los datos anteriores

- ¿Qué efecto hace “A” en jóvenes? ¿Qué efecto hace “A” en viejos?
- ¿Hay Interacción (evaluándola como diferencia de efectos)?
- ¿Qué efecto hace “A” cuando no se estratifica por edad?
- ¿Hay confusión?

Como ejemplos complementarios veamos la eficacia de los fármacos “B”, “C”, “D” y “E”, que quizás aumenten el rendimiento físico. Téngase en cuenta que si el grupo con fármaco tiene mayor FR de jóvenes que el otro, su mejor rendimiento podría deberse a la juventud.

** Ejercicio 4.10: Con el fármaco “B”

SIN B			CON B			
	N	Total		N	Total	
Total	100	23 000	230	→ 100	23 500	235
Jóvenes	10	5 000	500	→ 90	36 000	400
Viejos	90	18 000	200	→ 10	1 000	100

- ¿Qué efecto hace “B” en jóvenes? ¿Qué efecto hace “B” en viejos?
- ¿Hay Interacción?
- ¿Qué efecto hace “B” cuando no se estratifica por edad?
- ¿Hay confusión?

** Ejercicio 4.11: Con el fármaco “C”

SIN C			CON C			
	N	Total		N	Total	
Total	100	23 000	230	→ 100	23 500	235
Jóvenes	10	5 000	500	→ 90	22 500	250
Viejos	90	18 000	200	→ 10	1 000	100

- ¿Qué efecto hace “C” en jóvenes? ¿Qué efecto hace “C” en viejos?
- ¿Hay Interacción?
- ¿Qué efecto hace “C” cuando no se estratifica por edad?
- ¿Hay confusión?

**** Ejercicio 4.12:** Con el fármaco “D”

SIN D			CON D			
	N	Total		N	Total	
Total	100	23 000	230	→ 100	64 000	640
Jóvenes	10	5 000	500	→ 90	63 000	700
Viejos	90	18 000	200	→ 10	1 000	100

- ¿Qué efecto hace “D” en jóvenes? ¿Qué efecto hace “D” en viejos?
- ¿Hay Interacción?
- ¿Qué efecto hace “D” cuando no se estratifica por edad?
- ¿Hay confusión?

**** Ejercicio 4.13:** Con el fármaco “E”

SIN E			CON E			
	N	Total		N	Total	
Total	100	23 000	230	→ 100	67 000	670
Jóvenes	10	5 000	500	→ 90	63 000	700
Viejos	90	18 000	200	→ 10	4 000	400

- ¿Qué efecto hace “E” en jóvenes? ¿Qué efecto hace “E” en viejos?
- ¿Hay Interacción?
- ¿Qué efecto hace “E” cuando no se estratifica por edad?
- ¿Hay confusión?

**** Ejercicio 4.14:** A un grupo de 1 300 embarazadas se les administra el fármaco “C” confiando en que acortará la duración del parto. Las mujeres fueron clasificadas según la dosis de “C” tomada. La tabla que sigue da el número de partos en cada clase y la suma de la duración de todos los de esa clase. Calcule las medias.

TODAS

DOSIS DE “C”	Nº DE MUJERES	SUMA DE LAS HORAS	MEDIA POR PARTO
NADA	400	2 760	6.9
POCA	200	1 540	
MEDIA	200	2 060	
MUCHA	500	5 550	

- ¿Qué hace “C”?

Pero las mujeres estudiadas pertenecían a dos grupos étnicos: canarias e inglesas. La tabla que sigue da los datos para las canarias a la izquierda. Calcule las medias. Restando celdas homólogas calcule los datos para las inglesas y luego sus medias.

DOSIS DE "C"	SOLO CANARIAS			ONLY INGLESAS		
	Nº DE MUJERES	SUMA DE LAS HORAS	MEDIA POR PARTO	Nº DE MUJERES	SUMA DE LAS HORAS	MEDIA POR PARTO
NADA	360	2 170	6	40	590	14.75
POCA	140	700			840	
MEDIA	60	240				
MUCHA	50	150		450		

- b. ¿Qué efecto hace el fármaco “C” en las *canarias*?
- c. ¿Qué efecto hace el fármaco “C” en las *inglesas*?
- d. ¿Qué efecto hace el “C” en las *mujeres*?
- e. ¿“C” acorta o alarga los partos?
- f. ¿Por qué parecía lo contrario? (2 razones).

4.6. +++ Los fundamentos lógicos del Análisis Multivariado. Dos confusores simultáneamente

Muchas de las técnicas más sofisticadas y potentes de Estadística implican *Análisis Multivariado*, cuyo objetivo es detectar confusiones e interacciones entre varias variables, cada una con muchos valores posibles. No es posible entender la esencia ni la aplicación práctica del análisis multivariado sin entender claramente lo que es la Confusión, la Interacción y el Análisis Estratificado que hemos visto en este capítulo para el caso más sencillo que implica a tres variables dicotómicas.

Pero cuando hay varios factores potencialmente confusores puede ocurrir que unos enmascaren la acción confusa de otros, de modo que pase inadvertida. Veremos un ejemplo de ese enmascaramiento, que por implicar variables dicotómicas aún puede abordarse con Análisis Estratificado. El lector que encuentre este apartado demasiado complejo, puede prescindir de él. Pero si posteriormente emprende el estudio de alguna técnica multivariada, necesitará inexcusablemente repasar este capítulo y entender este apartado.

Hemos visto muchos ejemplos en los que el factor “C”, confunde el efecto del factor “B” sobre la respuesta “A”. Hay casos en los que al estratificar por “C” no se aprecia confusión sobre el efecto de “B”, pero si simultáneamente se estratifica por otro factor, “D”, se encuentra que **en cada nivel de D** el factor C es un fuerte confusor. Al no estratificar por D se enmascara la confusión creada por C.

Veamos un ejemplo concreto. Para ver si el producto “F” aumenta la FR de curados, %+, de cierta enfermedad se le da a 1 000 enfermos y curan 600. De otros 1 000 pacientes sin F curan 300. Parece que el porcentaje de curaciones es 30 puntos mayor en los individuos que recibieron el producto F.

	FÁRMACO			NO FÁRMACO			Efecto de F
	Tot	+	%+	Tot	+	%+	
Total	1 000	600	60%	1 000	300	30%	+ 30 puntos

Para ver si la edad es factor de confusión se estratifica por ella

FÁRMACO				NO FÁRMACO			Efecto de F	
	Tot	+	%+	Tot	+	%+		
Total	1 000	600	60%	1 000	300	30%	→ + 30 puntos	
Viejos	500	300	60%	500	150	30%	→ +30 puntos	
Jóvenes	500	300	60%	500	150	30%	→ +30 puntos	

Vemos que la edad no es factor de confusión y que en ambas edades hay igual proporción de curaciones: el porcentaje de curaciones es 30 puntos mayor en los individuos que recibieron el fármaco F, tanto en viejos como en jóvenes.

Por otra parte, se estratifica por sexo para ver si es factor de confusión:

FÁRMACO				NO FÁRMACO			Efecto de F	
	Tot	+	%+	Tot	+	%+		
Total	1 000	600	60%	1 000	300	30%	→ + 30 puntos	
Mujeres	510	302	59%	500	150	30%	→ +29 puntos	
Varones	490	298	61%	500	150	30%	→ +31 puntos	

Vemos que el sexo no es factor de confusión y que en ambos sexos es casi igual la FR de curaciones y es, aproximadamente, 30 puntos mayor en los individuos que recibieron el fármaco F, tanto en mujeres como en varones.

Por tanto, estratificando por cada uno de los factores por separado, la conclusión sería: F aumenta en 30 puntos el porcentaje de curaciones, mientras que sexo y edad no confunden el efecto de F ni modifican la FR de curaciones.

Pero cabe la posibilidad de que ambos factores, sexo y edad, confundan los resultados de modo tal que no se manifieste al estratificar por cada uno de ellos separadamente. Hagamos la estratificación simultánea por los dos factores, formando los grupos de mujer-joven, mujer-vieja, varón-joven y varón-viejos.

F				NO F			Efecto de F	
	Tot	+	%+	Tot	+	%+		
Total	1 000	600	60%	1 000	300	30%	→ + 30 puntos	
Muj-Jov	410	282	69%	100	70	70%	→ -1 puntos	
Muj-Vie	100	20	20%	400	80	20%	→ 0 puntos	
Var-Jov	90	18	20%	400	80	20%	→ 0 puntos	
Var-Vie	400	280	70%	100	70	70%	→ 0 puntos	

Vemos que en realidad F no modifica la FR de curaciones y que las mujeres jóvenes se curan más que las viejas (70% de jóvenes curadas frente a 20% de viejas curadas), mientras que los varones jóvenes se curan menos que los viejos (20% de jóvenes curados frente a 70% de viejos curados).

Los datos pueden también tabularse como en las tablas que siguen, lo que facilita ver por qué cada variable es confusora cuando se estudia en cada nivel de la otra.

		MUJERES		HOMBRES	
		F+	F-	F+	F-
J0VE	Tot	1 000	1 000	510	500
	“+”	600	300	302	150
	Prop.	60%	30%	0.59	0.30
		Efecto +30		Efecto +29	
VIE	Tot	500	500	410	100
	“+”	300	150	282	70
	Prop.	0.60	0.30	0.69	0.70
		Efecto +30		Efecto -1	

		F+		F-	
J0VE	Tot	500	500	410	100
	“+”	300	150	282	70
	Prop.	0.60	0.30	0.69	0.70
		Efecto +30		Efecto -1	
VIE	Tot	500	500	100	400
	“+”	300	150	20	80
	Prop.	0.60	0.30	0.20	0.20
		Efecto +30		Efecto 0	

Por ejemplo, en el *estrato de hombres* (las tres tablas de la derecha) vemos que la edad es fuerte factor de confusión, pues F no modifica la respuesta (FR de curados) ni en jóvenes ni en viejos (tablas inferior y media: efecto 0 en varones jóvenes y en varones viejos), y cuando se juntan ambas edades la respuesta es 31 puntos mayor en los varones F+ que en los F- (tabla superior). La confusión se produce porque los viejos se curan más que los jóvenes (0.70 frente a 0.20) y en el grupo con F hay mayor FR de viejos ($400 / 490 = 0.81$ de viejos en los F+ y $100 / 500 = 0.20$ de viejos en los F-)

Conclusiones <u>erróneas</u> , estratificando sucesivamente por edad y por sexo	Conclusiones <u>correctas</u> , estratificando simultáneamente por edad y por sexo
F incrementa en 30 puntos el porcentaje de curados. Sexo y edad no confunden el efecto de F y no modifican el porcentaje de curados	F no incrementa el porcentaje de curados. Sexo y edad sí modifican el porcentaje de curados y confunden el efecto de F

Con más de dos posibles confusores este desglose de la información en tablas puede ser engorroso e ineficiente. Pero en todos los casos, cuando con métodos más sofisticados se identifica o descarta alguna confusión o interacción relevantes suele ser muy útil confirmarlo con análisis estratificado como el aquí mostrado.

NO OLVIDE RECORDAR - 4

1. Las relaciones entre tres variables se abordan analizando la relación entre dos de ellas, en los distintos niveles o estratos de la tercera, es decir, haciendo análisis estratificado.
2. En este contexto puede surgir el llamado efecto de **Confusión**, que se produce cuando un factor enmascara el efecto del factor principal o incluso invierte aparentemente dicho efecto, es decir, cuando el efecto “bruto” de un factor (sin estratificar por otro) arroja resultados distintos a los encontrados cuando se estudia en cada estrato del otro factor.
3. La confusión se evita haciendo análisis estratificado, es decir, estudiando el efecto del factor principal a cada nivel del factor confusor.
4. Si el efecto del factor principal es distinto en los distintos niveles del otro factor, decimos que hay **Interacción**.
5. Decimos que hay interacción cuantitativa si el efecto del factor principal es en el mismo sentido, aunque de distinta magnitud, en los distintos niveles del tercer factor.
6. Decimos que hay interacción cualitativa si el factor principal incrementa la respuesta en un estrato del tercer factor y la disminuye en el otro nivel.
7. Cuando no hay interacción (el efecto del factor principal es el mismo en todos los niveles del tercer factor) se dice que hay confusión si el efecto bruto es distinto del efecto en cada nivel.
8. Si hay interacción cuantitativa se dice que hay confusión si el efecto bruto está fuera del intervalo determinado por el menor y mayor efecto en los estratos.
9. Si hay interacción cualitativa, no ha lugar hablar de confusión, puesto que en ningún caso el valor del efecto bruto puede parecerse a dos valores opuestos.
10. La interacción puede cuantificarse como diferencia de efectos o como cociente de efectos. Diremos que hay *Interacción aditiva* si la diferencia de efectos es distinta de cero y que hay *Interacción multiplicativa* si el cociente es distinto de uno.
11. Dos variables pueden ser confusoras y actuar de modo que cada una enmascara el efecto confusor de la otra, con lo que solo se esclarecerá la situación cuando se estratifica por las dos simultáneamente.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 4

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

Se hace un estudio prospectivo para ver la posible influencia del canto en la incidencia de cáncer de laringe y se obtienen los siguientes resultados:

	HOMBRES		MUJERES		HOMBRES+MUJERES	
	CANTAN	N0 CANTAN	CANTAN	N0 CANTAN	CANTAN	N0 CANTAN
ENFERMOS	160	4	1	40	161	44
TOTAL	200	20	10	400	210	420
% ENFERMOS						

1. En hombres, el cantar multiplica por 4 el riesgo de cáncer.
2. El canto reduce el riesgo de enfermedad a la tercera parte en mujeres.
3. Es igual de probable que tenga cáncer una mujer que no canta que una que canta.
4. Si se ignora el sexo, parece que el canto reduce el riesgo de enfermedad.
5. Si se ignora el sexo, el canto es factor de riesgo para el cáncer.
6. El sexo interacciona en la relación entre canto y la enfermedad.
7. Decimos que el sexo es factor de interacción porque observamos que, si se ignora el sexo, el canto es factor preventivo para la enfermedad.
8. Decimos que no hay confusión puesto que el efecto del canto es el mismo en hombres que en mujeres.
9. El sexo no es factor de confusión en la relación del canto con el cáncer.

La parte media de la tabla que sigue da la relación entre enfermar, “E”, y fumar, “F”. Entre 310 fumadores hay 21 enfermos, 6.8%, y entre 450 no fumadores hay 61 enfermos, 13.6%. En la parte derecha se forman dos estratos, de bebedores y no bebedores. Teniendo en cuenta solo la parte media de la tabla, es decir, ignorando los estratos de bebedores y no bebedores:

	2 variables		3 variables			
	(B ⁺ + B ⁻)		B ⁺		B ⁻	
	F ⁺	F ⁻	F ⁺	F ⁻	F ⁺	F ⁻
Enfermo = E	21	61	9	60		
Total	310	450	10	400		
% de E →						
Efecto de F						

10. En este colectivo la enfermedad es menos frecuente en los fumadores.
11. El *efecto del tabaco* es reducir a la mitad la frecuencia de E ($0.068 / 0.136 = 0.5$) o bajar el porcentaje en 6.8 puntos.
12. El efecto de F es la proporción de enfermos en los fumadores.
13. El efecto de F **no** es la proporción de enfermos en los fumadores, sino la diferencia o el cociente entre esa cantidad y la proporción de enfermos en los no fumadores.

En la parte derecha de la tabla se estudia la relación entre tres variables, incorporando la variable “B” = Beber. Se hace partiendo el colectivo en dos estratos: bebedores, B+, y no-bebedores, B-. Encontramos que de los 310 fumadores bebían 10 y 9 de ellos enfermaron. Y de los 450 no fumadores no bebían 300 y 12 de ellos enfermaron. Calcule por diferencia las cantidades en el estrato de no-bebedores.

14. En el estrato de bebedores la enfermedad afecta al **0.90** de los fumadores y al **0.15** de los no fumadores.
15. El tabaco multiplica por 6 la frecuencia de la enfermedad en bebedores.
16. El tabaco incrementa en 75 puntos la frecuencia de la enfermedad en bebedores
17. En el estrato de no bebedores la E afecta al **0.04** de los fumadores y al **0.02** de los no fumadores.
18. Cuando no se tiene en cuenta B, la proporción de enfermos es la mitad entre los fumadores que entre los no fumadores.
19. Cuando se estratifica por B, se encuentra que el tabaco multiplica por 6 la frecuencia de la enfermedad en los individuos que beben y lo multiplica por 2 en los que no beben.
20. El factor beber **no confunde** la relación entre la enfermedad y el tabaco
21. El factor beber *confunde* la relación entre la enfermedad y el tabaco, pues cuando no se tiene en cuenta el beber parece que el fumar reduce la frecuencia de la enfermedad, cuando en realidad la aumenta en los B- y en los B+.

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO: ENUNCIADOS - 4

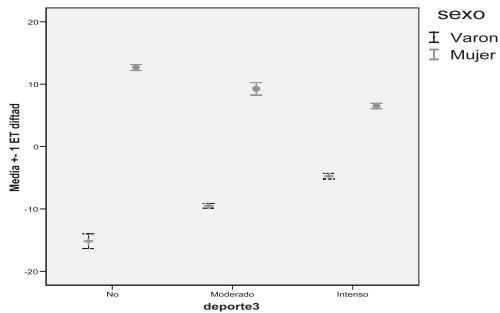
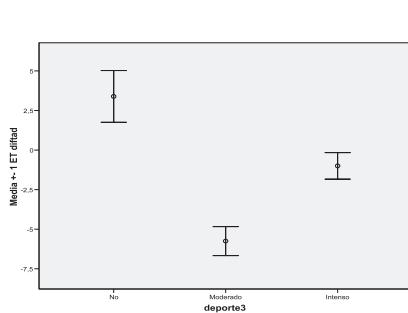
1. Estudiar la relación entre la *variación de ta producida por el ayuno (efecto del ayuno)* y el *deporte3* en toda la muestra. Estudiar esa relación en los varones. Estudiar esa relación en las mujeres.
2. ¿Hay relación en la muestra entre la *variación de ta producida por el ayuno (efecto del ayuno)* y la *edad*? Y en los varones? Y en las mujeres?

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO - 4

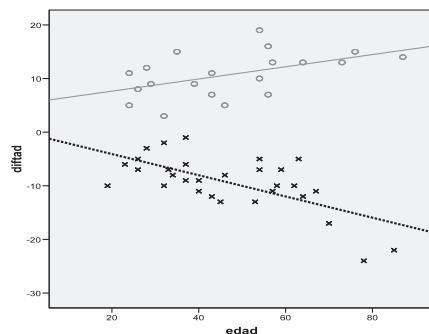
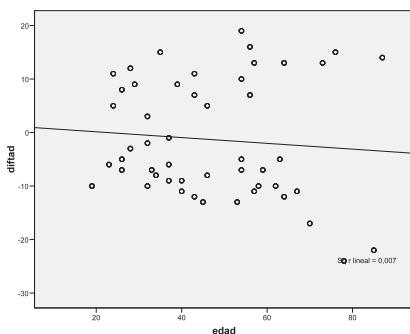
Obtenga estas salidas con el programa informático que usted utilice. Cada programa da salidas con matrices particulares, pero el contenido básico debe ser este.

diftad				
deporte3	N	Media	Desv. típ.	
No	72	3,39	13,881	
Moderado	80	-5,75	8,193	
Intenso	48	-1,00	5,820	
Total	200	-1,32	10,924	

diftad		N	Media	Desv. típ.
sexo	deporte3			
Varón	No	24	-15,17	5,761
	Moderado	64	-9,50	2,981
	Intenso	32	-4,75	2,527
Mujer	Total	120	-9,37	5,031
	No	48	12,67	3,335
	Moderado	16	9,25	4,025
	Intenso	16	6,50	1,713
	Total	80	10,75	4,074



Hay relación entre el *efecto del ayuno* y el *deporte*. Al estudiar todo el grupo se ve un aumento, por término medio, de la *ta* en los no deportistas y una disminución diferente cuando es moderado que cuando es intenso. El *efecto del ayuno* varía con la intensidad del *deporte*. A medida que aumenta la intensidad del *deporte*, en los varones el *efecto del ayuno* aumenta y en las mujeres disminuye: el *sexo* es factor de interacción en la relación del *efecto del ayuno* con el *ejercicio*.



El *efecto del ayuno* disminuye muy ligeramente con la *edad* cuando se estudian todos los individuos juntos, pero realmente aumenta con la *edad* en la mujeres y disminuye en los varones.

Capítulo 5

PROPORCIONES Y PROBABILIDAD. TEOREMA DE BAYES

Los cuatro primeros capítulos desarrollaban la Estadística Descriptiva, que enseña a analizar la muestra obtenida en la investigación, describiendo en ella el comportamiento de cada variable y la relación entre distintas variables. A partir de aquí comenzamos a estudiar la Inferencia Estadística, IE, que es el intento de conocer acerca de las poblaciones a partir de lo encontrado en las muestras.

Comenzamos subrayando la diferencia entre poblaciones y muestras, y continuamos exponiendo el concepto de probabilidad como frecuencia relativa con que se presentaría un suceso si un fenómeno aleatorio se repite indefinidamente.

En la vida común y en el contexto del análisis de datos se emplea continuamente el término probabilidad y muchas veces se le da un número. En este capítulo veremos que ese número es siempre una proporción y que los cálculos y las ideas implicadas pueden ser entendidos y usados correctamente sin tener conocimientos matemáticos.

5.1. Frecuencias Relativas y Probabilidades

Sabemos que la FR de individuos con cierta característica se puede expresar como *proporción o porcentaje o tanto por mil o por diez mil* u otra cantidad pertinente.

Si de un colectivo donde son “E” (“E” como inicial de “enfermo” o de cualquier otra característica) el 90% de los individuos, nos disponemos a tomar **un** individuo al azar (es decir, que todos individuos tienen las mismas opciones de salir) no podemos saber si va a ser E o sano. Esa incertidumbre es inevitable. En esta situación hay consenso en decir que al extraer un individuo

“La probabilidad de que sea E es 0.90” o resumidamente **“ $P(E) = 0.90$ ”**.

Pero ¿qué quiere decir esa frase? Aclaremos en primer lugar que ella **no evita la incertidumbre** respecto a cómo va a ser el individuo que vamos a extraer. Tras enunciarla seguimos sin saber si el individuo que vamos a extraer va a ser o no E. Entonces, ¿qué indica esa expresión?

La respuesta es que no hace referencia a lo que ocurre cuando se toma un individuo de la población, sino a lo que ocurre si la extracción *se repite millones de veces* con reposición (el individuo obtenido en cada extracción es repuesto a la población antes de extraer el siguiente). “ $P(E) = 0.90$ ” quiere decir que si se hacen millones de extracciones, serán E muy aproximadamente 90 de cada 100 extraídos.

Si en otra población la proporción de E es 0.80, diremos que al extraer un individuo al azar la probabilidad de que sea E es **$P(E) = 0.80$** , lo que indica que si se hacen millones de extracciones, serán E muy aproximadamente 80 de cada 100 extraídos.

Si en esta última población repetimos millones de veces la extracción de un individuo es claro que en la primera de ellas podrá ser E (de hecho, es más fácil que sea E a que no lo sea). También puede salir E en la segunda extracción. Y en la tercera y la cuarta.... Es decir, puede salir E en *cada una* de las extracciones y por ello pueden serlo en *todas* las de esa larga serie. Por la misma razón también podrían salir no-E en todas las extracciones. Sin embargo, la experiencia muestra que en la práctica “nunca” ocurre que sean E todos los individuos extraídos, ni que todos sean no-E, ni ningún otro resultado muy extremo. “Siempre” ocurre que si en una población hay 80% de E y se hacen millones de extracciones, son E muy aproximadamente el 80% de los extraídos. Este hecho se expresa diciendo que al tomar un individuo al azar de ese colectivo la *probabilidad* de que sea E es 0.80, es decir, $P(E) = 0.80$.

Esto es un hecho empírico, observado por el ser humano durante milenios de evolución. Se le llama *Ley de la regularidad de las grandes series estadísticas o Ley empírica del azar* y es de importancia capital en la vida común y en la investigación científica.

Repitamos una vez más esta idea fundamental: decir que la probabilidad de que un individuo extraído de una población sea E es 0.90 no evita la incertidumbre sobre si el individuo extraído será o no E. Estamos diciendo a qué valor se approxima mucho la FR de individuos E si la extracción se repite millones de veces.

Note la diferencia entre la proporción de E que hay en un grupo y la probabilidad de que sea E un individuo sacado de ese grupo.

- a) La **proporción** de E en un colectivo es un hecho físicamente evaluable contando el número total de individuos y el de los que son E. Su cociente nos da la proporción. Esta se mantiene fija mientras no se añadan o sustraigan individuos.
- b) El término **probabilidad** se refiere a la FR de veces en que sale E cuando la extracción al azar de un individuo se repite millones de veces. La probabilidad es el valor al que se aproximará la FR a largo plazo.

Ayudará a tener clara esa diferencia considerar una urna donde hay 60% de bolas blancas y 40% de negras. Si todas las bolas son del mismo tamaño, peso y textura, decimos que la prob de que una bola extraída al azar sea blanca es 0.60. Con ello queremos decir que si la extracción se repite millones de veces, en 60 de cada 100 extracciones la bola es blanca. Pero si las blancas son de doble tamaño que las negras, al tomar una bola al azar la prob de que sea blanca es mayor. Si nos dicen, por ejemplo, que es $P(\text{Blanca}) = 0.74$, quiere decir, que al hacer millones de extracciones 74 de cada 100 bolas son blancas. Por tanto, en la urna son blancas 60 de cada 100, y al hacer extracciones lo son 74 cada 100.

**** Ejercicio 5.1:** Al coronel Gerineldo Márquez, con 3 000 soldados a su cargo, se le notifica que la epidemia de cólico miserere llega a su campamento y para cada individuo la prob de morir es de 0.4.

- Gerineldo pregunta al capitán médico si el soldado Prudencio Aguilar va a morir. ¿Qué le contesta?
- Gerineldo pregunta al capitán médico si el soldado R. Feynman va a morir. ¿Qué le contesta?
- Gerineldo pregunta al capitán médico si el soldado R. Fisher va a morir. ¿Qué le contesta?
- Irritado por las respuestas del médico, Gerineldo pregunta para qué diablos vale saber que la prob de morir de cada soldado es 0.4? ¿Qué le contestaría usted?
- Una vez pasada la epidemia y enterrados los muertos, hay que librarse heroica batalla contra un ejercito enemigo que tiene 2 000 soldados (y ninguna epidemia). ¿Para qué valen los conocimientos del médico en este aspecto?
- ¿A qué tipos de situaciones son aplicables los conocimientos sobre prob de un evento?

5.2. Multiplicación de Probabilidades

Si decimos que la prob de que un individuo tomado al azar de un colectivo tenga la característica “C” es, por ejemplo, $P(C) = 0.6$, la ley de la Multiplicación de Probabilidades dice que si tomamos, por ejemplo, tres individuos, la prob de que los tres tengan C es

$$P(C, C, C) = 0.6 \times 0.6 \times 0.6 = 0.6^3 = \mathbf{0.216}$$

1. ¿Qué quiere decir esa cifra “0.216”?

$P = 0.216$ es “216 de cada 1 000” y quiere decir que si se repite millones de veces ese proceso, es decir, si se obtienen millones de tríos, en 216 de cada mil tríos los tres individuos tendrán C.

2. ¿Por qué es la respuesta correcta?

Si sacamos millones de tríos, el primer individuo de cada trío será C, por definición, en el 60% de los tríos.

El segundo individuo será C en el 60% de los tríos cuyo primer individuo es C. Es decir, el primer y el segundo son C en el 60% del 60%, que es $0.6 \times 0.6 = 0.36$ ó 36%.

En el 60% de los tríos en que son C el primero y el segundo lo es también el tercero. Respecto al total representa el 60% del 36%, es decir, $0.36 \times 0.6 = 0.216$.

Si en vez de tres el grupo es, por ejemplo, de 8, la probabilidad de que los 8 individuos sean C es el 60% del 60% del... 60%, ocho veces, es decir, $0.6 \times 0.6 \times \dots \times 0.6 = 0.6^8 = 0.0168$. Es decir, en 168 de cada 10 000 muestras de $N = 8$, los ocho son C. En general, si la probabilidad de que un individuo sea C es π , la probabilidad de que sean C todos los individuos de una muestra de N es π^N .

** Ejercicio 5.2:

- Se tira 3 veces un dado, ¿cuál es la probabilidad de que las 3 veces salga “6”?
- Si se lanza una moneda bien equilibrada 20 veces, ¿cuál es la probabilidad de que las 20 veces salga cara? Interprete ese número como frecuencia relativa.
- Sobre un tapete cuadrado con cuatro cuadrantes de igual superficie se lanza un dado homogéneo. ¿Cuál es la prob de que caiga en el cuadrante superior derecho?
- Sobre ese tapete cuadrado se lanza un dado homogéneo. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el cuadrante superior derecho y salga la cara 6?
- Si se lanza una moneda bien equilibrada 100 veces, ¿cuál es la probabilidad de que las 100 veces salga cara? Interprete ese número como frecuencia relativa.

5.3. El azar y la necesidad

La “multiplicación de probabilidades” que acabamos de ver permite, entre otras muchas cosas, calcular la cantidad de sujetos que esperamos tengan éxito en una serie de pruebas sucesivas cuando un elevado número de ellos lo intentan. Muchos de los hechos y/o personas que consideramos extraordinarios no son más que ejemplos de lo que ocurre *necesariamente* cuando se repite un fenómeno aleatorio un número elevado de veces.

Considere una enfermedad seria y frecuente y un tratamiento que aplicado correctamente tiene éxito solamente en el 40% de los casos. Se hace un estudio europeo que incluye a 10 000 médicos y cada uno trata un paciente cada semana. Veamos la FR de médicos que obtienen éxito reiteradamente a lo largo de varias semanas si todos aplican correctamente el tratamiento. En la primera semana obtienen éxito unos **4 000** (el 40% de 10 000). Entre esos 4 000 tiene éxito también en la segunda el 40%, de modo que con éxito en la primera y segunda hay el 40% del 40%, es decir, $0.4 \cdot 0.4 = \mathbf{0.16}$ del grupo inicial. Tienen éxito en las tres primeras semanas el 40% de los anteriores, $0.16 \cdot 0.4$, o lo que es lo mismo $0.4^3 = \mathbf{0.064}$ del grupo inicial. Y así sucesivamente. La tabla siguiente da la FR y el número aproximado de médicos que han obtenido todo éxito en las primeras semanas.

Semana	Proporción de médicos con éxito en todos los pacientes tratados hasta ese momento	Número aproximado de médicos con éxito en todos los pacientes tratados hasta ese momento
1 ^a	0.4000	4 000
2 ^a	$0.40^2 = 0.1600$	1 600
3 ^a	$0.40^3 = 0.0640$	640
--	-----	-----
7 ^a	$0.40^7 = 0.0016384$	16

Por tanto, tras tratar a 7 pacientes habrá en torno a 16 médicos que han tenido éxito en todos ellos, aunque apliquen el mismo tratamiento y de la misma manera que los demás. En la oficina de seguimiento de los resultados se sabe desde el prin-

cipio que si todos los médicos aplican el mismo tratamiento, va a haber en torno a 16 con éxito en los primeros 7 pacientes. No se sabe quiénes van a ser y no depende de ninguna característica de los médicos en cuestión (otra cosa sería que algunos médicos aplicaran un tratamiento mejorado y por ello obtuvieran más éxitos que otros, pero ahora no estamos contemplando esa opción). Aquí se trata de que por puro azar en torno a 16 médicos obtienen éxito en los 7 primeros pacientes.

Para subrayar que es una cuestión de azar consideremos un urna con 40% de bolas blancas y 60% negras, todas de igual tamaño, peso y textura. Si extraen 7 bolas al azar 10 000 personas, 0.40 de ellas tiene blanca la 1^a bola, $0.4 \cdot 0.4 = 0.16$ del total tienen blanca las 1^a y 2^a bolas, $0.4^2 = 0.064$ tienen blanca las 1^a, 2^a y 3^a bolas... y en torno a 16 les salen blancas las 7 bolas. Y ello no depende de ninguna característica de esas personas. Si el mismo grupo de 10 000 vuelve hacer la misma operación de extraer 7 bolas al azar, de nuevo en torno a 16 de ellas les salen blancas las 7 bolas, pero estas 16 personas no serán las mismas que las de antes y no es posible saber a quien le va a ocurrir eso antes de que ocurra. Lo que sí sabemos es que será una cantidad próxima a 16, como en el caso de los médicos que van a tener éxito en los 7 primeros pacientes.

En el entorno de cada médico que obtuvo 7 éxitos seguidos se le verá como algo excepcional, puesto que lo esperado es que obtuvieran éxito en el 40% de sus pacientes, que es $7 \cdot 0.4 = 2.8$, es decir, 2 ó 3 pacientes de los 7 tratados. Y se tenderá a atribuir esos buenos resultados a las más variopintas y exóticas causas. Pero en la oficina se seguimiento de los 10000 médicos se sabía que eso era lo previsto si ninguna causa externa interviene.

Por otra parte, la FR de médicos que fracasan en los 7 primeros pacientes es $0.6^7 = 0.0280$ y por ello entre los 10 000 habrá en torno a 280 médicos con tan mal resultado. También en sus respectivos entornos tenderá a atribuirse esos fracasos a causas externas más o menos pintoescas. Pero nosotros sabemos que habrá aproximadamente esa cantidad de médicos con 7 fracasos, por el hecho de que el tratamiento fracasa en el 60% de los casos y hay 10 000 médicos implicados.

El ciudadano de a pie observa admirado la vertiginosa ascensión en la feria de las vanidades de algunos personajes del mundo de las finanzas. Algunos de esos triunfadores tienen especial habilidad en el oficio y/o en delinquir, pero cierto número de ellos no son genios ni delincuentes. Son solamente la consecuencia necesaria de las leyes del azar. Supongamos un millar de jóvenes ejecutivos que teniendo un capital inicial de 100 000 € y mucha ambición deciden arriesgarlo todo en operaciones donde hay prob 0.50 de duplicar su dinero en un año y prob 0.5 de perderlo todo. En el primer intento aproximadamente 500 de ellos perderán su capital inicial y los otros 500 lo duplican. Si estos últimos lo invierten todo en otra operación similar, 250 perderán todo y otros 250 tendrán 400 000 €. Si estos 250 repiten el proceso, aproximadamente 125 tendrán ahora 800 000 €. Hasta ahora los “supervivientes” se han arriesgado tres veces. Si continúan haciéndolo hasta 8, la prob de salir airosos en las 8 es $0.5^8 \approx 0.004$. Es decir, de los 1 000 iniciales dispuestos a perder todo o duplicar en cada intento, aproximadamente 4 habrán tenido éxito en los 8 intentos, y su capital inicial se habrá multiplicado por $2^8 = 256$, de modo que será

25 600 000 €. Son los triunfadores del momento. Los otros 996 estarán arruinados. Cayeron en acto de servicio y yacen en el anonimato definitivo.

Hay que insistir en que esos casos no dependen de habilidades personales, protecciones divinas ni influencias astrológicas. Si la disyuntiva entre perder todo en cada operación o duplicarlo se dilucidara tirando una moneda bien balanceada, el resultado habría sido el mismo. Tras repetir 8 veces el juego, unos 4 jugadores entre los mil participantes habrían obtenido “cara” en todas las tiradas. Todos los demás habrían obtenido cruz en alguna y lo perdieron todo. La tabla resume estos ejemplos:

	π Prob de éxito en cada intento	N Núm. de intentos	Prob de éxito en los N intentos $P = \Pi^N$	K Cantidad inicial de sujetos	Núm. esperado de sujetos con éxito en los N intentos $E = P \cdot K$
Médicos	0.4	7	$0.4^7 = 0.0016$	10 000	16
Financieros	0.5	8	$0.5^8 = 0.0039$	1 000	4

5.4. Probabilidades conjuntas, marginales y condicionadas

Una aplicación del cálculo de probabilidades muy útil en prácticamente todas las ciencias se conoce con el nombre de Teorema de Bayes (TB). Los libros suelen explicarlo con una expresión matemática que el investigador tiene dificultad para entender. Aquí lo expondremos sin recurrir a más conocimientos previos que el concepto y cálculo de “proporción de una proporción”.

Comencemos repasando los conceptos de probabilidades conjuntas, marginales y condicionadas en esta tabla que relaciona las frecuencias de las enfermedades A y B en un grupo de 2 000 personas.

A → P(A) = 0.30		A- → P(A-) = 0.70	Total
B	n = 500 $P(A \text{ y } B) = 500/2\,000 = 0.25$ $P(A B) = 500/800 = 0.625$ $P(B A) = 500/600 = 0.833$	n = 300 $P(A- \text{ y } B) = 300/2\,000 = 0.15$ $P(A- B) = 300/800 = 0.375$ $P(B A-) = 300/1\,400 = 0.214$	n = 800 $P(B) = 800/2\,000 = 0.40$
	n = 100 $P(A \text{ y } B-) = 100/2\,000 = 0.05$ $P(A B-) = 100/1\,200 = 0.083$ $P(B- A) = 100/600 = 0.167$	n = 1100 $P(A-yB-) = 1\,100/2\,000 = 0.55$ $P(A- B-) = 1\,100/1\,200 = 0.917$ $P(B- A-) = 1\,100/1\,400 = 0.786$	n = 1 200 $P(B-) = 1\,200/2\,000 = 0.60$
Total	n = 600 $P(A) = 600/2\,000 = 0.30$		n = 2 000
	n = 1 400 $P(A-) = 1\,400/2\,000 = 0.70$		

Con n denotamos el número de individuos en cada una de las casillas. Así, hay 500 individuos con las dos enfermedades (A y B), 300 tienen solo B (A- y B), 100 tienen solo A (A y B-) y 1 100 no tienen ninguna (A- y B-). Por lo tanto, hay 800 personas que tienen la enfermedad B (unos con A y otros sin A) y 600 tienen la A (unos con B y otros sin B).

Los valores de la celda superior izquierda, por ejemplo, nos dicen que:

- Hay 500 personas con ambas enfermedades y ello es el 25% del total.
Si tomamos al azar una persona, la probabilidad de que tenga ambas enfermedades, A y B, es $P(A \text{ y } B) = 0.25$
- Las 500 personas con A y B son el 62.5% de las personas que tienen B.
Si tomamos al azar una persona con B, la probabilidad de que tenga también A es $P(A|B) = 0.625$
- Las 500 personas con A y B son el 83.3% de las que tienen A.
Si tomamos al azar una persona con A, la probabilidad de que tenga también B es $P(B|A) = 0.833$.

5.5. Teorema de Bayes

El Teorema de Bayes, TB, se aplica cuando:

- Conocemos la DF marginal de la variable ‘A’ y la DF de la variable ‘B’ condicionada a cada valor de ‘A’.
- Queremos saber la DF marginal de ‘B’ y la DF de ‘A’ condicionada a cada valor de ‘B’.

Como ejemplo, supongamos que respecto a las enfermedades A y B sabemos esto:

		$P(A) = 0.30$	$P(A-) = 0.70$	<i>Total</i>
B	$P(B A) = 0.833$	$P(B A-) = 0.214$		
	$P(B- A) = 0.167$	$P(B- A-) = 0.786$		
1		1		

Es decir, el 30% de una población tienen la enfermedad A (el 70% no la tiene). Es la DF marginal de A. Además, tienen B el 83.3% de los que tienen A (no tiene B el 16.7% de los que tienen A, $1 - .833 = .167$). Tienen B el 21.4% de los que no tienen A (no tienen B el 78.6% de los que no tienen A). Es la DF de B condicionada a A. Y queremos saber la FR de individuos que tienen la enfermedad B, y la FR que tienen A entre los que tienen B y entre los que no tienen B.

		$P(A) = 0.30$	$P(A-) = 0.70$	<i>Total</i>
B	$P(B A) = 0.833$	$P(B A-) = 0.214$	$P(B) = ?$	
	$P(A B) = ?$	$P(A- B) = ?$		
$P(B- A) = 0.167$		$P(B- A-) = 0.786$	$P(B-) = ?$	
$P(A B-) = ?$		$P(A- B-) = ?$		

Para encontrar la solución empezamos calculando la FR de individuos con A y B (proporción de una proporción): si tienen A el 30% de los individuos y el 83.3% de los que tienen A también tienen B, la FR de individuos con A y B es $0.30 \times 0.833 = 0.25$, es decir, el 25% del total tienen A y B. Del mismo modo se calculan las demás frecuencias conjuntas.

		P(A) = 0.30	P(A-) = 0.70	TOTAL
B		P(B A) = 0.833 P(A y B) = P(A) x P(B A) = = 0.30 x 0.833 = 0.25	P(B A-) = 0.214 P(A-yB) = P(A-) x P(B A-) = = 0.70 x 0.214 = 0.15	P(B) =
		P(B- A) = 0.167 P(A y B-) = P(A) x P(B- A) = = 0.30 x 0.167 = 0.05	P(B- A-) = 0.786 P(A- y B-) = P(A-) x P(B- A-) = = 0.70 x 0.786 = 0.55	P(B-) =

Sumando las conjuntas se obtiene las marginales de B. Así, si 25% tienen A y B, y otro 15% tienen B sin A, en total hay 40% que tienen B (con o sin A).

		P(A) = 0.30	P(A-) = 0.70	TOTAL
B		P(B A) = 0.833 P(A y B) = P(A) x P(B A) = = 0.30 x 0.833 = 0.25	P(B A-) = 0.214 P(A-yB) = P(A-) x P(B A-) = = 0.70 x 0.214 = 0.15	P(B) = P(A y B) + P(A- y B) = 0.25 + 0.15 = 0.40
		P(B- A) = 0.167 P(A y B-) = P(A) x P(B- A) = = 0.30 x 0.167 = 0.05	P(B- A-) = 0.786 P(A- y B-) = P(A-) x P(B- A-) = = 0.70 x 0.786 = 0.55	P(B-) = P(A y B-) + P(A- y B-) = 0.05 + 0.55 = 0.60

Una vez conocidas las marginales de B, se calculan las FR de A condicionadas a B, dividiendo las conjuntas por las marginales de B. Así, si de cada cien individuos, 40 tienen B, y de ellos 25 tienen también A, la FR de casos con A entre los que tienen B es $25 / 40 = 0.625$. Todas las FR de A condicionadas a B se recogen en esta tabla:

		P(A) = 0.30	P(A-) = 0.70	TOTAL
B		P(B A) = 0.833 P(A y B) = P(A) x P(B A) = = 0.30 x 0.833 = 0.25 P(A B) = .25/.40 = 0.625	P(B A-) = 0.214 P(A-yB) = P(A-) x P(B A-) = = 0.70 x 0.214 = 0.15 P(A- B) = .15/.40 = 0.375	P(B) = P(A y B) + P(A- y B) = 0.25 + 0.15 = 0.40
B-		P(B- A) = 0.167 P(A y B-) = P(A) x P(B- A) = = 0.30 x 0.167 = 0.05 P(A B-) = .05/.60 = 0.083	P(B- A-) = 0.786 P(A- y B-) = P(A-) x P(B- A-) = = 0.70 x 0.786 = 0.55 P(A- B-) = .55/.60 = 0.917	P(B-) = P(A y B-) + P(A- y B-) = 0.05 + 0.55 = 0.60

La información inicial dice que tienen A el 30% del total del colectivo, y hemos encontrado que tienen A el 62.5% de los que tienen B y solo el 8.3% de los que no tienen B. Si se toma un individuo al azar de la población general, la prob de que tenga A es **30%** (es lo que se llama prob a priori), pero si el individuo tiene la enfermedad B, su prob de tener A es **62.5%**, mientras que si no tiene B, la prob de que tenga A es **8.3%** (son las llamadas probabilidades a posteriori).

**** Ejercicio 5.3:** El 10% de una población tiene la enfermedad E. Tienen aumentada la velocidad de sedimentación (V) el 80% de los enfermos de E y el 30% de los no enfermos. Calcular la probabilidad de estar enfermos según se tenga o no se tenga aumento de V.

		P(E) = 0.10	P(E-) = 0.90	TOTAL
V+	P(V E) = 0.80 P(E y V) = P(E) · P(V E) = P(E V) =	P(V E-) = 0.30 P(E-y V) = P(E-) · P(V E-) = P(E- V) =	P(V) = P(E y V) + P(E- y V) =	
	P(V-E) = 0.20 P(E y V-) = P(E) · P(V-E) = P(E V-) =	P(V-E-) = 0.70 P(E-y V-) = P(E-) · P(V-E) = P(E- V-) =	P(V-) = P(E y V-) + P(E- y V-) =	

** Ejercicio 5.4: En los enfermos de BRONQUITIS se estudian estas dos variables, con tres posibles valores cada una:

CAUSA: Bacteriana, Vírica y Química

PRIMER SÍNTOMA: Tos, Dolor y Fiebre

Datos: Nos dan la probabilidad marginal de la “causa” (distribución a priori) y la probabilidad de cada “síntoma” condicionada a cada causa.

		P(B)= 0.10	P(V)= 0.50	P(Q)= 0.40
TOS	P(T B)=.50	P(T V)=.40	P(T Q)=.00	
	DOLOR	P(D B)=.00	P(D V)=.30	P(D Q)=.25
		P(F B)=.50	P(F V)=.30	P(F Q)=.75

Y nos piden la probabilidad marginal del “síntoma” (“probabilidades totales”) y la de cada “causa” condicionada a cada síntoma (distribuciones “a posteriori”):

		P(BACT) = .10	P(VIR) = .50	P(QUI) = .40	
TOS	P(B T)=.	P(V T)=.	P(Q T)=.	P(Tos)=.	
	DOLOR	P(B D)=.	P(V D)=.	P(Q D)=.	P(Dol)=.
		P(B F)=.	P(V F)=.	P(Q F)=.	P(Fieb)=.

Cálculos:

		P(BACT) = .10	P(VIR) = .50	P(QUI) = .40	
T	P(T B)= .50	P(T V)= .40	P(T Q)= .00	P(Tos)=	
	D	P(ByT)=	P(VyT)=	P(QyT)=	
		P(B T) =	P(V T) =	P(Q T) =	
D	P(D B)= .00	P(D V)= .30	P(D Q)= .25	P(Dol)=	
	F	P(ByD)=	P(VyD)=	P(QyD)=	
		P(B D) =	P(V D) =	P(Q D) =	
F	P(F B)= .50	P(F V)= .30	P(F Q)= .75	P(Fieb)=	
	T	P(ByF)=	P(VyF)=	P(QyF)=	
		P(B F) =	P(V F) =	P(Q F) =	

** Ejercicio 5.5: Si el carcinoma de pulmón tiene 3 tipos histológicos: “A”, “B” y “C” con estas frecuencias de presentación, y la frecuencia con que aparece el signo hemoptisis precozmente en cada variedad es:

Tipo histológico:

Hemoptisis SÍ

Hemoptisis NO

A :75%	B: 2%	C: 23%
4 %	98 %	25 %
96 %	2 %	75 %

- a. ¿Cuál es la distribución a priori de tipo histológico?
- b. ¿Cuál es la probabilidad total de hemoptisis y de no hemoptisis?
- c. ¿Cuáles son las distribuciones a posteriori de tipo histológico?

5.6. Tests Diagnósticos

Se llama **Test Diagnóstico**, TD, para una enfermedad “E”, a una prueba diagnóstica de aplicación fácil y barata que da “positivo” en la mayoría de las personas enfermas, “E+”, y “negativa” en la mayoría de los no enfermos, “E”. Lo ideal es que diera positiva en *todos* los “E+” y negativa en *todos* los “E”, pues de ese modo nos diría con toda seguridad si el individuo tiene o no la enfermedad. Se denomina **Sensibilidad** del test al porcentaje de resultados positivos entre los que realmente tienen la enfermedad, y **Especificidad** del test al porcentaje de resultados negativos entre los que no tienen la enfermedad. Un test diagnóstico es tanto mejor cuanto mayores son su Sensibilidad y su Especificidad.

Los cálculos implicados en los TD son una aplicación directa del Teorema de Bayes donde las dos características a estudiar son la enfermedad y el resultado del test: conocemos la distribución a priori de la prevalencia de la enfermedad y la distribución del resultado del test condicionada a la enfermedad (Sensibilidad y Especificidad), y el TB nos permitirá calcular el porcentaje de tests con resultado positivo o negativo (que serán las probabilidades totales) y la distribución de frecuencias de la enfermedad condicionada al resultado del test (distribución a posteriori de la enfermedad). Esta última nos da la prob que tienen un individuo de estar enfermo o no enfermo dependiendo de si el test le dio positivo o negativo.

**** Ejercicio 5.6:** En Galicia hay 4 millones de habitantes y la enfermedad “D” afecta en cada momento a 4 000 de ellos (**prevalencia** = $4\ 000 / 4\ 000\ 000 = 0.001$). La enfermedad tiene pronóstico muy malo si no se consigue un diagnóstico precoz. Se pone en marcha un **TD** que:

- Da “positivo” en el 99% de los enfermos: **Sensibilidad = 0.99**
- Da “negativo” en el 80% de los no enfermos: **Especificidad = 0.80**

Se somete a ese TD a todos los gallegos y en los que da positivo son convocados a un estudio más completo para averiguar si realmente tienen la enfermedad. Entre los convocados reina gran nerviosismo, pues temen que la prueba definitiva confirme la presencia de la mortal enfermedad. Pero uno de ellos se muestra tranquilo y confiado en no tener la enfermedad. Queremos averiguar si este sujeto es:

- 1º. Un inconsciente que no se percata de su alto riesgo de enfermedad.
 - 2º. Un desesperado de la vida al que no le importa morir.
 - 3º. Un bioestadístico que calculó correctamente su riesgo de enfermedad.
- a) ¿Qué prob tiene de estar enfermo, habiendo dado positivo el test diagnóstico?

Haremos estos cálculos:

	Test Positivo (T⁺)	Test Negativo (T)	
Enf (E⁺)	$P(T^+ E^+) = 0.99$ $P(T^+ y E^+) =$ $P(E^+ T^+) =$	$P(T E^+) =$ $P(T y E^+) =$ $P(E^+ T) =$	4 000 Prevalencia $P(E^+) = .001$
No Enf (E⁻)	$P(T^+ E^-) =$ $P(T^+ y E^-) =$ $P(E^- T^+) =$	$P(T E^-) = 0.80$ $P(T y E^-) =$ $P(E^- T) =$	$P(E^-) =$
	$P(T^+) =$	$P(T) =$	4 000 000

Algunos de los porcentajes o probabilidades utilizados suelen denominarse con los términos que a continuación aparecen:

- **Probabilidad de Falsos Positivos:** FR de tests Positivos entre los sanos. Es 1- Especificidad.
- **Probabilidad de Falsos Negativos:** FR de tests Negativos entre los enfermos. Es 1- Sensibilidad.
- **Valor Predictivo Positivo:** FR de Enfermos entre los que dieron test Positivo.
- **Valor Predictivo Negativo:** FR de Sanos entre los que dieron test Negativo.

Un test diagnóstico con un alta especificidad (pocos falsos positivos) es muy útil para confirmar una enfermedad, mientras que un test con alta sensibilidad (pocos falsos negativos) es útil para descartar la enfermedad.

** **Ejercicio 5.7:** Calcule los valores pedidos en este supuesto. La Sensibilidad y la Especificidad son las mismas que en el ejercicio 5.6, pero la prevalencia de la enfermedad es mayor. ¿Cómo afecta esto a los resultados obtenidos?

	Test Positivo (T⁺)	Test Negativo (T)	
Enf (E⁺)	$P(T^+ E^+) = \textbf{0.99}$ Sensibilidad $P(T^+ y E^+) =$ $P(E^+ T^+) =$ Valor Predictivo Positivo	$P(T E^+) =$ Prob. Falsos Negativos $P(T y E^+) =$ $P(E^+ T) =$	400 000 Prevalencia $P(E^+) = \textbf{0.1}$
No Enf (E⁻)	$P(T^+ E^-) =$ Prob. Falsos Positivos $P(T^+ y E^-) =$ $P(E^- T^+) =$	$P(T E^-) = \textbf{0.80}$ Especificidad $P(T y E^-) =$ $P(E^- T) =$ Valor Predictivo Negativo	$P(E^-) =$
	$P(T^+) =$	$P(T) =$	4 000 000

** **Ejercicio 5.8:** Calcule los valores pedidos en este otro supuesto. La Sensibilidad y Especificidad son las mismas que en los ejercicios 5.6 y 5.7, pero la prevalencia de la enfermedad es mucho mayor ¿Cómo afecta esto a los resultados obtenidos?

	Test Positivo (T⁺)	Test Negativo (T⁻)	
Enf (E⁺)	P(T ⁺ E ⁺) = 0.99 P(T ⁺ y E ⁺) = P(E ⁺ T ⁺) =	P(T E ⁺) = P(T y E ⁺) = P(E ⁺ T)	3 200 000 Prevalencia P(E ⁺) = .80
No Enf (E⁻)	P(T ⁺ E ⁻) = P(T ⁺ y E ⁻) = P(E ⁻ T ⁺) =	P(T E ⁻) = 0.80 P(T y E ⁻) = P(E ⁻ T) =	P(E ⁻) =
	P(T ⁺) =	P(T) =	4 000 000

** **Ejercicio 5.9:** En una población tiene la enfermedad E el 80% de las personas. Un test diagnóstico da positivo en el 70% de los enfermos y en el 20% de los sanos.

Califique cada afirmación a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F”.

- La FR de enfermos entre los que tuvieron Test positivo es 0.067.
- La FR de sanos entre los que tuvieron Test negativo es 0.85.
- Si tomamos un individuo al azar, la probabilidad de que el test de positivo es 0.60.
- En el 60% de las personas el test da positivo.
- Tomando un individuo al azar, la prob. de que sea E y con test positivo es 0.56.
- En el 56% de las personas son E y el test les da positivo.

NO OLVIDE RECORDAR - 5

1. Fenómeno Aleatorio, FA, es aquel en que no se puede saber si ocurrirá o no cierto resultado cada vez que se repite, pero se sabe la proporción de veces que ocurrirá ese resultado si el FA se repite muchas veces. Llamamos Probabilidad a esa FR de veces que ocurre el resultado al repetir muchas veces el FA.
2. La probabilidad de que ese resultado ocurra N veces seguidas es la probabilidad de que ocurra una vez elevada a N.
3. Los valores de la probabilidad informan sobre lo que ocurre al repetir un fenómeno aleatorio muchas veces o tratar con grandes conjuntos de individuos, no al hacer una sola repetición del FA o tratar con un solo individuo.
4. El Teorema de Bayes, TB, surge cuando se estudia la relación entre dos variables, digamos A y B. Conocidas la DF marginal de la variable A (llamada distribución a priori) y la DF de B condicionada a A, el TB nos permite obtener la DF marginal de B (probabilidades totales) y la DF de A condicionada a B (llamada distribución a posteriori).
5. En los cálculos del TB hay que obtener la DF conjunta, calculando la proporción de una proporción.
6. El TB se aplica en los **Tests Diagnósticos** donde se relaciona la presencia o ausencia de enfermedad y el resultado del test, positivo o negativo.
7. **Sensibilidad** del test es la FR de individuos realmente enfermos en los que el test da positivo, y **Especificidad** del test es la FR de individuos realmente sanos en los que el test da negativo.
8. Conocida la prevalencia de cierta enfermedad y la Sensibilidad y Especificidad (resultado del test condicionado a la enfermedad), se obtiene el porcentaje de tests con resultado positivo y negativo y la DF de la enfermedad condicionada al resultado del test (distribución a posteriori de la enfermedad).
9. La distribución a posteriori de enfermedad nos da la probabilidad que tiene un individuo de estar enfermo, dependiendo de si el test le dio positivo o negativo.
10. En el contexto de los tests diagnósticos, se utilizan los términos:
 - Probabilidad de falsos positivos = FR de test positivo entre los sanos.
 - Probabilidad de falsos negativos = FR de test negativo entre los enfermos.
 - Valor predictivo positivo = FR de enfermos entre los que dieron test positivo.
 - Valor predictivo negativo = FR de sanos entre los que dieron test negativo.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 5

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. Según los cardiólogos, la probabilidad de tener infarto de miocardio en los próximos 12 meses en un varón de 40 años, vida sedentaria, que come, fuma y bebe mucho es **0.090**. Esa cifra se obtiene a partir de sofisticados conocimientos sobre la fisiología, la bioquímica y la genética molecular de esos pacientes.
2. Los cardiólogos dicen que esa probabilidad en un varón de 40 años, deportista, que come, fuma y bebe moderadamente es **0.003**. Esa cifra es la FR de personas con esas circunstancias que tuvieron ese infarto.
3. Si en una población con 20% de alérgicos repetimos millones de veces la extracción de un individuo al azar, puede ser alérgico el primer individuo extraído y puede serlo el segundo y el tercero... Por tanto, conceptualmente es posible que sean alérgicos *todos* los individuos de esa larga serie de extracciones.
4. Si en una población con 20% de alérgicos repetimos millones de veces la extracción de un individuo al azar, conceptualmente es posible que sean alérgicos todos las personas de esa larga serie de extracciones, pero en la práctica eso no ocurre “nunca” y por ello lo razonable es no contar con esa posibilidad teórica.
5. La “ley de la regularidad de las grandes series estadísticas” o “Ley del azar” nos dice que si en una población con 20% de alérgicos repetimos millones de veces la extracción de un individuo al azar, hay que contar con la posibilidad de que la proporción de extracciones en que el individuo es alérgico sea 72% ó 7%.
6. La “Ley del azar” nos dice que si en una población con 20% de alérgicos repetimos muchas veces la extracción de un individuo al azar, la proporción de extracciones en que el individuo es alérgico no va a ser 72% ni 50% ni 7%.
7. La “Ley del azar” nos dice que si de una población con 20% de alérgicos repetimos muchas veces la extracción de un individuo al azar, en muy aproximadamente 20 de cada 100 extracciones el individuo será alérgico.
8. Si un paciente debe someterse a una operación quirúrgica y le dicen que el riesgo de que salga mal es 15%, él sabe que su operación saldrá mal.
9. Si un paciente debe someterse a una operación quirúrgica y le dicen que el riesgo de que salga mal es 15%, él sabe que su operación saldrá bien.
10. Si un paciente debe someterse a una operación quirúrgica y le dicen que el riesgo de que salga mal es 15%, él sabe que en la larga lista de operados hasta ahora, la operación ha salido mal en 15 cada 100.

Una enfermedad afecta al 30% de los individuos de una población. Un Test Diagnóstico para detectar la enfermedad da positivo en el 90% de los casos que realmente tienen la enfermedad (Sensibilidad) y da negativo en el 95% de los casos que realmente no tienen la enfermedad (Especificidad).

11. En esta población, el 70% de los individuos no tiene la enfermedad.
12. El test da positivo en el 90% del total de individuos.
13. El test “acierta” (da resultado acorde con la realidad) en el 93.5% de los casos.
14. El test “falla” en el 17.5% de los casos.
15. Al 11.5% de los individuos que no están enfermos, el test les da positivo.
16. De cada 1000 individuos a los que el test les da positivo, aproximadamente 115 no tienen la enfermedad.
17. De cada 100 individuos a los que el test les da negativo, aproximadamente 10 tienen la enfermedad.
18. Si a un individuo el test le dio negativo tiene una probabilidad de 10% de que realmente no tenga la enfermedad.
19. El valor predictivo negativo de este test diagnóstico es 95.7%.

De los individuos que tienen cierta enfermedad el 80% sobrevive 2 años, el 15% sobrevive 3 años y un 5% sobrevive 4 años. Existen dos fármacos para tratar esta enfermedad. Se sabe que habían recibido el fármaco A el 10% de los pacientes que sobrevivieron 2 años, el 20% de los que sobrevivieron 3 años y el 80% de los que sobrevivieron 4 años. El resto recibieron B.

20. El tiempo *medio* de supervivencia de todos los enfermos es **2.25**.
21. La *varianza* del tiempo de supervivencia de todos los enfermos es **-8.7**.
22. La “distribución a priori” es el porcentaje de individuos que sobreviven 2, 3 o 4 años, es decir, 80%, 15%, 5%, respectivamente.
23. La “distribución a posterior” es la distribución de frecuencia marginal del fármaco recibido, es decir, el 15% fueron tratados con A y el 85% con B.
24. La “distribución a posterior” es la distribución de frecuencias del fármaco recibido condicionado a cada tiempo de supervivencia.
25. La “distribución a posterior” es la distribución de frecuencias del tiempo de supervivencia condicionado al fármaco recibido.
26. “Tiempo de supervivencia” y “fármaco recibido” son características independientes en este grupo de individuos.
27. Sobre vivió 3 años y fue tratado con B el **10%** de los individuos.
28. El **15%** de los individuos fueron tratados con A.
29. En los individuos tratados con A la probabilidad de sobrevivir 4 años es 80%.
30. La probabilidad de sobrevivir menos de 4 años en los tratados con B es 14.1%.
31. Los pacientes tratados con A sobreviven por término medio 3 años.
32. La prob de sobrevivir más de 3 años es 5% cuando se ignora el fármaco recibido, 27% si se recibió el fármaco A y 1% si se recibió el B.

El 90% de los implantes dentarios consolidan. Son fumadores el 20% de los pacientes en los que el implante consolida y el 70% de aquellos en los que el implante no consolida.

- 33.** En total, fuman el 40% de los implantados.
- 34.** Los implantes consolidan bien en el 90% de los fumadores.
- 35.** Los implantes consolidan bien en el 96% de los no-fumadores.
- 36.** En ese colectivo son fumadores y con implante consolidado el 18%.
- 37.** La consolidación del implante y el fumar son características independientes.
- 38.** Fumar baja en 54 puntos el porcentaje de implantes que consolidan.
- 39.** El efecto del tabaco sobre el éxito de los implantes es 18%.
- 40.** El porcentaje de implantes consolidados es 24 puntos menor en fumadores.

Capítulo 6

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD: BINOMIAL Y POISSON

Los investigadores conviven constantemente con el problema de la IE. Puesto que observan muestras que son solo una pequeña parte de la población que intentan conocer, una pregunta es constante en su actividad científica, cualquiera que sea su campo de investigación: ¿Es el hallazgo encontrado en la muestra analizada una verdad general, válida para toda la población? ¿Qué resultados son mera anécdota particular de la muestra y cuáles son válidos más allá de ella?

6.1. Poblaciones y Muestras

En la investigación científica se estudian muestras y a partir de lo observado en ellas se intenta adquirir conocimiento sobre las poblaciones a las que pertenecen.

Población: Es el total de individuos con ciertas características. Ejemplos:

- La población de *varones adultos sanos españoles*: 16 millones.
- La población de *enfermos de úlcera de estómago*: 4 millones en todo el mundo.
- La población de *ratas a las que se hubiera extirpado el páncreas y dado tres miligramos de insulina por kilo de peso cada día*: el tamaño sería el número de ratas de todo el mundo sometidas a ese tratamiento.

Muestra: Es el conjunto de individuos extraídos de la población que observamos y/o manipulamos en un estudio, evaluando en ellos ciertas variables que son de nuestro interés. Ejemplos:

- Para intentar conocer cómo son los hábitos de higiene bucal en la población de varones adultos sanos españoles, estudiamos una muestra de 1234 varones adultos.
- Para intentar conocer cómo es la mucosa gástrica en los enfermos de úlcera de estómago, estudiamos las biopsias extraídas en una muestra de 327 pacientes.

- Para intentar conocer si con tres miligramos por kilo de peso diarios de insulina se puede compensar la ausencia de páncreas en ratas, a una muestra de 20 se les extirpa el páncreas y se les administra esa dosis diaria de insulina.

El investigador intenta conocer acerca de las *poblaciones*, pero solamente puede estudiar el comportamiento de las *muestras*. Si prueba, por ejemplo, un nuevo método docente en un grupo de niños con la esperanza de que mejore su aprendizaje, los resultados del método se observan en ese grupo concreto de chicos, pero el interés del investigador se centra en saber si ese método es efectivo en general, en la población de niños de esa edad y circunstancias. Y si prueba una nueva medicina en una muestra de 200 enfermos de pulmonía, los resultados observados en esos pacientes tienen interés para la comunidad científica en la medida en que sean extrapolables a la generalidad de los pacientes con esa enfermedad.

En general se llaman:

Parámetros: la media, varianza, porcentaje... de una variable en la *población*.

Estadísticos: la media, cuasivarianza, porcentaje... de esa variable en una *muestra*.

Los parámetros y estadísticos más habitualmente analizados son:

	Población	Muestra
Variable Cuantitativa	μ , σ^2	M , S^2
Variable Cualitativa	π	p

El investigador intenta conocer los valores de los parámetros, pero solamente conoce los valores de los estadísticos. Se llama **Inferencia Estadística, IE**, a la disciplina que ayuda a conocer acerca de los *parámetros* (μ , σ^2 , π ,...) a partir de los *estadísticos* (M , S^2 , p , ...) observados en la muestra.

6.2. La variabilidad e incertidumbre inherente a la extracción de una muestra

¿Hasta qué punto es la muestra parecida a la población? La respuesta a esta pregunta es clave en la **IE**. Consideremos la situación más sencilla en que en cada individuo se evalúa si tiene o no una característica dicotómica, digamos "E". Si en la población son E, por ejemplo, el 30% de los individuos, ¿cuántos de ellos lo serán en una muestra de, por ejemplo, $N = 10$?

La experiencia muestra que el valor del estadístico de la muestra no es, en general, exactamente igual al del parámetro que queremos conocer. Puede que en la muestra haya justamente 3 E, dando FR muestral = $3/10 = 0.3$, igual a la poblacional. Pero el número de E en la muestra puede ser cualquier otro valor de 0 a 10.

En el capítulo anterior decíamos que al tomar al azar *un* individuo de esa población, podía ser E o no serlo y es imposible predecir si será o no será E. Esta

incertidumbre es inherente al hecho de tomar *un* individuo y no hay modo de evitarla. Pero sabemos que si repetimos *millones* de veces la extracción de *un* individuo, en 30 de cada 100 extracciones este será E. Ese conocimiento lo resumimos diciendo que la prob de que el individuo extraído sea E es 0.30: $P(E) = 0.30$.

Ahora se trata de tomar una muestra de 10 individuos. El número de E en la muestra puede ser cualquier valor 0, 1,... 9, 10 y es imposible predecir cual será esa cantidad al sacar *una muestra*. También esta incertidumbre es inherente al hecho de tomar *una muestra* y no hay modo de evitarla.

6.3. La Regularidad propia del Muestreo Aleatorio, MA.

La Distribución Binomial

Pero aquí también opera la *Ley de la regularidad de las grandes series estadísticas o Ley empírica del azar* y conduce a que si la extracción de una **muestra** de 10 individuos la repetimos *millones de veces*, resulta que

En 28 de cada 1000 muestras habrá 0 individuos con E (p muestral = 0.00)

En 121 de cada 1000 muestras habrá 1 individuos con E (p muestral = 0.10)

En 233 de cada 1000 muestras habrá 2 individuos con E (p muestral = 0.20)

En la siguiente tabla se da la FR de muestras con cada cantidad posible de E

$\pi = 0.3$											
Millones de muestras de $N = 10$											
X →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p →	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
FR(X)	.028	.121	.233	.267	.200	.103	.039	.009	.001	.0001	.000006

Al hecho de extraer de una población muchos millones de muestras del mismo tamaño, se llama hacer **Muestreo Aleatorio, MA**. Si en cada muestra calculamos un determinado estadístico, tendremos tantos valores de él como muestras hayamos tomado. Para hacer IE es imprescindible conocer cómo se distribuyen estos valores del estadístico al hacer MA.

La Variabilidad y Regularidad propias del **MA** (millones de muestras) implica:

- No podemos saber el número de E que va a tener *cada* muestra. Puede ser cualquier cantidad entre 0 y 10 (en general, entre 0 y N).
- Sabemos, por ejemplo, que 200 cada mil muestras van a tener 4 individuos E y 103 cada mil muestras van a tener 5 individuos E..., con el ejemplo anterior.

La última fila de la tabla anterior es un ejemplo de lo que se llama **Distribución Binomial**. En general, la Distribución Binomial nos da la prob de que haya X individuos “positivos” (es decir, con cierta característica) en una muestra de tamaño N, siendo π la FR de individuos positivos en la población. X puede ser 0, 1 , 2... hasta N. La prob de cada valor de X se calcula con esta fórmula:

$$P(X) = \frac{N!}{X!(N-X)!} \Pi^X (1 - \Pi)^{N-X}$$

Por ejemplo, es $P(4) = (10! / 4! 6!) \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^6 = 0.20$, es decir, el 20% de las muestras de 10 individuos tomadas de una población donde el 30% son E, tendrán 4 individuos con E (serán muestras con $p = 4 / 10 = 40\%$ de E).

Si se extraen millones de muestras de $N = 10$, en la primera de ellas puede haber 4 individuos E, y en la segunda muestra también puede haber 4 E y puede haber 4 E en cada una de las restantes muestras, por lo que podría ocurrir que saliera 4 en *todas* las muestras de esa larga serie de repeticiones. Con más motivo podría ocurrir que *ninguna* muestra tuviera 4 E. Pero la experiencia muestra que, en la práctica, la FR de muestras con 4 E “siempre” toma valores muy próximos a 0.20 y la FR de muestras con cualquier otro número de E toma valores muy próximos a los dados por esa fórmula.

Como un segundo ejemplo de Distribución Binomial consideremos una población con 40% de diabéticos ($\pi = 0.40$). Si tomamos una muestra aleatoria, con reposición, de $N = 5$ individuos, teóricamente esperamos encontrar 2 diabéticos, porque 2 es el 40% de 5. A esa cantidad se la llama **Valor Esperado, E**, y en general se calcula como $E = \pi \cdot N$ (nótese que el símbolo “E” aquí es la inicial de “Esperado”, no de “Enfermo”). Pero la cantidad de diabéticos en la muestra puede ser cualquiera entre 0 y 5.

A continuación se representan los 6 tipos de muestras que pueden darse. La primera columna de la izquierda simboliza las muestras con 0 diabéticos, es decir, los 5 sanos, S. La siguiente columna indica las muestras con 1 diabético, etc. La antepenúltima fila recoge la cantidad de diabéticos en la muestra, X, la penúltima indica la FR de diabéticos en la muestra, $p = X / N$, y la última indica la FR de cada tipo de muestra en el MA, P(X), y es lo que se llama **Distribución Binomial** (0.4, 5).

Tipos de muestras de $N = 5$ si es $\pi = 0.40$

S	D	D	D	D	D	<u>$S = \text{SANO}$</u>
S	S	D	D	D	D	<u>$D = \text{DIABÉTICO}$</u>
S	S	S	D	D	D	
S	S	S	S	D	D	
S	S	S	S	S	D	
X:	0	1	2	3	4	5
p=X/N	0	.20	.40	.60	.80	1
P(X)	.078	.259	.346	.230	.077	.010

Por ejemplo, $P(4) = P(X = 4) = P(p = 0.8) = (5! / 4! 1!) \cdot 0.25^4 \cdot 0.75^1 = 0.077$

**** Ejercicio 6.1:**

- ¿Qué es más probable: obtener dos o cuatro diabéticos?
- ¿Qué es más probable: obtener cuatro diabéticos o cinco diabéticos?
- Es $P(2) = (5! / 2! 3!) \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^3 = 0.346 \rightarrow$ Interprete esa cantidad.
- Es $P(4) = 0.077 \rightarrow$ Interprete esa cantidad.

Las **Tablas de Binomial**, al final del libro, dan los cálculos para varios valores de π y tamaños de muestra de 2 a 10. Para tamaños de muestra mayores de 10 y π distintos de los que allí aparecen, hay que calcular las prob con la fórmula. Para valores de π mayores de 50% tenga en cuenta que si, por ejemplo, en una población el 60% de los individuos son miopes, el 40% serán no miopes, y que una muestra de $N = 8$ con 3 miopes tiene 5 no miopes. Por ello, la prob de que una muestra de $N = 8$ tenga 3 miopes es la de que tenga 5 no-miopes, es decir, $P(X=5)$ en una Binomial con $N = 8$ y $\pi = 0.4$. En la tabla se encuentra $P = 0.1239$.

**** Ejercicio 6.2:** En una población son alérgicos, A, el 25%, $\pi = 0.25$. Si tomamos una muestra aleatoria de 4 personas, el número de A en ella puede ser 0, 1, 2, 3 ó 4, es decir, la FR muestral de alérgicos en la muestra, p , puede ser, 0, 0.25, 0.50, 0.75 y 1. Las FR con que aparece cada uno de los valores en el MA son:

X = nº alérgicos	p muestral = X/4	F. R. de cada valor p en el MA
0	0	0.316
1	0.25	0.422
2	0.50	0.211
3	0.75	0.047
4	1	0.004

Diga si es Verdadera o Falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

- En esta población la FR de alérgicos, A, toma varios valores posibles.
- En esta población la FR de A es 0.25.
- Si tomamos UNA sola muestra de $N = 4$ es seguro que tendrá justamente un A, puesto que 1 es el 25% de 4.
- Si hacemos MA de $N = 4$, todas las muestras tendrán justamente un A.
- Si hacemos MA de $N = 4$, unas muestras tendrán cero A, otras tendrán un A, otras tendrán 2 A, otras 3 A y otras 4. De cada mil muestras 422 tendrán justamente un A.
- Si tomamos UNA muestra de $N = 4$, la prob de que tenga un A es $P(X=1) = 0.422$.
- Si tomamos UNA muestra de $N = 4$, la prob de que los 4 sean A es $P(X) = 0.004$.
- La Ley del azar dice que si saco UNA sola muestra va a contener un A.
- La ley del azar dice que si saco UNA sola muestra va a contener 4 A.
- La ley del azar dice que si saco millones de muestras, la FR de ellas que van a tener cero A es muy aproximadamente 0.316.
- Si no conocemos la FR poblacional de A y en una muestra de $N = 4$ hay 2 alérgicos, la FR muestral es 0.5 y concluimos que la FR poblacional de A es 0.5.
- Si no conocemos la FR poblacional de A y en una muestra de $N = 4$ hay 2 A, concluimos que la FR poblacional de alérgicos puede ser 0.5 u otra cantidad.

**** Ejercicio 6.3:** El 40% de una población son *enfermos*. Se toma una muestra al azar y con reposición de tamaño $N = 6$.

- a. Calcular P (ningún enfermo): $P(X=0)$.
- b. Calcular P (un enfermo): $P(X=1)$.
- c. Calcular P (menos de dos enfermos). ¿Qué quiere decir este valor?
- d. Calcular P (más de un enfermo). ¿Qué quiere decir este valor?
- e. ¿Puede ser la FR de enfermos en la muestra $p = 0.40$? ¿Por qué?

6.4. ¿Para qué vale la Regularidad propia del MA?

El lector se preguntará para qué vale conocer esas FR que aparecen al hacer muestreo repetido, si en la práctica el investigador toma y analiza **una** muestra, no millones de ellas. En esa **única** muestra calcula un estadístico y a partir de él intenta conocer acerca del correspondiente parámetro poblacional. ¿Por qué necesita conocer la distribución de los valores que toma ese estadístico si se extraen **millones** de muestras? Parecería que el razonamiento estadístico tiene peculiaridades extrañas muy distintas del razonamiento lógico general. Pero pronto veremos que en la vida común se procede del mismo modo y que el hecho de que la incertidumbre presente cuando sacamos *una muestra* se torne en regularidades cuando sacamos *millones de muestras* es fundamental al hacer **IE**.

**** Ejercicio 6.4:** En un examen Lucía ha respondido bien 20 preguntas. Si nos dice que el examen tenía 100 preguntas, el resultado parece malo. Si nos dice que tenía 22 preguntas, el resultado parece bueno. ¿Y si el examen tenía 40 preguntas?

**** Ejercicio 6.5:** Nos dicen que en una evaluación internacional de universidades la nuestra ha obtenido 230 puntos. ¿Es ese resultado bueno o malo? ¿Qué información complementaria necesitamos para valorar esa puntuación?

En muchas situaciones de la vida necesitamos conocer la puntuación de todos los individuos de un colectivo para valorar la puntuación de uno de ellos. El conjunto de esas puntuaciones es lo que se llama la **distribución** de esa medida en ese colectivo. De la misma forma, en la **IE** para interpretar el valor que un estadístico tomó en una muestra necesitamos conocer la **distribución** de ese estadístico al hacer MA, es decir, los valores que toma si se extraen millones de muestras.

6.5. Distribución Binomial en general. Número de veces “+” en una serie de repeticiones de un FA

Hemos visto que la Distribución Binomial se aplica cuando se toman al azar N individuos de un colectivo y se cuenta el número de ellos, “X”, que tienen cierta característica, por ejemplo, ser enfermo.

Ello es un caso particular de la situación general en la que se repite N veces un Fenómeno Aleatorio y se cuenta el número de ellas en que ocurrió cierto *sucedido*.

En la situación anterior el Fenómeno Aleatorio era la extracción de cada individuo y el *suceso* era tener o no la característica.

Ejemplo 1: Se tira una moneda bien balanceada 6 veces. Cada vez que se tira, la prob de que salga cara es $\pi = 0.5$. En la serie de 6 tiradas esperamos que salgan 3 caras, $E = 3$, pero puede salir más o menos. Veamos la prob de que salgan 0, 1... 6.

$$\text{Bin}(N, \pi) = B(6, 0.5): P(X) = \frac{6!}{X!(6-X)!} (0.5)^X (1-0.5)^{6-X}$$

X = 0	P(0) = {6! / [0! · 6!] } 0.5 ⁰ 0.5 ⁶	0.016
X = 1	P(1) = {6! / [1! · 5!] } 0.5 ¹ 0.5 ⁵	0.094
X = 2	P(2) = {6! / [2! · 4!] } 0.5 ² 0.5 ⁴	0.234
X = 3	P(3) = {6! / [3! · 3!] } 0.5 ³ 0.5 ³	0.313
X = 4	P(4) = {6! / [4! · 2!] } 0.5 ⁴ 0.5 ²	0.234
X = 5	P(5) = {6! / [5! · 1!] } 0.5 ⁵ 0.5 ¹	0.094
X = 6	P(6) = {6! / [6! · 0!] } 0.5 ⁶ 0.5 ⁰	0.016

** **Ejercicio 6.6:** En cierto tipo de operación quirúrgica mueren el 50% de los pacientes. Si un cirujano opera este mes a 6 pacientes, *espera* 3 muertos, $E = 3$. Calcular la probabilidad de que entre los 6 operados haya:

- a. 0 muertos →
- b. 1 muerto →
- c. 2 muertos →

Interprete inequívocamente esta probabilidad.

Ejemplo 2: Se tira un dado homogéneo 12 veces. Cada vez que se tira, la prob de que salga la cara 5 es $\pi = 1/6 = 0.167$. En una serie de 12 tiradas esperamos que salgan $N \cdot \pi = 12 \cdot (1/6) = 2$ cincos. Pero pueden salir más o menos de 2. Calculemos la prob de que salgan 0, 1, 2, 12 cincos:

$$\text{Bin}(N, \pi) = B(12, 1/6): P(X) = \frac{12!}{X!(12-X)!} (1/6)^X (5/6)^{12-X}$$

X = 0	P(0) = {12! / [0! · 12!] } (1/6) ⁰ (5/6) ¹²	0.112
X = 1	P(1) = {12! / [1! · 11!] } (1/6) ¹ (5/6) ¹¹	0.269
X = 2	P(2) = {12! / [2! · 10!] } (1/6) ² (5/6) ¹⁰	0.296
----	-----	-----
X = 9		0.0000012
X = 12		0.0000000007

** **Ejercicio 6.7:** Una exploración radiológica que da lugar a reacción adversa (RA) en $1/6 = 0.167$ de los paciente, se aplica a $N = 12$ pacientes:

- a. ¿Cuántos *esperamos* con RA?
- b. Calcular P (entre los 12 pacientes haya 2 RA).
- c. Calcular P (X=0).
- d. Calcular P (X=1).
- e. Calcular P (X=9). Interprete inequívocamente esta probabilidad.

**** Ejercicio 6.8:** Si el carcinoma de páncreas se cura en el **30%** de los casos (valor poblacional) y tratamos una muestra aleatoria de **N = 10** enfermos:

- ¿Cuántas curaciones esperamos obtener?
- ¿Cuál es la prob de obtener solamente una curación?
- ¿Cuál es la prob de obtener 8 curaciones?
- ¿Qué quiere decir el último valor de prob encontrado?

**** Ejercicio 6.9:** En cierta intervención quirúrgica, los pacientes tienen prob **0.25** de morir. La Dra. Largaespada operará a 9 pacientes, que consideraremos son una muestra aleatoria del total de ellos. Calcular:

- P (se mueran todos).
- P (ningún muerto).
- P (más de 4 muertos).

6. 6. Media y Desviación de la Distribución Binomial

Al hacer **IE** con frecuencia se alude a la “Media y a la Desviación Estándar de la Distribución Binomial”. Explicaremos qué son y cómo se calculan esas cantidades usando un ejemplo sencillo. En una población tiene Herpes, H, el 25% de las personas, $\pi = 0.25$. Si hacemos MA de $N = 8$, y en cada muestra llamamos:

- “X” al número de individuos con H en cada muestra.
- “p” a la FR de individuos con H en cada muestra: $p = X / 8$.

La tabla siguiente recoge los resultados obtenidos en las primeras muestras. Así, en la primera muestra de 8 individuos, 3 tuvieron H y la FR muestral es $3/8 = 37.5\%$; en la segunda muestra, solo 1 tuvo H y la FR muestral es $1/8 = 12.5\%$...

Nº de H en cada muestra								X	p = X/8
1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º		
Muestra 1 ^a	-	-	+	+	-	-	-	3	.375
Muestra 2 ^a	-	+	-	-	-	-	-	1	.125
Muestra 3 ^a	+	-	-	-	-	-	+	3	.375
Muestra 4 ^a	-	-	-	+	-	-	+	2	.250
Muestra 5 ^a	-	+	+	-	+	-	+	5	.625
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---
								↓	↓
								$\mu_X = 2$	$\mu_p = 0.25$
								$\sigma^2_X = 1.5$	$\sigma^2_p = 0.023$
								$\sigma_X = 1.22$	$\sigma_p = 0.15$

En este contexto se definen estas cuatro cantidades:

Media y σ de las “X”, μ_X y σ_X , y Media y σ de las “p”: μ_p y σ_p

1. Media y varianza de X, número de H en cada muestra.

- El valor esperado de X es 2, ya que es el 25% de 8. En muchas muestras X será justamente 2, en otras será mayor y en otras menor de 2. Se puede demostrar que la media de X en el MA es 2. En general, $\mu_x = N \cdot \pi$. Por tanto, en el MA la cantidad $\mu_x = E = N \cdot \pi$ es tres cosas:
 - El valor esperado de X, que da FR muestral de H igual a la poblacional.
 - El valor que aparece con más frecuencia en el MA. En esta Distribución Binomial es $P(1) = 0.2670$, $P(2) = 0.3115$, $P(3) = 0.2076$.
 - La media de X calculada sobre todas las muestras, μ_x .
- La varianza de X en el MA es $\sigma_x^2 = \pi(1 - \pi)N = 0.25 \cdot 0.75 \cdot 8 = 1.5$

2. Media y varianza de $p = X / N$, FR de H en cada muestra.

- El valor esperado de $p = X / N$ es 0.25, ya que es el de la población. En muchas muestras p será justamente 0.25, en otras será mayor y en otras menor de 0.25. Se puede demostrar que la media de p en el MA es 0.25. En general $\mu_p = \pi$. Por tanto, en el MA la cantidad π es tres cosas:
 - El valor esperado de p.
 - El valor de p que aparece con más frecuencia en el MA.
 - La media de p calculada sobre todas las muestras, μ_p .
- La varianza de las p es $\sigma_p^2 = \pi(1 - \pi) / N = 0.25 \times 0.75 / 8 = 0.023$

** Ejercicio 6.10: En una población son alérgicos el 40%.

Si tomamos muchas muestras de $N = 10$:

- ¿Cuál es la **Media** y la **σ** del número de alérgicos por muestra (μ_x y σ_x)?
- ¿Cuál es la **Media** y la **σ** de la FR de alérgicos por muestra (μ_p y σ_p)?

Si tomamos muchas muestras de $N = 100$:

- ¿Cuál es la **Media** y la **σ** del número de alérgicos por muestra (μ_x y σ_x)?
- ¿Cuál es la **Media** y la **σ** de la FR de alérgicos por muestra (μ_p y σ_p)?

Si tomamos muchas muestras de $N = 400$:

- ¿Cuál es la **Media** y la **σ** del número de alérgicos por muestra?
- ¿Cuál es la **Media** y la **σ** de la FR de alérgicos por muestra?

6. 7. Distribución de Poisson. Binomial con N grande y π pequeña

Distintas Binomiales con N grande y π pequeña e igual valor esperado ($E = \pi N$) dan valores de prob muy parecidos, y a esa misma prob se llega usando la fórmula de Poisson, que solo usa el valor de E, no N ni π. ($e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \approx 2.71$)

$$P(X) = \frac{e^{-E} \cdot E^X}{X!}$$

Ejemplo 1: Veamos, por ejemplo, $P(2)$, $P(5)$ y $P(10)$ en varias Binomiales de diferente N y π, pero con el mismo $E = N \cdot \pi$, en este caso $E = 5$:

N	π	E	P(2)	P(5)	P(10)
100	0.05	5	0.0812	0.1810	0.0177
500	0.01	5	0.0836	0.1764	0.0179
1 000	0.005	5	0.0839	0.1759	0.0180
2 000	0.0025	5	0.0841	0.1757	0.0181
5 000	0.001	5	0.0842	0.1756	0.0181
Poisson			0.0842	0.1755	0.0181
$P(X) = e^{-E} E^X / X! = e^{-5} 5^X / X!$			$e^{-5} 5^2 / 2!$	$e^{-5} 5^5 / 5!$	$e^{-5} 5^{10} / 10!$

Por ejemplo, en la Binomial de $N = 100$ y $\pi = 0.05$ es $P(2) = \{100! / [2! \times 98!]\} 0.05^2 0.95^{98} = \mathbf{0.0812}$. Del mismo modo se calculan las demás prob. Observamos que $P(2)$ toma valores cada vez más próximos entre sí en las Binomiales con mayor N y menor π y ese valor se aproxima cada vez más al de la última fila, calculado con la fórmula de Poisson. Lo mismo ocurre con $P(5)$ y $P(10)$. Incluso en la Binomial con $N = 100$ y $\pi = 0.05$, la aproximación de las tres prob a las de la última fila son bastante buenas para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

Ejemplo 2: Veamos $P(1)$ y $P(6)$ en varias Binomiales de diferente N y π , pero con la misma $E = 2$:

N	π	E	P(1)	P(6)
50	0.04	2	0.2706	0.0108
400	0.005	2	0.2707	0.0119
1 000	0.002	2	0.2707	0.0120
Poisson			0.2707	0.0120
$P(X) = e^{-E} E^X / X! = e^{-2} 2^X / X!$			$e^{-2} \cdot 2^1 / 1!$	$e^{-2} 2^6 / 6!$

Ante una Binomial con N grande y π pequeña, las prob de cada valor posible: 0, 1, 2, ..., es decir, la FR de muestras en el MA con 0, 1, 2 ... individuos “positivos”, se pueden calcular con la fórmula de Poisson, que da resultados próximos a los de la Binomial y es más sencilla. Esta aproximación de la Distribución Binomial a la Poisson es bastante buena si $N > 100$ y $\pi < 0.10$.

Las **Tablas de Poisson** al final del libro dan prob de $X = 0, 1, 2, \dots$ para algunos valores de E .

** **Ejercicio 6.11:** En el país “A” la gripe invernal, GI, afecta al **2%** de los habitantes. Si en la capital hay **300** habitantes, ¿cuál es la prob de que en ella haya 5 con GI?

** **Ejercicio 6.12:** En el país “B” la gripe invernal, GI, afecta al **0.4%** de los habitantes. Si en la capital hay **1 000** habitantes

- ¿Cuál es la probabilidad de que entre ellos haya 3 con GI?
- ¿Qué quiere decir ese valor $P(3)$ obtenido arriba?

6.8. Distribución de Poisson sin haber una Binomial explícita

La fórmula de Poisson da resultados muy próximos a los de la Binomial cuando N es grande y π es pequeña, y para aplicarla no necesitamos saber N ni π , basta con conocer $E = N \cdot \pi$. Veamos cómo usar Poisson sin conocer N ni π .

Ejemplo: En el país “C” no se sabe el porcentaje de personas que son afectados por la gripe invernal, GI, ni cuántos habitantes hay en su capital, pero se sabe que la cantidad esperada de personas con GI es $E = 4$. ¿Cuál es prob de que haya 7 personas con GI?

Respuesta: No conocemos N ni π , pero sabemos que $N \cdot \pi = 4$. Podría ser, por ejemplo $N = 400$ y $\pi = 0.01$, o quizás $N = 200$ y $\pi = 0.02$, o quizás $N = 10\,000$ y $\pi = 0.0004$, u otra combinación de N y π que dé $N \cdot \pi = 4$. Pero $P(7)$ dará un valor muy parecido en esas tres Binomiales y en cualquier otra con $E = 4$, si es N mayor de 100 y π menor de 0.10. Y a un valor muy parecido se llega con la fórmula de Poisson.

$$P(\text{de que en la capital de ‘C’ haya 7 personas con GI}) = e^{-4} \cdot 4^7 / 7! = 0.0595$$

E es la media de casos ocurridos por muestra si se repite la situación muchas veces.

**** Ejercicio 6.13:** En la ciudad ‘A’ hay 500 motoristas y cada uno tiene prob $\pi = 0.004$ de tener un accidente grave, AG, en Noche Vieja, NV. Calcule la prob de que la próxima NV haya 3 AG. (Si los datos permanecen iguales, $N = 500$ y $\pi = 0.004$, durante muchas NV y anotamos los AG que hay en cada una, podemos calcular la FR de NV con 3 AG. Esa FR empírica tendrá un valor próximo a esa $P(3)$ calculada).

Hay Fenómenos Aleatorios que se ajustan bien a la Distribución de Poisson aunque no aparece explícitamente una Distribución Binomial, pero todo hace pensar que subyace dicha situación Binomial con N grande y π pequeña.

Por ejemplo, en la ciudad “B” no sabemos cuántos motoristas hay ni la prob que cada uno tiene de AG en NV. Pero sabemos que en los últimos 80 años ha habido 160 AG. La media de AG por NV es 2. Si se mira en qué FR de esas 80 NV hubo 0 AG, y la FR en que hubo 1 AG, y la FR en que hubo 2 AG... se encuentra que esas FR se aproximan bastante a las que da la Distribución de Poisson con $E = 2$, es decir, $P(0) \approx 0.14$, $P(1) \approx 0.27$, $P(2) = 0.27$, $P(3) \approx 0.18$.

Otro ejemplo: Se cuenta el número de suicidios por desengaño amoroso, SDA, que hay cada año en una ciudad. En los últimos 120 años hubo 180. La media de suicidios por año fue 1.5. No conocemos el número de habitantes de esta ciudad, N , ni la FR de suicidas por año en esta zona, π , pero asumimos que $E = N \cdot \pi$ es un valor cercano a 1.5. Y si se mira en qué FR de esos 120 años hubo 0 SDA, y la FR en que hubo 1 SDA, y la FR en que hubo 2 SDA..., se encuentra que esas FR se aproximan bastante a las que da la Distribución de Poisson con $E = 1.5$, es decir, $P(0) = 0.22$, $P(1) = 0.33$, $P(2) = 0.25$, $P(3) = 0.13....$

**** Ejercicio 6.14:** Se cuenta el número de carcinomas de cierto tipo diagnosticados en nuestro centro de salud cada mes. En los últimos 120 meses hubo 96 casos.

- ¿Cuál es la media de carcinomas por mes?
- Asumiendo que la FR de casos por mes se ajusta a una Poisson con E próximo a la media empírica que acabamos de encontrar, calcular $P(2)$.
- ¿Qué significa el valor de P encontrado en el apartado anterior?

**** Ejercicio 6.15:** En el Fenómeno Aleatorio parte de una rata de la cepa “*Primus*”, usada en investigación biológica, la variable $X = \text{Número de hijos vivos por parto}$, tiene media poblacional = **3.8**. En los últimos 1 000 partos registrados el número de ellos con 0, con 1, con 2 y con 3 crías fue:

	X	N	FR	P(X) en Poisson con E=3.8
¿Se aproximan las FR's empíricas a las prob de una Distribución de Poisson con $E = 3.8$?	0	25	.025	
	1	89	.089	
	2	153	.153	
	3	200	.200	

**** Ejercicio 6.16:** No sabemos qué volumen tiene un depósito de agua ni el número de bacterias disueltas en él. Pero después de tomar 120 muestras de un cc, se encuentra que la media de bacterias por cc es 4.

- Si asumimos que el número de bacterias en cada cc se ajusta bien a una Poisson con $E = 4$, y tomamos un nuevo cc, ¿cuál es la prob de que en él haya **3** bacterias?
- ¿Y la prob de que haya más de 9 bacterias?

**** Ejercicio 6.17:** En una población el número de casos de cierta malformación congénita está estabilizado en **2.2** anuales, de promedio.

- ¿Cuál es la prob de que este año haya **10** casos?
- Si este año se encuentran 10 casos, ¿sospecharemos que la media poblacional ha aumentado?
- ¿Cuál es la prob de que este año no haya *ningún* caso?
- Si este año hay 0 casos, ¿pensaremos que la media poblacional ha disminuido?

**** Ejercicio 6.18:** En una ciudad se producen, por término medio, **2.4** traumatismos craneo-encefálicos diarios, que necesitan un tipo de neurocirugía especial. Para ello la ciudad dispone de un único servicio que puede atender como máximo a 5 enfermos por día. ¿Qué porcentaje de días se verá desbordado el servicio?

**** Ejercicio 6.19:** En cierta intervención quirúrgica, los pacientes tienen la prob de morir $\pi = 0.05$. La Dra. Largaespada va a Boston para aprender esta moderna técnica y a su regreso la pone en marcha en el hospital de Cartagena. Para el primer año le tienen programadas **200** intervenciones.

- ¿Cuál es la prob de que mueran 0 pacientes?
- ¿Cuál es la prob de que mueran 5 pacientes?
- ¿Cuál es la prob de que mueran menos de 3 pacientes?
- ¿Cuál es la prob de que mueran más de 20 pacientes?

+++ 6.9. Partículas disueltas en líquidos

En algunos casos conocemos la media por unidad de volumen del número de ciertas partículas inmersas en un líquido y queremos conocer la prob de que al tomar una unidad de volumen concreta contenga cierto número de partículas. Generalmente estas situaciones son típicas Binomiales, en muchos casos aproximables por Poisson. Lo veremos sobre ejemplos concretos:

1. Un naufrago sabe que en una botella de *un litro* de agua hay disueltas 10 bacterias, “bact”, malignas. Acosado por la sed decide beber un vaso de 200 cc ¿cuál es la prob de que en ese vaso haya cero, una, dos, tres.....bact ?

En un litro hay 5 vasos de 200 cc. Como hay 10 bact, la media es de 2 por vaso. Pero en un vaso concreto, en un momento determinado, puede haber más o menos de 2 bact. Numeremos a las bact del 1 al 10.

La prob de que la 1^a bacteria esté en ese vaso es $1/5 = 0.2$

La prob de que la 2^a bacteria esté en ese vaso es $1/5 = 0.2$

La prob de que la 3^a bacteria esté en ese vaso es $1/5 = 0.2$

.....

La prob de que cada bact esté en ese vaso es $1/5 = 0.2$. Hay 10 bact e interesa la prob de que ese suceso (estar en ese vaso) le haya ocurrido a ninguna, a una, a dos.... Fenómeno Aleatorio que se repite 10 veces y en cada repetición el suceso tiene prob 0.2 de ocurrir. Es una Binomial, $B(10, 0.2)$. $P(0) = 0.1074$, $P(1) = 0.2684\dots$

2. En un recipiente de *un litro* de agua hay disueltas 4 000 bact que se distribuyen al azar por todo el volumen. Tomamos una muestra para análisis bacteriológico de un cc de agua. ¿Cuál es la prob de que en ese cc haya 4 bact? ¿Y de que haya 7?

Si hay 4 000 bact en un litro ($= 1\ 000\ cc$), la media es de 4 bact por cc. Pero en un cc concreto, en un momento determinado, puede haber más o menos de 4 bact. Consideremos un cc en particular. Numeremos a las bact del 1 al 4 000.

La prob de que la 1^a bacteria esté en ese cc es $1 / 1\ 000 = 0.001$

La prob de que la 2^a bacteria esté en ese cc es $1 / 1\ 000 = 0.001$

.....

Tenemos 4 000 bact y cada una de ellas tiene una prob $\pi = 0.001$ de estar en ese cc de agua. Es un Fenómeno Aleatorio que se repite 4 000 veces y en cada repetición el suceso “estar en ese cc” tiene prob = 0.001 de ocurrir → Binomial con $N=4\ 000$ y $\pi = 0.001$ que se aproxima muy bien con Poisson de $E = 4$ en la que $P(0) = 0.0183$, $P(1) = 0.0733 \dots P(4) = 0.0733 \dots P(7) = 0.0595$.

4. En un recipiente de agua no sabemos qué volumen tiene ni el número de bact disueltas en él. Pero después de tomar 120 muestras de un cc, se observa que la *media* de bact por cc es 6. ¿Cuál es la prob de que en un cc haya 4 bact? ¿Y la prob de que haya 7?

El reparto de las bacterias por el conjunto de cc's que hay en ese volumen total es, como en los ejemplos anteriores, una Binomial, pero no conocemos N ni π , y por ello no podemos calcular $E = \pi \cdot N$.

Recuerde que E es el *valor esperado* en un cc y es la Media de bact por cc, si se tomaran millones de cc's. No conociendo esa media poblacional (población formada por los millones de volúmenes de un cc), la estimamos por la media muestral = 6 (muestra de 120 volúmenes de un cc's).

Por tanto, pensamos en una Binomial con π pequeña y N grande y $E = 6$. Quizá haya 10 000 cc y 60 000 bacterias, o quizá 1 500 cc y 8 000 bacterias u otros valores de N y de π que den **E = 6**. Podemos aproximar por una Poisson con $E = 6$ en la que $P(4) = 0.1339$ y $P(7) = 0.1377$.

****+++ Ejercicio 6.20:** El agua de un manantial tiene una concentración **media de 10 bacterias por litro**.

- En una muestra de un litro, ¿cuál es la prob de que haya **8** bacterias?
- En muestra de un cuarto de litro, ¿cuál la prob de que haya **6** bacterias?

****+++ Ejercicio 6.21:** El número medio de ciertas partículas en plasma es de **5 por mm³** en *sanos*. Un individuo es calificado como sospechoso de padecer exceso de partículas si al contar las que tiene en un mm³ de su plasma se encuentran *12 o más* ¿Qué FR de individuos *sanos*, es decir, que tiene media de 5 por mm³, serán clasificados como sospechosos?

****+++ Ejercicio 6.22:** Asumamos que el agua de todos los océanos, ríos y nubes de la Tierra ocupa **10 000 billones de m³** y que en un cc de aguas hay **6 x 10²²** moléculas de agua. Contemplando el ocaso sobre el Nilo una tarde de otoño Cleopatra lloró melancólicamente. Sus lágrimas sumaron un volumen de un cc. El Nilo las llevó al mar y actualmente esas moléculas de H₂O están diluidas por toda el agua de la Tierra.

- Cada vez que Vd. bebe un cc de agua, calcular la prob de que en él haya alguna molécula de agua llorada por Cleopatra.

NO OLVIDE RECORDAR - 6

1. Población es el conjunto —generalmente indefinidamente grande— de todos los individuos con ciertas características. Muestra es el conjunto de individuos extraídos de la población para ser observados por el investigador.
2. La IE intenta saber acerca de las poblaciones a partir del conocimiento de las muestras, es decir, intenta conocer acerca de los **parámetros** a partir del conocimiento de los **estadísticos**.
3. Si tomamos una muestra no podemos asumir que el parámetro tenga exactamente el mismo valor que el estadístico encontrado en la muestra.
4. Para hacer IE hay que conocer cómo se distribuyen, es decir, qué valores toman, los estadísticos muestrales en el Muestreo Aleatorio.
5. La **Distribución Binomial** nos da la FR de muestras de N individuos que en el MA tendrán X individuos “positivos”, siendo $X = 0, 1, 2, \dots, N$ y π la FR de individuos positivos en la población.
6. En general, se aplica **Distribución Binomial** cuando se repite N veces un Fenómeno Aleatorio y se cuenta el número en que ocurrió cierto Suceso.
7. Si de una población con FR de enfermos π se hace MA de tamaño N:
 La media del número de enfermos por muestra, X, es $\mu_x = E = N \pi$.
 La varianza de las X es $\sigma^2_x = \pi(1-\pi)N$.
 La media de la FR de enfermos por muestra, p, es $\mu_p = \pi$.
 La varianza de las p es $\sigma^2_p = \pi(1-\pi)/N$.
 Ejemplo: si de una población con 40% de E se hace MA de N = 6 es:
 $P(X = 0 \text{ ó } p = 0) = 0.0467 ; P(X = 1 \text{ ó } p = 0.17) = 0.1866 ;$
 $P(X = 2 \text{ ó } p = 0.33) = 0.3110$
 $\mu_p = 0.40 , \sigma^2_p = 0.04 , \mu_x = E = 2.40 , \sigma^2_x = 1.44$
8. La Distribución de Poisson es una distribución Binomial con N grande (>100) y π pequeña (< 0.10).
9. Hay Fenómenos Aleatorios que se ajustan muy bien a una distribución de Poisson aunque no aparece explícitamente una distribución Binomial, por ejemplo, cuando hablamos de número de partículas dispersas en un fluido o de número de sucesos ocurridos por unidad de tiempo.
10. Cada distribución tiene una fórmula específica para obtener las probabilidades. Existen tablas que, en ciertos casos, evitan los cálculos con las fórmulas.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 6

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. Si en una muestra de $N = 10$ hay 3 enfermos, E, pensamos que la FR de E en la población correspondiente es 30%.
2. Si en una muestra de $N = 10$ hay 3 enfermos, E, pensamos la FR de E en la población correspondiente puede ser 30% u otro valor.
3. Si de una *población* con 20% de E sacamos una muestra al azar de $N = 10$, en ella habrá exactamente 2 E.
4. Si de una *población* con 20% de E sacamos una muestra al azar de $N = 10$, el número de E en ella puede ser 0, 1 , 2.... 10, pero no sabemos cuanto será E.
5. Si de una *población* con 20% de E hacemos MA de $N = 10$, el número de E en cada muestra puede ser 0, 1 , 2.... 10. Tendrán 2 E 302 cada 1 000 muestras.
6. Si en una población son *asmáticos* el 75% de los individuos y tomamos una muestra aleatoria de $N = 8$, es seguro que en ella habrá 6 asmáticos.

En las 4 siguientes afirmaciones No calcule ninguna probabilidad.

7. Si en una población con 75% de asmáticos tomamos una muestra aleatoria de $N = 8$, es más fácil que en ella haya 6 asmáticos a que haya 3.
8. Si en una población con 75% de asmáticos tomamos una muestra aleatoria de $N = 8$, es más fácil que en ella haya 3 asmáticos a que haya 1.
9. Si en una población con 75% de asmáticos tomamos una muestra aleatoria de $N = 8$, es más fácil que en ella haya 8 asmáticos a que haya 0.
10. Si en una población con 75% de asmáticos tomamos una muestra aleatoria de $N = 8$, es más fácil que en ella haya 6 asmáticos a que haya 6 no asmáticos.
11. Si en una población son *alérgicos* el 20% de los individuos y tomamos una muestra aleatoria de $N = 6$, la prob de que haya 3 alérgicos es 0.0819.
12. Si en una población son alérgicos el 20% de los individuos y hacemos MA de $N = 6$, aproximadamente en el 8% de las muestras habrá 3 alérgicos.
13. Si en una población son alérgicos el 20% de los individuos y hacemos MA de $N = 6$, en el 90% de las muestras habrá menos de 2 alérgicos.
14. Si en una población son alérgicos el 20% de los individuos y hacemos MA de $N = 6$, en el 90% de las muestras habrá algún alérgico.
15. Si en una población son alérgicos el 20% de los individuos y hacemos MA de $N = 6$, en 16 de cada 10 000 muestras habrá más de 4 alérgicos.
16. Si en una población son *asmáticos* el 75% de los individuos y tomamos una muestra aleatoria de $N = 8$, la prob de que en ella haya 6 asmáticos es $P(6) = 0.12$ y la de que haya 3 asmáticos es $P(3) = 0.001$.

- 17.** Si en una población son asmáticos el 75% de los individuos y tomamos una muestra aleatoria de $N = 8$, la prob de que en ella haya 6 asmáticos es $P(6) = 0.31$ y la de que haya 3 asmáticos es $P(3) = 0.023$.
- 18.** La afirmación anterior quiere decir que si de esa población se hace MA de ese tamaño, 31 de cada 100 muestras tendrán 6 asmáticos y 23 de cada 1 000 muestras tendrán 3 asmáticos.

En una población el 40% son Enfermos, E, y el 50% de los E son diabéticos.

- 19.** El 20% de los individuos de la población son diabéticos.
- 20.** La prob de que una muestra de 6 *individuos* de la población tenga 1 E es 0.40.
- 21.** La prob de que una muestra de 5 E tenga 1 *diabético* es 0.1562 .
- 22.** La prob de que una muestra de 10 *individuos* de la población tenga 1 *diabético* es 0.4.
- 23.** 23.33% de las muestras de $N = 6$ *individuos* de la población tienen menos de 2 E.
- 24.** El 23.33% de las muestras de $N = 5$ E tendrán menos de 2 *diabéticos*.
- 25.** El 37.58% de las muestras de $N = 10$ *individuos* de la población tendrán menos de 2 *diabéticos*.
- 26.** El 95.33% de las muestras de $N = 6$ *individuos* de la población tendrán algún E.
- 27.** El 89.26% de las muestras de $N = 5$ E tendrán algún *diabético*.
- 28.** El 89.26% de las muestras de $N = 10$ *individuos* de la población tendrán algún *diabético*.

En otra población, el 1% de los individuos son diabéticos.

- 29.** La prob de que en una ciudad en la que viven 500 *individuos* de esta población haya 3 *diabéticos* es 0.3578 .
- 30.** La prob de que en la ciudad anterior haya algún diabético es de 0.9933.

En otra población el 0.2% (2 por mil) de los RN (Recién Nacidos) presentan una determinada malformación congénita.

- 31.** En una muestra de 3 000 RN, la prob de que haya 8 malformados es 20.32%.
- 32.** La prob de que en una muestra de 1 000 RN de la población anterior haya cero malformados es 0.1353.

Una persona tiene 12 000 bacterias diluidas en 6 litros de sangre.

- 33.** La prob de que en una muestra de 5 cc de su sangre haya más de 6 bacterias es 0.0045.
- 34.** El 13.96% de las muestras de 4 cc de su sangre tendrán 8 bacterias.
- 35.** Aproximadamente, 3 de cada 10 000 muestras de 4 cc de su sangre están libres de bacterias.

Un depósito de agua tiene, por término medio, 3 bacterias/cc.

36. La prob de que un cc esté libre de bacterias es de 0.2563.
37. La prob de que en una muestra de 1/2 cc del depósito anterior haya alguna bacteria es 0.2231.
38. El 1.74% de las muestras de 2 cc del depósito anterior tendrán menos de 2.

Tomamos muchas muestras de N = 15 de una población con 70% de alérgicos.

39. La *Media* del número de alérgicos por muestra es $\text{Media}_x = 10.5$.
40. La σ del número de alérgicos por muestra es $\sigma_x = 1.77$.

Tomamos muchas muestras de N = 40 de una población con 80% de alérgicos.

41. La Media del número de alérgicos por muestra es $\text{Media}_x = 10$.
42. La σ del número de alérgicos por muestra es $\sigma_x = 2.53$.

De una población con 40% de alérgicos tomamos millones de muestras de N individuos y anotamos el porcentaje de alérgicos en cada muestra, %:

43. Si las muestras son de N = 20 individuos, es $\text{Media}_{\%} = 40\%$ y $\sigma_{\%} = 2.9\%$.
44. Si las muestras son de N = 20 individuos, es $\text{Media}_{\%} = 40\%$ y $\sigma_{\%} = 10.9\%$.
45. Si las muestras son de N = 200 individuos, es $\text{Media}_{\%} = 40\%$ y $\sigma_{\%} = 3.5\%$.
46. Si las muestras son de N = 1 000 individuos, es $\text{Media}_{\%} = 40\%$ y $\sigma_{\%} = 1.5\%$.
47. Si las muestras son de N = 5 000 individuos, es $\text{Media}_{\%} = 40\%$ y $\sigma_{\%} = 0.7\%$.
48. Cuanto mayor es el tamaño de las muestras, menor es la σ de las p muestrales, es decir, más se aproximan en general a la π poblacional.

Capítulo 7

DISTRIBUCIÓN NORMAL Y TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

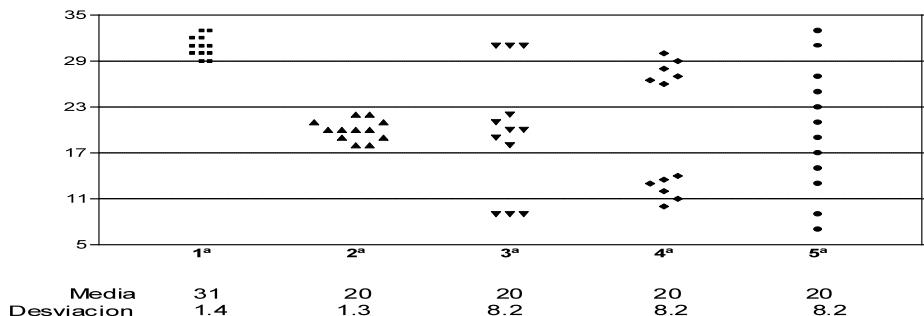
En el capítulo anterior veíamos que distintas Distribuciones Binomiales con el mismo valor esperado, E , dan la misma distribución si el tamaño de la muestra, N , es grande y la proporción de individuos con la característica dicotómica en la población π , es pequeño; y que esas probabilidades se aproximan muy bien con la fórmula de Poisson. Esto es porque cuando N crece y π disminuye, de modo que $E = N \cdot \pi$ se mantiene constante, la fórmula Binomial tiende a la de Poisson. Calcular probabilidades con la fórmula de Poisson es más sencillo y además permite hacerlo cuando no se conoce N ni π , pero se conoce, o se puede estimar, $E = N \cdot \pi$.

En este capítulo veremos que en distintas Binomiales con el mismo valor π , cuanto mayor es N más se aproxima la proporción de muestras con p (proporción de individuos con la característica en la muestra) comprendida en cualquier intervalo a unos valores que conforman la llamada *Distribución Normal*, DN.

Además la Distribución Normal aparece en otras muchas circunstancias y resulta especialmente útil en muy distintas aplicaciones de Inferencia Estadística. La Ley de la Distribución Normal, DN, constituye una de las más sorprendentes y útiles de la Naturaleza. Es de aplicación tan general como la Ley de la Gravitación Universal y en belleza podría competir con la Ley de autoinducción de Faraday y de Lenz.

7.1. Distribución de variables continuas

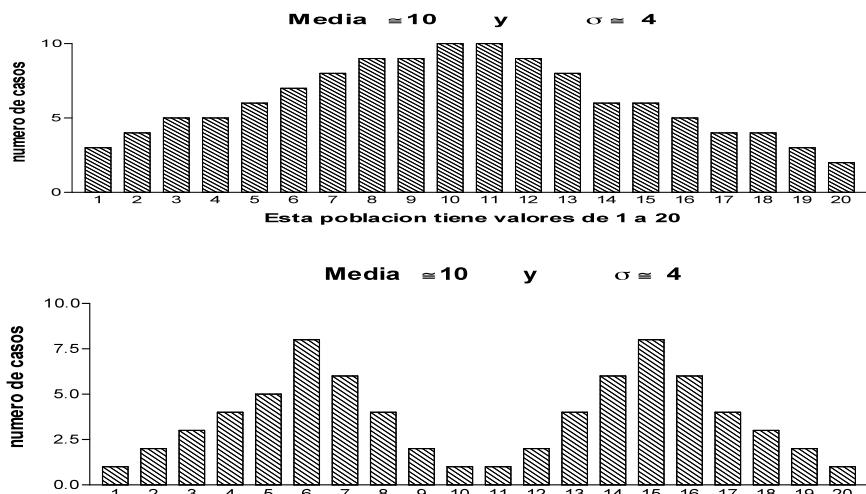
En la gráfica siguiente se representan los puntos correspondientes a 5 muestras donde a cada uno de los 12 individuos de cada muestra se le mide una variable cuantitativa con valores entre 5 y 35.



La primera muestra a la izquierda tiene, como puede verse en la escala vertical, todos sus valores entre 29 y 35, con media 31 y desviación estándar 1.4, como se indica en las dos últimas filas. La segunda muestra tiene todos los valores entre 17 y 23, la tercera tiene tres valores en el tramo superior, 6 en el intermedio y otros 3 en el inferior, etc.

Compare las medias y desviaciones de estas cinco muestras. Las tres últimas tienen igual media y desviación. ¿Quiere eso decir que los valores se distribuyen de idéntico modo? Ciertamente no. En la tercera muestra hay 6 valores próximos a la media, mientras que en la cuarta no hay ninguno en ese intervalo de 17 a 23. Y en la quinta los valores se reparten uniformemente en todo el rango entre 5 y 35.

En colectivos con muchos valores ocurre lo mismo. Dos colectivos pueden tener igual Media y Desviación y sin embargo los valores puede que se agrupen de diferente modo. En las gráficas siguientes la altura de cada barra indica el número de veces que se presenta cada uno de los posibles 20 valores.



Vemos que las dos distribuciones tienen igual media y dispersión, pero los valores se distribuyen de modo muy distinto. La primera tiene muchos individuos con valor en torno a 10 y el número de ellos va disminuyendo a medida que nos alejamos de 10 en ambos sentidos. La segunda tiene pocos individuos con valor en torno a 10 y muchos en torno a 6 y a 15.

7.2. La Distribución Normal

Para exponerla consideremos estas tres variables que miden magnitudes diferentes en poblaciones diferentes y con muy diferentes valores de medias y desviaciones:

1 → “G”, Peso de la población de tigres de Malasia: $\mu = 500$ y $\sigma = 100$

2 → “X”, Inteligencia de la población de españoles: $\mu = 160$ y $\sigma = 10$

3 → “D”, Dureza de la población de miles de rocas lunares: $\mu = 20$ y $\sigma = 2$

En cada una de las poblaciones se calcula la proporción de individuos que tienen el valor de su variable en los intervalos que se especifican, y se obtiene este resultado:

Tigres	$\mu = 500$ $\sigma = 100$	$P(G > 600) = 0.1587$	$P(G > 700) = 0.0228$
Españoles	$\mu = 160$ $\sigma = 10$	$P(X > 170) = 0.1587$	$P(X > 180) = 0.0228$
Rocas	$\mu = 20$ $\sigma = 2$	$P(D > 22) = 0.1587$	$P(D > 24) = 0.0228$

Siendo individuos, variables y cantidades numéricas diferentes, ¿qué cosa es igual en las tres poblaciones? En las tres ocurre que el 15.87% de los individuos tiene valor superior a la media más una desviación y el 2.28% de los individuos tiene valor superior a la media más dos desviaciones, es decir:

$$P(X > \mu + 1\sigma) = P(Z > 1) = 0.1587$$

$$P(X > \mu + 2\sigma) = P(Z > 2) = 0.0228$$

(Los valores estandarizados, Z, se explicaron en 2.4)

Se cumple, además, que en las tres poblaciones la distribución es simétrica respecto a la media, de modo que, por ejemplo, en la población de tigres si el 15.87% pesa más de 600, otro 15.87% pesa menos de 400, ya que 600 es 100 unidades mayor que la media y 400 es 100 unidades menor que la media. Además, como el 50% pesa más que la media, los que tienen peso entre 500 y 600 son $0.50 - 0.1587 = 0.3413$. Y por la mencionada simetría, también el 0.3413 de los individuos pesan entre 400 y 500, de modo que los que pesan entre 400 y 600 son $0.3413 \times 2 = 0.6826$.

Pero la coincidencia se da no solamente para esos intervalos, ($Z > 1$) y ($Z > 2$), sino para cualesquiera otros intervalos definidos en función de Z. La siguiente tabla da, en la segunda fila, la FR de individuos con Z mayor que ciertas cantidades (las que aparecen en la cabecera de cada columna), en las tres poblaciones. La tercera fila da la proporción de individuos con Z entre cero y el valor de la cabecera de la columna. La FR en esta fila es 0.50 menos el valor de la fila anterior. Las FR de la cuarta son el doble de las de la fila anterior (por la simetría antes citada).

$Z \rightarrow$	0.10	0.20	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
P más allá de Z	.4602	.4207	.4013	.3085	.2266	.1587	.0668	.0228	.0062	.0013
P entre μ y Z	.0398	.0793	.0957	.1915	.2734	.3413	.4332	.4772	.4938	.4987
P entre -Z y Z	.0796	.1596	.1914	.3830	.5468	.6826	.8664	.9544	.9876	.9974

Por ejemplo, para $Z = 0.5$ la “P más allá de Z” es 0.3085. Es decir,

30.85% de los tigres pesan más de 550

30.85% de los españoles tienen inteligencia superior a 165

30.85% de las rocas tienen dureza superior a 21

Otro ejemplo, para $Z = 3$ la “P más allá de Z” es 0.0013, es decir, 13 por 10 000:

13 cada 10 000 tigres pesan más de 800

13 cada 10 000 españoles tienen inteligencia superior a 190

13 cada 10 000 rocas tienen dureza superior a 26

De cada 10000 rocas, 13 tienen dureza superior a 26. Por la simetría respecto a la media, otras 13 tienen dureza menor de 14. Y $0.5000 - 0.0013 = 0.4987$, es decir 4987 de cada 10 000, tienen dureza entre 20 y 26 (fila “P entre μ y Z” en la tabla). Y otras tantas están entre 14 y 20, de modo que con dureza entre 14 y 26 ($-3 < Z < 3$) hay $2 \times 0.4987 = 0.9974$ (fila “P entre -Z y Z” en la tabla).

Además, para cualquier otro valor de Z, en las tres poblaciones ocurre que la misma proporción de individuos se alejan de la media más de esa cantidad de desviaciones. La llamada *tabla de la Distribución Normal*, al final del libro, da las proporciones para “más allá de Z”, desde $Z = 0.02$ hasta $Z = 4$. Se dice que una variable se distribuye de modo Normal cuando se cumplen los porcentajes recogidos en esta tabla. Y se suele indicar como $N(500,100)$ para el peso de los tigres, $N(160,10)$ para la inteligencia de los españoles y $N(20,2)$ para la dureza de las rocas.

Por ejemplo, allí se ve que $P(Z > 1.96) = 0.025$ ó 2.5%, lo que quiere decir que:

- 2.5% de los tigres pesan más de la media más 1.96 desviaciones, es decir, $500 + 100 \cdot 1.96 = 500 + 196 = 696$ (y otro 2.5% menos de $500 - 196 = 304$).
- 2.5% de españoles tienen inteligencia mayor de media más 1.96 desviaciones, esto es, $160 + 10 \cdot 1.96 = 160 + 19.6 = 179.6$ (y otro 2.5% menos de $160 - 19.6 = 140.4$).
- 2.5% de las rocas tienen dureza superior a la media más 1.96 desviaciones, es decir, $20 + 2 \cdot 1.96 = 20 + 3.92 = 23.92$ (y otro 2.5% menos de $20 - 3.92 = 16.08$).

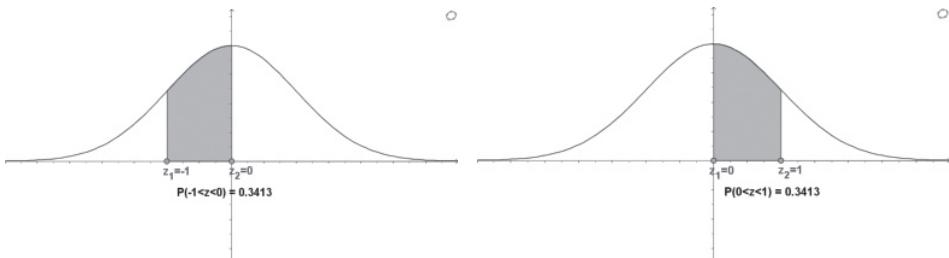
Muchas variables de la naturaleza tienen distribución muy próxima a la Normal, lo que permite, si se conoce la media y la desviación, calcular la proporción de individuos con valor dentro de cualquier intervalo que sea de interés. En el próximo capítulo veremos la gran utilidad de ello en la investigación.

Esta distribución se representa mediante una curva en forma de campana que se conoce con el nombre de *Campana de Gauss*. En ella, la superficie encerrada entre la curva y cualquier intervalo del eje horizontal (de los valores de la variable) representa la proporción de individuos con valor de la variable en dicho intervalo (es la superficie sombreada en las figuras).

Por ejemplo, puesto que es $P(Z > 1) = 0.1587$ y por encima de la media están la mitad de los valores, es $P(0 < Z < 1) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413$, es decir, en el 34.13% de los individuos el valor de la variable está entre la media y la media más una desviación, y en otros tantos el valor de la variable está entre la media y la media menos una desviación:

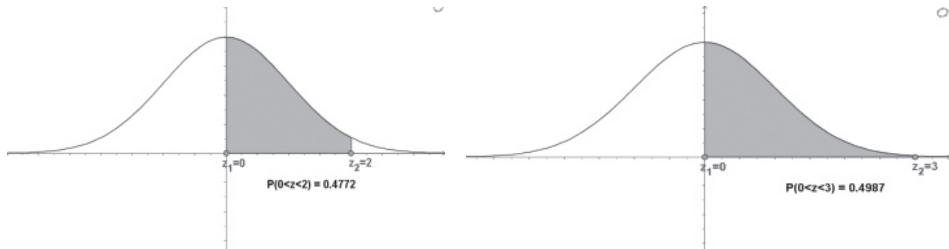
$$\text{Prop } (\mu - \sigma < X < \mu) = P(\mu < X < \mu + \sigma) = 0.50 - 0.1587 = 0.3413 \text{ ó}$$

$$P(-1 < Z < 0) = P(0 < Z < +1) = 34.13\%$$



De la misma forma, con 2 y 3 desviaciones estándar por encima y por debajo de la media hay 47.72% y 49.87% de individuos respectivamente.

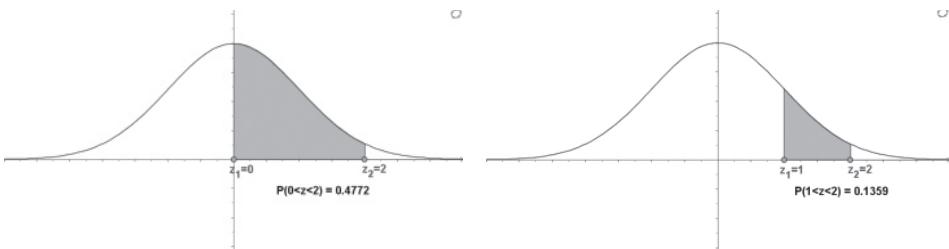
- Prop $(\mu - 2\sigma < X < \mu) = P(\mu < X < \mu + 2\sigma) = 0.5 - 0.0228 = 0.4772$ ó
 $P(-2 < Z < 0) = P(0 < Z < +2) = 0.4772$.
- Prop $(\mu - 3\sigma < X < \mu) = P(\mu < X < \mu + 3\sigma) = 0.5 - 0.0013 = 0.4987$ ó
 $P(-3 < Z < 0) = P(0 < Z < +3) = 0.4987$.



Otros ejemplos:

$$P(0 < Z < 2) = 0.5 - P(Z > 2) = 0.5 - 0.0228 \quad \text{y}$$

$$P(1 < Z < 2) = P(Z > 1) - P(Z > 2) = 0.1587 - 0.0228$$



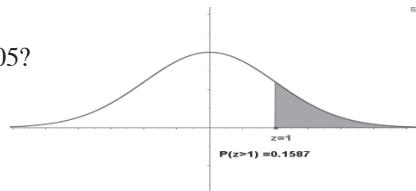
Ejemplo: Si la duración de la vida “T”, en la población de palomas de Macondo tiene $\mu = 100$ y $\sigma = 5$ y es DN

- a. ¿Qué proporción de palomas viven entre 90 y 100?

$$\begin{aligned} P(90 < X < 100) &= P(-2 < Z < 0) = P(0 < Z < 2) = 0.5 - P(Z > 2) = \\ &= 0.5 - 0.0228 = 0.4772 \quad (\text{Ver figura página anterior}) \end{aligned}$$

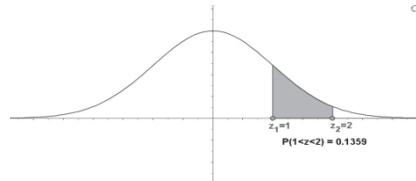
b. ¿Qué proporción de palomas viven más de 105?

$$P(X > 105) = P(Z > 1) = 0.1587.$$



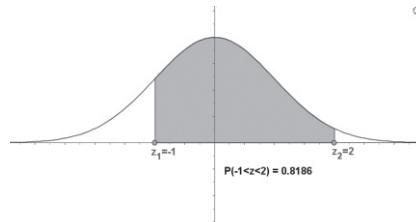
c. ¿Qué proporción viven entre 105 y 110?

$$\begin{aligned} P(105 < X < 110) &= P(1 < Z < 2) = \\ &= P(Z > 1) - P(Z > 2) = \\ &= 0.1587 - 0.0228 = 0.1359. \end{aligned}$$



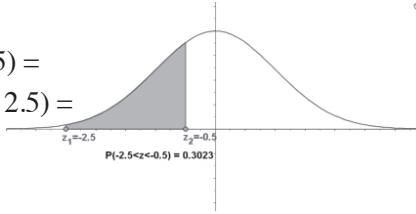
d. ¿Qué proporción viven entre 95 y 110?

$$\begin{aligned} P(95 < X < 110) &= P(-1 < Z < 2) = \\ &= P(-1 < Z < 0) + P(0 < Z < 2) = \\ &= P(0 < Z < 1) + P(0 < Z < 2) = \\ &= [0.5 - P(Z > 1)] + [0.5 - P(Z > 2)] = \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185. \end{aligned}$$



e. ¿Qué proporción viven entre 87.5 y 97.5?

$$\begin{aligned} P(87.5 < X < 97.5) &= P(-2.5 < Z < -0.5) = \\ &= P(0.5 < Z < 2.5) = P(Z > 0.5) - P(Z > 2.5) = \\ &= 0.3085 - 0.0062 = 0.3023. \end{aligned}$$



** **Ejercicio 7.1:** Si la variable H, con $\mu = 200$ y $\sigma = 16$, es Normal, calcular:

- $Prop(184 < H < 200) = Prop(200 < H < 216); P(184 < H < 216) =$
- $Prop(176 < H < 200) = Prop(200 < H < 224); P(176 < H < 224) =$
- $Prop(160 < H < 200) = Prop(200 < H < 240); P(160 < H < 240) =$

** **Ejercicio 7.2:** Si la variable “T”, duración de la vida en la población de gaviotas de Macondo tiene distribución Normal con $\mu = 100$ y $\sigma = 5$, es decir, $N(100, 5)$

- ¿Qué proporción de gaviotas viven entre 90 y 102.5?
- ¿Qué proporción de gaviotas viven más de 82.5?
- ¿Qué proporción de gaviotas viven menos de 102.5?
- ¿Qué proporción de gaviotas viven entre 97.5 y 102.5?
- ¿Qué proporción gaviotas viven entre 90 y 110?
- ¿Qué proporción de gaviotas viven entre 90 y 92.5?
- ¿Qué proporción de gaviotas viven entre 102.5 y 107.5?

** **Ejercicio 7.3:** Si hay 20 millones de españoles adultos y su peso tiene Distribución N (70, 10). Diga qué porcentaje y qué cantidad de españoles pesa:

- a. Menos de 60.
- b. Menos de 75.
- c. Menos de 92.
- d. Más de 80.
- e. Más de 50.
- f. Más de 71.
- g. Más de 92.
- h. Entre 50 y 60.

En este libro se anotará como “ Z_α ” el valor de Z que deja a su derecha probabilidad = α y la izquierda de su negativo otro tanto, de modo que entre ambas colas suman 2α de la probabilidad y por tanto, entre $-Z_\alpha$ y $+Z_\alpha$ queda el $1-2\alpha$ de la probabilidad de la Distribución Normal. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} Z_{0.01} &= 2.33 \text{ porque } P(Z > 2.33) = 0.01 \rightarrow P(-2.33 < Z < 2.33) = 0.98 \\ Z_{0.05} &= 1.65 \text{ porque } P(Z > 1.65) = 0.05 \rightarrow P(-1.65 < Z < 1.65) = 0.90 \\ Z_{0.09} &= 1.34 \text{ porque } P(Z > 1.39) = 0.09 \rightarrow P(-1.34 < Z < 1.34) = 0.82 \end{aligned}$$

En otros libros se anota como Z_α el valor de Z que deja a su derecha probabilidad = 2α . Ambos convenios son válidos si se recuerda lo que dicen.

7.3. Distribución de las Medias Muestrales en el MA

Vamos a estudiar cómo se distribuyen las medias muestrales, M , en el Muestreo Aleatorio, MA. La variable X en una población tiene Media y Desviación μ_x y σ_x . Hagamos MA y consideremos la población formada por las medias muestrales de muestras de N individuos:

$$M_1, M_2, M_3, \dots, M_{1000}, \dots, M_{1000000} \dots \dots \dots M_{1000000000} \dots$$

Tendremos tantas medias como muestras saquemos en el MA. Se trata de calcular, en esta larga lista de números, cuánto vale su media y su desviación. Cualquiera que sea la forma de la distribución de X y con cualquier N se cumple que la media y la desviación de las M son:

$$\boxed{\mu_M = \mu_X} \quad \boxed{\sigma_M = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}}$$

Ejemplo: Si X tiene en una población $\mu_x = 60$ y $\sigma_x = 6$ y se hace MA de $N = 4$,

$$\mu_M = 60 \quad y \quad \sigma_M = 6 / \sqrt{4} = 3$$

Es decir, la media de todas las M's es 60 (como la media de los individuos) y la σ entre las M's es 3 (menor que la σ entre los individuos).

Pero conocer la μ_M y σ_M no permite saber la distribución, es decir, la proporción de muestras con media en cualquier intervalo que sea de interés. Esas proporciones se conocen si es Distribución Normal. Y la distribución de las *medias muestrales* es Normal si se da una de estas dos condiciones:

- A- si X tiene DN en la población de individuos**
B- si el tamaño de las muestras es $N \geq 30$

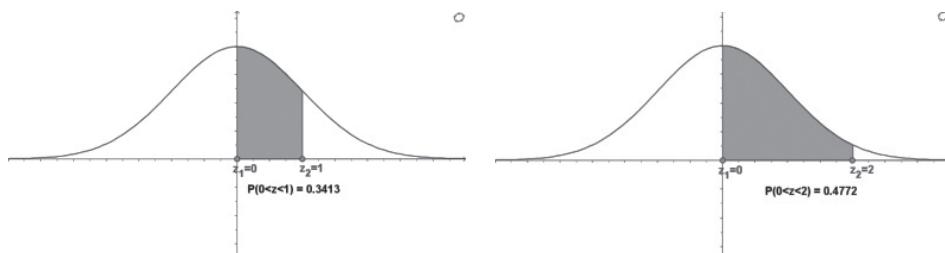
A- Si X tiene DN en la población de individuos, las M's también tienen DN.

Fíjese que estamos hablando de dos distribuciones diferentes:

- La distribución de la variable X, con media μ_X y desviación σ_X , nos dice el porcentaje de individuos con X en cada intervalo.
- La distribución de las medias de las muestras de N individuos, con media μ_M y desviación σ_M , nos dice el porcentaje de muestras con M en cada intervalo.

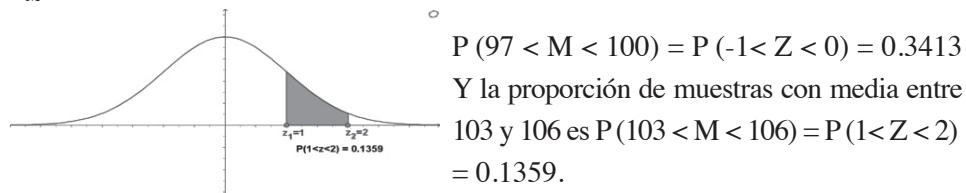
Ejemplo: Si el peso de los individuos de una población tiene distribución N (100, 24), la proporción de individuos con peso entre 100 y 112 es $P(100 < \text{Peso} < 112) = P(0 < Z < 0.5) = 0.5 - P(Z > 0.5) = 0.5 - 0.3085 = 0.1915$.

- Si hacemos MA con $N = 4$, las medias muestrales, M, tienen $\mu_M = 100$ y $\sigma_M = 24/2 = 12$. La proporción de muestras de 4 individuos con media entre 100 y 112 es $P(100 < M < 112) = P(0 < Z < 1) = 0.5 - P(Z > 1) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413$.
- Si hacemos MA con $N = 9$, las medias muestrales, M, tienen $\mu_M = 100$ y $\sigma_M = 24/3 = 8$. La proporción de muestras de 9 individuos con media entre 100 y 112 es $P(100 < M < 112) = P(0 < Z < 1.5) = 0.5 - P(Z > 1.5) = 0.5 - 0.0668 = 0.4332$.
- Si hacemos MA con $N = 16$, las medias muestrales, M, tienen $\mu_M = 100$ y $\sigma_M = 24/4 = 6$. La proporción de muestras de 16 individuos con media entre 100 y 112 es $P(100 < M < 112) = P(0 < Z < 2) = 0.5 - P(Z > 2) = 0.5 - 0.0228 = 0.4772$.



B- Teorema Central del Límite, TCL: Si $N \geq 30$, las medias muestrales, M, tienen, muy aproximadamente, DN, cualquiera que sea (Normal o no) la distribución de X en los individuos.

Ejemplo: Si en otra población X **no** tiene DN y es $\mu_X = 100$ y $\sigma_X = 24$ y hacemos MA de $N = 64$, las medias muestrales siguen DN (pues $N \geq 30$) con $\mu_M = 100$ y $\sigma_M = 24/\sqrt{64} = 3$ y la proporción de muestras con media entre 97 y 100 es:



El TCL constituye una herramienta fundamental en la Inferencia Estadística. Como acabamos de ver, dice que si $N \geq 30$, en el MA las medias muestrales se distribuyen muy aproximadamente de modo Normal, cualquiera que sea la forma de la distribución en la población. Esto nos permite calcular el porcentaje de muestras con media comprendida en cierto intervalo.

Distribución de las medias muestrales en el Muestreo Aleatorio		
	Siempre $\mu_M = \mu_x$ y $\sigma_M = \sigma_x / \sqrt{N}$	
	Distribución Normal en la población	Distribución <u>NO</u> Normal en población
$N < 30$	Las M tienen distribución Normal	Las M tienen distribución <u>NO</u> Normal
$N \geq 30$	Las M tienen distribución Normal	Las M tienen distribución Normal Teorema Central del Límite

C- Si X no tiene DN en la población de individuos y es $N < 30$, las medias muestrales no tienen DN (pero se cumple que $\mu_M = \mu$ y $\sigma_M = \sigma / \sqrt{N}$).

Ejemplo: Si H tiene distribución **no** Normal (**100, 24**), la proporción de individuos con H entre 100 y 112 es $P(100 < H < 112) = P(0 < Z < 0.5)$ es NO CONOCIDA.

- Si hacemos MA con $N = 4$, es $\mu_M = 100$ y $\sigma_M = 24 / 2 = 12$. La proporción de muestras con M entre 100 y 112: $P(100 < M < 112) = P(0 < Z < 1)$ es NO CONOCIDA.
- Si hacemos MA con $N = 9$, es $\mu_M = 100$ y $\sigma_M = 24 / 3 = 8$. La proporción de muestras con M entre 100 y 112 es $P(100 < M < 112) = P(0 < Z < 1.5)$ es NO CONOCIDA.
- Si hacemos MA con $N = 36$, es $\mu_M = 100$ y $\sigma_M = 24 / 6 = 4$ y tienen DN. La proporción de muestras con M entre 100 y 112 es $P(100 < M < 112) = P(0 < Z < 3) = 0.4987$, pues puede aplicarse el TCL al ser $N > 30$.
- Si hacemos MA con $N = 64$, es $\mu_M = 100$ y $\sigma_M = 24 / 8 = 3$ y tienen DN. La proporción de muestras con M entre 100 y 112 es $P(0 < Z < 4) = 0.49997$, por el TCL.

**** Ejercicio 7.4:** La variable X se distribuye en la población de modo **No** Normal con $\mu_x = 2000$ y $\sigma_x = 100$.

- Se hace MA de $N = 10$, ¿qué proporción de muestras tendrán $M > 1950$?
- Si se hace MA de $N = 64$, ¿qué proporción de muestras tendrán $M < 1975$?

**** Ejercicio 7.5:** El peso de los Recién Nacidos en España tiene $\mu = 3000$ y $\sigma = 200$ y distribución No Normal.

- Se hace MA de $N = 400$, ¿qué proporción de muestras tendrán $M > 3015$?
- Si se hace MA de $N = 9$, ¿qué proporción de muestras tendrán $M < 1066.7$?

**** Ejercicio 7.6:** La estatura de los españoles adultos se distribuye de modo Normal con $\mu = 160$ y $\sigma = 10$, que se suele indicar como $N(160, 10)$

- Si se hace MA de $N = 4$, ¿qué proporción de muestras tendrán $M < 166$?
- Si se hace MA de $N = 25$, ¿qué proporción de muestras tendrán $M < 166$?

**** Ejercicio 7.7:** El peso de la población de españoles tiene distribución N (80, 8)

- ¿Qué proporción de individuos pesan más de **64**: $P(X > 64)$?
- ¿Qué porcentaje de individuos pesa menos de **96**: $P(X < 96)$?
- Si tomo un individuo, ¿cuál es la prob de que pese más de 64 y menos de 96?

Si hacemos muestreo aleatorio de $N = 16$:

- ¿Cuál será la media y la σ de la distribución de las medias muestrales?
- ¿En qué proporción de muestras esperamos que sea $M > 78$?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea $77 < M < 79$?
- ¿Cuál es la prob de que la M se aleje de la poblacional en más de 4 unidades?
- Si tomamos una muestra aleatoria de $N = 100$, ¿cuál es la prob de que sea media muestral > 82.4 ?
- Si tomo dos muestras de $N = 100$, ¿cuál es la prob de que ambas tengan $M > 79$?

**** Ejercicio 7.8:** Se sabe que la supervivencia de una raza de animales se distribuye No Normal con $\mu = 50$ y $\sigma = 3$ en meses.

- ¿Qué proporción de animales viven entre 50 y 56 meses?
- Si se toma un individuo al azar, ¿cuál es la prob de que su supervivencia sea inferior a 47 meses? ¿Y de que sea superior a 59 meses?
- Si se toma una muestra de $N = 9$, ¿cuánto vale $P(M > 49)$?
- Si se toma una muestra de $N = 36$, ¿cuánto vale $P(M < 49.5)$?
- Si se toma una muestra de $N = 100$, ¿cuánto vale $P(49.7 < M < 50.45)$?

7.4. La DN es el límite de la Binomial con N grande y π fijo

Veíamos que se dice que una variable se distribuye de modo Normal si la proporción de valores en cada intervalo expresado en función de Z es el que indica la tabla de dicha distribución. Concretamente, en esta tabla podemos ver que:

Por encima de la media más **0.02** desviaciones hay un **49.20%** de los valores.

Por encima de la media más **0.04** desviaciones hay un **48.40%** de los valores.

Por encima de la media más **0.06** desviaciones hay un **47.61%** de los valores.

.....

Por encima de la media más **3.9** desviaciones hay **5** por **100 000** de los valores.

Por encima de la media más **4** desviaciones hay **3** por **100 000** de los valores.

¿De dónde salen esos porcentajes?

Aparece como el límite al que tiende la *Distribución Binomial* cuando se mantiene π y N toma valores muy grandes. La distribución Binomial da la prob de X individuos con la característica “C” en una muestra de tamaño N, siendo π la FR de individuos con C en la población. Por ejemplo, si en una población tienen C el 50% de los sujetos ($\pi = 0.50$), en una muestra de $N = 100$ la prob de que haya 55 con C es

$$P(55) = \frac{100!}{55! 45!} .5^{55} .5^{45} = 0.0485$$

Pero hay muchas situaciones en las que interesa conocer la prob de todos los valores comprendidos en un intervalo, por ejemplo, la prob de que en la muestra de $N = 100$ haya 55 o más con C. Para ello hay que sumar $P(55) + P(56) + (57) + \dots + P(100)$, calculadas con la fórmula anterior, lo que implica aplicarla 46 veces y sumar.

La media y la desviación de X y de $p = X / N$ (FR con C en la muestra) son:

$$\begin{aligned}\mu_x &= E = N \pi = \mathbf{50} & \sigma_x &= [\pi(1-\pi)N]^{1/2} = [0.5 \cdot 0.5 \cdot 100]^{1/2} = \mathbf{5} \\ \mu_p &= \pi = \mathbf{0.50} & \sigma_p &= [\pi(1-\pi)/N]^{1/2} = [0.5 \cdot 0.5 / 100]^{1/2} = \mathbf{0.05} \text{ ó } \mathbf{5\%}\end{aligned}$$

Podemos, por ejemplo, calcular la FR de muestras con $p \geq \mu_p + 1\sigma_p$, es decir, $p \geq 55\%$, es decir, $X \geq 55$: $P(X \geq 55) = P(55) + P(56) + P(57) + \dots + P(100) = 0.1841$.

De la misma forma podríamos calcular la FR de muestras con $p \geq \mu_p + 2\sigma_p$, es decir, $p \geq 60\%$, es decir, $X \geq 60$: $P(X \geq 60) = P(60) + P(61) + P(62) + \dots + P(100) = 0.0284$.

La siguiente tabla da las FR de muestras en los intervalos, $Z > 1$ y $Z > 2$, para el MA de $N = 100, 400, 10\,000$ y $40\,000$.

N	σ_p	$P(p \geq \mu_p + 1\sigma_p) = P(Z \geq 1)$	$P(p \geq \mu_p + 2\sigma_p) = P(Z \geq 2)$
100	5%	$P(p \geq 55\%) = \mathbf{0.1841}$	$P(p \geq 60\%) = \mathbf{0.0284}$
400	2.5%	$P(p \geq 52.5\%) = \mathbf{0.1711}$	$P(p \geq 55\%) = \mathbf{0.0255}$
10 000	0.5%	$P(p \geq 50.5\%) = \mathbf{0.1611}$	$P(p \geq 51\%) = \mathbf{0.0233}$
40 000	0.25%	$P(p \geq 50.25\%) = \mathbf{0.1599}$	$P(p \geq 50.5\%) = \mathbf{0.0231}$
		En la DN: $P(Z \geq 1) = \mathbf{0.1587}$	En la DN: $P(Z \geq 2) = \mathbf{0.0228}$

Cuanto mayor es N menor es σ_p , es decir, p toma valores más próximos a π , en este caso a 50%. Además observamos que a medida que crece N la FR de muestras con $p \geq \mu_p + 1\sigma_p$ y de muestras con $p \geq \mu_p + 2\sigma_p$ se aproxima más a las FR de la DN correspondientes a “ $Z > 1$ ” y “ $Z > 2$ ”.

Esas mismas tendencias se cumplen en toda Binomial, cualquiera que sea su valor π y para cualquier intervalo expresado en función de los valores Z . Veamos las FR de muestras con $p \geq \mu_p + 1.5\sigma_p$ para binomiales con $\pi = 20\%$ y N creciente:

$$N = \mathbf{2500} \rightarrow \mu_p = 20\% \text{ y } \sigma_p = [0.2 \cdot 0.8 / 2500]^{1/2} = 0.008 = 0.80\%$$

$$\mu_x = 0.20 \cdot 2500 = 500 \text{ y } \sigma_x = [0.2 \cdot 0.8 \cdot 2500]^{1/2} = 20$$

$$P(p \geq \mu_p + 1.5\sigma_p) = P(p \geq 21.20\%) = P(X \geq \mu_x + 1.5\sigma_x) = P(X \geq 530) = \underline{\underline{0.0709}}$$

$$N = \mathbf{10\,000} \rightarrow \mu_p = 20\% \text{ y } \sigma_p = [0.2 \cdot 0.8 / 10\,000]^{1/2} = 0.004 = 0.40\%$$

$$\mu_x = 0.20 \cdot 10\,000 = 2\,000 \text{ y } \sigma_x = [0.2 \cdot 0.8 \cdot 10\,000]^{1/2} = 40$$

$$P(p \geq \mu_p + 1.5\sigma_p) = P(p \geq 20.60\%) = P(X \geq \mu_x + 1.5\sigma_x) = P(X \geq 2060) = \underline{\underline{0.0688}}$$

$$N = \mathbf{62\,500} \rightarrow \mu_p = 20\% \text{ y } \sigma_p = [0.2 \cdot 0.8 / 62\,500]^{1/2} = 0.0016 = 0.16\%$$

$$\mu_x = 0.20 \cdot 62\,500 = 12\,500 \text{ y } \sigma_x = [0.2 \cdot 0.8 \cdot 62\,500]^{1/2} = 100$$

$$P(p \geq \mu_p + 1.5\sigma_p) = P(p \geq 20.24\%) = P(X \geq \mu_x + 1.5\sigma_x) = P(X \geq 12650) = \underline{\underline{0.0676}}$$

En la DN es $P(Z \geq 1.5) = \mathbf{0.0668}$.

La FR de muestras con p en otros intervalos expresados en Z (número de desviaciones estándar que cada valor se aleja de la media) también tiende, al crecer N , a la FR de valores en ese intervalo en la tabla de la DN. Esto permite usar la DN para calcular, con buena aproximación y notable ahorro de cálculo, las FR de muestras que aparecen en un intervalo de las distribuciones Binomiales. En el último ejemplo con $N = 62\,500$ para calcular $P(X \geq 12\,650) = P(X=12\,650) + P(X=12\,651) + \dots + P(X = 62\,500)$ hay que aplicar la fórmula binomial 49 850 veces para obtener la FR buscada, que es 0.0676. Mirando $P(Z \geq 1.5)$ en la DN se obtiene 0.0668, que se aproxima suficientemente al anterior. Con tamaños de muestra menores la aproximación es peor, pero con ciertas modificaciones llamadas “**correcciones por continuidad**” se consigue mejorar notablemente, como se muestra en el apartado 8.7. Por ello es muy frecuente en el Análisis de Datos utilizar esta “**Aproximación de la Binomial por la Normal**”

** **Ejercicio 7.9:** En una Binomial $B(400, 0.2)$ es $\mu_x = 80$ y $\sigma_x = 8$. En el MA

- ¿Qué proporción de muestras tienen $(80 < X \leq 88)$?
- ¿Qué proporción de muestras tienen $(80 < X \leq 96)$?

** **Ejercicio 7.10:** Se hace MA de $N = 4\,800$ de una población con 25% de albinos

- ¿Qué proporción de muestras tendrán entre 1 200 y 1 230 albinos?
- ¿Qué proporción de muestras tendrán entre 1 170 y 1 230 albinos?
- ¿Qué proporción de muestras tendrán entre 1 170 y 1 260 albinos?

** **Ejercicio 7.11:** En una Binomial $B(9\,600, 0.4)$ es $\mu_p = 40\%$ y $\sigma_p = 0.5\%$. En el MA

- ¿Qué proporción de muestras tienen $40\% < p \leq 40.50\%$?
- ¿Qué proporción de muestras tienen $40\% < p \leq 40.25\%$?

NO OLVIDE RECORDAR - 7

1. Los valores estandarizados, Z, dicen cuantas desviaciones se aleja un cierto valor de la variable de la media del grupo. Se calcula $Z = (X - \mu) / \sigma$

2. Se dice que una variable tiene Distribución Normal, DN, cuando:

Por encima de la media más **0.02** desviaciones hay un **49.20%** de los valores.

Por encima de la media más **0.04** desviaciones hay un **48.40%** de los valores.

Por encima de la media más **0.06** desviaciones hay un **47.61%** de los valores.

.....

Por encima de la media más **4** desviaciones hay **3 por 100 000** de los valores, y el resto de las proporciones que especifica la tabla correspondiente.

3. Muchas variables cuantitativas de la naturaleza, tanto viva como inerte, se ajustan a esa Distribución Normal, es decir, los porcentajes de individuos con valor de la variable comprendido en cualquier intervalo son muy próximos a los que postula esa distribución.
4. En el MA de tamaño N, las medias muestrales de variables numéricas, M, tienen media y desviación dadas por $\mu_M = \mu_x$ y $\sigma_M = \sigma_x / \sqrt{N}$, siendo μ_x y σ_x la media y desviación de la variable original.
5. En el MA, las medias muestrales de variables numéricas, X, tienen distribución próxima a la DN - se puede calcular el porcentaje de muestras con medias en cualquier intervalo - si la variable es Normal (cualquiera que sea N) o si $N \geq 30$ (cualquiera que sea la distribución de X).
6. En el Muestreo Aleatorio, MA, la proporción de individuos con cierta característica dicotómica tiene distribución próxima a la Normal si es $N \geq 30$. El número de individuos por muestra con la característica también tiene distribución próxima a la Normal.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 7

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

En una población de españoles adultos sanos el PESO (medido en kg) se distribuye de modo Normal con Media = 70 y $\sigma = 5$.

1. El 47.72% de los individuos de esa población tiene peso *menor* de 80 kg.
2. El 81.85% de los individuos pesan *más* de 60 y *menos* de 75 kg.
3. El 2.28% de los individuos de esa población pesan *más* de 60 kg.
4. Si se hiciera muestreo aleatorio, MA, de $N = 25$, las medias muestrales no se distribuirían de modo normal pues $N < 30$.
5. El 93.32% de las muestras del MA de $N = 25$ tienen media *menor* de 71.5 kg.
6. El 13.59% de las muestras del MA de $N = 25$ tienen media entre 71 y 72 kg.
7. El 15.87% de las muestras del MA de $N = 100$ tienen media *mayor* de 71 kg.

En otra población de individuos con cierta enfermedad, el PESO se distribuye de modo No Normal con Media = 75 y $\sigma = 9$.

8. Podemos afirmar que el 84.13% de los individuos pesa *más* de 66 kg.
9. El Teorema Central del Límite nos garantiza que en el MA de $N = 81$ de esta población, la desviación de las medias muestrales es 1.
10. Podemos afirmar que en el MA de $N = 9$, el 2.28% de las muestras tienen peso medio *mayor* de 81.
11. Podemos afirmar que el 13.59% de las muestras del MA de $N = 9$ tienen peso medio entre 78 y 81 kg.
12. El 53.85% de las muestras del MA de $N = 81$ tienen media entre 74 y 77 kg.
13. El 84.13% de las muestras del MA de $N = 81$ tienen media *mayor* de 66 kg.
14. En una población de un millón de personas la estatura tiene Media = 160 cm. y Desviación Estándar = 7. Si 66 800 de ellas miden *más* de 170.5 cm, diremos que ese dato concuerda con que la distribución de esa variable es Normal.
15. En una población de un millón de personas la estatura tiene media = 160 cm. y Desviación Estándar = 7. Si 841 300 de ellas miden *menos* de 167 cm, diremos que ese dato concuerda con que la distribución de esa variable es Normal.
16. En una población de un millón de personas la estatura tiene Media = 160 cm. y Desviación Estándar = 7. Si 630 300 de ellas miden *más* de 162 cm, diremos que ese dato concuerda con que la distribución de esa variable es Normal.

En cierta población el 30% de los individuos son miopes.

17. En el muestreo aleatorio (MA) de $N = 100$, la variable “número de miopes en cada muestra” tiene media = 30 y desviación estándar = 4.58.

18. En torno al 19% de las muestras de $N = 100$ individuos tendrán 34 o más miopes.
19. La probabilidad de obtener una muestra de $N = 100$ con menos de 38 miopes es aproximadamente 0.025.
20. En el MA de $N = 25$, aproximadamente el 55% de las muestras tendrán entre 8 y 10 miopes, ambos incluidos.
21. En el MA de $N = 25$, el 66% de las muestras tendrán menos de 10 miopes.

La Tensión Arterial (TA) de una población de individuos se distribuye Normal con Media = 150 y Desviación = 20 (en unidades especiales).

22. El 42.87 % de los individuos tienen T.A. menor de 160.
23. De cada 100 individuos, aproximadamente 29 tienen T.A. entre 140 y 170.
24. La probabilidad de hallar una muestra de $N = 10$ individuos con T.A. media mayor de 137.36 es 0.9772.
25. Aproximadamente el 68% de las muestras de $N = 100$ individuos tienen T.A. media entre 148 y 152.
26. De cada 1 000 muestras de $N = 100$ individuos, aproximadamente 135 tienen T.A. media entre 151 y 153.
27. Si tomo dos muestras de $N = 100$, la probabilidad de que las dos tengan TA media mayor de 151 es 0.0952.

En otra población hay 40% de hipertensos y la estatura se distribuye de modo NO NORMAL con Media =160 cm y Desviación = 30 cm.

28. Si se toma una muestra de $N = 200$, la probabilidad de que contenga menos de 70 hipertensos es 10% aproximadamente.
29. El 17% de las muestras de $N = 100$ personas tendrán menos de 70 hipertensos.
30. El 97.72% de los individuos de esta población mide más de 154 cm.
31. Si se toma una muestra de $N = 9$ individuos, la probabilidad de que la estatura media sea mayor de 154 cm es 97.72%.
32. Si se toma una muestra de $N = 100$ individuos, la probabilidad de que la estatura media sea mayor de 154 cm es 97.72%.

Capítulo 8

INFERENCIA ESTADÍSTICA CON UNA PROPORCIÓN

Los investigadores conviven constantemente con el problema de la Inferencia Estadística, IE ¿Es el hallazgo encontrado en la muestra analizada una verdad general válida para toda la población? ¿Qué resultados son mera anécdota particular de la muestra y cuáles válidos más allá de ella? Puesto que observa muestras que son solo una pequeña parte de la población que intenta conocer, esa pregunta es constante en su actividad científica, cualquiera que sea su campo de investigación.

Desde comienzos del siglo xx la Estadística pone al servicio de los investigadores dos herramientas para ayudarle en ese intento de extrapolar de la muestra a la población: los **Tests Estadísticos** y los **Intervalos de Confianza**. Pero el beneficio que podían proporcionar esos nuevos recursos se vio mermado por:

- a) El escaso uso de los Intervalos de Confianza.
- b) El uso excesivo y muchas veces incorrecto de los Tests.

En los Tests Estadísticos se usa el llamado valor P del test y la mayoría de los investigadores tienen notables dificultades para entender lo que indica ese valor y para usarlo correctamente. Pero aunque el cálculo de ese valor P y de los intervalos de confianza es una cuestión matemática, el tema puede ser entendido y aplicado correctamente usando únicamente la lógica común del hombre de la calle. Aquí lo presentamos sin utilizar ninguna herramienta matemática.

El Apéndice B insiste en la explicación de lo que mide el valor P con nuevos ejemplos y ejercicios. Una exposición más detallada y amplia, también sin herramienta matemática, se realiza en el libro:

**¿Qué significa estadísticamente significativo?
La falacia del criterio del 5% en la investigación científica**

Luis Prieto e Inmaculada Herranz. Editorial Díaz de Santos. 2005.

8.1. Inferencia Estadística con una proporción

El PIOS —Partido Independentista de Orejuela del Sordete— obtuvo en las últimas elecciones generales el **30%** de votos. En su intento de incrementar el número de seguidores deciden cambiar el nombre a PIROS —Partido Independentista Revolucionario de Orejuela del Sordete— y tras ese cambio encargan una encuesta sobre la intención de voto. En una muestra aleatoria de $N = 100$ personas resultó que **34** manifestaron intención de votarle si hubiera nuevas elecciones. Cuando el líder se dispone a celebrar que sus seguidores subieron del 30% al 34% una persona le hace notar que es una muestra pequeña y ese 34% de seguidores en ella puede no corresponderse con la FR de seguidores en la población general.

Recaban la asistencia de un estadístico y les dice, que en efecto, ese dato no permite concluir que ha aumentado la FR de seguidores, pues

- a) El Intervalo de Confianza al 95% es aproximadamente de **26%** a **42%**
- b) El test estadístico correspondiente da $P = \mathbf{0.15}$

El líder sigue haciendo cambios en el nombre y en la siguiente encuesta con $N = 100$ personas se encuentra que 46 se declaran dispuestos a votarles.

De nuevo piden asistencia de un estadístico y este les dice que este resultado apoya fuertemente la creencia en que ha aumentado realmente la FR de seguidores, pues

- a) El Intervalo de Confianza al 95% es aproximadamente de **38%** a **54%**
- b) El test estadístico correspondiente da $P = \mathbf{0.00003}$

Está muy comprobado y documentado que más del 98% de los profesionales con estudios superiores no entiende la información que el estadístico ha dado. En este capítulo se explican estos conceptos y se enseña a calcular esos valores.

Si en una muestra de tamaño **N** se encuentra que hay **X** individuos con cierta característica (como votar a un partido) la FR en la muestra es $p = X / N$. Conocer el valor de p en una muestra no permite conocer el valor de π en la población, pero a partir de p podremos calcular

- a) El llamado **Intervalo de Confianza**, IC, para π , de modo que tendremos gran confianza en que π esté dentro de él. El investigador puede elegir el nivel de confianza, pero cuanto mayor sea la confianza más ancho es el intervalo.
- b) El valor P del **Test de Significación**, TS, que puede ayudar a concluir que π **no** tiene cierto valor en que estamos interesados. En principio queremos saber cuánto vale π , pero a partir de una muestra eso no es posible. Pero sí es posible saber que π no vale cierta cantidad, lo cual puede ser muy útil. Los test estadísticos ayudan a saber cuánto NO vale el valor poblacional en que estamos interesados.

8.2. Intervalo de Confianza para proporción poblacional π

Un modo de hacer Inferencia Estadística es calcular un Intervalo de Confianza, IC, para el valor del parámetro en que estamos interesados. No hay razones estadísticas ni biológicas para elegir uno u otro nivel de confianza para el intervalo. Lo más habitual es calcularlos con una confianza del 95% o del 99%, pero el investigador decide la confianza que quiere tener y cuanto más confianza quiere, más ancho sale el intervalo. La fórmula utilizada es:

$$IC(\Pi) \equiv p \pm Z \cdot \sqrt{p(1-p)/N}$$

donde Z es el valor estandarizado que en la Distribución Normal deja entre él y su negativo una FR de individuos igual a la confianza que queremos para nuestro intervalo. Así, para IC al 95%, es $Z = 1.96$, porque por encima de $Z = 1.96$ está el 2.5% de los valores de la Distribución Normal, por debajo de $Z = -1.96$ hay otro 2.5% (la DN es simétrica) y entre $Z = -1.96$ y $Z = 1.96$ están el 95% de ellos. Y para una confianza de 99% es $Z = 2.58$ (ver tabla al final del libro).

Ejemplo: En una muestra de $N = 100$ personas hay 60 alérgicas a la aspirina, AA. La FR de AA en la muestra es $p = 0.60$. Calculamos el IC para π :

$$IC_{95\%} = 0.60 \pm 1.96 \cdot (0.6 \cdot 0.4 / 100)^{1/2} = 0.60 \pm 0.096 = 0.504 \text{ y } 0.696$$

$$IC_{99\%} = 0.60 \pm 2.58 \cdot (0.6 \cdot 0.4 / 100)^{1/2} = 0.60 \pm 0.126 = 0.474 \text{ y } 0.726$$

Tenemos confianza 95% en que la proporción poblacional de AA esté entre 0.504 y 0.696 y tenemos 99% de confianza en que esté entre 0.474 y 0.726.

Confianza 95% quiere decir que de cada 100 intervalos calculados con esa fórmula, 95 contienen realmente el valor de π , y en los otros 5 el valor del parámetro está fuera del intervalo.

En la vida cotidiana manejamos continuamente los intervalos de confianza y hacemos intervalos más anchos si queremos tener más confianza. Uno de los miles de ejemplos es decir, cuando no conocemos la edad de una persona, que “probablemente tiene entre 40 y 50 años”. Y si queremos un intervalo dentro del cual tengamos mayor confianza en que se encuentre su edad decimos, por ejemplo, que “está comprendida entre 35 y 55 años”.

Esta fórmula, basada en la aproximación de la Distribución Binomial a la Normal, da valores próximos a los exactos cuando el número de casos “positivos” (con la característica C), y el número de casos “negativos” (sin C) son mayores de 5. Cuando no se cumple esta condición hay que recurrir a cálculos mucho más pesados, pero la interpretación es la misma.

8.3. Tests de Significación con una proporción

Para mostrar el mecanismo lógico que se usa en los Tests de Significación, (tanto en IE como en la vida común) supongamos que en Alemania se estudió a cada individuo de la población para averiguar si era o no alérgico a la aspirina, AA, y se encontró que lo son el **20%** de la población: $\pi_A = 20\%$.

Se sospecha que la FR poblacional de AA es mayor de 20% en Bélgica, Córcega y Dinamarca. No pudiendo estudiar a todos los individuos de estas poblaciones, en cada país contaremos el número de AA en una muestra aleatoria de $N = 1\,000$, y calculamos la FR de AA en cada muestra, p_B , p_C y p_D , respectivamente. (pondremos la inicial del país como subíndice en la FR poblacional, π , y en la muestral, p). Para cada país consideremos la hipótesis: “El porcentaje de AA es en la población 20%”, es decir, la diferencia respecto a Alemania es *nula*. Se la llama **Hipótesis Nula** y se simboliza como H_0 . Se escribe $H_0: \pi = 20\%$.

¿Qué postura razonable se debe tomar, a partir de lo observado en cada muestra, acerca de la FR de AA en cada país π_B , π_C , π_D ?

1. Si entre los 1000 belgas se encuentran 970 AA $\rightarrow p_B = 97\%$, concluimos que
 - a) La π_B **no es** 20% (rechazamos H_0)
 - b) La π_B **puede ser** 20% (aceptamos H_0 como posible)
 - c) La π_B **es** 20% (afirmamos que H_0 es cierta)
2. Si entre los 1000 corsos se encuentran 210 AA $\rightarrow p_C = 21\%$, concluimos que
 - a) La π_C **no es** 20% (rechazamos H_0)
 - b) La π_C **puede ser** 20% (aceptamos H_0 como posible)
 - c) La π_C **es** 20% (afirmamos que H_0 es cierta)
- 3- Si entre los 1000 daneses se encuentran 200 AA $\rightarrow p_D = 20\%$, concluimos que
 - a) La π_D **no es** 20% (rechazamos H_0)
 - b) La π_D **puede ser** 20% (aceptamos H_0 como posible)
 - c) La π_D **es** 20% (afirmamos que H_0 es cierta)
4. ¿Qué p debe salir en la muestra para que sea razonable elegir la opción “c”?

Resumamos el razonamiento que hemos hecho en los supuestos anteriores para elegir, correctamente, 1-a, 2-b, 3-b y “ningún valor de p lleva a la opción c”:

1. Para cada país conocemos la FR de AA en la muestra, p , (92% en Bélgica, 21% en Córcega y 20% en Dinamarca) y queremos saber si la FR poblacional π puede ser 20% en cada uno de ellos, como lo es en Alemania.
2. A la idea que motiva la investigación se la llama **Hipótesis de Trabajo**. Aquí dice, para cada país, que en población la π de AA es mayor de 0.20, $\pi > 20\%$.
3. Se plantea la llamada **Hipótesis Nula**, H_0 , que dice que no es cierta la hipótesis de trabajo. Aquí H_0 dice que π es 20%, como en Alemania (es decir, la diferencia respecto a Alemania es *nula*).
4. Si H_0 es cierta *esperamos* que en la muestra sea $p = 20\%$ o un valor próximo a ese. Decimos que el Valor Esperado de la p es 20% o, lo que lo mismo, que el Valor Esperado de X , número de AA en la muestra, es 200 (puesto que $200/1\,000 = 0.20$ ó 20%).

5. Si X se aleja mucho del 200 (es decir, p se aleja de mucho de 0.20), la muestra constituye fuerte evidencia contra la H_0 y nos inclinamos por rechazarla. Si X es próximo a 200, la muestra no constituye evidencia contra la H_0 , no la rechazamos y la aceptamos como posible.

- Hipótesis de trabajo: $\pi > 20\%$
- Hipótesis Nula, H_0 : $\pi = 20\%$
- Valor esperado de p si es cierta H_0 : 20%

Si encontramos p mucho mayor que 20%, rechazamos H_0 , será $\pi > 20\%$.

Si encontramos p próxima a 20%, no rechazamos H_0 , puede ser $\pi = 20\%$.

En todos los casos de IE se sigue un razonamiento idéntico a este. Con valores p muy alejados o muy próximos al π de la H_0 no hay que hacer ningún cálculo complementario. Pero si la p toma valores moderadamente alejados de la π de la H_0 , no es claro si se debe rechazar H_0 o debe aceptarse como posible. En estos casos puede ayudar conocer el llamado **valor P** del test.

8.4. Valor P del test con Binomial con resultado extremo

Sigamos con el ejemplo en que la π de AA en Alemania es $\pi = 20\%$.

1. Sospechamos que también en España la π es mayor que en Alemania, es decir, $\pi_E > 20\%$. Se estudia una muestra de $N = 10$ españoles y se encuentra que todos ellos son AA, es decir, $X = 10$, $p = 100\%$. Este resultado sugiere que es $\pi_E > 20\%$. Pero al ser una muestra pequeña, el investigador piensa que podría ser $\pi_E = 20\%$ y que $p_E = 100\%$ puede haber aparecido en la muestra p . Puede ayudar a salir de la duda calcular el valor P del test, que en este caso es la prob de que salga una muestra con $p_E = 100\%$ de AA si en la población es $\pi_E = 20\%$. La Distribución Binomial nos da estas prob (capítulo 6).

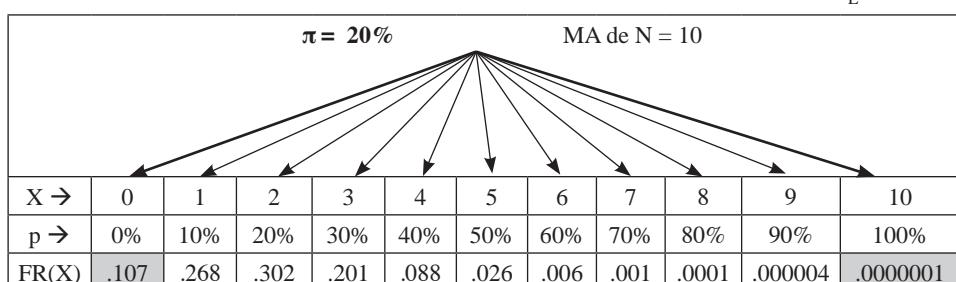
Hipótesis de Trabajo: En la población española son AA más del 20%, $\pi_E > 20\%$

Hipótesis Nula, H_0 : En la población española son AA el 20%, $\pi_E = 20\%$

Valor Esperado de p_E bajo la H_0 : 20% (valor esperado de X , número de AA, es 2)

Valor Observado: $p_E = 100\%$ (10 AA).

Valor P del Test = Probabilidad de sacar una muestra con 10 AA si es $\pi_E = 20\%$



$$P(p_E = 100\% \mid \pi_E = 20\%) \text{ ó } P(X = 10 \mid \pi_E = 20\%) = 0.0000001$$

Este valor de P quiere decir que si en España son AA el 20% de la población y se hace MA de tamaño N = 10, solamente en una muestra de cada 10 millones son AA los 10 individuos. Es decir, es muy infrecuente que en el MA de N = 10 aparezca una muestra con todos AA si en la población son AA el 20%. Este resultado (los 10 españoles AA) es muy fuerte evidencia contra la H_0 y a favor de que es $\pi_E > 20\%$.

2. Sospechamos que en Francia la π es menor que en Alemania, es decir, $\pi_F < 20\%$. Se estudia una muestra de 10 franceses y se encuentra que ninguno es AA, $X = 0$, $p = 0\%$. Este dato sugiere que es $\pi_F < 20\%$. Pero también puede podrían ser $\pi_F = 20\%$ y el p = 0% haber aparecido en la muestra por azar. En el esquema de la Distribución Binomial vemos que:

$$\text{Valor P del Test} = P(p_F = 0\% \mid \pi_F = 20\%) = P(X = 0 \mid \pi_F = 20\%) = 0.107$$

Si en Francia son AA el 20% de la población y se hace MA de N = 10, más de 10 muestras de cada 100 tienen ningún AA. Es frecuente que aparezca una muestra de N = 10 con ningún AA si en la población son AA el 20%. El resultado ($p_F = 0\%$) no es evidencia contra la H_0 . No queda demostrado que sea $\pi_F < 0.20$. El dato es compatible con que sea $\pi_F = 0.20$.

En estos ejemplos, el valor P del test es la prob de obtener una muestra como la obtenida en nuestro estudio si en la población son AA el 20%.

8.5. El valor P del test con resultado no extremo. P de la cola

Sigamos con el ejemplo en que la π de AA en Alemania es $\pi = 20\%$.

1. Sospechamos que en Georgia la π es mayor que en Alemania, es decir, $\pi_G > 20\%$. Se estudia una muestra de N = 10 georgianos y se encuentra que hay 5 AA, es decir, $X = 5$, $p_G = 50\%$. ¿Es este resultado compatible con que en la población haya 20% de AA, es decir, $\pi_G = 20\%$? En la Distribución Binomial vemos que:

$$P(p_G = 50\% \mid \pi_G = 20\%) = P(X = 5 \mid \pi_G = 20\%) = 0.026$$

Es decir, que si en Georgia son AA el 20% de la población y se hace MA de tamaño N = 10, en 26 muestras de cada 1 000 muestras será $p_G = 50\%$. Pero cuando el resultado no es el dato más extremo, como lo era en los dos ejemplos anteriores (0 ó 10 AA en la muestra de N = 10), se toma como valor P del test no la FR de muestras con ese porcentaje de AA, sino la FR de ellas con ese % o *cualquier otro más alejado del esperado* bajo la H_0 . En este ejemplo en que el % esperado en la muestra es 20%, porcentajes más alejados del esperado que el obtenido en la muestra son $p_G \geq 50\%$, es decir, 5 o más AA en la muestra de N = 10.

Veamos de nuevo la Distribución Binomial obtenida en el MA con $\pi = 20\%$, añadiendo una última fila que da la FR de muestras con X o más AA, si es X mayor que 2 y da la FR de muestras con X o menos AA si es X menor que 2. Estos valores, llamados “Prob de la cola” son los que se usan en los Tests Estadísticos.

	$\pi = 20\%$											MA de N = 10
X →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
p →	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%	
FR(X)	.107	.268	.302	.201	.088	.026	.006	.001	.0001	.000004	.0000001	
P _{COLA}	.107	.375		.322	.121	.033	.0071	.0011	.0001	.000004	.0000001	

Valor P del Test = $P(p_G \geq 50\% \text{ } | \text{ } \pi_G = 20\%) = P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) = 0.026 + 0.006 + 0.001 = 0.033$. Se desprecian $P(X=8)$, $P(X=9)$ y $P(X=10)$ por su pequeño valor.

El motivo por el que se toma como valor P del test la prob de encontrar una muestra como la de nuestro experimento o con estadístico aún más alejado del valor esperado bajo H_0 se ve en el próximo apartado.

2. Sospechamos que en Hungría la π es menor que en Alemania, es decir, $\pi_H < 20\%$. Se estudia una muestra de $N = 10$ húngaros y se encuentra que uno es AA, es decir, $X = 1$, $p_H = 10\%$. La P del test es $P(p_H \leq 10\%)$, pues 10% es menor que 20%.

$$\begin{aligned} \text{Valor P del Test} &= P(p_H \leq 10\% \text{ } | \text{ } \pi_H = 20\%) = P(X \leq 1 \text{ } | \text{ } \pi_H = 20\%) = \\ &= P(X=0) + P(X=1) = 0.107 + 0.268 = 0.375. \end{aligned}$$

Con este valor P no se rechaza H_0 , el 10% de AA obtenido en la muestra de húngaros es compatible con que en la población sean AA el 20%.

- ** **Ejercicio 8.1:** Sin tratamiento cierta enfermedad se cura en el 15% de los casos. Para ver si el tratamiento A es efectivo, es decir, si incrementa la FR de curaciones, se administra A a una muestra de 10 pacientes y se curan 3. ¿Qué pensamos acerca de la efectividad de A? Diga si es Verdadera o Falsa cada una de estas afirmaciones:

- La Hipótesis de Trabajo es: A es inútil, es decir, con A se curan el 15%.
- La Hipótesis de Trabajo es: A es útil, es decir, con A se curan más 15%.
- La Hipótesis Nula, H_0 , es: $\pi_A > 0.15$, es decir, A es útil.
- La Hipótesis Nula, H_0 , es: $\pi_A = 0.15$, es decir, A es inútil.
- El valor Esperado bajo la H_0 correcta es $E = 1.5$ curados, es decir 1 ó 2 curados.
- El valor Observado en la muestra es 3 curados.
- El valor P del test es la prob de tener muestra con 3 o más curados si es $\pi_A = 0.15$
- Para calcular ese valor P usamos la Distribución Binomial con $N = 10$ y $\pi = 0.30$.
- El valor P del test para la H_0 correcta es 0.18.
- Si A es útil y repitiéramos muchas veces este estudio con $N = 10$ tratados con A, en 18 de cada 100 estudios, aparecerían por azar 3 o más curados.
- El resultado puede aparecer espontáneamente, aunque A sea inútil.
- El resultado no constituye evidencia fuerte en contra de la inutilidad de A. No es una evidencia fuerte a favor de que A es efectivo.

**** Ejercicio 8.2:** Cierta enfermedad se cura espontáneamente en el 25% de los casos. Para averiguar si la medicina “B” aumenta la FR de curaciones se prueba en una muestra de 8 enfermos y se obtienen 6 curados, $p_B = 6 / 8 = 0.75$.

- La Hipótesis de Trabajo es:
- La H_0 es:
- Si es cierta la H_0 esperamos encontrar $p_B =$
- El valor observado de p_B es:
- $P(p_B = 75\% \mid \pi_A = 25\%) = P(X = 6 \mid \pi_A = 25\%) =$
- $P(p_B \geq 75\% \mid \pi_A = 25\%) = P(X \geq 6 \mid \pi_A = 25\%) =$
- El Valor P del test es:
- Interprete el valor P como frecuencia relativa de cierto tipo de muestras en el MA.
- ¿El resultado invita a rechazar H_0 o es fácilmente compatible con ella?

También pueden hacerse tests para otras hipótesis. Por ejemplo, para el caso de la enfermedad del ejercicio anterior, un médico piensa que “B” es muy efectiva, de modo que con ella realmente se curan el **50%** de los enfermos. Veamos si el resultado (6 curaciones de 8 tratados) es compatible con esa hipótesis:

- La H_0 es: $\pi_B = 50\%$.
- Si H_0 es cierta esperamos encontrar $p_B = 0.50$, es decir, 4 curaciones.
- El valor observado de p_B fue: 0.75, es decir, 6 curaciones.
- Valor P del test = $P(p_B \geq 75\% \mid \pi_B = 50\%) = P(X \geq 6 \mid \pi_B = 50\%) = 0.1094 + 0.0312 + 0.0039 = \mathbf{0.1445}$.

Si es $\pi_B = 50\%$ no resulta difícil que entre 8 tratados con “B” haya 6 curaciones. En 14 ó 15 de cada 100 estudios como este se obtendrían 6 o más curaciones en vez de las 4 teóricamente esperadas. El resultado es compatible con la hipótesis y no es evidencia contra ella.

Otro médico puede pensar que con “B” realmente se curan el **30%** de los enfermos. Veamos si el resultado (6 curaciones de 8 tratados con “B”) es compatible con esa hipótesis o más bien invita a rechazarla.

- La H_0 es: $\pi_B = 30\%$.
- Si H_0 es cierta esperamos encontrar $p_B = 0.30$.
El número esperado de curaciones es $8 \cdot 0.3 = 2.4$, es decir, 2 ó 3.
- El valor observado fue 6 curaciones, $p_B = 0.75$,
- Valor P del test = $P(p_B \geq 75\% \mid \pi_A = 30\%) = P(X \geq 6 \mid \pi_A = 30\%) = 0.0100 + 0.0012 + 0.0001 = \mathbf{0.0113}$.

Si es $\pi_B = 30\%$ no resulta muy fácil que entre 8 tratados haya 6 curaciones. En poco más de 1 de cada 100 estudios como este se obtendrían 6 o más curaciones en vez de las 2 ó 3 teóricamente esperadas. El resultado es difícilmente compatible con esa hipótesis y es evidencia contra ella, aunque no definitiva.

Otro médico cree que “B” es perjudicial, de modo que con él curan solamente el **5%** de los enfermos. Veamos si el resultado (6 curaciones de 8 tratados) es compatible con esa hipótesis:

1. La H_0 es: $\pi_B = 5\%$.
2. Si H_0 es cierta esperamos encontrar $p_B = 0.05$.
El número esperado de curaciones es $8 \cdot 0.05 = 0.4$, es decir, 0 ó 1.
3. El valor observado de p_B fue 0.75.
4. P del test = $P(p_B \geq 75\% \mid \pi_B = 5\%) = P(X \geq 6 \mid \pi_B = 5\%) < \mathbf{0.0000}$

Si es $\pi_B = 5\%$ resulta muy difícil que entre 8 tratados haya 6 curaciones. En menos de 1 de cada 10 000 estudios como este se obtendrían 6 o más curaciones. El dato es muy difícilmente compatible con esa H_0 y por ello muy fuerte evidencia contra ella.

**** Ejercicio 8.3:** Cierta enfermedad cura espontáneamente en el 5% de los casos. Para averiguar si la medicina “C” aumenta la FR de curaciones se prueba en una muestra de 9 enfermos y se obtienen curación en 3 de ellos, $p_C = 3 / 9 = 0.33$.

- a. La Hipótesis de trabajo es:
- b. La H_0 es:
- c. Si es cierta la H_0 correctamente planteada, esperamos encontrar $p_C =$
- d. El valor observado de p_C fue:
- e. Valor P del test =
- f. Interprete el valor P como frecuencia relativa de cierto tipo de muestra en el MA.
- g. ¿Invita el resultado a rechazar H_0 o más bien a no rechazarla?

**** Ejercicio 8.4:** Un médico cree que “C” es muy efectivo para la enfermedad del ejercicio anterior, de modo que realmente con “C” se curan el 50% de esos enfermos. Veamos si el resultado (3 curaciones de 9 tratados con “C”) es compatible con la H_0 .

- a. La H_0 es:
- b. Si H_0 es cierta esperamos encontrar $p_C =$
- c. El valor observado de p_C fue:
- d. Valor P del test =
- e. Interprete el valor P como frecuencia relativa de cierto tipo de muestra en el MA.
- f. ¿Invita el resultado a rechazar H_0 o más bien a no rechazarla?

8.6. Probabilidad del valor encontrado en la muestra y probabilidad de la cola

También se sospecha que en Italia, en Japón, en Kenia y en Lituania la π de individuos con AA es mayor que 20%. Para cada país se toma una muestra de $N = 1000$. El sentido común nos llevaba en el apartado 8.3 a estas conclusiones:

Bélgica: → $p = 97\%$, concluimos que π_B **no es** 20%

Córcega: → $p = 21\%$, concluimos que π_C **puede ser** 20%

Dinamarca: → $p = 20\%$, concluimos que π_D **puede ser** 20%

Pero con p no muy lejano ni muy cercano a 20% los investigadores no tienen claro qué postura deben tomar y para ello puede ayudar conocer el valor P del test.

1. En **Italia** se encontró que entre las 1 000 personas eran AA **400**, es decir, $p_I = 40\%$. Podría parecer que el dato es compatible con H_0 , es decir, que no es muy difícil que salga $p_I = 40\%$ si es $\pi_I = 20\%$. Pero calculemos valor P del test.

La siguiente tabla da algunos valores de la distribución Binomial. La última fila da las prob de las colas. Por ejemplo, la P_{COLA} de $p = 21\%$ o $X = 210$ es la suma de $P(210) + P(211) + P(212) + \dots + P(999) + P(1000) = 0.2253$, ya que valores más alejados de 200 que 210 son 211, 212, 213, ..., hasta 1 000. Y la P_{cola} de $p = 19\%$ o $X = 190$ es $P(190) + P(189) + P(188) + \dots + P(0) = 0.2274$.

	$\pi = 20\%$										
	MA de N = 1000										
$X \rightarrow$	50	180	190	200	210	220	250	300	400		
$p \rightarrow$	5%	18%	19%	20%	21%	22%	25%	30%	40%		
$P(X)$	10^{-42}	.0091	.023	.032	.0227	.0090	.00002	10^{-14}	10^{-48}		
P_{COLA}	10^{-41}	.0602	.2274		.2253	.0628	.00007	10^{-13}	10^{-47}		

Vemos que si es $\pi_I = 20\%$, la prob de que en una muestra de 1 000 haya 400 AA es 10^{-48} y la prob de que haya 400 o más AA es 10^{-47} .

$$P(p_I = 40\% \mid \pi_I = 20\%) = P(X = 400 \mid \pi_I = 20\%) = 10^{-48}$$

$$\text{Valor P del Test} = P(p_I \geq 40\% \mid \pi_I = 20\%) = P(X \geq 400 \mid \pi_I = 20\%) = 10^{-47}$$

Son prob tan extremadamente pequeñas que se desprecian a todos los efectos. Es prácticamente imposible que salga $p_I = 0.40$ si es $\pi_I = 20\%$. Si la muestra tiene 40% de AA, en la población no pueden ser AA el 20%. En este caso la prob del valor y la prob de la cola son muy parecidas y dicen lo mismo, pero en otros casos esas dos prob son diferentes y es la de la cola la que indica la compatibilidad o incompatibilidad del dato con la H_0 .

2. En **Japón** se encontraron **250** personas con AA entre las 1 000 de la muestra, $p_J = 25\%$. Podría parecer que el dato es compatible con H_0 , es decir, que no es difícil que salga $p_J = 25\%$ si es $\pi_J = 20\%$, puesto que la diferencia es solamente de 5 puntos. Pero la muestra es muy grande y la Ley del azar nos dice que en muestras tan grandes la p toma valores muy próximos a la π . En la tabla anterior vemos que

$$P(p_J = 25\% \mid \pi_J = 20\%) = P(X = 250 \mid \pi_J = 20\%) = 0.00002$$

$$\text{Valor P del Test} = P(p_J \geq 25\% \mid \pi_J = 20\%) = P(X \geq 250 \mid \pi_J = 20\%) = 0.00007$$

Si en la población nipona son AA el 20%, solo 7 de cada cien mil muestras de $N = 1 000$ tendrán 25% o más AA. Este pequeño valor de P invita a rechazar H_0 y concluir que es $\pi_J > 20\%$. También en este caso la prob del valor y la prob de la cola son muy parecidas, pero en el siguiente ejemplo hay clara diferencia entre ellas.

3. En **Kenia** se encontró que entre las 1 000 personas eran AA **210**, $p_K = 21\%$. Todos los investigadores consideran este dato compatible con H_0 , es decir, que no es difícil que salga, $p_K = 21\%$ si es $\pi_K = 20\%$, puesto que la diferencia entre lo

esperado bajo la H_0 y lo encontrado es solamente de 1 punto porcentual. Pero en la tabla anterior vemos que $P(p_K = 21\% \mid \pi_K = 20\%) = P(X = 210 \mid \pi_K = 20\%) = 0.0227$, un valor bastante bajo que podría considerarse al menos moderada evidencia contra la H_0 . Pero la prob de la cola es

$$\text{Valor P del Test} = P(p_k \geq 21\% \mid \pi_k = 20\%) = P(X \geq 210 \mid \pi_k = 20\%) = 0.2253$$

Si es $\pi_k = 20\%$, de cada cien muestras de $N = 1000$, más de 22 muestras tendrán 21% o más AA. Este valor no invita a rechazar H_0 , pues valores muestrales próximos a él aparecen con frecuencia en las muestras si en la población son AA el 20%.

4. En Lituania se encontró que entre las 1 000 personas eran AA 200, $p_L = 20\%$, justamente lo que teóricamente se espera tener si es cierta H_0 . En estos casos **no tiene sentido calcular el valor del test**, puesto que este indica la prob de obtener un resultado que *se aleje* de lo propuesto por H_0 tanto como se aleja el de nuestra muestra o más. Pero el valor de la muestra *NO se aleja* del propuesto por H_0 , sino que coincide exactamente con él. Ese resultado es el más compatible con H_0 , el que menos invita a rechazarla. Pero, por supuesto, no permite afirmar que es cierta.

En la tabla vemos que $P(p_L = 20\% | \pi_L = 20\%) = P(X = 200 | \pi_L = 20\%) = 0.032$. Pero ese valor no constituye evidencia en contra de que sea $\pi_L = 20\%$. Con Binomiales de N muy grande o con variables continuas la prob de que en la muestras el estadístico tenga un valor determinado se aproxima a cero, tanto si este valor es muy lejano al esperado bajo la H_0 como si es muy cercano a él, o incluso coincide con él, por lo que **no** informa sobre la compatibilidad de ese resultado con la H_0 . Por ello se usa la P de la cola para cuantificar la compatibilidad o incompatibilidad de los datos con la H_0 . Esto se ve aun más claramente en el siguiente ejemplo.

5. En **Macondo** se tomó una muestra de $N = 10\,000$ personas y eran AA 2010, $p_L = 0.201$ o 20.1%. En la siguiente tabla se dan las prob de algunos valores de X para una población con $\pi = 20\%$ y MA de $N = 10\,000$. Vemos que $P(X = 2010) = 0.0096$. Pero ello no quiere decir que una muestra con 2010 es difícilmente compatible con que en la población sea $\pi = 0.20$. El sentido común sugiere que es fácil obtener muestras con X próxima a 2010 si es $\pi = 0.20$. La P_{COLA} de $p = 0.201$ o $X = 2010$ es $P(2010) + P(2011) + P(2012) + \dots + P(9\,999) + P(10\,000) = 0.4641$. Nos dice que en el MA aparecen muchas muestras con $p = 20.1\%$ o mayor, es decir, que ese valor de p muestral es totalmente compatible con $\pi = 20\%$. Vemos también que la muestra con 2 000 individuos positivos (el resultado más compatible con la H_0) tiene prob de 0.0099, es decir, menor de 1%.

	$\pi = 20\%$		MA de N = 10 000							
X →	0	1 900	1950	2 000	2010	2 050	2 100	2 150	2 200	
p →	5%	19%	19.5%	20%	20.1%	20.5%	21%	21.5%	25%	
P(x)	$2 \cdot 10^{-8}$.0006	.0046	.0099	.0096	.0046	.0004	.00001	10^{-35}	
P _{COLA}	10^{-194}	.0007	.1077		.4641	.1082	.0067	.00009	10^{-36}	

Por otra parte, comparando esta tabla con la anterior correspondiente a $N = 1\,000$, se constata que, por ejemplo, en el MA con $N = 1\,000$ tienen p mayor de 21% más de 225 cada mil muestras, mientras que en el MA con $N = 10\,000$, tienen p mayor de 21% menos de 7 cada mil muestras. Es decir, si es $\pi = 20\%$:

$$\text{Con } N = 1\,000 \rightarrow P(p \geq 21\%) = P(X \geq 210) = 0.2253$$

$$\text{Con } N = 10\,000 \rightarrow P(p \geq 21\%) = P(X \geq 2\,100) = 0.0067$$

Es un ejemplo claro de cómo un mismo “efecto” en la muestra (21% de casos positivos) no nos lleva a rechazar la H_0 con un tamaño de muestra y nos lleva a rechazarla con otro tamaño de muestra mayor.

8.7. Cálculo del valor P del test en Binomial con N grande. Aproximación Normal.

En la muestra de **Kenia** se encontró $X = 210$ AA, $p_K = 21\%$ de AA. El valor P del test es $P(p_K \geq 21\% \mid \pi_K = 20\%) = P(X \geq 210) = P(X = 210) + P(X = 211) + P(X = 212) + \dots + P(X = 1\,000) = 0.2253$. Para llegar a ese valor P hay que calcular y sumar 791 probabilidades con la fórmula Binomial. Pero se alcanza una buena aproximación recordando del capítulo 6 que en la Binomial la media y la desviación estándar de p en el MA son $\mu_p = \pi$ y $\sigma_p = \{\pi \cdot (1 - \pi) / N\}^{1/2}$, y recordando del Capítulo 7 que la FR de muestras con p superior a un valor depende solamente de Z , número de desviaciones que ese valor de p se aleja de la π poblacional (esa aproximación es buena con número de casos esperados positivos y negativos mayor de 5).

En este ejemplo es $\sigma_p = (0.2 \cdot 0.8 / 1\,000)^{1/2} = 0.0126$. $Z = (0.21 - 0.20) / 0.0126 = 0.79$. El valor $p = 0.21$ encontrado en la muestra se aleja 0.79 desviaciones de 0.20, que es la media de p en el MA si en la población es $\pi = 0.20$. La tabla de la DN nos dicen que la FR de valores con Z mayor de 0.79 es **0.214**, cantidad suficientemente parecida al valor exacto **0.225** como para usar esta aproximación.

$$\text{En general, el cálculo es } Z = \frac{|\pi - p|}{\sigma_p} = \frac{|\pi - p|}{\sqrt{\pi \cdot (1 - \pi) / N}}$$

que multiplicando numerador y denominador por N se puede escribir también como

$$Z = \frac{|E - X|}{\sigma_X} = \frac{|E - X|}{\sqrt{\pi \cdot (1 - \pi) \cdot N}}$$

donde E es la cantidad esperada de casos bajo la H_0 , $E = \pi \cdot N$ y el valor P del test se obtiene mirando en las tablas de la DN la FR para Z mayor que el obtenido.

Nota 1: El valor P encontrado con la aproximación de la DN se aproxima más al verdadero de la distribución Binomial si se aplica la llamada “corrección por continuidad”, **cpc**, que consiste en ampliar el intervalo de interés en 0.5 unidades, de modo que las fórmulas quedarían de esta forma, que el lector verá en los textos:

$$Z = \frac{|\pi - p| - 0.5}{\sqrt{\pi \cdot (1 - \pi) / N}} \quad Z = \frac{|E - X| - 0.5}{\sqrt{\pi \cdot (1 - \pi) \cdot N}}$$

En nuestro ejemplo el intervalo de interés es $p \geq 21\%$ y la fórmula es $Z = (0.01 - 0.5 / 1000) / 0.0126 = 0.754$ y $P(Z > 0.754) = 0.2254$, muy próximo al verdadero valor P calculado con la Binomial. En general la aproximación es mejor aplicando cpc, pero en nuestros ejercicios no la aplicaremos para simplificar el cálculo.

Nota 2: Con valores de π muy pequeños, digamos menores de 0.01, $(1 - \pi)$ se approxima mucho a 1 y la expresión $Z = |E - X| / [\pi \cdot (1 - \pi) \cdot N]^{1/2}$ se aproxima mucho a $Z = |E - X| / (\pi \cdot N)^{1/2} = |E - X| / E^{1/2}$, que también puede escribirse como

$$Z^2 = \frac{(E - O)^2}{E}$$

donde X, núm. de individuos “positivos” en la muestra, aquí se indica por “O”.

Ejemplo: En la población general son hipertensos el 0.8% ($\pi=0.008$) de los jóvenes y en una muestra de 250 jóvenes sedentarios son hipertensos 7. ¿Es razonable concluir que el sedentarismo produce incremento de la FR de hipertensos? Hipótesis de trabajo: $\pi_{SED} > 0.008$, $H_0: \pi_{SED} = 0.008$, E bajo $H_0 = 0.008 \times 250 = 2$. Valor Observado: $O = 7 \rightarrow Z^2 = (2 - 7)^2 / 2 = 12.5 \rightarrow Z = 3.5 \rightarrow P = 0.0002$. El resultado (7 hipertensos de 250 jóvenes) es difícilmente compatible con que $\pi_{SED} = 0.008$. Se rechaza H_0 . Concluimos que entre los sedentarios hay más de 0.8% de hipertensos.

** **Ejercicio 8.5:** En una muestra de $N = 200$ se encuentran $X = 140$ individuos con cierta característica C, $p = 0.70$. Haremos tests para ciertos valores de π .

- Haga test para $H_0: \pi = 67\%$. Diga cuánto es el p esperado, p observado, Z y P.
- Haga test para $H_0: \pi = 50\%$. Diga cuánto es el p esperado, p observado, Z y P.
- Haga test para $H_0: \pi = 64\%$. Diga cuánto es el p esperado, p observado, Z y P.
- ¿Con cuáles de esas hipótesis son compatibles los datos?
- Calcule e interprete $IC_{95\%}$ e $IC_{99\%}$.

** **Ejercicio 8.6:** En una muestra aleatoria de $N = 30$ personas aparecen 10 diabéticos, $p = 10/30 = 0.33$.

- Calcular el $IC_{95\%}$ para la proporción poblacional, π .
- Calcular el valor P del test para la H_0 que dice que π es **0.25**.
- Calcular el valor P del test para la H_0 que dice que π es **0.10**.
- ¿Qué se puede concluir acerca de la proporción de diabéticos en la población de la que se extrajo la muestra de 30 personas?

** **Ejercicio 8.7:** En cierta enfermedad, para la que no hay tratamiento, curan el 40% de los pacientes. Se prueba el fármaco “A” en una muestra de 80 enfermos y se curan 60, $p = 60/80 = 0.75$. Pero no se conoce π_A , la FR que se curaría si se aplicara A a todos los pacientes. Si es $\pi_A = 0.4$ A es inútil y si es $\pi_A > 0.4$ A es útil.

- El $IC_{95\%}$ para π_A , es **0.66** y **0.84**. Compruebe que es correcto e interprétele.
- Para la $H_0: \pi_A = 0.40$ (A es inútil) se obtiene $P_{UNIL} = 10^{-8}$. Interprete este valor.
- ¿Qué se concluye del anterior resultado respecto a la eficacia de A?

- d. Un científico cree que con A se curan 30% más que sin tratamiento, es decir, $\pi_A = 0.70$. Planteada la $H_0: \pi = 0.70$ se obtiene $P_{\text{UNI}} = 0.16$. Compruebe, utilizando la DN, que el valor P del test es el indicado e interprete este valor como frecuencia relativa.

8.8. Resultados estadísticamente “significativos” y “muy significativos”. Las barreras del 5% y del 1%

Es evidente que con, por ejemplo, $P = 0.0000001$ rechazamos la H_0 , porque el dato es muy difícilmente compatible con ella, y con $P = 0.20$ no rechazamos H_0 , porque el dato es compatible con ella. ¿Pero qué postura tomamos con, por ejemplo, $P = 0.03$, que no es ni tan pequeño como el primero ni tan grande como el segundo?

No hay ningún criterio matemático, biológico ni sociológico, para establecer un valor de P frontera tal que por debajo de él se rechaza la H_0 y por encima de él se acepta como posible. Cuanto menor es el valor P, más evidencia constituye contra la hipótesis nula, pero no hay una cifra que separe la zona de aceptación de la H_0 de la zona de rechazo. El paso de una a otra es **gradual**, con una *zona de transición* en la que el valor P no invita claramente a tomar ninguna de las dos posturas. El valor $P = 0.05$ no debe ser interpretado como un límite que separa la zona de rechazo de H_0 de la zona de aceptación. Los valores $P = 0.06$ ó $P = 0.04$, por ejemplo, nos dicen prácticamente lo mismo acerca de nuestra sospecha de que H_0 es falsa y ninguno de los tres garantiza que lo sea.

Solamente en una tesitura de *toma de decisiones* fácticas (infrecuente en la investigación científica) debemos convenir un valor P por debajo del cual se *ejecuta una acción* y por encima de él se ejecuta otra. Pero cuando el objetivo no es tomar decisiones fácticas sino adquirir conocimiento (lo habitual en investigación, análisis de encuestas y estudios de mercado), no hay valor P frontera.

Es habitual decir que el resultado es “**estadísticamente significativo**” cuando es $P \leq 0.05$. Esto puede ser un convenio útil si se sabe lo que indica. Pero si no se entiende ese convenio puede generar más confusión que ayuda. Un error muy frecuente es creer que “estadísticamente significativo” indica que queda probada la hipótesis de trabajo. Pero acabamos de ver que “estadísticamente significativo” es otro modo de decir “ $P \leq 0.05$ ”, lo cual apunta hacia que H_0 no es cierta, pero no lo garantiza. Al rechazar la H_0 cuando se encuentra “ $P \leq 0.05$ ” corremos un riesgo de 5% de rechazar hipótesis nulas que son ciertas. Es decir, si rechazamos las H_0 cuando encontramos $P \leq 0.05$, a la larga rechazaremos, equivocadamente, 5 de cada cien H_0 ciertas.

La evidencia contra H_0 aumenta al disminuir el valor P. Cuando se obtiene $P \leq 0.01$ se suele hablar de resultado “**estadísticamente muy significativo**”. También puede ser un convenio útil siempre que esté claro que “muy significativo” es otro modo de decir “ $P \leq 0.01$ ”. Ello implica notable sospecha en que la H_0 es falsa, pero no seguridad definitiva. Al rechazar la H_0 cuando se encuentra $P \leq 0.01$ corremos riesgo de 1% de rechazar hipótesis nulas que son ciertas. Por ejemplo, si un dado

homogéneo en el que realmente cada cara sale a la larga un sexto de las veces, se tira tres veces, la prob de que salgan tres “6” es 0.004, menor de 0.01 y todos los jugadores de parchís saben que ese suceso no es tan infrecuente.

Resumiendo:

1. La disyuntiva no está entre rechazar H_0 si P es pequeña y *afirmar que es cierta* si P es grande. Ningún valor de P permite concluir que H_0 es cierta. Rechazamos H_0 si P es muy pequeño, por ejemplo, $P = 0.000001$ y no la rechazamos si P es grande, por ejemplo, $P = 0.30$.
2. **No** hay un valor P frontera, que lleve a rechazar H_0 con valores P menores que esa frontera y a no rechazarla con valores P mayores que ella.
3. “**Estadísticamente significativo**” es sinónimo de $P \leq 0.05$, que implica cierta evidencia contra la H_0 , pero sin darnos seguridad de que es falsa.
4. “**Estadísticamente muy significativo**” es sinónimo de es $P \leq 0.01$, que supone notable evidencia contra la H_0 , pero, sin darnos seguridad total de que es falsa.
5. Si se rechazan las H_0 ’s cuando es $P \leq 0.05$, a la larga se rechazarán erróneamente 5 de cada 100 H_0 ’s ciertas. Y si se rechazan las H_0 ’s cuando es $P \leq 0.01$, a la larga se rechazarán erróneamente 1 de cada 100 H_0 ’s ciertas. Ejemplo: un laboratorio busca medicamentos útiles para cierta enfermedad y prueba con muchos. Para cada uno de ellos plantea como H_0 que no es útil. Si la rechaza cuando aparece $P < 0.05$, a la larga declarará como útiles 5 de cada 100 medicamentos inútiles. Y si rechaza H_0 cuando aparece $P < 0.01$, a la larga declarará como útiles a 1 de cada 100 medicamentos inútiles.

** **Ejercicio 8.8:** Una enfermedad se cura sin tratamiento en el 15% de los casos, $\pi = 0.15$. Sospechamos que el nuevo tratamiento “T” cura más de 15%. Se hace un estudio tratando $N = 8$ enfermos con T y se plantea la H_0 : T es inútil. La tabla da la Distribución Binomial para $N = 8$ y $\pi = 15\%$ y las FR de las colas:

		$\pi = 15\%$								MA de $N = 8$	
X →	0	1	2	3	4	5	6	7	8		
p →	0%	12.5%	25%	37.5%	50%	62.5%	75%	87.5%	100%		
FR(X)	.273	.3847	.2376	.0839	.0185	.0026	.0002	.00001	.0000002		
Valor P			.3428	.1052	.0213	.0028	.0002	.00001	.0000002		

Diga si es Verdadera o Falsa cada una de estas afirmaciones:

- a. Si en la muestra de 8 tratados aparecen **8** curaciones, es $P = 0.0000002$, lo que nos lleva a rechazar H_0 y concluir que T es útil (cura más de 15%)
- b. Si en la muestra de los 8 tratados hay **3** curaciones, es $P = 0.1052$, que no lleva a rechazar H_0 sino a decir que el resultado es compatible con que T cure el 15%.
- c. Si en la muestra hay **4** curaciones, es $P = 0.0213$, lo que nos lleva a estar prácticamente seguros de que T es útil (cura más de 15%).

- d. Si en la muestra hay **4** curaciones, es $P = 0.0213$ y calificamos el resultado como “estadísticamente significativo”.
- e. Resultado “estadísticamente significativo” quiere decir que estamos prácticamente seguros de que la H_0 es falsa y, por tanto, T es útil.
- f. Resultado “estadísticamente significativo”, quiere decir que nos inclinamos a pensar que T es útil, pero no tenemos seguridad total en ello.
- g. Si hiciéremos el mismo estudio con 100 productos y todos fueran **inútiles**, en 2 ó 3 cada 100 encontraríamos un valor de $P \leq 0.05$ y declararíamos el resultado como “estadísticamente significativo”.
- h. Si en la muestra hay **5** curaciones, es $P = 0.0028$ y calificamos el resultado como “estadísticamente muy significativo”.
- i. Resultado “estadísticamente muy significativo”, quiere decir $P \leq 0.01$ y ello implica evidencia fuerte de que T es útil, pero no tenemos seguridad total en ello.

+++8.9. Riesgo de rechazar H_0 equivocadamente

Consideremos de nuevo el caso de una enfermedad que sin tratamiento cura en el 20% de los casos, $\pi = 0.20$. Sospechando que el nuevo tratamiento “B” cura más de 20%, se hace un estudio tratando **N = 10** enfermos con B y se plantea la H_0 : B es inútil, $\pi_B = 0.20$. Si en la muestra de 10 tratados aparecen 10 curaciones, el test da $P = 0.0000001$, lo que lleva a concluir que B cura más de 20%. Si en la muestra hay 3 curaciones, es $P = 0.3222$, el resultado es compatible con que B cure el 20%, no queda demostrado que sea útil.

$\pi = 20\%$												$MA\ de\ N = 10$			
$X \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
$p \rightarrow$	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%				
FR(X)	.107	.268	.302	.2013	.0881	.0264	.0055	.0008	.0001	.000004	.0000001				
P_{cola}	.107	.375		.3222	.1209	.0328	.0064	.0009	.0001	.000004	.0000001				

Si hay 5 curaciones, es $P = 0.0328$, lo que sugiere que B es útil pero no permite asegurarlo. Podemos seguir el convenio establecido y decir que el resultado es “estadísticamente significativo” porque es $P \leq 0.05$. Si lo hacemos así calificaremos como “estadísticamente significativo” los resultados en que hay *5 o más curaciones* (ya que $P(X \geq 5) = 0.0328$ que es menor que 5% y $P(X \geq 4) = 0.1209$ que ya es mayor de 5%).

En la tabla vemos que con un medicamento inútil (con él curan 20%) 5 o más curaciones aparecen por azar en el 3.28% de las veces que se repite el experimento, es decir, 3 ó 4 veces cada 100 repeticiones. Si hacemos este estudio (probar en una muestra de 10) con muchos medicamentos, 3 o 4 de cada 100 inútiles darán 5 o más curados por azar, será $P < 0.05$, el resultado será calificado como “significativo” y el medicamento calificado como “útil”, *erróneamente*.

+++ Ejercicio 8.9: Una enfermedad se cura sin tratamiento en el 10% de los casos. Sospechamos que el nuevo tratamiento “T” cura más de 10%. Se trata 8 enfermos con T y se planteará la H_0 : T es inútil, $\pi = 0.10$. La siguiente tabla da la Binomial para $N = 8$ y $\pi = 10\%$.

	$\pi = 10\%$								MA de N = 8	
X →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
p →	0%	12.5%	25%	37.5%	50%	62.5%	75%	87.5%	100%	
FR(X)	.431	.383	.1488	.0331	.0046	.00041	.00002268	.00000072	.00000001	
Valor P			.1869	.0381	.0050	.00043	.00002341	.00000073	.00000001	

Diga si es Verdadera o Falsa cada una de estas afirmaciones:

- Si calificamos el resultado como “estadísticamente significativo” cuando es $P \leq 0.05$, lo haremos así cuando en la muestra hay 3 curaciones o más.
- Si repetimos el estudio muchas veces con un producto inútil, 381 cada 10 000 veces (3.81%, es decir 3 o 4 cada cien) aparecen 3 o más curaciones.
- Si repetimos el estudio muchas veces con un producto inútil, 381 de cada 10 000 veces calificaremos el resultado como “estadísticamente significativo”.
- Si probamos con muchos productos, en 381 de cada 10 000 realmente inútiles encontraremos $P \leq 0.05$ y calificaremos el resultado como “estadísticamente significativo”.
- Si asimilamos “resultado significativo” con producto útil, estaremos dando como útiles 381 de cada 10 000 productos que realmente son inútiles.

Veamos un nuevo ejemplo para ayudarnos a entender que el valor P nos da la prob de equivocarnos al rechazar la H_0 . Un jugador de un casino sospecha que el dado usado para cierta apuesta está trucado en el sentido de que a la larga la cara “5” sale con frecuencia superior a 1/6. Para intentar aclarar ese punto hace una “investigación” que consiste en tirar el dado 3 veces. El resultado es que sale “5” en las tres tiradas.

Hipótesis de Trabajo: A la larga, la cara “5” sale más de 1/6 de las veces: $\pi_5 > 1/6$.

Hipótesis Nula, H_0 : A la larga, la cara “5” sale 1/6 de las veces: $\pi_5 = 1/6$.

Valor Esperado bajo H_0 : En tres tiradas esperamos $3 \cdot 1/6 = 0.5$, es decir 0 ó 1 veces el “5”.

Valor Observado: El “5” sale 3 veces.

Valor P del Test = Prob de “5” las tres veces con un dado no trucado. Es $P = (1/6)^3 = 0.004$.

Puesto que es $P < 0.01$ se califica este resultado como “muy significativo” y se considera notable evidencia contra la H_0 y, por tanto, a favor de que el dado está trucado. Es una conclusión razonable, siempre y cuando se tenga presente que un dado no trucado da ocasionalmente este resultado. Concretamente, el valor P del test nos indica que si hacemos esa prueba con muchos dados, en 4 de cada 1 000 no trucados saldrían los tres “5” y nos inclinaríamos —erróneamente— a considerarlos trucados.

NO OLVIDE RECORDAR - 8

1. La Inferencia Estadística, IE, intenta conocer acerca de los *parámetros* de la población investigada a partir del conocimiento de los *estadísticos* de la muestra analizada.
2. Durante decenios se han infrautilizado los Intervalos de Confianza, que en muchas aplicaciones son la herramienta más útil de la IE. Son más fáciles de interpretar que los tests estadísticos y además informan sobre la *magnitud del efecto*, cosa que aquellos no hacen.
3. En un estudio destinado a ver si un nuevo fármaco “A” es útil para una enfermedad que sin tratamiento se cura en el 7% de los casos, la **Hipótesis de trabajo** dice que A cura más del 7% y la **Hipótesis Nula**, H_0 , dice A cura el 7%.
4. En los *Tests de Significación* se confronta la Hipótesis Nula con los datos de la muestra que se ha analizado. La H_0 se rechaza si los datos son incompatibles o difícilmente compatibles con ella. Y si son compatibles con la H_0 esta no se rechaza (lo que no implica afirmar que es cierta).
5. En los Tests de Significación se confronta el *valor* del estadístico de interés *esperado* bajo la H_0 con su *valor observado* en la muestra. La H_0 se rechaza si el valor observado se aleja mucho del esperado y no se rechaza si el valor observado es cercano al esperado. La evidencia contra la H_0 es mayor cuanto más se aleja el valor observado del valor esperado.
6. El **valor P del test** dice cuan probable es obtener una muestra con valor observado tan alejado del esperado como el de nuestro estudio o más alejado.
7. Cuanto más alejado está el valor observado del esperado menor es el valor P y mayor es la evidencia contra la H_0 y a favor de la Hipótesis de Trabajo. Pero no hay un valor frontera. Los valores $P = 0.06$ o $P = 0.04$ nos dicen prácticamente lo mismo que $P = 0.05$ y ninguno de los tres garantiza que H_0 sea falsa.
8. Si en un estudio destinado a ver si un nuevo fármaco “A” es útil para una enfermedad que sin tratamiento se cura en el 20% de los casos y en una muestra de $N = 100$ tratados con A se curan 32, es $P = 0.0013$. Ese número dice que si A es inútil y se hacen millones y millones de estudios como este, en la mayoría de ellos el número de curados será próximo a 20 y solamente en 13 de cada 10 000 estudios aparecerán por azar 32 o más curados,
9. +++ Si un laboratorio que busca medicamentos útiles para una enfermedad prueba con muchos, para cada uno de ellos plantea como H_0 que no es útil y la rechaza si aparece $P \leq 0.05$, a la larga declarará como útiles 5 de cada 100 medicamentos inútiles.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 8

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

Para cierta enfermedad que cura sin tratamiento en el 20% de los casos se estudian dos fármacos, A y B, que pretenden aumentar la FR de curaciones.

De 80 pacientes a los que se les administra el fármaco A, curaron 20.

De 50 pacientes tratados con el fármaco B, se curaron 18.

- Planteada la H_0 ; $\pi_A = 0.20$ (A no es eficaz), se obtiene $Z = 1.12$ y $P = 0.1314$
- Planteada la H_0 ; $\pi_B = 0.20$ (B no es eficaz), se obtiene $Z = 2.83$ y $P = 0.0023$

1. El porcentaje de curaciones obtenido en la muestra con A es 25%.
2. Lo razonable es rechazar la H_0 que dice que A es inútil.
3. Concluimos que el fármaco A es eficaz.
4. Concluimos que el fármaco A no es eficaz.
5. Concluimos que el fármaco A puede no ser eficaz.
6. Si realmente A no fuera eficaz, de cada 100 muestras de 80 tratados con A, en aproximadamente 13 de ellas se obtendría un 25% o más de curaciones.
7. Si realmente A fuerá eficaz, de cada 100 muestras de 80 tratados con A, en aproximadamente 13 de ellas se obtendría un 25% o más de curaciones.
8. Lo razonable es rechazar la H_0 que dice que B es inútil.
9. Concluimos que el fármaco B es eficaz.
10. Concluimos que el fármaco B no es eficaz.
11. Concluimos que el fármaco B puede no ser eficaz.
12. Si realmente B no fuera eficaz, es muy difícil obtener 18 o más curados en una muestra de 50 tratados con B.

Cierta enfermedad cura sin tratamiento en el 30% de los casos. Se trató a 10 pacientes con el fármaco “C” y se obtuvo curación en 8 de ellos.

13. En una muestra de 10 pacientes no tratados la prob de que curen 8 es 0.0014
14. En una muestra de 10 pacientes no tratados la prob de que curen 8 o más es 0.15 %.
15. La H_0 planteada en el test es: “C” incrementa la FR de curaciones en población.
16. La P del test correctamente planteado es $P = 0.0007$.
17. Dado que el verdadero valor de P obtenido en el test es muy pequeño, lo razonable es aceptar la H_0 .
18. Concluimos que el fármaco “C” es eficaz.

19. Si “C” es eficaz, esperamos que se curen 15 pacientes de cada 10 000 tratados.
20. Si “C” no es eficaz, en 15 de cada 10 000 experimentos como este curarán 8 o más pacientes.
21. Si “C” es eficaz, en 15 de cada 10 000 estudios como este curarán 8 pacientes.
22. Rechazamos la Hipótesis Nula correctamente planteada porque lo encontrado en el experimento es poco probable que aparezca si esa hipótesis es cierta.

En la población de no fumadores tienen la enfermedad “E” el 10%. En una muestra de $N = 100$ fumadores se encuentra 18 enfermos.

23. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$ individuos, la media del número de enfermos en cada muestra es 40.
24. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$ individuos, la media del número de enfermos en cada muestra es 10.
25. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$, la desviación estándar del número de enfermos en cada muestra es 3.
26. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$, la desviación estándar del número de enfermos en cada muestra es 9.2.
27. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$ individuos, aproximadamente el 84.13% tendrán 13 o más enfermos.
28. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$ individuos, aproximadamente el 10.87% tendrán 16 o más enfermos.
29. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$ individuos, aproximadamente el 15.87% tendrán 13 o más enfermos.
30. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$ individuos, aproximadamente el 2.28% tendrán 16 o más enfermos.
31. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$, aproximadamente el 0.13% (13 cada 10 000) tendrán 19 o más enfermos.
32. Si de una población con 10% de enfermos se toman millones de muestras de $N = 100$ individuos, aproximadamente el 15.87% tendrán 7 o menos enfermos.
33. Para la H_0 : “fumar no incrementa la FR de enfermos” es $Z = 1.2$.
34. Para la H_0 : “fumar no incrementa la FR de E” es $Z = 2.67$.
35. Para la H_0 : “fumar no incrementa la FR de E” el valor P del test es $P = 0.35$.
36. Para la H_0 : “fumar no incrementa la FR de E” el valor P del test es $P = 0.0038$.
37. Nos inclinamos a rechazar que fumar incrementa la FR de E.
38. Si fumar incrementa en la población la FR de E y repetimos este estudio millones de veces, en 38 de cada 10 000 estudios habrá en la muestra 18 E.

39. Si fumar incrementa en la población la FR de E y repetimos este estudio millones de veces, en 38 de cada 10 000 estudios habrá en la muestra 18 o menos E.
40. Si fumar incrementa en la población el porcentaje de E y repetimos este estudio millones de veces, en 38 de cada 10 000 habrá en la muestra 18 o más E.
41. Si fumar no incrementa en la población el porcentaje de E y repetimos este estudio millones de veces, en 38 de cada 10 000 habrá en la muestra 18 E.
42. Si fumar no incrementa realmente el porcentaje de E y repetimos este estudio millones de veces, en 38 de cada 10 000 habrá en la muestra 18 o menos E.
43. Si fumar no incrementa realmente el porcentaje de E y repetimos este estudio millones de veces, en 38 de cada 10 000 habrá en la muestra 18 o mas E.
44. Para la H_0 : “fumar incrementa la proporción de E hasta el 40%” es $Z = -5.5$.
45. Para la H_0 : “fumar incrementa la proporción de E hasta el 40%” es $Z = -3.2$.
46. Para la H_0 : “fumar incrementa la FR de E hasta el 40%” es P del test = 0.003.
47. Para la H_0 : “fumar incrementa la FR de E hasta el 40%” es P del test < 0.00003.
48. Nos inclinamos a rechazar que fumar incrementa la proporción de E a 40% y a pensar que la proporción de E en los fumadores es mayor de 40%.
49. Nos inclinamos a aceptar que fumar incrementa la proporción de E a 40%.
50. Nos inclinamos a rechazar que fumar incrementa la proporción de E a 40% y a pensar que la proporción de E en los fumadores es menor de 40%.
51. Si en la población de fumadores son E el 40%, y repitiéramos este estudio millones de veces, en menos de 3 cada 100 000 veces aparecerían 18 E o más.

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO: ENUNCIADOS - 8

1. En la muestra hay 60% de varones. ¿Cuál es el porcentaje de varones en toda la población? ¿Puede ser 57%? ¿Y 40%?
2. En la muestra hay 80% de individuos que siguen *dieta*. ¿Qué porcentaje sigue *dieta* en toda la población? ¿Podría ser 70%? ¿Y 85%?
3. En la muestra de 128 activos hay 25% de individuos que practican *yoga*. ¿Qué porcentaje practica *yoga* en la población de activos? ¿Podría ser 30%? ¿Y 15%?
4. En la muestra de 12 mujeres con máxima *resistencia a las infecciones* hay un 33% que siguen *dieta*. ¿Cuánto puede valer esa proporción en la población de mujeres con resistencia máxima? ¿Podría ser 40%? ¿Y 70%?

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO - 8

Obtenga estas salidas con el programa informático que usted utilice. Cada programa da salidas con matrices particulares, pero el contenido básico debe ser este.

Nota: debido al redondeo de cantidades muy grandes o muy pequeñas los resultados numéricos pueden no coincidir exactamente en distintos programas o calculadoras. Ello no es relevante. A efectos prácticos dice lo mismo un valor $P = 0.0087$ que $P = 0.0043$. Y en el IC no suele ser relevante el valor del tercer decimal. También varía de unos programas a otros el número de decimales que aparecen en las salidas. En algunos puede decidirlo el usuario. Las aproximaciones con la Normal aquí se hacen SIN corrección por continuidad. Los programas suelen dar resultado con y sin.

FR de ...	Datos de la muestra	IC _{95%} exacto IC _{95%} aprox Normal	H ₀ para población	P _{EXACTO} con Binomial Z de aprox. Normal y P _{UNI}
varones	N=200, X=120 $p = \mathbf{0.60}$	0.528 y 0.668 0.532 y 0.668	$\pi = \mathbf{0.57}$	$P_{\text{EXACTO}} = 0.22$ $Z = 0.86$, $P_{\text{UNI}} = 0.20$
			$\pi = \mathbf{0.40}$	$P_{\text{EXACTO}} = 0.000000009$ $Z = 5.77$, $P = 0.000000004$
Con dieta	N=200 , X= 60 $p = \mathbf{0.80}$	0.737 y 0.853 0.745 y 0.855	$\pi = \mathbf{0.70}$	$P_{\text{EXACTO}} = 0.0009$ $Z = 3.08$, $P_{\text{UNI}} = 0.0010$
			$\pi = \mathbf{0.85}$	$P_{\text{EXACTO}} = 0.034$ $Z = 1.98$, $P_{\text{UNI}} = 0.024$
Con yoga en activos	N=128, X= 32 $p = \mathbf{0.25}$	0.182 y 0.334 0.175 y 0.325	$\pi = \mathbf{0.30}$	$P_{\text{EXACTO}} = 0.127$ $Z = 1.23$, $P_{\text{UNI}} = 0.109$
			$\pi = \mathbf{0.15}$	$P_{\text{EXACTO}} = 0.0020$ $Z = 3.17$, $P_{\text{UNI}} = 0.0008$
Con dieta en mujeres con resinf máxima	N= 12 , X = 4 $p = \mathbf{0.33}$	0.099 y 0.651 0.194 y 0.466	$\pi = \mathbf{0.40}$	$P_{\text{EXACTO}} = 0.438$ $Z = 0.45$, $P_{\text{UNI}} = 0.327$
			$\pi = \mathbf{0.70}$	$P_{\text{EXACTO}} = 0.009$ $Z = 2.80$, $P_{\text{UNI}} = 0.002$

- En la muestra de 200 individuos, 120 son varones (60%); Tenemos confianza 95% en que la proporción de varones en la población está entre el 53% y el 67%. Planteados tests para ver si el porcentaje de varones en la población es de 57% se concluye que sí puede ser ($P \geq 0.20$), y que no puede ser de 40% ($P < 0.00001$).
- Los datos de la muestra son difícilmente compatibles con que en población haya 70% de personas con *dieta* ($P = 0.001$).
- No se puede rechazar que en la población de activos haya un 30% que practican *yoga* ($P = 0.11$), pero sí se rechaza que sea un 15% ($P = 0.0008$).
- Los datos de la muestra son difícilmente compatibles con que en la población de mujeres con máxima *resistencia* hagan *dieta* 70% ($P = 0.002$), pero sí puede ser 40% ($P = 0.33$).

Capítulo 9

INFERENCIA ESTADÍSTICA CON UNA MEDIA

El comportamiento de una variable cuantitativa en una muestra se resume dando su Media Aritmética, M y su Desviación Estándar, S . La Inferencia Estadística, IE, intenta conocer acerca de la media poblacional, μ , a partir del conocimiento de la Media muestral. Se hace calculando el Intervalo de Confianza, IC, y el valor P del test para las hipótesis que puedan ser de interés.

El IC es más informativo y más fácil de interpretar que el valor P de los tests. Durante decenios los IC fueron infráutilizados y los tests fueron usados en demasia y muchas veces inapropiadamente. Esas distorsiones aún permanecen pero empiezan a corregirse en los últimos años.

El proceso lógico es el mismo que en el capítulo anterior. El lector que necesite reforzar esos conceptos básicos aquí encontrará de nuevo su exposición detallada; para quien ya los haya captado este capítulo puede resultar algo reiterativo.

9.1. Intervalo de confianza para una media

Si en una muestra de N individuos encontramos que una variable cuantitativa tiene media muestral M y desviación estándar muestral S , podemos calcular el IC para el valor de la media poblacional, μ . La fórmula utilizada $N \geq 30$ es:

$$IC(\mu) \equiv M \pm Z \cdot S \sqrt{N} = M \pm Z \cdot ES$$

en la que Z refleja la confianza con la que se quiere calcular el intervalo, como en el caso de los IC para la proporción poblacional.

Cuando es $N \geq 30$, Z es el valor estandarizado que en la Distribución Normal deja entre él y su negativo una proporción de valores igual a la confianza que queremos para el intervalo. Así, entre $Z = -1.96$ y $Z = 1.96$ hay 95% de los valores y entre -2.58 y 2.58 hay 99% de los valores. Por ejemplo, si en una muestra de $N = 100$ la variable X tiene $M = 200$ y $S = 30$, tenemos $ES = 30 / 10 = 3$

$$\begin{aligned} IC_{95\%}(\mu) &= 200 \pm 1.96 \cdot 3 = 200 \pm 5.9 = \underline{194.1} \text{ y } \underline{205.9} \\ IC_{99\%}(\mu) &= 200 \pm 2.58 \cdot 3 = 200 \pm 7.7 = \underline{192.3} \text{ y } \underline{207.9} \end{aligned}$$

Es decir, en la muestra la media de X es 200. No sabemos cuánto vale la media en la población, pero tenemos confianza 95% en que esté entre 194.1 y 205.9, y confianza 99% en que la media poblacional esté entre 192.3 y 207.9.

Cuando es $N < 30$, el valor Z se obtiene de la tabla “t de Student” (al final del libro) con $N - 1$ grados de libertad. Por ejemplo, si en una muestra de $N = 4$ la variable “X” tiene $M = 200$ y $S = 30$, tenemos $ES = 30 / 2 = 15$

$$\begin{aligned} IC_{95\%}(\mu) &= 200 \pm 3.182 \cdot 15 = 200 \pm 47.7 = \underline{152.3} \text{ y } \underline{247.7} \\ IC_{99\%}(\mu) &= 200 \pm 5.841 \cdot 15 = 200 \pm 87.6 = \underline{112.4} \text{ y } \underline{287.6} \end{aligned}$$

siendo 3.182 el valor que se encuentra en la tabla “t” en la fila correspondiente a $N - 1 = 3$ grados de libertad, gl. Dentro de la fila de 3 gl se toma el valor correspondiente a la columna que tiene “1 menos la confianza” como “BIL” en la cabecera. En este caso, para confianza 0.95 se toma el valor de la columna que tiene 0.05 en la cabecera. Para confianza 0.99 se toma el valor de la columna que tiene 0.01 en la cabecera, que es 5.841. Tenemos confianza 95% en que la media de la población está entre 152.3 y 247.7, y tenemos confianza 99% en que está entre 112.4 y 287.6.

** **Ejercicio 9.1:** Calcular el IC al 95% para la media poblacional de la variable “X” (número de horas dedicadas a la lectura por año) si en una muestra de 400 entrevistados se encuentra Media = 60 y $S = 40$.

** **Ejercicio 9.2:** Calcular el IC al 99% para la media poblacional de la variable “E” (número de euros gastado por persona cada año en comprar libros) si en una muestra de 16 entrevistados se encuentra Media = 60 y $S = 20$.

9.2. El valor P con σ conocida y DN

Vemos en primer lugar la situación en que se conoce la σ de la variable en la población, lo cual es muy infrecuente en la práctica, pero ayuda a entender la situación habitual en la que no se conoce ese dato y se estima a partir de la muestra.

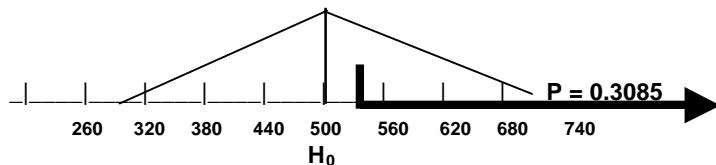
En todos los ejemplos que siguen vamos a asumir que en Alemania la variable “X” (número de horas pasadas ante el televisor por persona al año) tiene DN con media poblacional **500** y $\sigma = 60$. Sospechamos que en otros países la media poblacional es distinta de la alemana, es decir, no es 500. Para ver si es cierto, en cada país se toma una muestra aleatoria, se plantea la **Hipótesis Nula**, H_0 , que dice que la media poblacional es 500 y se calcula el valor P del test, que es la **prob de obtener una muestra con media como la de nuestra muestra o aún más alejada de 500, si la media poblacional es 500**. Cuanto menor sea el valor P más nos invita a rechazar la H_0 propuesta. Asumiremos que en las poblaciones que estamos investigando la σ es próxima a 60 y la variable tiene DN. Más adelante vemos qué hacer si no se dan estas condiciones.

a) Muestra de un solo individuo

1: Un individuo tomado al azar de la población belga tiene $X = 530$

$$\text{Valor P del Test} = P(X \geq 530 | \mu_B = 500) = P(Z \geq 0.5) = 0.3085.$$

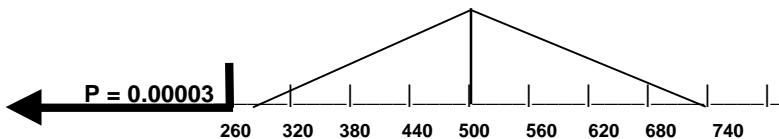
Si la media poblacional belga es 500, $\mu_B = 500$, más de 30 de cada 100 individuos de la población tendrán valor 530 o mayor. El dato ($X = 530$) es compatible con la H_0 (media poblacional = 500) y por ello no invita a rechazarla.



2: Un individuo extraído al azar de la población corsa tiene $X = 260$

$$\text{Valor P del Test} = P(X \leq 260 | \mu_C = 500) = P(Z \leq -4) = 0.00003$$

Es muy difícil que en una población con media 500 se encuentre un individuo con $X = 260$ o menor. El dato ($X = 260$) es muy difícilmente compatible con la H_0 (media poblacional = 500) y por ello invita a rechazarla. Creemos que es $\mu_C < 500$.



** Ejercicio 9.3: Un individuo extraído al azar de la población danesa tiene $X = 800$. ¿Qué concluimos respecto a la media poblacional?

** Ejercicio 9.4: Un individuo extraído al azar de la población española tiene $X = 420$. ¿Qué concluimos respecto a la media de la población española?

b) Muestra con N individuos.

3: En una muestra de $N = 16$ franceses se encuentra media muestral, $M = 440$.

→ La hipótesis de trabajo es $\mu_F \neq 500$.

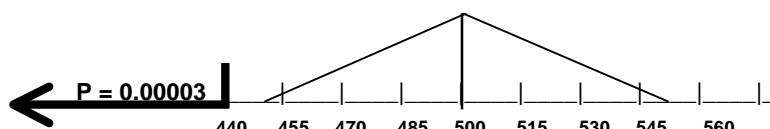
→ La Hipótesis Nula que planteamos en el test es $H_0: \mu_F = 500$.

→ Si es cierta H_0 , esperamos encontrar en la muestra una M próxima a 500.

$$\text{En el MA con } N = 16 \text{ es } \sigma_{\text{MEDIAS}} = 60 / \sqrt{16} = 15$$

Si la variable tiene DN las medias del MA también la tienen.

$$Z = (440 - 500) / 15 = -4 \rightarrow P_{\text{UNI}} = P(M_F \leq 440 | \mu_F = 500) = P(Z \leq -4) = 0.00003$$



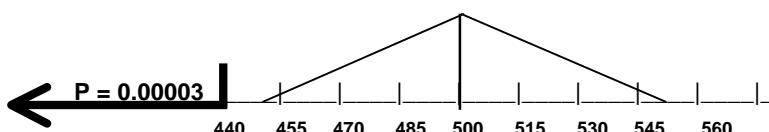
Si la media poblacional francesa fuera 500 es muy difícil que la muestral de $N = 16$ sea del orden de 440. Por eso rechazamos esa H_0 y creemos que es $\mu_F < 500$.

4: En una muestra de 36 georgianos se encuentra $M = 508$.

En el MA con $N = 36$ es $\sigma_{\text{MEDIA}} = 60 / \sqrt{36} = 10$

$$Z = (508 - 500) / 10 = 0.8 \rightarrow P = P(M_G \geq 508 | \mu_G = 500) = P(Z \geq 0.8) = 0.2119$$

Si la media poblacional georgiana fuera 500 es fácil que la muestral de $N = 36$ sea del orden de 508. Por eso no rechazamos esa H_0 y creemos que puede ser $\mu_G = 500$.



Siguen otros ejemplos del valor P y la conclusión que se obtendría con algunos otros valores de la media muestral M , si es $N = 36$ y $\sigma = 60$ ($\sigma_{\text{MEDIAS}} = 10$) y si se plantea como H_0 que la media poblacional es $\mu = 500$:

Con $M = 500$ es $Z = 0$	\rightarrow	$P = 0.50$	\rightarrow	Puede ser $\mu = 500$
Con $M = 497$ es $Z = -0.3$	\rightarrow	$P = 0.3821$	\rightarrow	Puede ser $\mu = 500$
Con $M = 490$ es $Z = -1$	\rightarrow	$P = 0.1587$	\rightarrow	Puede ser $\mu = 500$
Con $M = 460$ es $Z = -4$	\rightarrow	$P = 0.00003$	\rightarrow	Casi seguro que es $\mu < 500$
Con $M = 350$ es $Z = -15$	\rightarrow	$P = 10^{-40}$	\rightarrow	Seguro que es $\mu < 500$

En estos ejemplos con $N = 36$ no se necesita que la variable tenga DN en población, pues el TCL nos dice que las medias del MA tienen DN, cualquiera que sea la distribución de la variable.

9.3. Valor P a una cola y a dos colas

En el ejemplo anterior vimos una muestra de $N = 36$ con $M = 490$ y encontramos $Z = -1$ y $P = 0.1587$, que es la prob de encontrar una muestra con media 490 o menor, si es $\mu = 500$. Al valor P así obtenido se le llama $P_{\text{UNILATERAL}}$ (abreviadamente P_{UNI}), porque da la prob de muestras con media que se alejen de 500 tanto como la de nuestra muestra o más aún, en el mismo sentido, es decir, en el mismo “lado” de la distribución.

A veces se utiliza la llamada $P_{\text{BILATERAL}}$ (abreviado P_{BIL}) que es el doble del P_{UNI} , y en este caso indica la prob de encontrar muestras con media 490 o menor o con media 510 o mayor, si es $\mu_E = 500$ (510 se aleja de 500 lo mismo que 490, pero en el otro sentido, en el otro “lado” de la distribución). Es decir:

$$P_{\text{UNILATERAL}} = P(M \leq 490 | \mu = 500) = P(Z \leq -1) = 0.1587$$

$$P_{\text{BILATERAL}} = P(M \leq 490 \text{ o } M \geq 510 | \mu_G = 500) = P(Z \leq -1) + P(Z \geq 1) = 0.3174$$

En general, se llama valor P bilateral a la prob de obtener una muestra en que el valor del estadístico se aleje de lo esperado bajo la H_0 tanto como el de nuestro estudio o aún más **en cualquier sentido** y es $P_{BIL} = 2 \cdot P_{UNI}$.

Cuando hablamos del valor P del test podemos referirnos a la uni o a la bilateral. En este libro la mayor parte de las veces manejamos la P unilateral. Si se desea la bilateral basta con multiplicar por dos la unilateral.

9.4. Test con una media no conociendo σ

En todos los casos anteriores se calculó el número de desviaciones estándar que la media muestral (M) encontrada en el experimento se aleja de la media que postula la $H_0 (\mu)$ con la siguiente expresión:

$$Z = \frac{\mu - M}{\sigma_M} = \frac{\mu - M}{\sigma / \sqrt{N}}$$

donde σ_M es la desviación estándar entre las medias muestrales y σ es la desviación estándar entre los individuos de la población. Con el valor de Z así obtenido se calcula el valor P del test utilizando las tablas de DN. Pero lo más habitual es que no se conozca la σ de la población y en esos casos se sustituye por la desviación estándar de la muestra, S , quedando la expresión:

$$Z = \frac{\mu - M}{S / \sqrt{N}} = \frac{\mu - M}{ES}$$

Recordemos que a la desviación estándar de la muestra dividida por la raíz cuadrada de N la llamamos Error Estándar o Típico de la muestra, ES.

Consideremos el ejemplo de una muestra de $N = 81$ individuos donde la variable "X" tiene $M = 60$ y $S = 27$. El ES es $27 / 9 = 3$

1º- Para la Hipótesis Nula, H_0 , que dice que la media poblacional es $\mu = 62$ es:

$$Z = (62 - 60) / 3 = 0.67 \rightarrow P_{UNI} = P(Z > 0.67) = 0.25$$

Si fuera $\mu = 62$, y se repitieran muchos estudios como este, las M 's tomarían valores en torno a 62, y en 25 de cada 100 muestras sería $M \leq 60$ (el valor de M obtenido en nuestra muestra).

2º- Para la H_0 que dice que la media poblacional es $\mu = 51$ es:

$$Z = (60 - 51) / 3 = 3 \rightarrow P_{UNI} = P(Z > 3) = 0.0013$$

Si fuera $\mu = 51$, y se repitieran muchos estudios como este, las M 's tomarían valores en torno a 51 y aparecería $M \geq 60$ solo en 13 de cada 10 000 estudios como este.

Los valores P anteriores indican que los datos obtenidos en nuestro estudio ($M = 60$, $S = 27$ en una muestra de 81) son compatibles con que en población sea $\mu = 62$ (lo que llevaría a aceptar esa posibilidad) y no son compatibles con que en población sea $\mu = 72$ (por lo que rechazaríamos ese valor como posible).

En el ejemplo 1º se interpretó el valor P_{UNI} como la FR de estudios en los que la media muestral es $M \leq 60$, mientras que en el ejemplo 2º es la FR de estudios con $M \geq 60$. ¿Por qué unas veces se habla de media muestral **mayor** y otras **menor** que la obtenida en la muestra? Depende de la hipótesis planteada. El valor P del test se refiere a la FR de estudios con resultado como el obtenido o “más extremo”, si la H_0 es cierta. En el ejemplo 1º con $H_0: \mu = 62$, resultados más extremos que el obtenido ($M = 60$) son aquellos en que es $M \leq 60$ (son resultados tan alejados o más de lo que propone la H_0 , tan alejados como 60 o más de 62 y de 72, respectivamente). En el ejemplo 2º con $H_0: \mu = 51$, resultados más extremos son aquellos en que es $M \geq 60$.

Cuando es **N < 30** (muestra con menos de 30 individuos) y variable con DN en la población, el valor de P que corresponde a Z, se mira en la tabla “t de Student” con $N - 1$ grados de libertad, en lugar de la tabla de la Normal. Ejemplo: en una muestra de $N = 4$ se encuentra $M = 50$ y $S = 10$, es decir, $ES = 10/\sqrt{4} = 5$. Si se plantea como H_0 que es $\mu = 57$, se calcula: $Z = (57 - 50) / 5 = 1.4$.

Para buscar el valor de P en la tabla “t de Student” nos situamos en la fila de $g_l = 4 - 1 = 3$ (la muestra es de $N = 4$) y en ella buscamos los valores más próximos al obtenido en nuestro estudio. Al valor 1.25 corresponde $P_{\text{UNI}} = 0.15$ (en la cabecera de esa columna) y al valor 1.638 corresponde $P_{\text{UNI}} = 0.10$. Como a medida que aumentan los valores del interior de la tabla, disminuyen sus valores de P asociados, a nuestro valor 1.4 (que está entre 1.25 y 1.638), le corresponde $0.15 > P_{\text{UNI}} > 0.10$. Lo relevante es que es $P_{\text{UNI}} > 0.10$, por lo que se acepta H_0 como posible.

** : En 1950 la media poblacional del Coeficiente Intelectual, “Y” era $\mu = 110$.

Temerosos de que actualmente sea $\mu < 110$, se mide “Y” en una muestra de 144 adultos actuales y se encuentra $M = 102$ y $S = 36$. Se plantea como H_0 que “Y” no ha disminuido, es decir, $\mu_{\text{ACTUAL}} = 110$ y el valor P del test es 0.0038.

- ¿Qué mide ese valor P?
 - ¿Qué nos hace pensar este resultado?
- Un autor cree que la telebasura y los políticos han conseguido bajar el coeficiente intelectual medio de la población en 12 unidades. Planteada la H_0 que dice que la media poblacional actual es 98 ($110 - 12$) se obtiene el valor $P_{\text{UNIL}} = 0.09$.
- ¿Qué mide ese valor P?
 - ¿Qué podemos decir acerca de esa hipótesis?

** **Ejercicio 9.6:** ¿Es efectivo el fármaco B para aumentar la concentración de Ca^{++} en fémur? Esa variable tiene media $\mu = 300$ y $\sigma = 12$, en las unidades pertinentes, en cierta población de animales. Se administra el fármaco B a una muestra de $N = 36$ y se obtiene Media muestral $M = 308$. ¿Qué pensamos acerca de la efectividad de B para incrementar esa variable? Diga si es V o falsa cada una de las afirmaciones.

- La Hipótesis Nula, H_0 , es $\mu_B = 300$, es decir, B no incrementa esa variable; esto es, si se diera B a toda la población, la media poblacional sería 300.
- El valor P es la prob de encontrar una muestra con $M = 300$, si es $\mu_B = 300$.
- El valor P es la prob de encontrar una muestra con $M \geq 300$, si es $\mu_B = 300$.
- La P del test es la prob de obtener en la población $\mu_B \geq 300$, si es $M = 300$.

- e. La P del test es la prob de obtener una muestra con $M \geq 308$, si es $\mu_B = 300$.
- f. Si $\mu_B = 300$ y tomamos muchas muestras de $N = 36$ de esa población, la media de las medias muestrales es $\mu_M = 300$ y la desviación entre las medias muestrales 12.
- g. Si $\mu_B = 300$ y tomamos muchas muestras de $N = 36$ de esa población, la media de las medias muestrales es $\mu_M = 300$ y la desviación entre las medias muestrales es 2.
- h. Por ser $N \geq 30$ las medias en el MA se distribuyen de modo Normal (TCL).
- i. Con la muestra obtenida y la H_0 correctamente planteada se obtiene $Z = -3$.
- j. Con la muestra obtenida y la H_0 correctamente planteada se obtiene $Z = 4$.
- k. En la tabla de Distribución Normal vemos que $P(Z \geq 4) = 0.00003$.
- l. Si B es útil y repitiéramos muchas veces este estudio, solo en 3 de cada cien mil muestras aparecería media muestral de 300.
- m. Si B es inútil y repitiéramos muchas veces este estudio, solo en 3 de cada cien mil muestras, aparecería media muestral de 300.
- n. Si B es inútil y repitiéramos muchas veces este estudio, solo en 3 de cada cien mil muestras aparecería media muestral de 308.
- o. Si B es inútil y repitiéramos muchas veces este estudio, solo en 3 de cada cien mil muestras aparecería media muestral de 308 o mayor.
- p. El valor P del test indica que es muy difícil que aparezca una media muestral próxima a 300 si la media poblacional es 300.
- q. El valor P del test indica que es muy difícil que aparezca una media muestral próxima a 308 si la media poblacional es 308.
- r. El valor P del test indica que es muy difícil que aparezca una media muestral próxima a 308 si la media poblacional es 300.
- s. Este resultado constituye evidencia fuerte a favor de que B *no es efectivo*.
- t. Este resultado constituye evidencia fuerte a favor de que B *es efectivo*.

9.5. Muestras muy pequeñas

Es frecuente que se ponga en duda la validez de una conclusión alegando que el estudio contenía un número demasiado pequeño de individuos. Para rebatir esa objeción hay que darse cuenta de que el valor P del test se calcula teniendo en cuenta el tamaño de la muestra, de modo que indica la prob de encontrar **ese resultado** o uno más extremo en una muestra de **ese tamaño**, si la H_0 es cierta.

Los valores de P muy pequeños constituyen evidencia contra la Hipótesis aunque en la muestra haya muy pocos individuos.

**** Ejercicio 9.7:** El peso del Recién Nacido, RN, de madres *sanas* se distribuye de modo Normal con media 100 y desviación 10, (en ciertas unidades). Para ver si cada una de las sustancias “A”, “B”, “C” y “D” favorece que los RN tengan menor peso, damos cada una a un grupo de embarazadas y planteamos como H_0 que no modifica el peso del RN. Calcule Z y P en cada caso. Se da el

IC, para el peso medio poblacional de los RN cuyas madres tomaron cada una de las sustancias.

- a. Una muestra de $N = 100$ embarazadas con “A” dio media muestral, $M_A = 97.5$

$$Z = (\mu_A - M_A) / \sigma_{MED} = \quad P(Z < \quad) = \\ IC(\mu_A)_{95\%} = 97.5 \pm 1.96 \cdot 1 \approx U95.5 \text{ y } 99.5$$

- b. Una muestra de $N = 25$ embarazadas con “B” dio $M_B = 94$

$$Z = (\mu_B - M_B) / \sigma_{MED} = \quad P(Z < \quad) = \\ IC(\mu_B)_{95\%} = 94 \pm 1.96 \cdot 2 \approx U90 \text{ y } 98$$

- c. Una muestra de $N = 4$ embarazadas con “C” dio $M_C = 82.5$

$$Z = (\mu_C - M_C) / \sigma_{MED} = \quad P(Z < \quad) = \\ IC(\mu_C)_{95\%} = 82.5 \pm 1.96 \cdot 5 \approx 72.7 \text{ y } 92.3$$

- d. Una muestra de $N = 1$ embarazadas con “D” dio $M_D = 60$

$$Z = (\mu_D - M_D) / \sigma = \quad P(Z < \quad) = \\ IC(\mu_D)_{95\%} = 60 \pm 1.96 \cdot 10 \approx 40 \text{ y } 80$$

- e. ¿Cuál de los cuatro estudios aporta mayor evidencia en contra de la H_0 ? Es decir:

¿Cuál de ellos muestra más evidencia a favor de que $\mu_{Tratados} < 100$, o sea, que los RN de madres con esa sustancia pesan, de media, menos que los de sanas?

- f. Si un epidemiólogo dijera que el último estudio no permite concluir nada porque solo se estudió un caso, ¿qué le contestaría usted? (argumentos claros, y concisos).

9.6. El valor P del Test NO es la probabilidad de que sea cierta la H_0

Ya sabemos que el Valor P del test nos dice la prob de obtener cierto tipo de muestras cuando es cierta H_0 . El error más frecuentemente cometido por los investigadores es creer que esa P indica la prob de que la H_0 sea cierta. Pero esa creencia es totalmente equivocada. Insistamos en aclarar esa confusión en ejemplos de la vida común para hacerlo luego en ejemplos de investigación.

- ** **Ejercicio 9.8:** El señor “AA” dice: “Si mañana llueve la probabilidad de que haya un accidente de tráfico en la calle Mayor es $P = 0.57$ ”

- a. ¿Nos ha hablado sobre la probabilidad de que llueva?.....
b. $P = 0.57$ es la probabilidad de

- ** **Ejercicio 9.9:** El señor “BB” nos dice: “He comprado Lotería y si me toca es muy probable que vaya al Caribe”

- a. ¿Nos ha hablado sobre la probabilidad de que le toque la lotería?
Observe que “BB” no nos dijo si había comprado muchos o pocos décimos y por ello no sabemos nada acerca de la probabilidad de que le toque.
b. ¿Qué cosa es muy probable?

- ** **Ejercicio 9.10:** El niño de la señora “CC” tiene un ligero dolor abdominal. Le pregunta al doctor si cree que su niño puede tener Apendicitis Aguda (AA) y

qué habría que hacer si la tuviera. El doctor responde que la gran mayoría de dolores abdominales infantiles son episodios leves, no AA. Y añade: “Si un niño tiene AA es muy probable que sea operado”.

- ¿Puede la señora “CC” decir que es muy probable que su niño tenga AA?
- ¿Qué cosa es poco probable?
- ¿Qué cosa es muy probable?

En los tres ejemplos anteriores, nunca se pueden confundir estas dos cosas:

- 1º → Probabilidad de que ocurra “A”.*
- 2º → Probabilidad de que ocurra “B”, si ocurre “A”*

** **Ejercicio 9.11:** Indique la respuesta correcta de las 4 que se ofrecen abajo.

En cierta enfermedad se curan el **25%** de los pacientes no tratados. Para ver si el fármaco “A” incrementa la FR de curaciones, se administra a 8 enfermos y se encuentra que se curan los 8. Planteamos la H_0 : “A es inútil, en población con él curan 25%”. Si eso es cierto, entre 8 enfermos esperamos encontrar 2 curados (2 es el 25% de 8). Un pequeño cálculo muestra que si con A se curan el 25% y lo probamos en muchísimos grupos de 8 enfermos, en solo 1 cada 100 000 grupos aparecerán curados, por azar, los 8. El valor P del test, **P = 0.00001**, es la prob de:

- que el medicamento A sea inútil (que con A se curen 25%).
- que el medicamento A sea útil (que con A se curen más de 25%).
- obtener curación en los 8 enfermos si el medicamento A es inútil.
- obtener curación en los 8 enfermos si el medicamento A es útil.

9. 7. La probabilidad de la H_0 y el Valor P del Test

En la mayoría de los estudios biomédicos no se puede calcular la prob de que la hipótesis planteada sea cierta. Veremos un ejemplo muy sencillo de otra área en el que **sí** se puede calcular esa prob. Ello ayuda a distinguir esa prob de la P del test y a entender cómo esta última se utiliza para elaborar conclusiones.

Ejemplo: Sabemos que el 3% de las monedas de una ciudad son falsas y aunque su aspecto es indistinguible de las legales, en las falsas la prob de salir “cara” es 0.8. En las monedas legales la prob de salir “cara” es 0.5

- 1º Hemos comprado una moneda en la ciudad. No sabemos si es legal o falsa. Consideremos $H_0 = \text{La moneda es legal}$. La prob de que esta H_0 sea cierta es 0.97 Es decir, si tomamos muchas monedas de esa ciudad, serán legales 97 de cada 100.
- 2º Para intentar saber si nuestra moneda es falsa o legal hacemos 14 tiradas. Si el número de veces que sale “cara” es próximo a 7, consideraremos el resultado compatible con la H_0 y si salen muchas caras aumentará nuestro temor de que sea falsa. El resultado es que sale *cara en las 14 tiradas*.

Un cálculo sencillo nos dice que haciendo millones de series de 14 tiradas cada una con una moneda legal, solamente en *6 cada 100 000* series aparecen todo caras. Valor P del test = 0.00006 Distingamos claramente entre:

- **P = 0.97** Es la probabilidad de que la moneda sea legal (que H_0 sea cierta).
- **P = 0.00006** Es la probabilidad de obtener 14 caras **sí** la moneda es legal. Es la probabilidad de obtener el resultado obtenido en nuestro estudio si es cierta H_0 .

Son dos valores muy diferentes, **0.97** y **0.00006**, referidos a hechos muy diferentes:

La prob de que la H_0 sea cierta, es decir, que la moneda sea legal es $P = 0.97$. De cada 100 monedas compradas en esa ciudad, 97 serán legales. Pero esa cifra no nos dice si nuestra moneda es una de las legales o una de las falsas. Intentamos saber más acerca de ella haciendo esos 14 lanzamientos y el resultado es que sale cara en todos ellos. La P del test es la prob de que salga todo caras en 14 lanzamientos con una moneda legal.

Si no conocíramos la FR de monedas legales, es decir, la prob de que la moneda comprada fuera legal, el único dato sería el valor P del test. En la llamada Inferencia Clásica o frecuentista, que se explica en este libro y se aplica en la gran mayoría de los análisis, se asume que no se puede evaluar la prob de que H_0 sea cierta o sea falsa, lo que en este ejemplo equivale a no conocer la FR de monedas falsas en la ciudad. El investigador toma una muestra (equivale a tirar la moneda 14 veces) y calcula la prob de que aparezca por azar el tipo de resultado encontrado en la muestra, si es cierta la H_0 .

En la llamada Inferencia Bayesiana **sí** se evalúa la prob de que la H_0 sea cierta antes de conocer el resultado de nuestro estudio y se ve cómo se modifica al tener en cuenta dicho resultado. En nuestro ejemplo la Inferencia Bayesiana implica averiguar la prob inicial de que la monedad sea legal y ver cómo se modifica esa prob al tener en cuenta que ha salido cara en las 14 tiradas.

En el Capítulo 17 se exponen los fundamentos lógicos de la Inferencia Bayesiana, cuyo uso va a ir creciendo progresivamente en el futuro. El lector encontrará en ese capítulo el primer paso de ese apasionante camino.

Aunque algunos autores presentan estos dos enfoques, el clásico y el bayesiano, como alternativas contrapuestas, una reflexión serena muestra que son técnicas complementarias que pueden colaborar en un mismo análisis.

9.8. Intervalo de Confianza *versus* Tests Estadísticos

En la mayoría de los casos el Intervalo de Confianza, IC, es más informativo y de interpretación más directa que el valor P del test, pues además de orientarnos sobre si hay motivos fuertes o no para rechazar la H_0 , nos informa sobre la magnitud del efecto que estamos estudiando.

Para ver la relación entre el valor P y los límites del IC supongamos que la media poblacional de “X”, número de horas que cada persona dedica al año a hacer

deporte, era 400 en la población. Se hizo una campaña de educación para la salud animando a los ciudadanos a hacer más deporte; esta es útil si tras ella la μ de X es mayor de 400. Para investigarlo medimos, tras la campaña, X en una muestra de 49 individuos y planteamos como H_0 que la campaña no fue efectiva y sigue siendo $\mu_x = 400$. En la tabla que sigue damos los valores que tomaría el valor P y los IC al 95% y al 99% para *distintos valores de la media muestral, M*, si en la muestra es $S = 70$ ($ES = 10$). Recuerde que es $IC = M \pm Z \cdot ES$, con $Z = 1.96$ ó 2.58 dependiendo de la confianza, obtenido de las tablas de D. Normal, pues $N > 30$.

M	Z	P _{UNI}	P _{BIL}	IC _{95%} = M ± 19.6	IC _{99%} = M ± 25.8
410	1	0.1587	0.3174	390.4 ↔ 429.6	384.2 ↔ 435.8
416.5	1.64	0.0505	0.1010	396.8 ↔ 436.0	390.6 ↔ 442.2
419.6	1.96	0.0250	0.0500	400 ↔ 439.2	393.8 ↔ 445.4
423.3	2.33	0.01	0.02	403.7 ↔ 442.9	397.5 ↔ 449.1
425.8	2.58	0.005	0.01	406.2 ↔ 445.4	400 ↔ 451.6
440	4	0.00003	0.00006	420.4 ↔ 459.6	414.2 ↔ 465.8

Comentamos algunos hechos que son de validez general y que pueden observarse en los ejemplos anteriores:

1. Cuando el IC_{95%} incluye el valor que propone la H_0 , es $P_{UNI} > 0.025$ para esa H_0 .
2. Cuando un extremo del IC_{95%} coincide con el valor que propone la H_0 , la P bilateral es 0.05 y la unilateral es 0.025.
3. Cuando un extremo del IC_{99%} coincide con el valor que propone la H_0 , la P_{BIL} es 0.01 y la unilateral es 0.005.
4. En general, cuando un extremo del IC _{$\alpha\%$} coincide con el valor que propone la H_0 , la P_{BIL} es $1-\alpha$ y la P unilateral es $(1-\alpha)/2$.
5. Cuando el IC_{99%} no incluye el valor que propone la H_0 , es $P_{UNI} < 0.005$.

Para ilustrar cómo el IC nos informa sobre la magnitud del efecto estudiado y el valor P no lo hace, veamos los datos de una muestra tomada en Oviedo (con $M = 410$) y otra tomada en Cartagena (con $M = 460$), ambas de $N = 1225$, con $S = 70$ y por ello $ES = 70 / \sqrt{1225} = 70 / 35 = 2$. Para ambas se hace test para $H_0: \mu = 400$.

	N	M	S	ES	Z	P _{UNI}	IC _{99%} = M ± 5.2
Oviedo	1225	410	70	2	5	3·10 ⁻⁷	404.8 ↔ 415.2
Cartagena	1225	460	70	2	30	10 ⁻¹⁰⁰	454.8 ↔ 465.2

En ambas el valor P es muy pequeño y nos da la seguridad de que la media poblacional tras la campaña no es 400 sino mayor, es decir, que la campaña ha sido efectiva. Pero solamente los IC nos permiten saber que en Oviedo el efecto producido por la campaña es moderado, pues el IC indica que la media poblacional está entre 404.8 y 415.2, es decir, casi entre 5 y 15 horas más que antes de la campaña, mientras que en Cartagena el efecto fue mucho mayor: el aumento del número medio de horas está entre 54.8 y 65.2, aproximadamente.

Con muestras muy grandes un pequeño efecto puede ser muy significativo y el investigador debe distinguir claramente entre la magnitud del efecto y su significación estadística (valor P del test). Y a ello ayuda decisivamente el IC.

+++9.9. Ausencia de Normalidad y tests no paramétricos

En teoría, con muestras pequeñas (menores de 30) estos cálculos basados en la distribución t de Student, que llamaremos “test-t”, solamente son válidos si la variable en cuestión sigue DN en la población. Si no se cumple esa condición el valor P del test-t, que llamaremos “P-t”, no es exactamente igual al “**P-verdadero**”, que es la prob de obtener muestras con media que se aleje de la poblacional propuesta por la H_0 tanto como la de nuestro estudio o más aún. Este valor mide el grado de evidencia a favor de la hipótesis de trabajo

Muchos libros dicen —o el lector interpreta— que hay tests, llamados de Normalidad, que a partir de los datos de la muestra, permiten saber si la variable tiene o no DN en la población. De ese modo, si la variable sigue DN se puede aplicar el test-t para una media y si no sigue DN hay que aplicar otros tests llamados “no paramétricos”, que no exigen DN. Pero esa frase es una simplificación equívoca si se toma como receta ciega que sustituya la comprensión del tema. En la práctica esa condición no debe tomarse como restricción muy estricta y hay que tener en cuenta los siguientes matices importantes:

1. Ninguna variable de la naturaleza se ajusta exactamente a la DN. La DN es un modelo matemático al que muchas distribuciones reales de la naturaleza se aproximan lo suficiente como para poder asumir que siguen esa distribución, aunque ninguna de ellas la seguirá con total exactitud (como ningún ángulo físico será exactamente recto, aunque muchos lo son tan aproximadamente que se les puede tratar como tales y utilizar con ellos el teorema de Pitágoras con provecho práctico).
2. El test-t es apropiado cuando la variable tiene distribución muy próxima a la Normal. Pero ningún test de normalidad puede confirmar, con los tamaños habituales en las investigaciones, que tiene en población distribución **muy próxima** a la Normal. Solamente pueden —si aparece valor P muy pequeño— confirmar que no hay normalidad.
3. Con muestras menores de 30, que es en las que nos preocupa la no normalidad en población (pues en ellas no se puede aplicar el TCL), esos tests tienen poca potencia estadística para detectarla y muchas veces se les escapa. Es decir, aunque una variable tenga en la población distribución muy alejada de la normal, los tests de normalidad lo detectan pocas veces.
4. Aunque la variable tenga en población distribución moderadamente alejada de la Normal, el “P-t” es muy próximo al “**P-verdadero**”. A esta característica se le llama “**Robustez**” frente a la no normalidad.
5. Recordemos que si al test de comparación de medias le correspondiera, por ejemplo, P- verdadero = 0.043 y el P-t es 0.064, la diferencia no es relevan-

te. Ambas cifras dicen que la evidencia contra la H_0 es moderada. Que uno esté un poco por debajo del 0.05 y otro un poco por encima de él no implica que la conclusión sea esencialmente diferente.

6. Incluso diferencias considerablemente grandes entre el P-verdadero y el P-t son irrelevantes si ambos valores llevan claramente a la misma conclusión. Por ejemplo, si fuera P -verdadero = 0.000080 y P -t = 0.000002, el primero es 40 veces mayor que el segundo, pero ambos nos llevan claramente a rechazar H_0 . Y si fuera, por ejemplo, “ P -verdadero = 0.33 y P -t = 0.11, ambos valores nos llevan a no rechazar la H_0 .
7. Como consecuencia de los apartados 4, 5 y 6 lo más frecuente es que el test no paramétrico lleve a la misma conclusión que el test-t, bien porque ambos dan valor P grande (se acepta como posible la H_0) o ambos lo dan pequeño (se rechaza la H_0) o ambos lo dan intermedio y no cabe pronunciarse.

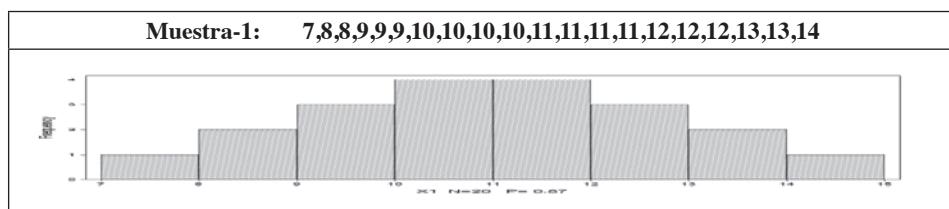
Por todo ello en la mayoría de los casos se aplica el test-t, asumiendo que las conclusiones a que lleva no se alejarán sensiblemente de las que se habrían alcanzado con el P-verdadero.

El lector interesado en captar las ideas fundamentales del análisis estadístico de datos no necesita adentrarse más en este punto. El que desee profundizar un poco más, encontrará en el siguiente apartado discusión más detallada.

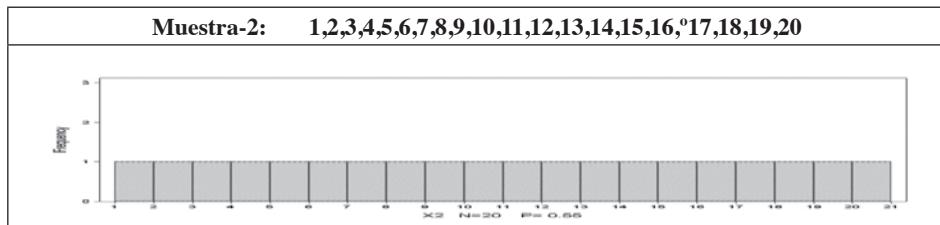
+++ 9.10. Test de Normalidad

Los ejemplos que siguen ayudan a ver que el test de normalidad da menor valor P cuanto más se apartan los datos muestrales de la normalidad. Y también muestran que incluso con muestras que se apartan notablemente de la normalidad, el test no lo detecta, es decir, no da un valor P muy pequeño que invite claramente a rechazar la hipótesis de normalidad en la población. Los gráficos representan distribuciones de frecuencias de los 20 valores de cada muestra, de modo que serán distribuciones tanto más parecidas a la Normal cuando más se parezcan a la curva Normal, esto es, barras altas en torno a la media y menores a medida que nos alejamos de ella.

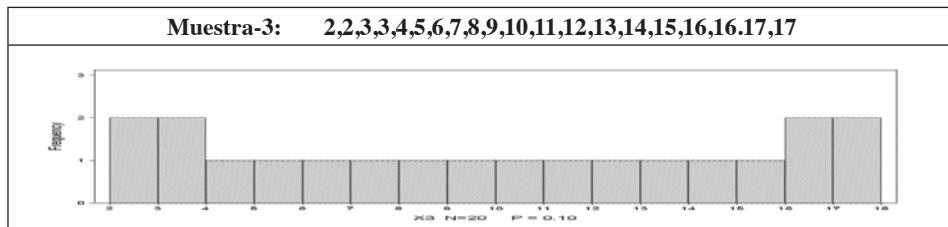
Ejemplo 1: El gráfico que sigue corresponde a una muestra de 20 valores (aparecen encima del gráfico) con distribución muestral parecida a la DN (acúmulo de datos en torno a la media y escasez de ellos en las colas). La altura de cada barra es proporcional al número de veces que se repite cada valor. El test de normalidad plantea que en la población la variable es Normal y da **P = 0.87**, un valor P grande, como cabía esperar.



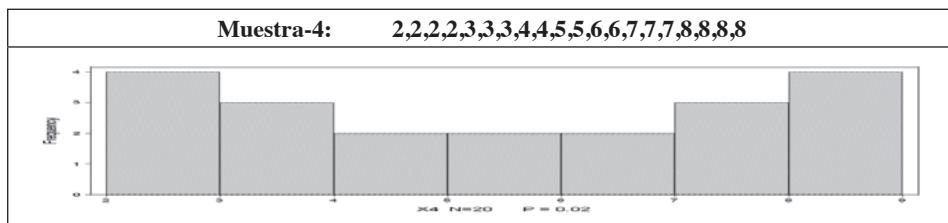
Ejemplo 2: El gráfico siguiente corresponde a una muestra de 20 valores con distribución muestral plana, bastante alejada de DN. A pesar de ello el test de normalidad da $P = 0.55$, lo que no invita a rechazar la hipótesis de normalidad.



Ejemplo 3: El gráfico que sigue corresponde a una muestra de 20 valores con distribución muestral que presenta más acumulación de valores en los extremos, al revés que la DN. El test de normalidad da $P = 0.10$, que tampoco invita a rechazar la hipótesis de normalidad.



Ejemplo 4: El gráfico que sigue corresponde a una muestra de 20 valores con distribución muestral que presenta más acumulación de valores en los extremos que en la muestra anterior, es decir, más alejada de la normalidad. El test de normalidad da $P = 0.02$, que invita a rechazar la hipótesis de normalidad en la población, pero no con evidencia tan fuerte como podría pensarse al observar la muestra.



Estos ejemplos denotan que la mayoría de las muestras pequeñas, cualquiera que sea su composición, son compatibles con que la población tenga DN y por ello no constituyen argumento fuerte en contra del uso del test de Student.

+++ 9. 11. Tests no paramétricos

Para el caso que nos ocupa, en que la H_0 atribuye un valor a la media poblacional de una variable, un posible test no paramétrico sería el llamado *Test de la Mediana* que plantea como H_0 que la mediana de esa variable en la población es

ese valor, y calcula el valor P del test con la Distribución Binomial. Cuando se aplica este test no paramétrico es frecuente que lleve a la misma conclusión que el paramétrico, como en este ejemplo de 20 valores:

$$2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8 \rightarrow \text{Media} = 5 \text{ y } ES = 0.51$$

Ejemplo 1: Para la H_0 : Media poblacional = **2.5** el test-t da $Z = 4.9$ con 19 gl y **P = 0.00005**. Podemos plantear como H_0 equivalente a la anterior (aunque no exactamente igual): Mediana poblacional = **2.5** y hacer un test basado en la Binomial. Si es cierta esta H_0 la mitad de los valores de la población son mayores que 2.5. Por ello esperamos que en la muestra sean mayores que 2.5 la mitad de los valores, es decir, 10. En la muestra vemos 16 valores mayores de 2.5. El valor P del test se calcula con la Binomial de $N = 20$ (tamaño de la muestra estudiada) y $\pi = 0.5$ (esperamos la **mitad** de los individuos con valor mayor de 2.5). Si en población es $\pi = 0.5$, la prob de obtener muestras con 16 o más valores mayores de 2.5, en una muestra de $N = 20$ es **P = 0.005**.

Este último test infrautiliza la información, pues ignora el valor propio de cada individuo y se limita a considerar si es o no mayor de 2.5. Aunque la variable no tenga DN en población cabe pensar que el valor $P = 0.00005$ refleja mejor la realidad que el $P = 0.005$.

Ejemplo 2: Consideremos ahora la H_0 : Media poblacional = **4.5** que con el test-t da $Z = 0.98$ con 19 gl y **P = 0.17**. Para la H_0 : Mediana poblacional = **4.5**, esperamos en la muestra 10 valores mayores de 4.5, pero hay 11. Con Binomial de $N = 20$ y $\pi = 0.5$, la prob de obtener muestras con 11 o más casos mayores de 4.5 es **P = 0.41**. Ambos tests (Student y de la mediana) coinciden en considerar que los datos no son evidencia contra la H_0 .

Ejemplo 3: Consideremos ahora la H_0 : Media poblacional = **3.5** que da $Z = 2.94$ con 19 gl y **P = 0.004**. Si la H_0 : Mediana poblacional = **3.5** es cierta, esperamos en la muestra 10 valores mayores que 3.5, pero hay 13. Con Binomial de $N = 20$ y $\pi = 0.5$ la prob de obtener muestras con 13 o más valores mayores de 3.5 es **P = 0.130**. También en este caso el test de la mediana infrautiliza la información, pues ignora el valor propio de cada individuo y se limita a considerar si es o no mayor de 3.5. El hecho de que el valor P no invite a rechazar la H_0 no sería una referencia vinculante. Aun en el caso de que la variable no tenga DN en la población el valor $P = 0.004$ reflejaría mejor la realidad que el valor $P = 0.130$.

+++ 9.12. Estimadores sesgados y estimadores insesgados.

$$\text{Varianza muestral} = SC / (N-1)$$

Si hacemos **Muestreo Aleatorio** de una población y en cada muestra se calcula un estadístico, tendremos tantos valores de él como muestras se han tomado.

- Un estadístico se dice que es un **estimador insesgado** de cierto parámetro si la media de los valores del estadístico evaluada sobre todas las muestras del MA coincide con el valor del parámetro.

- Un estadístico se dice que es un **estimador sesgado** de cierto parámetro si la media de los valores del estadístico no coincide con el valor del parámetro.

→ **La media muestral es estimador insesgado de la media poblacional.**

Si en cada muestra del MA se calcula la media, algunas de las medias muestrales tienen valor mayor que la media poblacional, otras medias muestrales tienen menor valor que la media poblacional y se demuestra que la media de todas las medias muestrales coincide con el valor de la media poblacional.

→ **La varianza muestral es estimador sesgado de la varianza poblacional.**

Si en cada muestra se calcula la varianza, SC / N , algunas de esas varianzas muestrales tendrán valor mayor que la σ^2 , otras tendrán menor valor que la σ^2 y se demuestra que la media de todas ellas no coincide con el valor de la σ^2 .

→ **La cuasivarianza muestral es estimador insesgado de la varianza poblacional.**

Si en cada muestra se calcula la cuasivarianza, $S^2 = SC / (N - 1)$, algunas de esas S^2 tendrán valor mayor que la σ^2 , otras S^2 tendrán menor valor que la σ^2 y se demuestra que la media de todas las S^2 coincide con el valor de la σ^2 .

Por ejemplo, si de una población con $\sigma^2 = 10$ se toma millones de muestras de $N = 4$, la media de $SC / N - 1 = SC / 3$ es 10, y la media de $SC / N = SC / 4$ es 7.5, como se muestra en la siguiente tabla.

Se toman millones de muestras de $N = 4$ de una población con $\sigma^2 = 10$			
	SC	$SC / N = SC / 4$	$SC / N-1 = SC / 3$
Muestra 1 ^a	32	8.00	10.67
Muestra 2 ^a	29	7.25	9.67
Muestra 3 ^a	27	6.75	9.00
Muestra 4 ^a			
Muestra 5 ^a			
.....			
Muestra 1 000 000 ^{ésima}	35	8.75	11.67
		↓ Media = 7.5	↓ Media = 10

NO OLVIDE RECORDAR - 9

1. A partir del valor de la media muestral hacemos Inferencia para la media poblacional calculando el IC y el valor P de los tests.
2. Los IC son más informativos y fácilmente interpretables por el investigador que los tests: cuando el valor de la media poblacional nos informa sobre el efecto que hace cierto factor, el test únicamente nos dice, si es el caso, que en la población el efecto no es cero, pero no nos informa sobre la magnitud de ese efecto. El IC informa sobre la magnitud del efecto que hace el factor.
3. El valor P es la proporción de valores que en la DN son iguales o mayores que $Z = (\mu - M) / ES$.
4. Con muestras con menos de 30 individuos, para encontrar el valor P de los tests y los límites del IC se utilizan las tablas t de Student.
5. El valor P del test que utiliza la distribución t de Student indica exactamente lo que esperamos, si la variable tiene en la población DN, pero nunca podemos tener la seguridad de que se cumple esa condición.
6. Aunque la variable tenga en población distribución considerablemente alejada de la Normal el “**P-verdadero**” no es muy lejano al “**P- t**”. A esta característica se le llama “**Robustez**” frente a la no normalidad.
7. Pueden aplicarse otros tests que no exigen Normalidad y por ello su resultado no se afecta si no se da esa condición. Se les llama “tests no paramétricos” y son menos potentes, es decir, cuando la H_0 no se cumple tienen menor capacidad para detectarlo.
8. Cuando se aplica el test no paramétrico lo más frecuente es que lleve a la misma conclusión que el paramétrico.
9. Por todo lo anterior, es razonable usar el test de Student en prácticamente todos los casos.
10. El valor P del test no es la probabilidad de que la H_0 sea cierta o sea falsa, es la probabilidad de obtener el tipo de resultado encontrado en nuestro estudio si fuera cierta la H_0 .
11. +++ Si se conoce la probabilidad inicial de que H_0 sea cierta, se puede calcular la probabilidad de que lo sea teniendo en cuenta el resultado del estudio.
12. +++ La Inferencia Bayesiana puede enriquecer el análisis de la información en muchos casos. Su presencia en las publicaciones científicas es aún escasa, pero irá aumentando progresivamente en el futuro inmediato.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 9

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

La variable X se distribuye en la población de Sanos con media = 200 y de modo Normal. Dos muestras de Diabéticos y Tuberculosos dieron:

$$N = 16 \text{ Diabéticos dio media de } X: M_{\text{Diabéticos}} = 212 \text{ y } S = 12$$

$$N = 9 \text{ Tuberculosos dio media de } X: M_{\text{Tuberculosos}} = 196 \text{ y } S = 12.$$

Hacemos tests de significación para ver si la media de cada una de estas poblaciones de enfermos es igual o distinta de la media de la población de sanos. (Puesto que es $N < 30$ se usan las tablas de distribución t de Student)

- Para H_0 : media poblacional en diabéticos = media poblacional en sanos ($\mu_{\text{DIABÉTICOS}} = \mu_{\text{SANOS}}$), se obtiene $P_{\text{UNI}} = 0.0006$
- Para H_0 : media poblacional en tuberculosos = media poblacional en sanos ($\mu_{\text{TUBERCULOSOS}} = \mu_{\text{SANOS}}$), se obtiene $P_{\text{UNI}} = 0.17$

1. Concluimos que en diabéticos la media poblacional es, casi seguro, mayor que en sanos.
2. Concluimos que en diabéticos la media poblacional es igual que en sanos.
3. Concluimos que en tuberculosos la media poblacional es menor que en sanos.
4. Concluimos que en tuberc. la media poblacional puede ser igual que en sanos.
5. Concluimos que en los tuberculosos la media poblacional de X es igual que en sanos.

Se sospecha que la dieta hidrocarbonada, DH, incrementa la rigidez de las paredes aórticas, RPA. En la población de individuos con dieta estándar la media es 77. Una muestra de N=17 individuos con larga historia de DH dio media = 87 unidades de RPA. El Test de Significación da Z = 4, P_{UNI} = 0.00003

6. La Hipótesis Nula planteada en el test es: “la DH incrementa la RPA”.
7. La Hipótesis Nula planteada en el test es: “la DH **no** incrementa la RPA”.
8. Concluimos que es muy probable que la hipótesis nula sea cierta.
9. La probabilidad de que la H_0 sea cierta es $P = 0.00003$.
10. La probabilidad de que la Hipótesis Nula sea falsa es $P = 0.00003$.
11. La prob de que la media poblacional en los individuos con DH sea 77, es 0.00003
12. Concluimos que la DH no modifica realmente (es decir, en población) la RPA.
13. Concluimos que la DH incrementa realmente la RPA, por término medio, en 10 unidades.

El valor P = 0.00003 se lee como “3 de cada 100 000” y quiere decir

Sospechando que la facilidad para aprender una segunda lengua es mayor en mujeres que en varones, se hizo un estudio con 49 mujeres y 64 varones, evaluando esa facilidad mediante pruebas que dan un resultado entre 0 y 200.

	N	Media	S	ES
Mujeres	49	125	21	3
Varones	64	120	32	4

23. Tenemos gran confianza en que la media poblacional en mujeres no es 140.
24. Estamos prácticamente seguros de que la μ_{MUJ} es 128.
25. Estamos prácticamente seguros de que la μ_{MUJ} es 125.
26. Puede que sea $\mu_{\text{MUJ}} = 125$.
27. Puede que sea $\mu_{\text{MUJ}} = 128$.
28. Puede que sea $\mu_{\text{MUJ}} = 140$.
29. Tenemos gran confianza que la media poblacional en los varones no es 126.
30. Estamos prácticamente seguros de que la μ_{VAR} es 120.
31. Estamos prácticamente seguros de que la μ_{VAR} es 124.
32. Puede que sea $\mu_{\text{VAR}} = 120$.
33. Puede que sea $\mu_{\text{VAR}} = 124$.
34. Puede que sea $\mu_{\text{VAR}} = 100$.

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO: ENUNCIADOS - 9

1. En la muestra la *tad* media es 72.2 ¿Cuánto puede valer la *tad* media de toda la población? ¿Puede ser 60? ¿Y 70?
2. La diferencia de ta producida por un día de ayuno (*efecto del ayuno*) es, por término medio, -1.32 en la muestra, es decir, se produce una bajada de 1.32 unidades por término medio ¿Puede ser este efecto medio -3 en toda la población? ¿Y +3?
3. La *opinión* media sobre la *sanidad* es 68.33 en la muestra de 120 varones. ¿Cuánto puede ser en la población de varones? ¿Puede ser 60? ¿Y 70?
4. El *efecto del ayuno* es en la muestra de 120 varones -9.37, por término medio. ¿Cuánto puede bajar la *ta* por el ayuno en la población de varones? ¿Puede no haber bajada? ¿Puede ser de 10 unidades de media?
5. En la muestra de 80 mujeres, la media de *ministro* es 1.9. ¿Cuánto puede ser en la población de mujeres? ¿Puede ser 5? ¿Y 1?
6. El *efecto del ayuno* en la muestra de 80 mujeres es 10.75, por término medio. ¿Cuánto puede subir la *ta* por el ayuno en la población de mujeres? ¿Puede no haber subida? ¿Puede ser de 12 unidades de media?
7. El *efecto del ayuno* en la muestra de 16 mujeres que hacen deporte moderado es 9.25, por término medio. ¿Cuánto puede subir la *ta* por el ayuno en la población de mujeres con deporte moderado? ¿Puede ser de 5 unidades? ¿Y de 10?

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO - 9

Obtenga estas salidas con el programa informático que usted utilice. Cada programa da salidas con matrices particulares, pero el contenido básico debe ser este.

Nota: debido al redondeo de cantidades muy grandes o muy pequeñas los resultados numéricos pueden no coincidir exactamente en distintos programas o calculadoras.

Media de ...	Datos muestra	IC _{95%} para la población	H ₀ para la población	Z ó t y P _{UNI}
<i>tad</i>	N = 200 M = 72.2 , ES = 0.66	70.9 y 73.5	$\mu = \mathbf{60}$	Z = 18.4 , P = 10 ⁻⁴⁵
			$\mu = \mathbf{70}$	Z = 3.32 , P = 0.0005
<i>diftad</i>	N = 200 M = -1.32 , ES = 0.77	-2.84 y 0.20	$\mu = \mathbf{-3}$	Z = 2.18 , P = 0.016
			$\mu = \mathbf{+3}$	Z = 5.6 , P = 10 ⁻⁸
<i>sanidad</i> en varones	N = 120 M = 68.33 , ES = 1.44	65.49 y 71.18	$\mu = \mathbf{60}$	Z = 5.80 , P = 10 ⁻⁹
			$\mu = \mathbf{70}$	Z = 1.16 , P = 0.12
Media de <i>diftad</i> en varones	N = 120 M = -9.37 , ES = 0.46	-10.28 y -8.46	$\mu = \mathbf{0}$	Z = 20.4 , P = 10 ⁻⁴⁰
			$\mu = \mathbf{-10}$	Z = 1.38 , P = 0.08
<i>ministro</i> en mujeres	N = 80 M = 1.9 , ES = 0.079	1.74 y 2.06	$\mu = \mathbf{5}$	Z = 39.4 , P = 10 ⁻⁵³
			$\mu = \mathbf{1}$	Z = 11.4 , P = 10 ⁻²⁸
<i>diftad</i> en mujeres	N = 80 M = 10.75 , ES = 0.46	9.84 y 11.66	$\mu = \mathbf{0}$	Z = 23.6 , P = 10 ⁻³⁷
			$\mu = \mathbf{+12}$	Z = 2.7 , P = 0.003
<i>diftad</i> en Mujeres con deporte mode	N = 16 M = 9.25 , ES=1.0062	7.11 y 11.39	$\mu = \mathbf{5}$	$t_{15} = 4.22$, P=0.0004
			$\mu = \mathbf{10}$	$t_{15} = 0.74$, P = 0.23

- La *ta* media de la muestra de 200 es 72.2; en la población, con una confianza de 95%, estará entre 70.9 y 73.5. Es prácticamente imposible que en población la *ta* media sea 60 y es muy difícil que sea 70.
- En los 200 estudiados, la *ta* ha bajado por el ayuno, por término medio, 1.32 unidades. Y en la población, por término medio, puede haber bajado 2.84, puede de haber subido 0.20 y puede haber variado cualquier cantidad entre éstas. Estos datos nos invitan rechazar que en población haya una bajada media de 3 y claramente nos dicen que no hay un aumento medio de 3.
- En los varones, la *sanidad* por término medio no puede ser 60, pero sí 70 y puede haberse producido una bajada media de TA de 10, y es prácticamente seguro que hay variación.
- En mujeres la media de *ministro* no es en población 5 ni 1, ni el aumento de *ta* medio puede ser de 12.

Capítulo 10

LA INFERENCIA ESTADÍSTICA CON DOS MEDIAS

Muchos profesores de idiomas sospechan que la facilidad para aprender una segunda lengua es mayor en mujeres que en varones. Para ver que la media de la población de mujeres es mayor que la media de la población de varones se hizo un estudio con 49 mujeres y 64 varones, evaluando esa facilidad mediante pruebas que daban resultado entre 0 y 200. El estudio se hizo en países con idiomas muy distintos: China, España y Rusia.

En China dio resultados que no apoyaban claramente esa hipótesis:

China	N	Media, M	S	ES	$M_{MUJ} - M_{VAR}$
Mujeres	49	123	21	3	3
Varones	64	120	32	4	

Pero en España dio resultados muy contundentes a favor de ella:

España	N	Media, M	S	ES	$M_{MUJ} - M_{VAR}$
Mujeres	49	140	21	3	50
Varones	64	90	32	4	

Finalmente, en Rusia los resultados fueron intermedios:

Rusia	N	Media, M	S	ES	$M_{MUJ} - M_{VAR}$
Mujeres	49	125	21	3	15
Varones	64	110	32	4	

En este capítulo vemos cómo los cálculos estadísticos nos pueden ayudar a interpretar mejor los resultados en situaciones como la de Rusia, donde los datos no permiten en principio decantarse claramente por una u otra postura. La diferencia de medias muestrales es 15 pero no conocemos el valor de la diferencia entre las medias poblacionales. Haremos la Inferencia Estadística calculando el **Intervalo de Confianza** para la diferencia de medias poblacionales y el **valor P del test** que propone un determinado

valor para esa diferencia. Todos los paquetes de programas estadísticos dan esos resultados. El investigador necesita interpretarlos correctamente y para ello no es necesario conocer las fórmulas usadas, pero se dan aquí porque no son muy complejas y ayudarán al lector interesado en entender los fundamentos lógicos de la Inferencia.

10.1. IC para diferencia de dos medias

A partir de los datos muestrales se calcula el intervalo dentro del cual tenemos confianza en que se encuentre la diferencia de las medias poblacionales.

$$IC(\mu_1 - \mu_2) = (M_1 - M_2) \pm Z \cdot E$$

donde E se calcula de diferente forma dependiendo del tamaño de las muestras:

$$E = \sqrt{ES^2_1 + ES^2_2} \quad (\text{muestras grandes, } N_1 \geq 30 \text{ y } N_2 \geq 30)$$

$$E = \sqrt{\frac{SC_1 + SC_2}{N_1 + N_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} \quad (\text{muestras pequeñas, } N_1 < 30 \text{ y/o } N_2 < 30)$$

Y “Z” indica la confianza que queramos para el intervalo, igual que en el IC para una media o una proporción, en los capítulos anteriores. Para muestras grandes se usa la tabla de la DN en la que $Z = 1.96$ para confianza 95% y $Z = 2.58$ para confianza 99%.

En el ejemplo es $E = (3^2 + 4^2)^{1/2} = 5$ y $(M_1 - M_2) = 15$

$$IC_{95\%}(\mu_1 - \mu_2) = 15 \pm 1.96 \cdot 5 = 15 \pm 9.8 = 5.2 \text{ y } 24.8$$

$$IC_{99\%}(\mu_1 - \mu_2) = 15 \pm 2.58 \cdot 5 = 15 \pm 12.9 = 2.1 \text{ y } 27.9$$

Es decir, tenemos confianza 95% en que la media poblacional de esta variable sea en las mujeres entre 5.2 y 24.8 unidades mayor que en los varones.

Con muestras “pequeñas” el valor de Z se toma de las tablas de la distribución “t de Student” con grados de libertad “ $N_1 + N_2 - 2$ ”.

Por ejemplo, si los tamaños de las muestras del ejemplo anterior hubieran sido 16 varones y 9 mujeres, con iguales medias y desviaciones tendríamos:

$$N_1 = 16 \text{ hombres: } M_1 = 79, \quad SC_1 = 6615, \quad S_1 = 21, \quad ES_1 = 5.25$$

$$N_2 = 9 \text{ mujeres: } M_2 = 73, \quad SC_2 = 8192, \quad S_2 = 32, \quad ES_2 = 10.67$$

$$E = \sqrt{\frac{6615+8192}{16+9-2}} \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = 10.57$$

En la tabla “t de Student”, en el cruce de la fila de gl = 16 + 9 - 2 = 23 y la columna encabezada por “BIL” igual a “uno menos la confianza”, vemos que para el $IC_{95\%}$ es $t = 2.069$ y para el $IC_{99\%}$ es $t = 2.807$.

$$IC_{95\%}(\mu_1 - \mu_2) = 6 \pm 2.069 \cdot 10.57 = 15 \pm 21.1 = -6.1 \text{ y } 36.1$$

Para interpretar correctamente los límites con signo negativo debemos tener en cuenta el orden en el que hemos restado. Así, tenemos 95% de confianza en que $(\mu_{muj} - \mu_{Var})$ esté entre -6.1 y 36.1, es decir, puede que la media poblacional de mujeres supere a la de varones en 36.1, o que esté 6.1 por debajo de ella, o que se diferencien cualquier cantidad entre las dos anteriores.

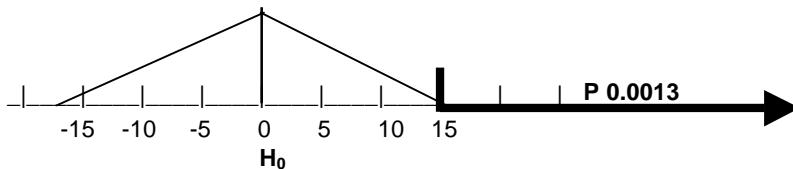
10.2. Test para la comparación de dos medias

Si planteamos como H_0 que no hay diferencias entre sexos, es decir, que las medias poblacionales de ambos sexos son iguales, $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ó $\mu_1 - \mu_2 = 0$

$$\text{se calcula } Z = \frac{|M_1 - M_2|}{E} = 15 / 5 = 3$$

La cantidad “E” del denominador es la estimación de la Desviación Estándar de la diferencia de medias muestrales si se repite millones de veces el estudio. Es decir, si las medias poblacionales son iguales y se repite millones de veces el estudio y en cada repetición se calcula la diferencia $M_{MUJ} - M_{VAR}$, en la mayoría de las repeticiones la M de mujeres será próxima a la de varones, $M_{MUJ} - M_{VAR}$ será próxima a cero. La media de esas diferencias será cero y la desviación estándar entre ellas estará en torno a 5. Por ello $Z = 15 / 5 = 3$ nos dice que la diferencia obtenida en nuestra muestra se aleja 3 desviaciones estándar de la media de las diferencias. En las tablas de DN vemos que $P_{UNI} = P(Z > 3) = 0.0013$. Es decir, $P(M_{MUJ} - M_{VAR} > 15 | \mu_{MUJ} = \mu_{VAR}) = 0.0013$. Solamente en 13 de cada diez mil repeticiones la M de mujeres aventajará, por azar, a la de varones en 15 o más unidades.

Distribución de $M_{MUJ} - M_{VAR}$ si es $\mu_{MUJ} = \mu_{VAR}$ y se repite el estudio millones de veces



Y en otros trece estudio de cada diez mil la media de mujeres estará 15 o más unidades por debajo de la de varones. Por tanto, la diferencia de medias muestrales será 15 o más, a favor de alguno de los grupos, en 26 estudios cada diez mil. A esa cantidad la llamamos **Probabilidad Bilateral** y escribimos $P_{BIL} = 0.0026$. Para calcular la P_{BIL} se tiene en cuenta la “otra cola”, es decir, la situación simétrica a la obtenida en nuestro experimento respecto de la H_0 planteada. Si en nuestro ejemplo se obtuvo diferencia $M_{MUJ} - M_{VAR} = 15$ (ventaja de 15 a favor de las mujeres), respecto de una ventaja poblacional de 0 (lo planteado en la H_0), la situación simétrica es $M_{MUJ} - M_{VAR} = -15$ (ventaja de 15 a favor de los varones). Tan pequeño valor P es evidencia notable en contra de la H_0 y a favor de que la media poblacional es mayor en mujeres.

Los siguientes ejemplos ilustran que en general se obtiene menor valor P del test cuanto:

- a) Mayor es la diferencia de las medias muestrales.
- b) Menor es la variabilidad de la variable, menores desviaciones muestrales.
- c) Mayor es el tamaño de las muestras.

Ejemplo1	N	M	S	ES	$M_1 - M_2$	E	Z	P_{UNIL}	$IC_{95\%}(M_1 - M_2)$
Varones	49	79	10.5	1.5	6	1.65	3.64	0.0001	2.77 y 9.23
Mujeres	64	73	5.6	0.7					

Ejemplo 2

Varones	100	79	10.5	1.05
Mujeres	144	73	5.6	0.47

$M_1 - M_2$	E	Z	P_{UNIL}	$IC_{95\%}(M_1 - M_2)$
6	1.13	5.28	0.000002	3.8 y 8.2

Ejemplo 3

Varones	49	79	10.5	1.5
Mujeres	64	77	5.6	0.7

$M_1 - M_2$	E	Z	P_{UNIL}	$IC_{95\%}(M_1 - M_2)$
2	1.65	1.22	0.11	-1.23 y 5.23

Ejemplo 4

Varones	49	79	3.5	0.5
Mujeres	64	77	2.4	0.3

$M_1 - M_2$	E	Z	P_{UNIL}	$IC_{95\%}(M_1 - M_2)$
2	0.58	3.43	0.0003	0.86 y 3.14

Ejemplo 5

Varones	49	79	27	4
Mujeres	64	73	24	3

$M_1 - M_2$	E	Z	P_{UNIL}	$IC_{95\%}(M_1 - M_2)$
6	5	1.2	0.12	-3.8 y 15.8

- Ejemplo 1 vs. Ejemplo 2:** Mayor evidencia contra la hipótesis de igualdad de medias poblacionales e IC más estrecho en “2”, pues se estudian muestras más grandes, aunque con igual diferencia de medias muestrales e igual desviación.
- Ejemplo 3 vs. Ejemplo 4:** Menor valor P e IC más estrecho en “4”, pues con tamaños de muestra y diferencia de medias muestrales igual que en el “3”, en el “4” la dispersión es menor en las muestras. Lo mismo ocurre en “1” y “5”.
- Ejemplo 1 vs. Ejemplo 3:** Menor valor P en “1” pues hay mayor diferencia de medias muestrales, siendo muestras de igual tamaño y con la misma dispersión.

También se puede plantear como H_0 que la diferencia de medias poblacionales tiene cierto valor distinto de cero. Entonces se calcula:

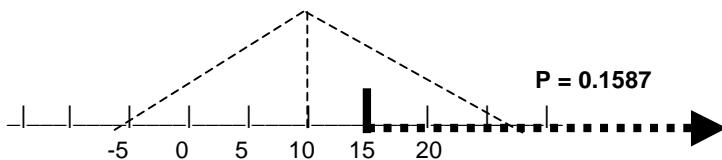
$$Z = \frac{|(\mu_1 - \mu_2) - (M_1 - M_2)|}{E}$$

La fórmula para el test de igualdad de medias poblacionales es un caso particular de esta, con $(\mu_1 - \mu_2) = 0$. El numerador es la “distancia” entre la diferencia de medias poblacionales que propone la Hipótesis ($\mu_1 - \mu_2$) y la diferencia de medias muestrales obtenida en el estudio ($M_1 - M_2$).

- Por ejemplo, si un especialista cree que la μ_{MUJ} aventaja a la de varones en 10 unidades, para la H_0 : $\mu_{MUJ} - \mu_{VAR} = 10$ es

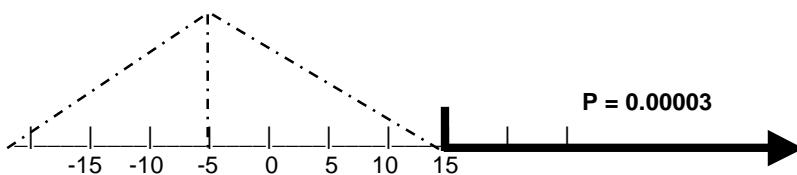
$$Z = (15 - 10) / 5 = 5 / 5 = 1 \text{ y en la DN es } P(Z > 1) = 0.1587.$$

SI es $\mu_{MUJ} - \mu_{VAR} = 10$ y se repitiese este estudio millones de veces, en la mayoría de ellas $M_{MUJ} - M_{VAR}$ tomará valores próximos a 10, pero en más de 15 cada cien repeticiones la M de mujeres aventajará a la de varones en 15 o más unidades.



- Si se plantea como H_0 que la μ_{MUI} es 5 unidades menor que la de varones, $H_0: \mu_{MUI} - \mu_{VAR} = -5$ y $Z = (15 - (-5)) / 5 = 20/5 = 4$ y en la DN es $P(Z > 4) = 0.00003$.

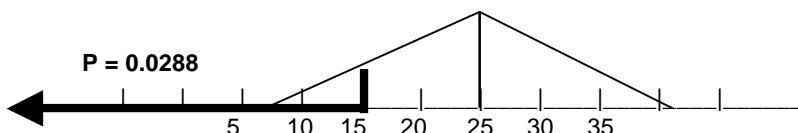
Si es $\mu_{MUI} - \mu_{VAR} = -5$ y se repitiese este estudio millones de veces, en la mayoría $M_{MUI} - M_{VAR}$ tomará valores próximos a -5, y solo en 3 de cada cien mil repeticiones la M de mujeres aventajará, por azar, a la de varones en 15 o más unidades.



- Si se plantea como H_0 que la media poblacional de mujeres es 25 unidades mayor que la de varones, para $H_0: \mu_{MUI} - \mu_{VAR} = 25$, es

$$Z = (15 - 25) / 5 = 10 / 5 = 2 \text{ y en la DN es } P(Z > 2) = 0.0228.$$

Si es $\mu_{MUI} - \mu_{VAR} = 25$ y se repitiese este estudio millones de veces, en la mayoría de ellas $M_{MUI} - M_{VAR}$ tomará valores próximos a 25, y solamente en 2 o 3 de cada cien repeticiones la M de mujeres aventajará a la de varones en 15 o menos unidades.



Fíjese que ahora interpretamos el valor P_{UNI} como la FR de estudios con diferencia de medias muestrales menor que 15, y en los ejemplos anteriores hablábamos de diferencia de medias muestrales mayor de 15, siendo 15 la diferencia obtenida en nuestros datos. ¿Por qué unas veces hablamos de diferencia mayor que la obtenida y otras veces menor? Depende de la H_0 planteada. El valor P se refiere a la proporción de estudios con resultado como el nuestro o **más “extremo”** si H_0 es cierta. En los ejemplos anteriores con $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ y $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 10$ y $H_0: \mu_1 - \mu_2 = -5$, resultados más extremos son aquellos con $M_1 - M_2 > 15$, mientras que con $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 25$, resultados más extremos son los que tienen $M_1 - M_2 < 15$.

Si alguna muestra tiene N menor de 30, el valor P del test se busca en las tablas t de Student (con grados de libertad “ $N_1 + N_2 - 2$ ”), en vez de las de DN.

**** Ejercicio 10.1:** Para cada uno de los tres supuestos que siguen calcule el valor de E, el valor P del test que plantea igualdad de medias poblacionales, el valor P del test que plantea que la media poblacional de B supera a la de A en 7 unidades y los IC.

En cada uno de ellos se estudia una muestra de 4 individuos de la población A y otra de 5 individuos de la población B, obteniéndose en todos los supuestos medias muestrales $M_A = 7$ y $M_B = 12$. Para obtener el valor P y calcular el IC utilice la tabla de t de Student, pues son muestras de $N_A = 4$ y $N_B = 5$ individuos.

	1º	A	B	2º	A	B	3º	A	B
	13	19		11	17		9	14	
	15	17		10	15		8	13	
	2	11		4	11		6	12	
	1	7		3	9		5	11	
		6			8			10	
Media	7	12		7	12		7	12	
SC	122	136		50	60		10	10	
E	4.07								

Para la $H_0: \mu_B = \mu_A$

Z	1.23			
P _{UNIL}	0.13			

Para la $H_0: \mu_B - \mu_A = 7$

Z				
P _{UNIL}				

Intervalo de confianza para $\mu_B - \mu_A$

IC _{95%}				
IC _{99%}				

**** Ejercicio 10.2:** De 12 pacientes hipertensos y en situación clínica muy similar, 5 fueron tratados con “A” y 7 con “B” para bajar la presión arterial. La adjudicación de tratamientos fue realizada al azar. Las bajadas de presión fueron:

“A”: 9 , 11 , 7 , 6 , 12 “B”: 10 , 6 , 8 , 5 , 7 , 6 , 7

N	Medias	SC	S ²	S	ES
---	--------	----	----------------	---	----

Tratados con A: 5 9 26 6.5 2.55 1.14

Tratados con B: 7 7 16 2.5 1.58 0.60

- Calcule el IC_{95%} para la bajada media poblacional con cada tratamiento.
- ¿Hay motivos para afirmar que un tratamiento es más efectivo que el otro?
- Un autor dice que el efecto medio poblacional de “A” es 6 unidades **mayor** que el de “B”, es decir, $\mu_A - \mu_B = 6$. ¿Usted qué opina?
- Otro autor dice que $\mu_B - \mu_A = 2$. ¿Usted qué opina?
- Otro autor dice que $\mu_A - \mu_B = 2$. ¿Usted qué opina?
- Calcule e interprete el IC_{95%} para $\mu_A - \mu_B$.

En otros estudios similares se usó el fármaco “C” en 41 pacientes: $M_C = 6.5$, $SC_C = 246$ y el “D” en 35 pacientes: $M_D = 8$, $SC_D = 119$. ¿Qué opina usted sobre cada una de las siguientes hipótesis?

$$E = \sqrt{\frac{SC_1}{N_1(N_1 - 1)} + \frac{SC_2}{N_2(N_2 - 1)}} = \sqrt{\frac{246}{40 \cdot 41} + \frac{119}{34 \cdot 35}} = 0.5$$

- g. $M_C = M_D$.
- h. $M_D - M_C = 1$.
- i. $M_D - M_C = 2$.
- j. $M_D - M_C = 3$.
- k. $M_C - M_D = 2$.

** Ejercicio 10.3: En nuestro ejemplo de 49 mujeres y 64 varones rusos,

Rusia	N	Media, M	S	ES	$M_{MUJ} - M_{VAR}$
Mujeres	49	125	21	3	15
Varones	64	110	32	4	

Califique cada afirmación a continuación con “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa:

- a. Para la H_0 de igualdad de medias poblacionales es $Z = 3$ y $P_{UNIL} = 0.0013$.
- b. Si es $M_{VAR} = M_{MUJ}$ y se repitiese este estudio millones de veces, en 13 de cada diez mil la M de mujeres aventajará a la de varones en 15 o más unidades.
- c. Si es $M_{MUJ} - M_{VAR} = 15$ y se repitiese este estudio millones de veces, en 13 de cada diez mil la M de mujeres aventajará a la de varones en 15 o más unidades.
- d. Si es $M_{MUJ} - M_{VAR} = 15$ y se repitiese este estudio millones de veces, en 500 de cada mil la M de mujeres aventajará a la de varones en 15 o más unidades.
- e. Para la H_0 que dice que la media poblacional en mujeres supera a la de varones en 20 unidades es $Z = 35 / 5 = 7$ y $P_{UNIL} < 10^{-10}$.
- f. Para la H_0 que dice que la media poblacional en mujeres supera a la de varones en 20 unidades es $Z = 5 / 5 = 1$ y la P_{UNIL} es aproximadamente 0.16.
- g. Si es $M_{MUJ} - M_{VAR} = 20$ y se repitiese este estudio millones de veces, en 500 de cada mil la M de mujeres aventajará a la de varones en 20 o más unidades.
- h. Si es $M_{MUJ} - M_{VAR} = 20$ y se repitiese este estudio millones de veces, en 16 de cada 100 la M de mujeres aventajará a la de varones en 15 o más unidades.
- i. Si es $M_{MUJ} - M_{VAR} = 20$ y se repitiese este estudio millones de veces, en 16 de cada 100 la M de mujeres aventajará a la de varones en 15 o menos unidades.

10.3. IC para diferencia de dos medias con datos apareados

En algunas ocasiones se trata de estudiar una misma variable en un mismo grupo de individuos en dos situaciones diferentes, por ejemplo, antes y después de hacer ejercicio, o de seguir un determinado tratamiento; y se pretende saber si el ejercicio o el tratamiento modifican la media de la población. En este caso

hablamos de datos apareados. Hay clara diferencia entre las situaciones anteriores de este capítulo y la que ahora abordamos. En ambos casos comparamos dos medias muestrales, pero en las situaciones anteriores las dos medias muestrales están calculadas sobre dos grupos de individuos diferentes, y en este caso las medias muestrales están calculadas sobre un único grupo de individuos, a cada uno de los cuales se le mide la misma variable en dos ocasiones.

Por ejemplo, para ver si tomar medio litro de cerveza aumenta el tiempo de respuesta, X , se mide lo que cada sujeto tarda en responder a cierto estímulo en condiciones estándar (X_{Antes}) y tras beber cerveza ($X_{\text{Después}}$). Si para cada individuo se calcula la diferencia $D = X_{\text{Después}} - X_{\text{Antes}}$, la media de las D es igual a $M_{\text{Después}} - M_{\text{Antes}}$ (la media de las diferencias es igual a la diferencia de las medias).

En una muestra de 5 individuos se obtiene:

$$\begin{array}{ll} \text{Antes: } & 13 \quad 14 \quad 11 \quad 5 \quad 7 \rightarrow M_{\text{Antes}} = 10 \quad SC_{\text{Antes}} = 60 \\ \text{Después: } & 15 \quad 19 \quad 17 \quad 9 \quad 10 \rightarrow M_{\text{Después}} = 14 \quad SC_{\text{Después}} = 67 \\ \text{Diferencias } D: & 2 \quad 5 \quad 6 \quad 4 \quad 3 \rightarrow M_{\text{Diferencia}} = 4 \\ SC(D) = 10 & ES(D) = 0.71 \end{array}$$

Tenemos una sola muestra y en cada individuo se valora el aumento de X tras ingerir cerveza, de forma que el primero aumentó su tiempo de respuesta en 2, el segundo en 5, ..., y se calcula la SC y el ES de estas diferencias.

$$\text{Intervalo de Confianza al } 95\% \ IC(\mu_D) \equiv M_{\text{Diferencia}} \pm Z \cdot ES(D)$$

donde Z se mira en la tabla t de Student (en la fila con $N - 1$ grados de libertad y en la columna que tiene como cabecera 5% bilateral) si es $N < 30$; y en la de la DN si es $N \geq 30$. Con 4 gl es $Z = 2.776$

$$IC_{95\%}(\mu_D) = 4 \pm 2.776 \cdot 0.71 = 4 \pm 1.97 = \mathbf{2.03} \text{ y } \mathbf{5.97}$$

El aumento medio es 4 unidades en la muestra y tenemos confianza 95% en que beber medio litro de cerveza aumenta la media poblacional entre 2.03 y 5.97.

10.4. Tests para diferencia de medias con datos apareados

I- Test para hipótesis de “no efecto poblacional” $\rightarrow H_0: \mu_D = 0$ ó $\mu_{\text{Después}} = \mu_{\text{Antes}}$

Hipótesis de trabajo: medio litro de cerveza incrementa el tiempo de respuesta.

Hipótesis Nula H_0 : medio litro de cerveza **No** incrementa el tiempo de respuesta.

$$Z = \frac{|M_{\text{Diferencia}}|}{ES(D)}$$

En el ejemplo: $M_{\text{Diferencia}} = 4$ y $ES(D) = 0.71 \rightarrow Z = 4 / 0.71 = 5.66$

En las tablas t de Student (pues $N < 30$) con 4 gl da $P_{\text{UNIL}} < 0.005$.

Si la cerveza no aumenta X y se hiciera este estudio millones de veces, la M de las diferencias tomaría valores en torno a 0, y solamente en menos de 5 cada mil estudios sería 4 (lo encontrado en las muestras) o más.

II- Test que propone cierto efecto poblacional → $H_0: \mu_D = \mu_{\text{Después}} - \mu_{\text{Antes}} = \Delta$

$$\text{Para } H_0: \mu_D = \mu_{\text{Después}} - \mu_{\text{Antes}} = \Delta \text{ se calcula: } Z = \frac{|\Delta - M_{\text{Diferencia}}|}{ES(D)}$$

con Δ el aumento que propone H_0 , y $M_{\text{Diferencia}}$ y $ES(D)$ obtenidos en la muestra.

Por ejemplo, estudios previos muestran que medio litro de vino incrementa la media poblacional de X en 11 unidades y se quiere ver si los datos muestrales son compatibles con que la cerveza haga igual efecto. Plateamos la H_0 que dice que medio litro de cerveza incrementa la media poblacional en 11.

$$\begin{aligned} \rightarrow H_0: \mu_{\text{Diferencia}} &= 11 \rightarrow Z = (11 - 4) / 0.71 = 9.8 \rightarrow P_{\text{UNIL}} < 0.0005 \text{ (tablas t con 4 gl)} \\ \rightarrow \text{Se rechaza } H_0 &\rightarrow \text{Concluimos que } \mu_{\text{Después}} - \mu_{\text{Antes}} \text{ es } < 11 \end{aligned}$$

Si la cerveza aumenta la media poblacional de X en 11 y se hicieran millones de estudios como este, la media muestral de las diferencias tomará valores en torno a 11 y en menos de 5 cada diez mil estudios la media muestral de las diferencias sería 4 o menor. La misma proporción de veces (menos de 5 cada 10 000 estudios) la media muestral de las diferencias será 18 o mayor yo que un aumento de 18 unidades se distancia del aumento propuesto en la H_0 (11 unidades) lo mismo que 4, pero en el otro sentido.

**** Ejercicio 10.4:** Diga si son verdaderas (V) o falsas (F) cada una de las siguientes afirmaciones relacionadas con el ejemplo anterior.

- Tenemos confianza 95% en que la cerveza produce un aumento de tiempo de respuesta de 2 unidades como mínimo, aproximadamente.
- Pensamos que la cerveza no modifica el tiempo de respuesta en población.
- Es prácticamente seguro que la cerveza no aumenta la media poblacional del tiempo de respuesta en 11 unidades.
- Es prácticamente seguro que la cerveza aumenta la media poblacional del tiempo de respuesta en 4 unidades.
- Rechazamos la igualdad de medias poblacionales porque la probabilidad de que sean iguales es muy pequeña: $P = 0.005$.

Cuando los datos son “apareados” deben ser analizados como tal, pues hacerlo como “independientes” puede conducir a conclusiones erróneas. Como ejemplo faremos el test para la H_0 que dice que $\mu_{\text{ANTES}} = \mu_{\text{DESPUES}}$ tratándolo como si fueran dos medias de dos grupos. Sería $E = (60 / 20 + 76 / 20)^{1/2} = 2.6$ y por tanto $t_8 = 4 / 2.6 = 1.53 \rightarrow P > 0.05$, que no invita a rechazar H_0 , es decir, no es evidencia suficiente a favor de que la ingesta de cerveza alarga el tiempo de respuesta.

**** Ejercicio 10.5:** En un grupo de 4 *Jóvenes* y en otro de 6 *Viejos* se mide la Tensión Arterial, TA, antes y después de hacer ejercicio. Se trata de ver si el ejercicio produce aumento de TA en población y si este aumento es diferente en Jóvenes y en Viejos (asuma Distribución Normal y varianzas iguales en la población).

Notación: $\mathbf{X} \rightarrow$ TA antes de hacer ejercicio, $\mathbf{Y} \rightarrow$ TA después de hacer ejercicio. $\mathbf{Y-X} \rightarrow$ Efecto del ejercicio, aumento de TA producida por el ejercicio.

JÓVENES N = 4	ANTES X	DESPUÉS Y	EFEITO Y - X	VIEJOS N = 6	ANTES X	DESPUÉS Y	EFEITO Y - X
	6	7	1		11	20	9
	8	12	4		14	19	5
	12	12	0		15	24	9
	14	17	3		19	25	6
M	10	12	2		16	23	
SC	40	50	10		64	56	14
ES	1.83	2.04	0.91		1.46	1.37	.68

En las frases que siguen precedidas de flechas haga los cálculos adecuados y en las que van precedidas de una letra diga si son Verdaderas o Falsas:

- Diga cuál es el efecto del ejercicio en la muestra de jóvenes y en la de viejos.
- Para saber si el ejercicio produce aumento de TA en la población de viejos, $Z = \dots$ y $P_{UNIL} = \dots$
- a. Es casi seguro que el ejercicio aumenta la TA media poblacional de jóvenes.
- b. Es casi seguro que el ejercicio aumenta la TA media poblacional de los jóvenes en 2 unidades.
- c. Es casi seguro que el ejercicio no produce un aumento de TA media de 14 unidades en la población de jóvenes.
- Para saber si el efecto del ejercicio es, por término medio, igual en la población de jóvenes que en la de viejos, calcule Z y P_{UNIL} .
- d. Si el efecto del ejercicio fuera igual en la población de viejos que en la de jóvenes, en menos de 25 repeticiones cada 1 000 el efecto en la muestra de viejos superará al de la muestra de jóvenes en 5 o menos unidades.
- e. Si el efecto del ejercicio fuera mayor en la población de viejos que en la de jóvenes, en menos de 25 repeticiones cada 1 000 el efecto en la muestra de viejos superará al de la muestra de jóvenes en 5 o más unidades.
- Para saber si el efecto del ejercicio puede ser, por término medio, 4 unidades menor en la población de viejos que en la de jóvenes, calcule Z y P_{UNIL} .
- Interprete con una frase breve y clara el valor P_{UNIL} anterior.

+++10.5. Asunciones del test “t” para comparar dos medias

Llamaremos “test-t” al procedimiento descrito en los apartados anteriores, “P-t” al valor P del test que da ese procedimiento y “P-verdadero” a la verdadera prob de obtener por azar (cuando son iguales las medias poblacionales) medias muestrales tan distintas como las de nuestro estudio o más distintas. Este valor mide el grado de evidencia a favor de la hipótesis de trabajo. En teoría, con muestras pequeñas, digamos menores de 30, el P-t es igual al P-verdadero si se dan dos circunstancias:

- 1^a **Normalidad:** La variable estudiada debe tener DN en las dos poblaciones implicadas. Aquí se aplican todas las observaciones del apartado 9.9 y siguientes.
- 2^a **Homogeneidad de Varianzas:** la variable en estudio tiene la misma varianza en las dos poblaciones muestreadas. En este sentido hay que tener en cuenta los siguientes matices:
- Existen tests —llamados de Homogeneidad de Varianzas— que plantean como H_0 que las varianzas de las dos poblaciones son iguales, pero nunca pueden confirmar que esa H_0 es cierta, solo pueden, si el valor P obtenido es muy pequeño, confirmar que es falsa.
 - La diferencia entre el “P-t” y el “P-verdadero” no es muy grande aunque las dos varianzas poblacionales sean notablemente diferentes. A esto se le llama “Robustez” frente a la no homogeneidad de varianzas.

Por ello en la mayoría de los casos puede aplicarse el test-t con la confianza de que el valor P encontrado con esta técnica se aproxima lo suficiente al P-verdadero como para hacer válidas las conclusiones alcanzadas.

+++10.6. Tests No Paramétricos

En las pocas ocasiones en que hay evidencia clara contra la Homogeneidad de Varianzas o contra la Normalidad, pueden aplicarse los llamados **Tests No Paramétricos**, que no requieren esas condiciones. Suelen ser un poco menos potentes, es decir, cuando H_0 no es cierta lo detectan menos veces que el test-t. Y suelen dar valores P próximos a los que da el test-t y en cualquier caso de rango similar. El cálculo del valor P de los tests no paramétricos puede ser tedioso, pero los ordenadores lo hacen en milisegundos. Aquí no vamos a explicar esos cálculos, sino a comparar el valor P que se obtiene con ellos con el obtenido con el test-t.

En la tabla que sigue se muestran tres ejemplos con 7 valores en cada una de las dos muestras. Se dan las medias y varianzas en cada una de las muestras, los valores P del test de Normalidad, del test de Homogeneidad de Varianzas, del test-t y del no paramétrico.

Ejemplo 1º							Med	S^2	P Nor.	P Hom-var.	P -t	P No-Para.
2	4	7	8	9	12	14	8	17.6	0.95	0.08	.060	.075
1	4	4	6	5	8	7	5	5.28	0.85			

Ejemplo 2º							Med	S^2	P Nor.	P Hom-var.	P t-test	P No-Para.
17	4	7	8	9	12	14	10.1	19.8	0.95	0.06	.009	.010
1	4	4	6	5	8	7	5	5.28	0.85			

Ejemplo 3º							Med	S^2	P Nor.	P Hom-var.	P t-test	P No-Para.
17	20	7	8	9	12	14	12.4	23.6	0.63	0.045	.0017	.0015
1	4	4	6	5	8	7	5	5.28	0.85			

Con el test de Normalidad se obtiene en todos los ejemplos valores altos indicando que no hay evidencia en contra de que la variable tenga DN en las respectivas poblaciones. Los tests que plantean varianzas iguales en las dos poblaciones dan valores P en torno a 5%, que podría hacernos dudar de que haya igualdad de varianzas poblacionales, pero no es evidencia muy fuerte contra esa hipótesis. Ante la duda de que haya homogeneidad de varianzas hacemos el test no paramétrico. Los valores P-t no son muy diferentes de los respectivos valores P del no paramétrico. Así, para el primer ejemplo el test-t da $P = 0.06$ y el test no-paramétrico da $P = 0.075$, por lo que ambos aportan solamente una modesta evidencia contra la hipótesis de igualdad de medias poblacionales. Esta proximidad entre los valores P del test-t y del no-paramétrico se da también en los otros dos ejemplos. No siempre ambos valores P son tan próximos, pero en pocas ocasiones la divergencia entre ellos es relevante.

NO OLVIDE RECORDAR - 10

1. Hablamos de comparación de “**medias independientes**” cuando se mide una variable en dos muestras. A partir del valor de las dos medias muestrales haremos inferencia acerca de la medias poblacionales, calculando el Intervalo de Confianza para la diferencia de medias poblacionales y haciendo tests.
2. Si una o ambas muestras son “pequeñas”, digamos menores de 30, para el cálculo de los IC y del valor P de los tests se usa la distribución t de Student.
3. Si se plantea como $H_0: \mu_1 = \mu_2$, es decir, $\mu_1 - \mu_2 = 0$, el valor P dice la proporción de veces que se encontraría diferencia de medias muestrales como la de nuestro estudio o mayor, si fueran iguales las medias poblacionales y el estudio se repitiera millones de veces.
4. Si se plantea como H_0 que es $\mu_1 - \mu_2 = K$, el valor P dice la proporción de veces que se encontraría diferencia de medias muestrales tan alejada de K como la de nuestro estudio o aun más alejada, si es $\mu_1 - \mu_2 = K$.
5. Hablamos de comparación de “**medias apareadas**” cuando en cada individuo de una muestra se mide la misma variable dos veces, por ejemplo, antes y después de aplicar un tratamiento. El análisis se hace calculando la diferencia en cada individuo, la media muestral de esas diferencias, M_{dif} , y su error estándar, ES_{dif} . La media de las diferencias es igual a la diferencia de las medias de los dos grupos.
6. Típicamente se plantea como H_0 que el tratamiento no modifica realmente la variable estudiada, es decir, que μ_{dif} es cero en población (la media poblacional de esa variable es igual antes y después del tratamiento). El valor P del test dice la proporción de veces que se encontraría diferencia de medias muestrales como la de nuestro estudio o mayor, si fueran iguales las medias poblacionales y el estudio se repitiera millones de veces.
7. Si se plantea como H_0 que el tratamiento aumenta la media poblacional de esa variable en K unidades, el valor P dice la proporción de veces que se encontraría M_{dif} como la de nuestro estudio o más aleja de K, si fuera cierta H_0 y el estudio se repitiera millones de veces.
8. Aun en el caso de que la variable estudiada tenga en la población distribución moderadamente alejada de la Normal y/o de que las varianzas sean moderadamente diferentes en las poblaciones, el valor P obtenido con este test indica con buena aproximación lo que de él se espera. Se dice que este test es **robusto** frente a la no normalidad y la no homogeneidad de varianzas.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 10

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

La variable X se distribuye en la población de Sanos con media = 200, y de modo Normal. En dos muestras de Diabéticos y Tuberculosos se obtiene:

- **Diabéticos:** $N = 16$ **Media de X:** $M_{DIAB} = 212$ y $S = 12$
- **Tuberculosos:** $N = 9$ **Media de X:** $M_{TUB} = 196$ y $S = 12$

Para la H_0 : media poblacional en Tuberculosos = media poblacional en Diabéticos ($\mu_{TUB} = \mu_{DIAB}$), se obtiene valor P del test $P_{UNI} = 0.002$ (t con 23 gl = 3.1)

1. Estamos casi seguros que en los Tuberculosos la media poblacional es menor que en Diabéticos.
2. Concluimos que la media poblacional en Tuberculosos puede ser igual que en Diabéticos.
3. Si los Tuberculosos tuvieran mayor media poblacional que los Diabéticos, en 2 de cada mil estudios como este se obtendrían medias muestrales iguales.
4. Si los Tuberculosos tuvieran mayor media poblacional que los Diabéticos, en 2 de cada mil estudios como este se obtendría que la media de la muestra de Tuberculosos es 16 unidades mayor que la de Diabéticos o más aún.
5. Si Tuberculosos y Diabéticos tuvieran igual media poblacional, en 2 de cada mil estudios como este la media de la muestra de Diabéticos superará a la de Tuberculosos en 16 o más unidades.
6. Si Tuberculosos y Diabéticos tuvieran igual media poblacional de X, en 2 de cada mil estudios como este se obtendría que la media de la muestra de Tuberculosos es exactamente 16 unidades menor que la de Diabéticos.
7. Si no hubiera diferencia entre las medias de las poblaciones de Tuberculosos y Diabéticos, en 4 de cada mil estudios como este se obtendría diferencia de medias muestrales de 16 o más unidades en cualquier sentido.

Para comparar la Tensión Arterial, TA, (medida en unidades especiales) en dos grupos de edad se estudia una muestra de jóvenes y otra de viejos:

- **JÓVENES:** $N = 49$ $M = 75$ $S = 21$
- **VIEJOS:** $N = 36$ $M = 95$ $S = 24$

Haremos diferentes tests de significación para ver si la TA media puede tomar ciertos valores en las poblaciones de Viejos y Jóvenes y para ver si hay ciertas diferencias entre las medias poblacionales de ambos grupos:

- Para H_0 : media poblacional en *Jóvenes* = 85, es $Z = 3.33$ y $P_{UNIL} = 0.0004$
- Para H_0 : media poblacional en *Viejos* = 90, es $Z = 1.25$ y $P_{UNI} = 0.1056$

- Para H_0 : media poblacional en *Jóvenes* = media poblacional en *Viejos*, es $Z = 4$ y $P_{UNIL} = 0.00003$
 - Para H_0 : media poblacional en *Viejos* - media poblacional en *Jóvenes* = **15**, es $Z = 1$ y $P_{UNIL} = 0.1587$
8. Si la media de la población de Jóvenes fuera 85, solamente en 4 de cada 10 000 muestras encontraríamos que la media muestral es 75 o mayor.
9. Estamos prácticamente seguros de que la media poblacional en Jóvenes es menor de 85.
10. Estamos prácticamente seguros de que la media poblacional en Viejos es 95.
11. Estamos prácticamente seguros de que la media poblacional en Viejos es 90.
12. La probabilidad de que la población de Jóvenes tenga TA media igual que la población de Viejos es $P_{UNIL} = 0.00003$.
13. Si Jóvenes y Viejos tienen en la población la misma media, en 3 de cada 100 000 veces que repitiéramos el experimento, encontraríamos que las medias muestrales coinciden.
14. Estamos prácticamente seguros de que la TA media poblacional es igual en Jóvenes que en Viejos.
15. Si los Viejos tuvieran 15 unidades más de TA media poblacional que los Jóvenes, en aproximadamente 16 de cada 100 estudios como este encontraríamos que la media muestral de Viejos supera a la de Jóvenes en 10 unidades o menos.
16. El valor $P_{UNIL} = 0.1587$ nos indica que es bastante probable que la TA media poblacional sea 15 unidades mayor en los Viejos que en los Jóvenes.

Sospechando que la facilidad para aprender una segunda lengua es mayor en mujeres que en varones, se hizo un estudio con 49 mujeres y en 64 varones, evaluando esa facilidad mediante pruebas que dan un resultado entre 0 y 200. El estudio se hizo en 2 países con idiomas muy distintos: China y España.

China	N	Media, M	S	ES	$M_{MUJ} - M_{VAR}$
Mujeres	49	125	21	3	5
Varones	64	120	32	4	

17. Es prácticamente seguro que la media poblacional en mujeres chinas no es 140.
18. Estamos prácticamente seguros de que en China la μ_{MUJ} es 128.
19. Estamos prácticamente seguros de que en China la μ_{MUJ} es 125.
20. Puede que en China sea $\mu_{MUJ} = 125$.
21. Puede que en China sea $\mu_{MUJ} = 128$
22. Puede que en China sea $\mu_{MUJ} = 140$.
23. Estamos prácticamente seguros de que en China la media poblacional de mujeres es igual a la de varones.
24. Puede que la media poblacional de mujeres sea igual a la de varones en China.

25. Estamos prácticamente seguros de que la media poblacional de mujeres supera a la de varones en 5 unidades.
26. Puede que la media poblacional de mujeres supere a la de varones en 5 unid.
27. Estamos prácticamente seguros de que la media poblacional de mujeres en China supera a la de varones en 25 unidades.
28. Puede que la media poblacional de mujeres supere a la de varones en 25 unid.
29. Estamos prácticamente seguros de que la media poblacional de mujeres en China **no** supera a la de varones en 25 unidades.

España	N	Media, M	S	ES	$M_{MUJ} - M_{VAR}$
Mujeres	49	140	21	3	50
Varones	64	90	32	4	

31. Estamos prácticamente seguros de que en España la μ_{MUJ} no es 140.
32. Estamos prácticamente seguros de que en España la μ_{MUJ} es 140.
33. Estamos prácticamente seguros de que en España la μ_{MUJ} es 144.
34. Puede que sea $\mu_{MUJ} = 140$ en España.
35. Puede que sea $\mu_{MUJ} = 138$ en España.
36. Puede que sea $\mu_{MUJ} = 110$ en España.
37. Estamos prácticamente seguros de que la media poblacional de mujeres en España es igual a la de varones.
38. Puede que la media poblacional de mujeres sea igual a la de varones.
39. Puede que la media poblacional de mujeres en España no sea igual a la de varones.

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO: ENUNCIADOS - 10

1. La *resistencia* a las infecciones es, por término medio, 0.083 unidades mayor en la muestra de varones que en la de mujeres. ¿Cuánto puede ser esa diferencia en la población? ¿Pueden ser iguales? ¿Puede ser de 0.5?
2. La *opinión* media de la *sanidad* es 7.33 puntos mayor en la muestra de varones que en la de mujeres ¿Cuánto puede ser esa diferencia en la población? ¿Pueden ser iguales? ¿Puede ser de 10 puntos?
3. El *efecto del ayuno* es, por término medio, 10.06 unidades mayor en sedentarios que en activos en la muestra de menores de 40 años. ¿Cuánto puede ser esa diferencia en la población de menores de 40? ¿Pueden ser iguales? ¿Puede ser de 15 puntos?
4. El *efecto del ayuno* es, por término medio, 19 unidades mayor en mujeres que en varones en la muestra de mayores de 39 años con *resistencia "media"* a las *infecciones*. ¿Cuánto puede ser esa diferencia en la población? ¿Pueden ser iguales? ¿Puede ser de 15 puntos?

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO - 10

Obtenga estas salidas con el programa informático que usted utilice. Cada programa da salidas con matrices particulares, pero el contenido básico debe ser este.

Nota 1: Debido al redondeo de cantidades muy grandes o muy pequeñas los resultados numéricos pueden no coincidir exactamente en distintos programas o calculadoras.

Nota 2: La distribución “t de Student” con gl mayores de 50 es muy similar a la Normal, de modo que el valor P puede mirarse indistintamente en cualquiera de las dos.

	Datos muestrales		IC_{95%} para la población	H₀ para la población	Z o t P_{UNI}
<i>resisinf</i> varones vs mujeres	varones N = 120 M = 1.53 ES = 0.097	mujeres N = 80 M = 1.45 ES = 0.110	M _{Var – Muj} = 0.083 IC _{95%} -0.210 y + 0.376	$\mu_{Var-Muj} = 0$ $\mu_{Var-Muj} = 0.5$	Z = 0.56 P = 0.29 Z = 3.35 P = 0.0004
<i>sanidad</i> varones vs mujeres	varones N = 120 M = 68.33 ES = 1.44	mujeres N = 80 M = 61.00 ES = 1.79	M _{Var – Muj} = 7.33 IC _{95%} 2.82 y 11.85	$\mu_{Var-Muj} = 0$ $\mu_{Var-Muj} = 10$	Z = 3.2 P = 0.0007 Z = 1.17 P = 0.12
<i>tadpost en menores de 40</i> sedentarios vs activos	sedent. N = 16 M = 73 ES = 1.98	activos N = 64 M = 62.94 ES = 1.063	M _{Sed – Act} = 10.06 IC _{95%} 5.39 y 14.73	$\mu_{Sed-Act} = 0$ $\mu_{Sed-Act} = 15$	Z = 4.29 P=0.00005 Z = 2.11 P = 0.017
<i>tadpost en mayores de 39 y resisinf = 2</i> varones vs mujeres	varones N = 12 M = 62.33 ES = 1.58	mujeres N = 12 M = 81.33 ES = 2.29	M _{Muj – Var} = 19 IC _{95%} 13.23 y 24.77	$\mu_{Muj-Var} = 0$ $\mu_{Muj-Var} = 15$	t ₂₂ = 6.8 P = 10 ⁻⁷ Z = 1.44 P = 0.075

- En la muestra de varones la *resistencia* media es 0.08 unidades mayor que en las mujeres, en la población esta diferencia puede llegar a ser de 0.376, puede ser 0.21 mayor en las mujeres, y cualquier cantidad entre ellas (con confianza de 95%). Puede que no haya diferencia de las medias en la población y no puede ser que la diferencia media sea de 0.5 a favor de los hombres.
- La diferencia de las medias de *opinión sobre sanidad* es 7.33 mayor en la muestra de varones. En la población hay diferencia (P=.0007), y ésta puede ser de 10 puntos (P=.12).
- La *ta tras el ayuno* en menores de 40 años es, por término medio, 10.06 mayor en la muestra de sedentarios que en la de activos. Rechazamos claramente que en la población no haya diferencia, y también que sea 15, pero con menos seguridad.

Capítulo 11

LA INFERENCIA ESTADÍSTICA CON DOS PROPORCIONES

Hacia 1875 Joseph Lister publicaba en *Lancet* datos mostrando que cuando las amputaciones de miembros se hacían por cirujanos que se habían lavado previamente las manos esmerada y meticulosamente, aumentaba la proporción de pacientes que sobrevivían. Y se lamentaba de no poder saber si la diferencia ocurrida en su muestra podría haber ocurrido por azar, sin que esas abluciones tuvieran realmente efecto beneficioso. Sus datos eran aproximadamente estos:

- Entre 40 operados sin abluciones curaron 10: $p_1 = 10 / 40 = 0.25$
- Entre 30 operados con abluciones curaron 12: $p_2 = 12 / 30 = 0.40$

Hoy día la Estadística tiene herramientas que ayudan a formarse opinión en ese sentido, pero no siempre permiten llegar a una conclusión definitiva. Veremos cómo se calculan e interpretan los Intervalos de Confianza para la diferencia de medias poblacionales y el valor P del test que plantea como H_0 para este ejemplo que los lavados en cuestión no son efectivos, es decir que la proporción poblacional de curaciones es igual con y sin abluciones.

11.1. Intervalo de Confianza para $\pi_2 - \pi_1$

Usaremos esta notación para indicar cada una de las cantidades implicadas, llamando “tratamiento 1” al hecho de no lavarse y “2” al hecho de lavarse:

	Curan	No curan	Total		
Trat. 1	$X_1 = 10$	$R_1 = 30$	$N_1 = 40$	$p_1 = X_1/N_1 = 0.25$	$q_1 = R_1/N_1 = 0.75$
Trat. 2	$X_2 = 12$	$R_2 = 18$	$N_2 = 30$	$p_2 = X_2/N_2 = 0.40$	$q_2 = R_2/N_2 = 0.60$
Total	$X = 22$	$R = 48$	$N = 70$	$p = X/N = .3143$	$q = R/N = 0.6856$

El intervalo de confianza para la diferencia de proporciones poblacionales se calcula con la siguiente fórmula, donde Z depende de la confianza que queramos tener en que esa diferencia se encuentre dentro del intervalo. De la misma forma que para el IC de una proporción, Z se obtiene de las tablas de distribución Normal, siendo $Z = 1.96$ para confianza 95% y $Z = 2.58$ para confianza 99%.

$$\text{Intervalo de Confianza} \quad IC(\pi_2 - \pi_1) \equiv (p_2 - p_1) \pm Z \sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{N_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{N_2}}$$

En este ejemplo es $IC_{95\%}(\pi_2 - \pi_1) \equiv 0.15 \pm 1.96 (0.25 \cdot 0.75/40 + 0.40 \cdot 0.60/30)^{1/2}$
 $= 0.15 \pm 0.22 = -0.07 \text{ y } 0.37$

En las muestras, la FR de supervivencia con “2” es 15 puntos mayor que con “1”; en la población no sabemos cuánto es esa diferencia, pero tenemos confianza 95% en que la FR poblacional de supervivencia con “2” sea desde 37 puntos mayor que con “1”, hasta 7 puntos menor (el signo negativo indica ventaja a favor del “1”).

11.2. Tests para la igualdad de proporciones poblacionales

Para H_0 : “1” y “2” igual de eficaces, es decir, $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 - \pi_2 = 0$ se calcula, utilizando aproximación Normal, el estadístico:

$$Z = \frac{|p_2 - p_1|}{\sqrt{p \cdot q \cdot (\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2})}} = \sqrt{\frac{(X_1 \cdot R_2 - X_2 \cdot R_1)^2 \cdot N}{N_1 \cdot N_2 \cdot X \cdot R}}$$

Las dos expresiones son equivalentes; la primera usa FR's de supervivientes y la segunda usa frecuencias absolutas. En nuestro ejemplo:

$$Z = 0.15 / [0.3143 \cdot 0.6856 \cdot (1/40 + 1/30)]^{1/2} = 1.34 \rightarrow P_{\text{UNI}} = 0.09$$

El valor P del test se obtiene a partir de la cantidad Z calculada, utilizando la tabla de DN y lo proporcionan todos los programas informáticos de Estadística. Como en todos los tests de significación, indica la prob de obtener un resultado como el de nuestro estudio o aún más alejado de lo esperado bajo la H_0 , si dicha hipótesis es cierta. Si los dos tratamientos fueran igual de eficaces, es decir, si los lavados fueran inútiles, y se hicieran millones de estudios como este, la diferencia ($p_2 - p_1$) tomaría valores en torno a 0 en la mayoría de los estudios y en 9 de cada 100 estudios, saldría $(p_2 - p_1) \geq 0.15$ (la cantidad obtenida en nuestras muestras). En otros 9 estudios cada 100 encontraríamos que $p_2 - p_1$ es -0.15 o menos. Es decir, en 18 de cada 100 estudios las diferencias de FR muestrales serían 0.15 o más a favor de uno u otro: $P_{\text{BILATERAL}} = 0.18$.

** **Ejercicio 11.1:** Diga si son verdaderas (V) o falsas (F) cada una de las siguientes afirmaciones, a partir de los resultados anteriores.

- Puede ser que, en población, los dos tratamientos sean igual de eficaces.
- Es prácticamente seguro que, en población, las abluciones son inútiles.
- Es prácticamente seguro que “2” cura, en población, 15% más que “1”.

- d. No rechazamos la igualdad de proporciones poblacionales porque la probabilidad de que sean iguales es bastante grande, es $P = 0.18$.
e. Con confianza 95%, los tratamientos pueden curar, en población, entre 7 y 37%.

En los ejemplos siguientes observe cómo el valor P y el IC varían en función de la diferencia muestral $p_2 - p_1$ y del tamaño de las dos muestras. Es necesario distinguir claramente entre **magnitud del efecto** encontrado en la muestra (diferencia entre las proporciones muestrales) y **significación estadística** de ese efecto (valor P del test; diremos que un resultado es muy significativo si el valor de P es muy pequeño y es poco significativo si el valor de P es grande).

Ejemplo 1: Si los datos son (“+” son curados y “-“ no curados):

	+	-	Total		
Trat. 1	3	9	12	$p_1 = 0.25$	$H_0: \pi_1 = \pi_2$
Trat. 2	6	4	10	$p_2 = 0.60$	$P_{BIL} = 0.10$
Total	9	13	22	$p = .409$	$p_2 - p_1 = 0.35$

$H_0: \pi_1 = \pi_2$
 $P_{BIL} = 0.10$
 $IC_{95\%} = -0.04 \text{ y } 0.74$

Efecto grande en la muestra: “2” es bastante mejor que “1”, $p_2 - p_1 = 0.35$.

Pequeña significación estadística, valor de P grande, no hay evidencia contra la hipótesis que propone igualdad de proporciones poblacionales, es decir, el resultado no demuestra que “2” sea realmente mejor que “1”.

Ejemplo 2: Si los datos son:

	+	-	Total		
Trat. 1	12	36	48	$p_1 = 0.25$	$H_0: \pi_1 = \pi_2$
Trat. 2	24	16	40	$p_2 = 0.60$	$P_{BIL} = 0.0009$
Total	36	52	88	$p = .409$	$p_2 - p_1 = 0.35$

$H_0: \pi_1 = \pi_2$
 $P_{BIL} = 0.0009$
 $IC_{95\%} = 0.15 \text{ y } 0.55$

Igual efecto que en el anterior, $p_2 - p_1 = 0.35$, y tamaños de muestra mayores. Esto hace que se obtenga menor valor P (estadísticamente muy significativo), gran evidencia contra la hipótesis de igualdad de proporciones poblacionales, es decir, el resultado demuestra que “2” es realmente mejor que “1”. El IC nos dice que el tratamiento “2” cura entre 15 y 55 puntos más que el “1”. Además se observa que el IC no contiene el 0 (proporciones poblacionales iguales).

Ejemplo 3: Si los datos son:

	+	-	Total		
Trat. 1	1 000	3 000	4 000	$p_1 = 0.25$	$H_0: \pi_1 = \pi_2$
Trat. 2	2 900	7 100	10 000	$p_2 = 0.29$	$P_{BIL} = 0.000002$
Total	3 900	10 100	14 000	$p = .2786$	$p_2 - p_1 = 0.04$

$H_0: \pi_1 = \pi_2$
 $P_{BIL} = 0.000002$
 $IC_{95\%} = 0.024 \text{ y } 0.056$

Efecto pequeño, en la muestra el tratamiento “2” es solamente un poco mejor que el “1”, $p_2 - p_1 = 0.04$. Significación estadística grande, valor P muy pequeño, clarísima evidencia contra la igualdad de proporciones poblacionales; se rechaza la H_0 concluyendo que “2” cura más que “1”. Sin embargo, la ventaja del “2” sobre el “1” es modesta: como se aprecia en el IC, “2” cura entre 2.4 y 5.6 puntos más que el “1”.

**** Ejercicio 11.2:** Aunque el efecto sea pequeño, si es real puede representar un elevado número de curaciones. En el ejemplo 3 arriba, si hay un millón de enfermos, ¿cuántas curaciones más habría utilizando el tratamiento “2” en lugar del “1” (tenga en cuenta el IC)?

**** Ejercicio 11.3:** Entre 20 varones tomados al azar se encontraron 2 melancólicos y entre 30 mujeres 27 eran melancólicas. ¿Hay realmente diferencia en el porcentaje de melancólicos entre ambos sexos? Calcule el IC al 99% y haga test.

	+	-	Total			
Varones				$p_1 = .$	$p_1 q_1 = .$	$Z =$
Mujeres				$p_2 = .$	$p_2 q_2 = .$	$P =$
Total				$p = .$	$p q = .$	$IC =$

**** Ejercicio 11.4:** Entre 40 jóvenes tomados al azar se encontraron 8 alcohólicos y entre 60 viejos 24 eran alcohólicos. ¿Hay realmente diferencia en el porcentaje de alcohólicos entre ambas edades? Calcule e interprete el IC al 95% y haga test.

	+	-	Total			
Jóvenes				$p_1 = .$	$p_1 q_1 = .$	$Z =$
Viejos				$p_2 = .$	$p_2 q_2 = .$	$P =$
Total				$p = .$	$p q = .$	$IC =$

El procedimiento que acabamos de ver es una aproximación que resulta razonablemente buena cuando los “**valores Esperados**” bajo la hipótesis de igualdad de FR poblacionales no son inferiores a 4. Los valores Esperados son los que tendría que haber en cada celda para que con los mismos tamaños de muestras las FR de curaciones fueran igual en ambos tratamientos. Se calculan multiplicando, para cada una de las 4 celdas de la tabla 2 x 2, el total de la fila por el total de la columna y dividiendo por el total de la tabla, como se muestra a continuación:

Datos			Valores Esperados				
	+	-		+	-		
Trat. 1	3	9	12	Trat. 1	$9 \cdot 12 / 22 = 4.9$	$13 \cdot 12 / 22 = 7.1$	12
Trat. 2	6	4	10	Trat. 2	$9 \cdot 10 / 22 = 4.1$	$13 \cdot 10 / 22 = 5.9$	10
	9	13	22		9	13	22

Cuanto menores son los valores Esperados más puede alejarse el valor P obtenido por este procedimiento del verdadero. Cuando algunos Esperados son menores de 5 ese alejamiento puede ser considerable. En esos casos el valor P verdadero se calcula con el llamado *método Exacto de Fisher*, que es más laborioso, pero no supone problema para el ordenador. En el ejemplo de esta última tabla, el valor P obtenido arriba fue $P_{BIL} = 0.10$ y el método Exacto de Fisher da $P_{BIL} = 0.19$. Vemos que la concordancia no es muy buena, pero la P aproximada nos lleva, como la exacta, a no rechazar la hipótesis de igualdad.

11.3. Comparando dos proporciones con datos apareados

Hemos visto cómo comparar la FR de individuos con *una característica* en *dos grupos*, por ejemplo, FR de enfermos con “E” entre los jóvenes y entre los viejos.

Ahora estudiaremos cómo comparar la FR de *dos características* en *un solo grupo* de individuos. Así también ocurría en el análisis de “datos apareados” con variables cuantitativas, cuando estudiábamos medias. Como ejemplo compararemos la proporción de enfermos de “H” frente a la proporción de enfermos de “K”, en una muestra de 80 jóvenes. Para ello tenemos que evaluar dos variables dicotómicas —la presencia de “H” y de “K”— en cada individuo.

Los datos son: de los 80 jóvenes, 16 tenían ambas enfermedades (H+ y K+), 4 tenían solo la “K” (H- y K+), 54 solo la “H” (H+ y K-) y 6 no tenían ninguna (H- y K-).

	H+	H-	
K+	16	4	$p_H = 70 / 80 = 0.875$
K-	54	6	$p_K = 20 / 80 = 0.25$
	70	10	$p_H > p_K ; \quad p_H - p_K = 0.875 - 0.25 = 0.625$
			¿Hay diferencia en la población y de qué orden es?

Por tanto, 70 tenían “H” (con o sin “K”) 87.5% del total y 20 tenían “K” (con o sin “H”), 25% del total. La “H” es 62.5% ($0.875 - 0.25$) más frecuente que la “K”.

Ahora no se trata de evaluar la proporción de una característica en dos grupos, sino la proporción de dos características en un grupo. Los cálculos para el IC y para el test son distintos, pero la interpretación es equivalente.

	H+	H-
K+	a	b
K-	c	d

A) Intervalo de confianza para $(\pi_H - \pi_K)$ con datos apareados:

Con la notación de la tabla, la fórmula para calcular el IC es:

$$IC \equiv (p_H - p_K) \pm Z \frac{\sqrt{b+c}}{N}$$

$$IC_{95\%} (\pi_H - \pi_K) \equiv (0.875 - 0.25) \pm 1.96 (58)^{1/2} / 80 = 0.625 \pm 0.186 = 0.44 \text{ y } 0.81$$

En la muestra estudiada, “H” es 62.5% puntos más frecuente que “K”; en la población no sabemos cuánto es esa diferencia, pero tenemos confianza del 95% en que “H” es, en población, entre 44% y 81 puntos más frecuente que “K”.

B) Tests para hipótesis para $\pi_H = \pi_K$ con datos apareados:

Para la H_0 : Ambas enfermedades son igual de frecuentes en población: $\pi_H = \pi_K$

$$Z = \frac{|b-c|-1}{\sqrt{b+c}} \quad Z = \frac{|54-4|-1}{\sqrt{54+4}} = 6.43 \quad P_{UNI} < 0.00003$$

En la muestra la enfermedad “H” es 62.5 puntos más frecuente que “K”, $p_H - p_K = 0.625$, ¿puede ser que en la población de la que procede esta muestra no haya diferencia entre la frecuencia de ambas enfermedades? El valor P del test se obtiene mirando la cantidad Z encontrada en las tablas de la DN. Si ambas enfer-

medades son igual de frecuentes en población, es decir, $\pi_H - \pi_K = 0$, y repetimos este estudio millones de veces, la mayoría de ellas será $p_H - p_K$ próximo a 0, y menos de 3 veces cada cien mil será, por azar, $(p_H - p_K) \geq 0.625$ (que es la diferencia encontrada en nuestro estudio). La evidencia contra la H_0 es muy fuerte. La rechazamos y concluimos que “H” es, en población, más frecuente que “K”.

Si se calcula el valor P para igualdad de FR poblacionales considerando, erróneamente, las dos proporciones muestrales como datos independientes se obtiene $P_{UNI} < 10^{-15}$. En este ejemplo la conclusión sería igual a la obtenida con el cálculo correcto, pero en otros puede llevar a conclusiones erróneas.

**** Ejercicio 11.5:** Haga el test y calcule el IC_{95%} con los siguientes datos:

	H+	H-	
K+	2	18	20
K-	12	48	60

FR (H) = 14/80 = 0.175	FR (K) = 20/80 = 0.25
FR(H) < FR(K)	
FR(K) - FR(H) = 0.07	

- ¿Cuál es la Hipótesis Nula planteada en el test?
- ¿Qué valor de Z se obtiene?
- ¿Cuánto es el valor P del test?
- ¿Qué se concluye de las frecuencias poblacionales de ambas enfermedades?
- Calcule e interprete el IC_{95%} ($\pi_K - \pi_H$).

11.4. Dos proporciones: Datos apareados vs. datos independientes

En el ejemplo usado antes para comparar proporciones con datos apareados podemos también practicar la comparación de proporciones con datos independientes. El mismo conjunto de datos nos permite hacer inferencia con proporciones independientes y apareadas.

1º	H+	H-	Datos Apareados	Datos Independientes
K+	16	4	FR (H) = 70/80 = 0.875	FR (H K+) = 16/20 = 0.80
K-	54	6	FR (K) = 20/80 = 0.25	FR (H K-) = 54/60 = 0.90
	70	10	FR(H) - FR(K) = 0.625	FR (H K-) - FR (H K+) = 0.10
	80			

Una cosa es estudiar cuál de las dos enfermedades es más frecuente (datos apareados) y otra ver si las enfermedades están *asociadas*, es decir, si la presencia de una aumenta o disminuye la presencia de la otra (datos independientes). En esta muestra se ve:

- “H” afecta a más personas que “K” (el 87.5% tiene “H” frente al 25% que tiene “K”). Se comparan dos proporciones con datos apareados; hay un solo grupo de 80 individuos. Para valorar si en la población de la que procede la muestra *una enfermedad es más frecuente que la otra*, se utiliza el test visto en el apartado 11.3.
- “H” es menos frecuente cuando hay “K” que cuando no hay “K”: $p(H|K+) = 16 / 20 = 80\%$ frente a $p(H|K-) = 54 / 60 = 90\%$, es decir, tienen “H” un 80% de los K+ y un 90% de los K-; esto es, H no es igual de frecuente en presencia que en

ausencia de K. Por tanto, decimos que en la muestra estas dos enfermedades están relacionadas, no son independientes, pues la presencia de una afecta a la presencia de la otra. Los denominadores de estos dos porcentajes son diferentes, pues se comparan dos grupos de individuos distintos (los que tienen “K”, que son 20, y los que no tienen “K”, que son 60). Se comparan dos proporciones con datos independientes. Para valorar si en las poblaciones de las que proceden las muestras las enfermedades H y K son independientes, se utiliza el test visto en 11.2.

Los tres ejemplos que siguen ayudan a entender la diferencia entre esos dos conceptos. En los tres supuestos “H” es 30 puntos más frecuente que “K”, pero puede verse que en el 1º “H” es igual de frecuente en los K+ que en los K-, es decir, no hay asociación entre las dos enfermedades, en el 2º “H” es más frecuente en los K+ que en los K- (“H” y “K” no son independientes; hay asociación positiva) y en el 3º “H” es menos frecuente en los K+ que en los K- (“H” y “K” no son independientes; hay asociación negativa).

1º	H+	H-	<u>FR (K) vs. FR (H)</u>	<u>FR (H K+) vs. FR (H K-)</u>
K+	20	20	FR (K) = 0.8	FR (H K+) = 0.5
K-	5	5	FR (H) = 0.5	FR (H K-) = 0.5
	25	25	FR(K) - FR(H) = 0.3	FR (H K+) = FR (H K-)
		50		

2º	H+	H-	<u>FR (K) vs. FR (H)</u>	<u>FR (H K+) vs. FR (H K-)</u>
K+	24	16	FR (K) = 0.8	FR (H K+) = 24/40 = 0.6
K-	1	9	FR (H) = 0.5	FR (H K-) = 1/10 = 0.1
	25	25	FR(K) - FR(H) = 0.3	FR (H K+) > FR (H K-)
		50		FR (H K+) - FR (H K-) = 0.5

3º	H+	H-	<u>FR (K) vs. FR (H)</u>	<u>FR (H K+) vs. FR (H K-)</u>
K+	16	24	FR (K) = 0.8	FR (H K+) = 0.4
K-	9	1	FR (H) = 0.5	FR (H K-) = 0.9
	25	25	FR(K) - FR(H) = 0.3	FR (H K+) > FR (H K-)
		50		FR (H K+) - FR (H K-) = -0.5

** **Ejercicio 11.6:** Para cada una de las tres tablas anteriores calcule los IC y valor P del test necesarios para contestar las siguientes preguntas:

- Datos independientes
 - En la población, ¿es igual de frecuente “H” en los K+ que en los K-?
 - IC para $FR (H|K+) - FR (H|K-)$ en población.
- Datos apareados
 - En la población, ¿es igual de frecuente “H” que “K”?
 - IC para $FR (K) - FR (H)$ en población.

** **Ejercicio 11.7:** Comentar cómo varia el valor P del test y la anchura del IC para la diferencia de proporciones poblacionales con que se presenta cada enfermedad en función de la relación entre ellas, es decir, en función de cuán frecuente es en la muestra una enfermedad según esté o no presente la otra.

NO OLVIDE RECORDAR - 11

1. Hablamos de dos proporciones con muestras independientes si se mide la proporción de una característica en dos grupos distintos de individuos. Hablamos de dos proporciones con datos apareados si se mide la proporción de individuos con cada una de dos características en un mismo grupo.
2. A partir de la diferencia de las proporciones muestrales se calcula un intervalo de confianza para la diferencia de las proporciones poblacionales. Se utilizan fórmulas diferentes dependiendo de si son muestras independientes o apareadas.
3. En un estudio destinado a comparar la eficacia de dos fármacos, la **Hipótesis de trabajo** dice que el nuevo es mejor que el clásico y la **Hipótesis Nula**, H_0 , dice que no hay tal ventaja. El **valor P del test** nos dice la proporción de estudios en los que se encontraría una diferencia de curaciones como la encontrada en nuestro estudio o aún mayor, si los dos fueran igual de eficaces en la población. Son datos independientes.
4. En un estudio para ver si una enfermedad, o un síntoma (o cualquier otra característica dicotómica) es más frecuente que otra, la **Hipótesis Nula** dice que son igual de frecuentes. El **valor P del test** nos da la proporción de muestras en las que se obtendría una ventaja en la frecuencia de un carácter sobre el otro como el de nuestro estudio o aun mayor, si los dos caracteres fueran igual de frecuentes en población. Son datos apareados.
5. En la primera tabla la enfermedad “H” es menos frecuente en los K+ (40%) que en los K- (90%). En la segunda “H” es más frecuente en los K+ (60%) que en los K- (10%). En ambas, la enfermedad “H” afecta al 80% y la “K” al 50%

	H+	H-	FR (K) vs. FR (H)	FR (H K+) vs. FR (H K-)
K+	16	16	$FR (K) = 40 / 50 = 0.8$	$FR (H K+) = 16 / 40 = 0.4$
K-	9	1	$FR (H) = 25 / 50 = 0.5$	$FR (H K-) = 9 / 10 = 0.9$
	25	25	50	
	H+	H-	FR (K) vs. FR (H)	FR (H K+) vs. FR (H K-)
K+	24	16	$FR (K) = 0.8$	$FR (H K+) = 24 / 40 = 0.6$
K-	1	9	$FR (H) = 0.5$	$FR (H K-) = 1 / 10 = 0.1$
	25	25	50	

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 11

Califique cada afirmación de las que aparece a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

Para diagnosticar cierta enfermedad existen dos técnicas “A” y “B”, ambas aplicadas a cada uno de los 100 enfermos estudiados. Estos son los datos (+ son diagnósticos correctos):

	A+	A -	Total
B+	32	32	64
B -	2	34	36
Total	34	66	

1. En la muestra, la técnica A diagnostica correctamente 34% de enfermos y B 64%
2. Para ver qué técnica es realmente mejor (en población) se plantea la Hipótesis Nula de que B es mejor que A.
3. Para ver qué técnica es realmente mejor (en población) se hace un test de comparación de dos proporciones apareadas.
4. Al hacer el test para ver si en población una técnica es mejor que la otra se obtiene $Z = 1.7$.
5. Al hacer el test para ver si en población una técnica es mejor que la otra se obtiene $Z = 4.97$.
6. Si B fuera mejor que A, sería muy difícil obtener una muestra de 100 enfermos en la que B diagnosticara 30% más de enfermos que A.
7. Si ambas técnicas diagnosticaran correctamente la misma proporción de enfermos en la población, sería muy difícil obtener una muestra de 100 enfermos en la que B diagnosticara 30% más de enfermos que A, o una cantidad aun mayor.
8. Es prácticamente seguro que B diagnostica mejor esta enfermedad que A.
9. En la muestra A, diagnostica el 90% de los casos que diagnosticó B.
10. En la muestra, A diagnostica el 50% de los casos que diagnosticó B.
11. En la muestra, A diagnostica el 5.6% de los casos que no diagnosticó B.
12. En la muestra, A es mucho más eficiente en los casos en que B diagnosticó.
13. Diremos que A y B son independientes si ambos diagnostican igual FR de casos.
14. Diremos que A y B son independientes si la FR de casos diagnosticados por A es igual entre los casos diagnosticados por B que entre los casos no diagnosticados por B.
15. Diremos que A y B son independientes si la FR de casos diagnosticados por B es igual entre los casos diagnosticados por A que entre los casos no diagnosticados por A.

- 16.** Si la FR de casos diagnosticados por A es igual entre los casos diagnosticados por B que entre los casos no diagnosticados por B también ocurre que la FR de casos diagnosticados por B es igual entre los casos diagnosticados por A que entre los casos no diagnosticados por A.

En dos muestras tomadas al azar de 100 varones ancianos y 80 mujeres ancianas se evalúa si tienen hipertensión, HT, y si tienen sordera, S.

VARONES Sordera →	SÍ	NO
Hipertensión: SÍ	59	1
NO	12	28

MUJERES Sordera →	SÍ	NO
Hipertensión: SÍ	2	18
NO	18	42

Con estos datos muestrales podemos plantear diferentes tests. Algunos son:

Test A. Para la H_0 : “El porcentaje de hipertensos en la población de hombres es 75%”, se obtiene $P_{UNIL} = 0.0003$ ($Z = 3.46$).

Test B. Para la H_0 : “El porcentaje de sordas en la población de mujeres hipertensas es 15%”, se obtiene $P_{UNIL} = 0.26$ ($Z = 0.626$).

Test C. Para la H_0 : “La hipertensión es igual de frecuente en la población de hombres que en la de mujeres”, se obtiene $P_{UNIL} << 0.00001$ ($Z = 4.7$).

Test D. Para la H_0 : “Sordera e hipertensión son igual de frecuentes en la población de hombres” se obtiene $P_{UNIL} = 0.0028$ ($Z = 2.77$).

Test E. Para la H_0 : “Sordera e hipertensión son patologías independientes en la población de mujeres”, se obtiene $P_{UNIL} = 0.0367$ ($Z = 1.79$).

- 17.** Los tests A y B son tests para una sola proporción poblacional.
- 18.** El test C es un test de comparación de 2 proporciones apareadas.
- 19.** El test D es un test de comparación de 2 proporciones independientes.
- 20.** El test E es un test de comparación de 2 proporciones independientes.
- 21.** Si en la población de hombres hubiera un 75% de hipertensos, sería bastante fácil encontrar una muestra con 60% o menos de hipertensos.
- 22.** Estamos prácticamente seguros de que en la población de hombres hay menos de 75% de hipertensos.
- 23.** En la muestra estudiada de mujeres hipertensas hay 10% de sordas.
- 24.** Si en la población de mujeres hipertensas hubiera un 15% de sordas, sería difícil encontrar una muestra con 10% de sordas, o una cantidad aún menor.
- 25.** Estamos prácticamente seguros de que en la población de mujeres hipertensas hay 15% de sordas.
- 26.** En las poblaciones de las que proceden estas muestras es más probable encontrar un hombre hipertenso que un mujer hipertensa.
- 27.** La Hipertensión es, en población, más frecuente en hombres que en mujeres.

28. Si la probabilidad de ser hipertenso fuera la misma para un hombre que para una mujer, sería muy difícil encontrar una muestra de 100 hombres y 80 mujeres con 35% más de hipertensos en un sexo que en otro, o una cantidad aún mayor.
29. En la población, es más probable que un varón sea sordo a que sea hipertenso.
30. Si fuera igual de frecuente la sordera y la hipertensión en la población de varones, en 6 de cada 1 000 estudios como este se encontraría que el porcentaje de sordos es mayor que el de hipertensos.
31. Si fuera igual de frecuente la sordera y la hipertensión en la población de varones, en 3 de cada 1 000 estudios como este se encontraría que el porcentaje de sordos supera al de hipertensos en 11 o más puntos.
32. En la población de hombres, sordera e hipertensión son igual de frecuentes.
33. La H_0 planteada en el test E es equivalente a plantear que en la población de mujeres el porcentaje de hipertensas es el mismo entre las sordas que entre las no sordas.
34. Estamos prácticamente seguros que, en la población de mujeres, la sordera no condiciona la aparición de la hipertensión, es decir, la frecuencia con que aparece una no es mayor en presencia de la otra.
35. El porcentaje poblacional de sordas puede ser igual en mujeres hipertensas que en no-hipertensas.
36. Si la hipertensión afectara en la población de mujeres por igual a sordas que a no-sordas, sería muy difícil encontrar una muestra en la que el porcentaje de hipertensas entre las no sordas supera al de las sordas en 20 puntos o más.

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO: ENUNCIADOS - 11

1. En la muestra, el porcentaje de activos es 40 puntos mayor en varones que en mujeres. ¿Puede ser que no haya diferencia en la población? ¿Cuánto se pueden diferenciar en la población?
2. En la muestra, el porcentaje de los que siguen *dieta* es 25 puntos mayor en los que practican *yoga*. ¿Puede ser que no haya diferencia en la población?. ¿Cuánto se pueden diferenciar en la población?
3. En la muestra de menores de 40 años, el porcentaje de activos es 29.2 puntos mayor en varones que en mujeres. ¿Puede ser que no haya diferencia en la población de menores de 40 años? ¿Cuánto se pueden diferenciar en la población?
4. En la muestra de mujeres el porcentaje de las que siguen *dieta* es 20 puntos menor en las que practican *yoga*. ¿Puede ser que no haya diferencia en la población de mujeres? ¿Cuánto se pueden diferenciar en la población?

ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS DARIO - 11

Obtenga estas salidas con el programa informático que usted utilice. Cada programa da salidas con matrices particulares, pero el contenido básico debe ser este.

Nota: debido al redondeo de cantidades muy grandes o muy pequeñas los resultados numéricos pueden no coincidir exactamente en distintos programas o calculadoras. Las aproximaciones con la Normal aquí se hacen SIN corrección por continuidad. Los programas suelen dar resultado con y sin.

	Varón	Mujer
Total	120	80
Activos	96	32
FR Activos	0.80	0.40
Aprox. Normal $P_{UNI} = 10^{-9}$		
Exacto $P_{UNI} = 10^{-8}$		
Diferencia muestral de FR = 0.40		
$IC_{95\%}$: 0.27 y 0.53		

	No yoga	Yoga
Total	160	40
Sí dieta	24	16
FR dieta	0.15	0.40
Aprox. Normal $P_{UNI} = 0.0002$		
Exacto $P_{UNI} = 0.0010$		
Diferencia muestral de FR = 0.25		
$IC_{95\%}$: 0.09 y 0.41		

Menores de 40 años		
	Varón	Mujer
Total	48	32
Activos	44	20
FR Activos	0.917	0.625
Aprox. Normal $P_{UNI} = 0.0007$		
Exacto $P_{UNI} = 0.0019$		
Diferencia muestral de FR = 0.292		
$IC_{95\%}$: 0.107 y 0.477		

Solo mujeres		
	No yoga	Yoga
Total	40	40
Sí dieta	24	16
FR dieta	0.60	0.40
Aprox. Normal $P_{UNI} = 0.037$		
Exacto $P_{UNI} = 0.059$		
Diferencia muestral de FR = 0.20		
$IC_{95\%}$: -0.014 y 0.414		

- En la muestra, el porcentaje de activos es 40 puntos mayor en varones que en mujeres; en la población también es diferente ($P = 10^{-8}$), pudiendo ser desde 27 a 53 puntos mayor en varones (con confianza de 95%).
- En la muestra, el porcentaje de los que siguen *dieta* es 25 puntos mayor en los que practican *yoga*; en la población también es diferente ($P \leq 0.001$), pudiendo ser desde 9 a 41 puntos mayor en los que practican *yoga* (con confianza de 95%).
- En la muestra de menores de 40 años, el porcentaje de activos es 29.2 puntos mayor en varones que en mujeres; en la población de menores de 40 también es diferente ($P \leq 0.0019$), pudiendo ser desde 10.7 a 47.8 puntos porcentuales mayor en varones.
- En la muestra de mujeres el porcentaje de las que siguen *dieta* es 20 puntos menor en las que practican *yoga*; en la población de mujeres podría ser igual ($P \geq 0.037$), podría haber una ventaja de hasta 1.4 puntos a favor de las que hacen *yoga* y hasta 41.4 a favor de las que no practican *yoga*.

Capítulo 12

TAMAÑO DE MUESTRA PARA ESTIMACION

Si estamos interesados en conocer la media de cierta variable en una población, el único modo de calcularla exactamente es medir esa variable en todos los individuos de esa población. Pero en la práctica tomamos una muestra y calculamos la **media muestral**, que no tiene, en general, exactamente el mismo valor que la poblacional. Esperamos que tenga un valor “parecido”, pero ¿cuán buena será la aproximación de la media muestral a la verdadera media poblacional? La respuesta es:

En general, cuanto mayor sea la muestra mejor será esa aproximación.

Pero el investigador intenta tomar una muestra lo suficientemente grande como para que la media muestral se aproxime mucho a la poblacional, y a la vez, lo más pequeña posible, para ahorrar tiempo y dinero.

Es creencia general que hay un tamaño idóneo que es el mínimo, y por ello el más barato, dentro de los suficientemente grandes como para dar una media muestral muy aproximada a la media poblacional. Los profesionales que están diseñando una investigación se preguntan cuál es ese tamaño de muestra óptimo en el caso de su investigación. Pero la realidad es que en la mayoría de las situaciones no hay tal tamaño idóneo y la decisión sobre cuántos individuos incluir en nuestra investigación no depende de un cálculo estadístico.

Cuando se le explica al investigador que, en contra de su creencia, no hay un tamaño que sea el “adecuado” para la investigación que proyecta, suele responder que en los libros de estadística aparecen fórmulas para calcular esos tamaños y él cree que aplicando una de ellas aparecería el tamaño idóneo para su proyecto actual. Es cierto que existen esas fórmulas, pero en este capítulo veremos que pueden dar muchas respuestas distintas, todas ellas válidas, para el tamaño de la muestra buscado. Por ello en la decisión final del tamaño de muestra a usar en una investigación estas fórmulas tienen un peso muy reducido.

En este capítulo se comentarán las fórmulas para calcular el tamaño de muestra para la estimación de una media y una proporción poblacional, así como para la diferencia de dos proporciones y dos medias poblacionales. El tamaño de muestra en relación con tests estadísticos tiene mayor grado de dificultad, no matemática sino lógica. Se estudia en el último capítulo del libro.

12.1. Una anécdota para llamar la atención sobre un error

La doctora Amelia Mendoza, jefa del Servicio de Neurología del Hospital de Macondo, decide hacer un estudio para estimar la FR de personas que consumen hipnóticos, CH, en la población constituida por todos los habitantes del Caribe.

Para determinar el número de personas que debe encuestar visita a un bioestadístico, que tras comentar con ella el caso le sugiere entrevistar a **27 250** personas. Pero en el camino de vuelta coincide en el tren con otro bioestadístico, que tras comentar con ella el caso le sugiere entrevistar a **50** personas. Sospechando que había cometido algún error al dar los datos que le pedían los expertos o que alguno se equivocó en sus cálculos, vuelve a hablar con cada uno de ellos, pero, para su sorpresa, ambos se ratificaron en su cantidad.

Para resolver el conflicto convoca un comité de los mejores expertos europeos. Los convocados acuerdan por unanimidad que ambos bioestadísticos habían actuado correctamente, y añaden que **374** sería un tamaño adecuado.

Amelia no sale de su asombro, perplejidad y enojo, y decide convocar un comité de los mejores expertos mundiales. Tras escucharla, los nuevos convocados acuerdan que los tres tamaños propuestos anteriormente eran adecuados y añaden que **1 040** sería un tamaño adecuado. Finalmente Amelia renuncia al cálculo “científico” del “tamaño adecuado” de la muestra y decide actuar de acuerdo con los *recursos humanos y económicos de que dispone*. Encuesta a una muestra aleatoria de **1000** personas y encuentra que **200** de ellas son CH. Publica un trabajo diciendo que en la muestra estudiada fueron CH el 20% ($p = 0.20$) y el Intervalo de Confianza para el porcentaje poblacional, π , fue:

$$IC_{95\%}(\pi) = p \pm 1.96 \cdot [p(1-p)/N]^{1/2} = 17.5\% \text{ y } 22.5\%$$

Pero la autoridad sanitaria reprocha a la autora que el tamaño de la muestra fue decidido sin “criterios científicos” adecuados. ¿Está justificada esa crítica? A lo largo del capítulo veremos que no.

12. 2. Tamaño de muestra para estimar una proporción

Es obvio que ningún tamaño muestral permite conocer exactamente el dato poblacional. A partir de la FR muestral, p , el investigador calcula un **Intervalo de Confianza, IC**, dentro del cual creemos que se encuentra la FR poblacional. En

general, cuanto mayor sea la muestra más precisa será la estimación, es decir el IC para el valor poblacional, $IC(\pi)$, será más estrecho. Veamos estos ejemplos:

Con $N = 20$ y 2 CH $p = 10\% \rightarrow IC_{95\%}(\pi) = 0.1\%$ y 23% Ancho IC: **22.9**

Con $N = 400$ y 40 CH $p = 10\% \rightarrow IC_{95\%}(\pi) = 7\%$ y 13% Ancho IC: **6**

Con $N = 1600$ y 160 CH $p = 10\% \rightarrow IC_{95\%}(\pi) = 8.5\%$ y 11.5% Ancho IC: **3**

No hay un tamaño “adecuado” sino que el IC es más estrecho cuanto mayor es el tamaño de la muestra.

Pero los libros dan esta fórmula para calcular el tamaño, N , de la muestra:

$$N = \frac{p'(1-p')Z^2}{d^2}$$

Vemos que N depende de tres cantidades, p' , Z y d , cuyo significado es:

p' → Indica el orden de magnitud de la FR poblacional que intentamos conocer con el estudio que estamos proyectando. Esa FR no se conoce, por eso se va a hacer un estudio para averiguar cuánto vale. La cantidad p' a poner en la fórmula debe ser una que suponemos estará cercana a la FR que intentamos averiguar. Si no hay ninguna información al respecto, ponemos $p' = 0.5$.

d → Queremos error de estimación menor de “ d ”, es decir, que la FR que aparezca en la muestra no se aleje de la verdadera FR poblacional en más de “ d ”: $| \pi - p | < d$. Esta cantidad debe decidirla el investigador y no hay criterios “matemáticos” ni “científicos” para hacerlo. Según el valor que se ponga para “ d ”, la fórmula da un N .

Z → Una vez que el investigador ha decidido el valor “ d ” que quiere usar, hay que decirle que no hay ningún N que garantice totalmente el cumplimiento de esa condición, es decir, que vaya a ser $|\pi - p| < d$. La confianza que el investigador tiene en que ocurra eso es mayor cuanto mayor es la muestra. El valor **Z** depende de cuán grande queremos que sea esa confianza. Por ejemplo, para 90% de confianza, Z es el valor que deja entre él y su negativo el 90% de los valores de la Distribución Normal, es decir, $Z = 1.65$. Para 95% de confianza es $Z = 1.96$, etc.

Vemos, pues, que la fórmula **no** es para determinar el “tamaño adecuado”, sino para calcular las “prestaciones” que proporciona cada tamaño, y para poder utilizarla tenemos que decidir:

- una estimación de la proporción poblacional que queremos estimar, p' ;
- la diferencia máxima que no queríamos sobrepasar entre la FR muestral que obtengamos con la muestra que vamos a estudiar, p , y la poblacional, π ;
- la confianza que queremos en que ocurra lo anterior.

Apliquemos la fórmula para tener **90%** de confianza ($Z = 1.65$) en que la p que aparezca en la muestra no se aleje más de **7** puntos porcentuales ($d = 0.07$) de la verdadera proporción poblacional, π , y suponiendo que la FR poblacional sea del orden de **10%** ($p' = 0.10$).

$$N = (0.1 \times 0.9) \cdot 1.65^2 / 0.07^2 = 50$$

Los valores de p' , d y confianza elegidos son razonables, como también lo son otros muchos otros posibles y no hay razón objetiva que haga más válidas esas cantidades que otras parecidas. Pero con otros valores de confianza, error máximo deseable y p' , el resultado puede ser muy distinto. Otras posibles elecciones son:

Confianza	d	p'	N.
90%	.07	.10	$1.65^2 (0.1 \times 0.9) / 0.07^2 = 50$
99%	.04	.10	$2.58^2 (0.1 \times 0.9) / 0.04^2 = 374$
99%	.04	.50	$2.58^2 (0.5 \times 0.5) / 0.04^2 = 1\,040$
99.9%	.01	.50	$3.3^2 (0.5 \times 0.5) / 0.01^2 = 27\,225$

¿Qué nos garantizan cada uno de estos tamaños? Si tomamos una muestra de $N = 50$ tenemos prob 0.90 de que la FR encontrada en la muestra no se aleje de la poblacional, π , en más de 0.07, si π es del orden del 0.10. ¿Qué quiere decir esa prob 0.90? Que en 90 de cada 100 veces que repitamos la toma de una muestra de ese tamaño, la p muestral no se aleja de la π poblacional más de 0.07.

Y si tomamos una muestra de $N = 374$ individuos tenemos prob 99% de que la FR que obtendremos en esa muestra no se alejará más de 0.04 de la poblacional que queremos estimar, si ésta es del orden de 0.10.

**** Ejercicio 12.1:** Se quiere estimar la FR de alcaldes que no han obtenido ganancia personal al recalificar terrenos de su municipio. Supuesto que sean del orden del 20%, calcular el N necesario para tener confianza 90% en que el error de estimación no sea mayor de 8 puntos porcentuales.

**** Ejercicio 12.2:** Para el mismo supuesto del ejercicio anterior llenar las cuatro celdas de la siguiente tabla (la superior izquierda acaba de ser calculada).

	Confianza 90%	Confianza 99%
Error de estimación no mayor de 0.08		
Error de estimación no mayor de 0.02		

****Ejercicio 12.3:** Rellenar la tabla para el mismo supuesto del ejercicio anterior, pero considerando que son honestos aproximadamente el 50% de los alcaldes.

	Confianza 90%	Confianza 99%
Error de estimación no mayor de 0.08		
Error de estimación no mayor de 0.02		

Vemos que a $p' = 0.20$ corresponde $p'(1-p') = 0.16$, mientras que a $p' = 0.50$ corresponde $p'(1-p') = 0.25$. N es mayor cuando p' s tiene valor próximo a 0.50 (de ahí que cuando no se tiene ninguna estimación de esa cantidad se ponga 0.50).

12.3. Tamaño de muestra para estimar diferencia de dos proporciones

Muchos estudios están enfocados a valorar la diferencia de dos FR poblacionales. Un ejemplo típico es comparar la eficacia de un nuevo fármaco B con la

del antiguo A, cuando no conocemos con precisión la FR de curaciones realmente obtenidas con A, π_A (si conocemos π_A es la situación del apartado anterior). Llamamos “efecto de B” en población al aumento de curaciones en relación con el A, es decir, efecto real = $\pi_B - \pi_A$ y el efecto de B en las muestras es la diferencia de las FR de curados en ellas, $p_A' - p_B'$. Trataremos N enfermos con cada fármaco y a partir del efecto observado en las muestras estimamos el efecto real, $\pi_B - \pi_A$. ¿Qué tamaño deben tener las muestras? No hay un tamaño “adecuado”. Cuanto mayores sean las muestras más estrecho será el intervalo de confianza para $\pi_B - \pi_A$.

La fórmula para calcular el tamaño, N, de cada muestra es:

$$N = \frac{[p_A'(1-p_A') + p_B'(1-p_B')] \cdot Z^2}{d^2}$$

p_A' y p_B' → Indican de qué orden son las FR de curaciones con cada fármaco, es decir, son los estimadores de π_A y de π_B . Si, como es lo habitual, se sospecha que B cura más que A pero no se sabe cuánto, se puede poner $p_A' = p_B' = 0.5$, con lo cual se obtiene tamaño igual o mayor que el necesario para la confianza y error máximo elegido. Al poner en la fórmula $p_A' = p_B' = 0.5$ no se está indicando que ambos curan la mitad de los enfermos, sino que la FR de curaciones no es muy lejano al 50%, aunque suponemos que B curará más que A, como ocurriría, por ejemplo, si A curara el 45% y B curara el 55%.

d → Queremos error de estimación menor de “d”, es decir, que el efecto muestral, $p_B - p_A$, no se aleje del efecto poblacional en más de “d”: $|\pi_B - \pi_A| - |p_B - p_A| < d$. Esta cantidad debe decidirla el investigador y no hay criterios “científicos” para hacerlo. Según el valor que se ponga para “d” en la fórmula va a salir un tamaño u otro y el tamaño que sale con cada valor de “d” que se ponga es el adecuado para ese error. Z → Refleja la confianza que queremos tener en que sea $|\pi_B - \pi_A| - |p_B - p_A| < d$. No hay ningún tamaño que garantice totalmente el cumplimiento de esa condición. La confianza en que ocurra es mayor cuanto mayores son las muestras.

Por ejemplo, para tener 90% de confianza en que la $|p_B - p_A|$ que aparezca en la muestra no se aleje más de 10 puntos porcentuales ($d = 0.10$) de $|\pi_B - \pi_A|$ y suponiendo que A cura en torno al 10% y B cura en torno al 60%, es decir, $p_A' = 0.10$, $p_B' = 0.60$, $d = 0.10$ y $Z = 1.65$:

$$N = [(0.1 \cdot 0.9) + (0.6 \cdot 0.4)] \cdot 1.65^2 / 0.1^2 = 89.8 \approx 90$$

Los valores de p' , d y confianza elegidos son razonables, como también lo son otros muchos posibles y no hay razón objetiva que haga más válidas esas cantidades que otras parecidas. Con otros valores de confianza, error máximo deseable y p' , el resultado puede ser muy distinto. Véalo:

Conf.	p_A'	p_B'	d	$[p_A'(1-p_A') + p_B'(1-p_B')] \cdot Z^2 / d^2$	N
0.90	0.10	0.60	0.10	$0.33 \cdot 2.72 / 0.01$	90
0.90	0.50	0.50	0.02	$0.50 \cdot 2.72 / 0.0004$	3 400
0.99	0.10	0.60	0.10	$0.33 \cdot 6.65 / 0.01$	219
0.99	0.20	0.30	0.02	$0.37 \cdot 6.65 / 0.0004$	6 144

Es decir, si A cura en torno al 10% y B cura en torno al 60%, tomando $N = 90$ en cada grupo, tenemos probabilidad **0.90** de que el efecto encontrado en la muestra no se aleje del poblacional en más de **0.10**, (90 de cada 100 veces que repitamos el estudio con esos tamaños será $|p_B - p_A| - |p_B - p_A| < 0.10$).

Y si A cura en torno al 20% y B cura en torno al 30%, tomando $N = 6\,144$ en cada grupo, tenemos probabilidad **0.99** de que el efecto encontrado en la muestra no se aleje del poblacional en más de **0.02**.

**** Ejercicio 12.4:** Calcule los tamaños de muestra necesarios para la confianza y el error máximo indicados en la tabla:

	$p_A = 0.10$	$p_B = 0.10,$	$p_A = 0.50$	$p_B = 0.50,$
	Conf.= 90%	Conf.= 99%	Conf.= 90%	Conf.= 99%
$d = 0.06$				
$d = 0.02$				8 321

**** Ejercicio 12.5:** ¿Qué prestaciones da tomar $N = 8321$ en cada grupo?

**** Ejercicio 12.6:** Se supone que la proporción de alcaldes que no han obtenido ganancia personal al recalificar terrenos de su municipio es del orden del 20% en una región “A” con leyes muy blandas al respecto, y quizás del orden de 50% en la región B, con leyes más duras. Se tomará una muestra de N alcaldes de cada región y serán investigados a fondo. Calcular el N necesario para tener confianza 95% en que el error de estimación del *efecto* de las leyes duras frente a las blandas no sea mayor de 4 puntos porcentuales.

12.4. Tamaño de muestra para estimar una media

El tamaño “adecuado” de una muestra para estimar la media poblacional, μ , de una variable cuantitativa se calcula, presuntamente, con esta fórmula

$$N = \frac{Z^2 \sigma^2}{d^2}$$

$\sigma^2 \rightarrow$ Es una estimación de la varianza poblacional, σ^2 . Para la estimación de una FR poblacional si no teníamos noticia alguna sobre la magnitud de la π se ponía $p' = 0.5$. En este caso no hay un valor al que podamos recurrir si no tenemos información al respecto. Y hay que decidirse por alguna cantidad para que la fórmula opere.

$d \rightarrow$ Queremos que la media de la muestra no se aleje de la media poblacional en más de “ d ” unidades, es decir, queremos $|\mu - M| < d$

$Z \rightarrow$ Depende de la confianza que queremos tener en que sea $|\mu - M| < d$. Es el valor de Z que en la Distribución Normal deja entre él y su negativo una FR de valores igual a esa confianza. Para 95% de confianza es $Z = 1.96$, para 99% de confianza es $Z = 2.58$, etcétera.

En función de los valores que el investigador decida para las tres cantidades anteriores, la fórmula dará valores diferentes de N. Veamos diferentes posibilidades:

Opción 1^a: Confianza = 0.95, d = 2, $\sigma = 8 \rightarrow N = 1.96^2 \cdot 8^2 / 2^2 = 61.46 \approx 62$

Con una muestra de N = 62 tenemos prob 0.95 de que la media encontrada en la muestra no se aleje de la poblacional en más de 2, si la σ es del orden de 8.

Opción 2^a: Confianza = 0.99, d = 1, $\sigma = 12 \rightarrow N = 2.58^2 \cdot 12^2 / 1^2 = 958.5 \approx 959$

Con una muestra de N = 959 tenemos prob 0.99 de que la media encontrada en la muestra no se aleje de la poblacional en más de 1, si la σ es del orden de 12.

** **Ejercicio 12.7:** Calcule el tamaño mínimo de la muestra para tener confianza 0.90 en que $|\mu - M| < d = 6$ si es $\sigma = 5$.

** **Ejercicio 12.8:** Queremos estimar la media de la inteligencia de la población asturiana. Calcule el N necesario para las confianzas y errores indicados en la tabla:

$\sigma \approx 7$		$\sigma \approx 12$	
	Conf.= 90%	Conf.= 99%	Conf.= 90%
d = 4			
d = 1			959

** **Ejercicio 12.9:** En el supuesto anterior, ¿qué prestaciones da una muestra de N = 8.33 ≈ 9?

Es decir, no existe el tamaño “adecuado” en general, sino el tamaño “adecuado” para tener *cierta confianza* en que la Media Muestral se alejará de la poblacional menos de “d” unidades.

12.5. Elementos de subjetividad e imprecisión al aplicar la fórmula para estimar una media

1º- Para aplicar la fórmula que permite calcular el tamaño de muestra es necesario conocer el valor de la σ de esa variable en la población. Si proyectamos ese estudio porque no conocemos la media poblacional, es poco probable que conozcamos la desviación estándar.

2º- ¿Cuánta diferencia podríamos aceptar entre la media muestral y la poblacional? Si queremos, por ejemplo, estimar la media poblacional del dinero que cada persona gasta en cosméticos cada año, unos pueden pensar que es suficiente que la media muestral no se aleje de la poblacional en más de 50 €, otros prefieren que no se aleje en más de 20 € y otros aceptarían el error de estimación hasta 80 €.

3º- Ningún tamaño de muestra garantiza totalmente que la media muestral y la poblacional se diferencien entre sí menos de cierta magnitud. Cuanto mayor sea la muestra más probable es que la diferencia sea pequeña. El investigador tiene que decidir cuánto quiere que sea esa probabilidad.

4º- La mayoría de los estudios implican interés en más de una variable. La fórmula dará diferente resultado según la variable a la que se refiera.

5º- Muchas comparaciones de interés afectarán a subgrupos de la muestra, cuyos tamaños no se pueden predecir de antemano.

** **Ejercicio 12.10:** Para ver la relación entre consumo de frutas cultivadas en invernaderos y la anemia se analizarán dos grupos, uno alimentado con frutas normales y otro con los citados sucedáneos. En cada individuo se recogerán 20 variables relacionadas con los niveles de vitaminas y minerales en el organismo de los sujetos. ¿Cuántos individuos “debe” incluir en un estudio?

** **Ejercicio 12.11:** ¿Cuántos individuos debo incluir en un estudio para estimar la media poblacional del peso de los turcos?

** **Ejercicio 12.12:** ¿Cuántos individuos debo incluir en un estudio para estimar la media poblacional del peso de los belgas si quiero confianza 95% en que la media de la muestra no se aleje de la poblacional en más de 6 unidades?

** **Ejercicio 12.13:** ¿Cuántos individuos debo incluir en un estudio para estimar la media poblacional del peso si quiero confianza 95% en que la media de la muestra no se aleje de la poblacional en más de 6 unidades y estimo que $\sigma \approx 20$?

12.6. Tamaño de muestra para estimar diferencia de dos medias

Se quiere estimar el posible efecto del ejercicio físico moderado, EFM, sobre la variable “X”, concentración de glucosa en sangre en personas de 60 años. El efecto real del EFM es la diferencia entre las medias poblacionales de los sedentarios y de los que hacen EFM, $\mu_{SED} - \mu_{EFM}$. Estimaremos el efecto real por el efecto observado en las muestras, $M_{SED} - M_{EFM}$. ¿Cuántos individuos debe tener cada una de las dos muestras?

La fórmula para calcular el tamaño, N, de cada muestra es:

$$N = \frac{(\sigma_{SED}^2 + \sigma_{EFM}^2)Z_\alpha^2}{d^2}$$

σ_{SED} y σ_{EFM} → Son estimadores de las desviaciones estándar poblacionales. No tienen que ser iguales, pero en la mayoría de los casos no se conocen motivos para que sean diferentes y se estiman por la misma cantidad.

Z y d → Queremos tener cierta confianza en que el efecto encontrado en la muestra no se aleje del poblacional más de “d” unidades: $|M_{SED} - M_{EFM} - (\mu_{SED} - \mu_{EFM})| < d$.

Por ejemplo, para tener confianza 90% en que el efecto encontrado en la muestra, $M_{SED} - M_{EFM}$, no se aleje más de 3 unidades ($d = 3$) del efecto real de la población, $\mu_{SED} - \mu_{EFM}$, y si σ_{SED} y σ_{EFM} están ambas en torno a 8. Es

$$N = [64 + 64] \cdot 1.65^2 / 3^2 = 38.72 \approx 39$$

Con otros valores de confianza, error máximo deseable y σ , el resultado puede ser muy distinto. Estas son otras posibles elecciones:

conf	σ'_{SED}	σ'_{EFM}	d	$(\sigma^2_{SED} + \sigma^2_{EFM}) Z_{\alpha/2}^2 / d^2$	N
0.90	8	8	3	$128 \cdot 2.72 / 9$	39
0.90	12	12	3	$288 \cdot 2.72 / 9$	87
0.90	12	12	1	$288 \cdot 2.72 / 1$	784
0.99	12	12	1	$288 \cdot 6.66 / 1$	1917

Si la σ es del orden de 8 en ambas poblaciones, tomando N = 39 individuos en cada grupo tenemos prob 0.90 de que el efecto encontrado en la muestra no se aleje del poblacional en más de 3 unidades.

Y si la σ es del orden de 12 en ambas poblaciones, tomando N = 1917 en cada grupo, tenemos prob 0.99 de que el efecto encontrado en la muestra no se aleje del poblacional en más de 1 unidad.

** **Ejercicio 12.14:** En el mismo contexto del texto anterior, calcule los tamaños de muestra necesarios para la confianza y el error máximo indicados en la tabla:

	$\sigma_{SED} = 4$	$\sigma_{EFM} = 4$	$\sigma_{SED} = 8$	$\sigma_{EFM} = 8$
	Conf.= 90%	Conf.= 99%	Conf.= 90%	Conf.= 99%
d = 4	6			
d = 2				213

** **Ejercicio 12.15:** A la vista de la tabla anterior, ¿qué prestaciones da tomar N = 14 individuos en cada grupo?

** **Ejercicio 12.16:** El rendimiento de los médicos de los hospitales públicos se evalúa según una escala que va de 0 a 200. Para ver si el rendimiento en su trabajo hospitalario matinal es menor en los que tienen consulta privada por las tardes se evaluará dos muestras de N médicos. ¿Cuántos médicos debe haber en cada grupo? Calcular N si las σ 's son del orden de 10 y queremos tener confianza 95% en que el efecto encontrado en la muestra no difiera del verdadero en más de 2 unidades.

** **Ejercicio 12.17:** En el contexto del ejercicio anterior, llenar los tamaños de la siguiente tabla:

	$\sigma_{SIN} = 4$	$\sigma_{CON} = 4$	$\sigma_{SIN} = 7$	$\sigma_{CON} = 7$
	Conf.= 90%	Conf.= 99%	Conf.= 90%	Conf.= 99%
d = 4				41
d = 2	22			

** **Ejercicio 12.18:** Si finalmente se decide incluir 22 médicos en cada grupo y el rendimiento medio de la muestra sin consulta privada fue $M_{SIN} = 120$ y el rendimiento medio de la muestra con consulta privada fue $M_{CON} = 108$, el efecto muestral fue bajar 12 puntos. ¿Qué podemos decir acerca del efecto poblacional?

12.7. Mitos y realidades en el tamaño de la muestra

Los investigadores creen que la Estadística proporciona fórmulas que dan la cantidad de individuos que deben ser estudiados. Eso no es cierto, pero muchos miembros de los comités encargados de aprobar y financiar los proyectos de investigación participan de esa errónea creencia y exigen que en los proyectos el tamaño de las muestras se justifique con esas fórmulas. La mayoría de los investigadores no saben cómo usar esas fórmulas ni cómo se interpreta su resultado, pero al verse obligados a manejarlas, en los proyectos de investigación ponen frases que no entienden, copiadas de otros proyectos, cuyos autores tampoco las entendían y las habían, a su vez, copiado de otros. Esto da lugar a una cadena de simulacros que lleva a una situación espiral. Los pasos de esa secuencia son:

1. En el proceso de copia “ciega” se van acumulando erratas que los copistas no detectan porque no entienden lo que están copiando.
2. La mayoría de los evaluadores arriba citados no entiende esas frases y las dan por buenas, incluyendo las erratas.
3. Los proyectos aprobados caen en manos de otros autores de nuevos proyectos, que repiten el proceso de copia añadiendo nuevas erratas.
4. Tras varios decenios este ritual nos ha llevado a que en muchos proyectos se lean frases totalmente absurdas pero siempre aprobadas por los evaluadores.
5. En algunas ocasiones este simulacro se hace también de viva voz, en la exposición de los trabajos de Master y Tesis Doctoral. En relación al tamaño de la muestra el investigador dice con aplomo una frase ininteligible y el tribunal asiente con solemnidad. Podría hablarse de un acuerdo “doble ciego”, donde ninguna de las dos partes entiende nada, pero ambas asienten.

Como ejemplo de frases inadecuadas que se van deteriorando en las sucesivas copias a ciegas, tomemos la situación del ejercicio 12.16, en el que el rendimiento de los médicos de hospitales públicos se evalúa según una escala que va de 0 a 200. Para ver si el rendimiento en su trabajo hospitalario matinal es menor en los que tienen consulta privada por las tardes se evaluará dos muestras de N médicos. ¿Cuántos médicos “debe” haber en cada grupo? Ninguna fórmula dice qué tamaño “debemos” tomar, sino las prestaciones producidas por los diversos tamaños. Si estimamos que la σ está entre 4 y 7, en el proyecto en que se pide dinero para esta investigación lo correcto sería dar una tabla de este tipo

$\sigma_{\text{SIN}} = 4$	$\sigma_{\text{CON}} = 4$	$\sigma_{\text{SIN}} = 7$	$\sigma_{\text{CON}} = 7$
Conf.= 90%	Conf.= 99%	Conf.= 90%	Conf.= 99%
d = 4	6	14	17
d = 2	22	54	66
			41
			163

Pero el investigador que no conoce este tema le pide a un estadístico que aplique la fórmula y acaba eligiendo, por ejemplo, $\sigma_{\text{SIN}} = \sigma_{\text{CON}} = 4$, confianza 99% y d = 2, con lo que sale $N = 54$. Por supuesto, podría acordarse otra confianza y otro error máximo, por lo que no hay ningún motivo para elegir $N = 54$ en vez de otro tamaño.

Pero el investigador no entiende las explicaciones del estadístico y acaba tomando nota de una frase que intenta transcribir al pie de la letra, pero en la que es fácil que se introduzca algún error. La frase que el estadístico le dicta podría ser

Si las desviaciones son del orden de 4, con 54 individuos en cada grupo, tenemos confianza 99% en que el efecto muestral no difiera del poblacional en más de 2 unidades

El investigador acaba escribiendo en el proyecto:

“El tamaño adecuado es N = 54, teniendo confianza 99% y orden de 4 en que el efecto muestral no difiera en más de 2 unidades de las desviaciones”.

El siguiente investigador la copia con alguna pequeña variación.

“El tamaño adecuado es N = 54, teniendo confianza ordenada 99% y 2 unidades de 4 desviaciones en que el efecto muestral no difiera significativamente”.

Y cuando un tercer investigador copia esta frase la versión final es:

“El tamaño adecuado es N = 54, teniendo 4 unidades y dos desviaciones de confianza ordenada significativamente en 99%”.

Pero muy probablemente los evaluadores del proyecto la darán por buena.

La situación recuerda la celebrada en todos los institutos de enseñanza media de España como una de las más jocosas. En la Roma Imperial, antes de empezar su encarnizada lucha, los gladiadores debían decir al Cesar: “*Ave, Caesar, morituri te salutant*”. Un alumno de último año de bachiller la tradujo del latín como “*Las aves del Cesar murieron por falta de salud*”. La diferencia entre ese episodio y el de las frases escritas y aceptadas sobre el tamaño de las muestras, es que todos los profesores y alumnos saben que esa traducción es un despropósito total, mientras que la mayoría de los que escriben y evalúan proyectos de investigación creen que las frases referidas al tamaño de las muestras son correctas. Cada uno de ellos no las entiende, pero da por supuesto que los otros las entienden y avalan.

Salir de ese embrollo no requiere que los investigadores y los evaluadores se hagan expertos en Estadística avanzada. Solo es necesario tener claras algunas ideas básicas del análisis estadístico.

12.8. Tamaños de muestra inadecuados

Aunque no hay un tamaño de muestra que sea “el adecuado”, pues muy diferentes tamaños son válidos, ciertos tamaños son claramente “inadecuados”, por ser excesivamente grandes o excesivamente pequeños. Supongamos que en una población se quiere estimar el sueldo medio con error no superior a **50 €** y se sabe que la desviación es en torno a **300 €**. Si nos proponen tomar una muestra de $N = 10$, ¿qué podemos esperar de ella? En la fórmula $N = Z^2 \sigma^2 / d^2$ despejamos $Z^2 = N \cdot d^2 / \sigma^2 = 10 \cdot 50^2 / 300^2 = 0.278$. Por tanto, $Z = 0.53$, que en las tablas de la Normal,

nos da $P(-0.53 < Z < +0.53) = 2 \cdot (0.50 - 0.30) = 2 \cdot 0.20 = \mathbf{0.40}$. Es decir, con $N = 10$ tenemos confianza **40%** en que la media muestral no se aleje de la poblacional en más de **50 €**. Por tanto, tenemos riesgo 60% de que la media muestral se aleje de la poblacional más de 50 €. Si al investigador le parece riesgo demasiado alto y no tiene recursos para más tamaño, deberá posponer la investigación hasta conseguirlo.

Calculemos el tamaño necesario para que la confianza sea mayor, por ejemplo 90% ($Z = 1.96$) con $\sigma = 300$ y $d = 50 \rightarrow N = 1.65^2 \cdot 300^2 / 50^2 = \mathbf{98}$

Si nuestros recursos no alcanzan para estudiar una muestra de 98 individuos, pero nos permiten llegar a $N = 50$, podemos calcular la confianza que ella proporciona:

$$Z^2 = N \cdot d^2 / \sigma^2 = 50 \cdot 50^2 / 300^2 = 1.389 \rightarrow Z = \mathbf{1.18} \rightarrow P(-1.18 < Z < +1.18) = \mathbf{0.76}$$

Con $N = 50$ tenemos confianza 76% en que la media muestral se aleje de la poblacional menos de 50 €. El investigador podría considerarlo demasiado alto y optar por esperar a conseguir más recursos. Es una decisión que solo él puede tomar. La Estadística no toma la decisión por él, pero le puede ayudar permitiéndole calcular los niveles de confianza para distintos errores de estimación.

Para el supuesto anterior otro ejemplo de tamaño no adecuado sería **N = 5 000**, porque si establecemos la confianza en 99%, es $Z = 2.58$. En $N = Z^2 \cdot \sigma^2 / d^2$ despejamos $d^2 = Z^2 \cdot \sigma^2 / N = 2.58^2 \cdot 300^2 / 5\,000 = 120$, es decir, $d = \mathbf{11}$. Vemos que con $N = 5\,000$ tendríamos confianza 99% en que el error de estimación no supere los 11 €, precisión innecesaria para el objetivo del estudio.

NO OLVIDE RECORDAR - 12

1. En todo estudio hay que decidir cuántos individuos se incluyen y muchos investigadores creen —erróneamente— que esa decisión se toma aplicando una fórmula.
2. Las fórmulas relativas a este tema no dicen el tamaño que debe tener la muestra de una investigación, solamente ayudan a calcular las prestaciones que tendrá la muestra según sea su tamaño.
3. Algunos investigadores no saben cómo usar esas fórmulas ni cómo interpretar su resultado, pero al verse obligados a manejarlas en los proyectos de investigación ponen frases que no entienden, copiadas de otros proyectos, cuyos autores tampoco las entendían y las habían, a su vez, copiado de otros.
4. La realidad es que no hay un tamaño “más adecuado” que optimice la relación costo / beneficio. Casi todos los tamaños de muestra, excluidos los extremadamente pequeños o grandes, son válidos.
5. Cuanto mayor es la muestra, más información nos da acerca de la población. Este incremento de la información al aumentar el tamaño de la muestra es gradual y no hay un punto de corte que separe tamaños suficientes de tamaños insuficientes.
6. Las fórmulas no nos dicen cuál es el tamaño que debe usarse, sino cómo depende del tamaño la confianza en que el error de estimación no supere cierta cantidad. Esta confianza y la magnitud de ese error máximo debe elegirlas el investigador según su buen criterio. No hay argumentos matemáticos ni biológicos para ayudarle en esa elección.
7. En el tamaño arrojado por la fórmula influye también la desviación estándar poblacional de las variables cuantitativas y la proporción poblacional de las variables dicotómicas. Como el investigador no conoce ese dato debe suponerlo, lo que introduce otro factor de imprecisión.
8. Aunque no cabe hablar de tamaños adecuados, sí cabe hablar de tamaños inadecuados, bien porque son extremadamente pequeños y dan lugar a errores de estimación con margen muy amplio, o bien porque son extremadamente grandes y dan lugar a errores de estimación innecesariamente pequeños.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 12

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. El tamaño de muestra adecuado para cada investigación se averigua resolviendo unas fórmulas estadísticas bastante sencillas.
2. En realidad esas fórmulas sencillas no permiten saber con precisión cuál es ese tamaño idóneo. El tamaño adecuado solamente puede averiguarse con métodos estadísticos más complejos.
3. Si usamos en nuestra investigación el número adecuado de individuos los resultados *permitirán* conocer con exactitud lo que ocurre realmente en la población.
4. No hay un tamaño de muestra “adecuado”.
5. Casi cualquier tamaño es válido. Pueden ser claramente inadecuados los extremadamente pequeños y los extremadamente grandes.
6. Si se trata de estimar el valor de un parámetro, cuanto mayor sea N más probable es que el error de estimación no supere cierto límite.
7. Al estimar el valor de un parámetro, cuanto mayor sea N, menor será el error máximo de estimación, para una misma confianza en no superarlo.
8. Las fórmulas para el tamaño de muestra no nos dan el tamaño adecuado para nuestra investigación, sino las prestaciones que proporciona la muestra según sea su tamaño.
9. La frase “con una muestra de $N = 47$ individuos el error máximo de estimación es 14 unidades” es inadecuada.
10. La frase “con una muestra de $N = 47$ tenemos confianza 90% en que la media poblacional sea igual a la muestral” es errónea.
11. La frase “con una muestra de $N = 47$ tenemos confianza 90% en que la media poblacional no se aleje de la muestral de modo significativo” es inadecuada.
12. La frase “con una muestra de $N = 47$ tenemos confianza 90% en que la media poblacional no se aleje de la muestral en más de 3 unidades, si la desviación estándar de esa variable en la población es del orden de 8 unidades” puede ser correcta.
13. La frase “con una muestra de $N = 20$ tenemos confianza 90% en que la media poblacional no se aleje de la muestral en más de 3 unidades, si la σ de esa variable en la población es del orden de 8 unidades” es correcta.
14. La frase “con una muestra de $N = 16$ tenemos confianza 95% en que la media poblacional no se aleje de la muestral en más de 5 unidades, si la σ de esa variable en la población es del orden de 10 unidades” es correcta.

15. La frase “con una muestra de $N = 123$ tenemos confianza 95% en que la proporción poblacional no se aleje de la muestral en más de 0.04, si la proporción poblacional es del orden de 0.20” **es** correcta.
16. La frase “con una muestra de $N = 384$ tenemos confianza 95% en que la proporción poblacional no se aleje de la muestral en más de 0.04, si la proporción poblacional es del orden de 0.20” **es** correcta.
17. Si la proporción poblacional de políticos ineptos es del orden de 0.90, con una muestra de $N = 40$ tenemos confianza 95% en que la proporción poblacional no se aleje de la muestral en más de 0.02.

El rendimiento de los médicos de los hospitales públicos se evalúa según una escala que va de 0 a 200. Para ver si el rendimiento en su trabajo hospitalario matinal es menor en los que tienen consulta privada por las tardes, se evaluarán dos muestras de N médicos. La tabla siguiente da los tamaños correspondientes a las prestaciones indicadas:

$\sigma_{\text{SIN}} = 4$		$\sigma_{\text{CON}} = 4$		$\sigma_{\text{SIN}} = 7$		$\sigma_{\text{CON}} = 7$	
Conf.= 90%		Conf.= 99%		Conf.= 90%		Conf.= 99%	
$d = 4$	6	14	18	42			
$d = 2$	22	54	66	163			

18. Si la σ es del orden de 7 en ambas poblaciones, con $N = 163$ en cada grupo, tenemos confianza 99% en que la diferencia de medias muestrales no se aleje de la diferencia de medias poblacionales en más de 2 unidades.
19. Si la σ es del orden de 7 en ambas poblaciones, con $N = 42$ en cada grupo, tenemos confianza 99% en que la diferencia de medias muestrales no se aleje de la diferencia de medias poblacionales en más de 4 unidades.
20. Si la σ es del orden de 4 en ambas poblaciones, con $N = 14$ en cada grupo, tenemos confianza 90% en que la diferencia de medias muestrales no se aleje de la diferencia de medias poblacionales en más de 2 unidades.
21. Si la σ es del orden de 4 en ambas poblaciones y tomamos dos muestras de $N = 14$ y en ellas la diferencia de medias muestrales es 20, tenemos confianza 99% en que la diferencia de medias poblacionales esté entre 16 y 24 .
22. Si la σ es del orden de 4 en ambas poblaciones y tomamos dos muestras de $N = 14$ y en ellas la diferencia de medias muestrales es 30, tenemos confianza 99% en que la diferencia de medias poblacionales esté entre 26 y 34 .
23. Si la σ es del orden de 4 en ambas poblaciones y tomamos dos muestras de $N = 54$ y en ellas la diferencia de medias muestrales es 30, tenemos confianza 99% en que la diferencia de medias poblacionales esté entre 28 y 32.
24. Si la σ es del orden de 4 en ambas poblaciones y tomamos dos muestras de $N = 54$ y en ellas la diferencia de medias muestrales es 30, tenemos confianza 90% en que la diferencia de medias poblacionales esté entre 14 y 84.

Capítulo 13

DISEÑOS CASO-CONTROL

Tradicionalmente, para ver la influencia de un factor en la aparición de una enfermedad se realizaban lo que se llaman **Estudios Prospectivos**, en los que se toman dos muestras aleatorias, una de individuos expuestos al factor y otra de no expuestos, y se calcula en cada una de ellas la proporción de enfermos. Posibles, y a veces decisivas, desventajas de este diseño son:

- a) El largo tiempo que puede requerir llevarlos a cabo
- b) El elevado número de individuos que debe incluir el estudio en enfermedades de baja frecuencia —que son la mayoría— para que haya cierta probabilidad de detectar asociaciones.

Como ejemplo consideremos una población en la que fuma el 20% y una enfermedad que afecta al 1 por mil de la población general y es cuatro veces más frecuente en los fumadores. Un estudio prospectivo en el que se toma una muestra de 100 fumadores y otra de 100 no fumadores y se averigua cuántos enferman en cada grupo, tiene probabilidad **0.06** de detectar esa asociación, es decir, si se hacen muchos estudios como ese, solamente 6 de cada 100 permiten detectar que el tabaco es perjudicial.

Por el contrario, un estudio con el diseño **Caso-Control** que vamos a ver en este capítulo, en el que se estudia una muestra de 100 individuos enfermos (son los “casos”) y otra de 100 no enfermos (los “controles”) y se averigua cuántos fumaban en cada grupo, tiene prob **0.99** de detectar dicha asociación, es decir, si se hacen muchos estudios como ese, en 99 de cada 100 se encuentra asociación entre el factor y la enfermedad estadísticamente significativa. Para tener prob 0.99 de detectar asociación un estudio prospectivo necesita unos **20 000** individuos.

Durante decenios el diseño Caso-Control fue considerado poco fiable y eficiente, pero desde mediados del siglo xx se han desarrollado técnicas estadísticas adecuadas para analizarlo y de ese modo ha ido teniendo presencia creciente en la investigación epidemiológica y clínica. Rothman dice que ha pasado de ser la *Cenicienta* de la epidemiología a ser su *estrella* más fulgurante.

13.1. Riesgo Específico y Riesgo Relativo

Uno de los principales objetivos de los estudios epidemiológicos es detectar asociaciones entre procesos patológicos y los llamados “Factores de Riesgo”, que son toda característica biológica o ambiental que pueda afectar a la incidencia de la patología, a su evolución o trasmisión. Puede haber también “Factores Preventivos” que afectarían beneficiosamente a la aparición o evolución de la enfermedad.

A la FR de individuos que estando expuestos al factor contraen la enfermedad se le llama **RIESGO ESPECIFICO** de los individuos expuestos, R_1 . Sea, por ejemplo, el factor “consumo de tabaco por la embarazada” y sea la patología tener un hijo con la malformación “A”. El Riesgo Específico de las madres fumadoras es la FR de ellas que tienen un hijo con “A”. Supongamos que es 6 por mil (0.006). Esta cifra, por sí sola, no nos dice nada respecto a la influencia (o mera asociación empírica) del tabaco en esa malformación, pero toma sentido cuando la comparamos con el Riesgo Específico de madres no fumadoras, R_0 , que es la FR de ellas que tienen un hijo con A. Supongamos que éste es 2 por mil (0.002).

El cociente de estas dos cantidades, $0.006 / 0.002 = 6 / 2 = 3$ se denomina **RIESGO RELATIVO, RR**, del tabaco para la malformación A y nos dice cuántas veces es mayor el riesgo de tener un niño con esa malformación si la madre fuma que si no fuma.

Un RR poblacional mayor de 1 indica que el factor aumenta el riesgo de enfermedad, es factor de riesgo; un RR poblacional menor de 1 indica que el factor disminuye el riesgo de enfermedad, es factor preventivo; y un RR poblacional igual a 1 indica no asociación del factor y la enfermedad, el riesgo de enfermar es igual para expuestos al factor que para no expuestos.

**** Ejercicio 13.1:** Una población de Recién Nacidos, RN, está compuesta por 5000 hijos de madres fumadoras de los cuales 50 tuvieron Espina Bífida y 1000 hijos de madres No fumadoras, de los cuales 2 nacieron con Espina Bífida, EB.

- El Riesgo Específico de Espina Bífida en madres fumadoras es:
- El Riesgo Específico de Espina Bífida en madres No fumadoras es:
- El Riesgo Relativo, RR, del Tabaco para Espina Bífida es:
- La probabilidad de que una madre NO fumadora tenga un hijo con EB es:
- La probabilidad de que una madre fumadora tenga un hijo con EB es:
- ¿Cuál es la proporción de RN con EB en otra población de embarazadas con riesgos iguales a la anterior pero en la que fuman el 20%?
- ¿Cuál es la proporción de RN con EB en otra población de embarazadas con riesgos iguales a la anterior y en la que fuman el 70%?

13.2. Concepto de “ODD” y “ODD RATIO” (OR)

Si en un colectivo llamamos P a la proporción de individuos con cierta característica, digamos E, se llama **ODD** a la magnitud $P / (1-P)$. Ejemplos:

- Si la FR de “E” es 0.8, la ODD es $0.8 / 0.2 = 4$ y dice que hay 4 E por cada no “E”.
- Si la FR de feos es 0.5, la ODD es 1, es decir, hay un feo por cada no feo.

La ODD es igual al número de individuos con la característica dividido por el número de individuos sin la característica. En efecto:

$$ODD = \frac{P}{1-P} = \frac{P \times N}{(1-P) \times N} = \frac{N^{\circ} \text{ de enfermos}}{N^{\circ} \text{ de no enfermos}}$$

Ej: Si en un colectivo hay 20% de E, la ODD es $0.2 / 0.8 = 0.25$ que es igual a 1/4 y dice que hay un E por cada 4 no-E. Si en este colectivo hay $N = 200$ individuos, habrá $0.20 \times 200 = 40$ E y $0.80 \times 200 = 160$ no-E. Entonces es $ODD = 40 / 60 = 0.25$

Ej: Si la P de anémicos es 0.05, su ODD = $0.05 / 0.95 = 0.0526$. Si el tamaño de este colectivo es $N = 400$ habrá $0.05 \times 400 = 20$ anémicos, y por tanto, 380 no anémicos. La ODD puede calcularse como $0.05 / 0.95$ o como $20 / 380 = 0.0526$.

En este último ejemplo la ODD toma un valor bastante próximo a P. En general, *a proporciones pequeñas corresponde valores de ODD muy similares al de la proporción*, pues, en estos casos, el denominador $1-P$ es próximo a 1 y, por tanto, $P / (1-P)$ es próximo a P. **Ejemplo:** Si P es 0.01, es $ODD = 0.01 / 0.99 = 0.0101$.

Concepto de OR (ODD'S RATIO):

Así como el RR se define como el cociente de dos Riesgos Específicos, la **ODD RATIO, OR**, se define como el cociente de dos ODD's: la ODD de enfermos en los Expuestos dividido por la ODD de enfermos en los No Expuestos. Veamos como ejemplo una **población** donde de un total de 30 0000 individuos fuman 100 000, están enfermos (“D+”) 50 000 y son enfermos y fumadores 40 000.

- Riesgo específico en fumadores: $R_1 = 40\,000 / 100\,000 = 0.40$
- Riesgo específico en no fumadores: $R_0 = 10\,000 / 200\,000 = 0.05$
- # Riesgo Relativo del fumar para esa enfermedad: $RR = 0.40 / 0.05 = 8$

	Fuman	No Fuman	TOTAL	
D +	A = 40 000	B = 10 000	M ₁ = 50 000	$\rightarrow P_1 = 4 / 5 = 0.80$
D -	C = 60 000	D = 190 000	M ₀ = 250 000	$\rightarrow P_0 = 6 / 25 = 0.24$
Tot	N ₁ = 100 000	N ₀ = 200 000	N = 300 000	$\rightarrow P_1 / P_0 = 0.80 / 0.24 = 3.33$
	R ₁ = 0.40	R ₀ = 0.05	RR = .40 / .05 = 8	

A partir de los Riesgos Específicos podemos calcular las ODD's y la OR:

$$ODD(R_1) = 0.40 / 0.60 = 40\,000 / 60\,000 = 0.67$$

$$ODD(R_0) = 0.05 / 0.95 = 10\,000 / 190\,000 = 0.0526$$

$$OR = ODD(R_1) / ODD(R_0) = 0.67 / 0.0526 = 12.67$$

También serán útiles las siguientes cantidades:

- Proporción de enfermos que fumaban: $P_1 = 40\,000 / 50\,000 = 0.80$
- Proporción de no enfermos que fumaban: $P_0 = 60\,000 / 250\,000 = 0.24$
P_1 dividido por P_0 : $P_1 / P_0 = 0.80 / 0.24 = 3.33$

13.3. En población OR (P's) = OR (R's)

En esta población, y en general, el cociente de los Riesgos Específicos, $RR = R_1 / R_0 = 8$, no tiene el mismo valor que el cociente $P_1 / P_0 = 0.80 / 0.24 = 3.33$

Pero si calculamos las ODD's con P_1 y P_0 :

$$\text{ODD}(P_1) = 0.80 / 0.20 = 4 \quad \text{ODD}(P_0) = 0.24 / 0.76 = 0.3158$$

El cociente de estas dos ODD's es : $\text{OR}(P's) = 4 / 0.3158 = 12.67$

Occurre siempre que el cociente de las ODD's toma igual valor cuando se calcula con las P's (FR de fumadores en enfermos y en sanos) que cuando se calcula con las R's (FR enfermos en fumadores y en no fumadores). Si se conocen las cantidades A, B, C y D, el modo más cómodo de calcular el OR es:

$$\text{OR} = A \cdot D / B \cdot C = 400 \times 1900 / 100 \times 600 = 12.67$$

Prueba:

$$\text{OR}(R's) = \frac{\frac{R_1}{1-R_1}}{\frac{R_0}{1-R_0}} = \frac{\frac{A/N_1}{C/N_1}}{\frac{B/N_0}{D/N_0}} = \frac{A/C}{B/D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C} = \frac{A/B}{C/D} = \frac{\frac{A/M_1}{B/M_1}}{\frac{C/M_0}{D/M_0}} = \frac{\frac{P_1}{1-P_1}}{\frac{P_0}{1-P_0}} = \text{OR}(P's)$$

** Ejercicio 13.2: Invete Vd. los datos para una población cualquiera y compruebe que el OR es el mismo en ambos sentidos, es decir, que OR calculada con las P's toma igual valor que OR calculada con las R's.

13.4. Proximidad entre los valores de OR y RR

Ya comprobado que son iguales las dos OR's (la calculada con las FR "verticales" y la calculada con las FR "horizontales") veremos que este valor único de OR se approxima mucho al valor de RR si los Riesgos Específicos toman valores próximos a cero. Sea la siguiente población, con exposición "E" y enfermedad "D":

	E+	E-	Total	
D+	1 000	200	1 200	$P_1 = 10/12 = 0.833$
D-	99 000	199 800	298 800	$P_0 = 99/2988 = 0.033$
Total	100 000	200 000	300 000	

$$R_1 = 0.010 \quad R_0 = 0.001 \rightarrow \text{RR} = 10$$

$$\text{ODD}(R_1) = 0.0101 \quad \text{ODD}(R_0) = 0.001001 \rightarrow \text{OR} = 10.09$$

La OR (calculada a partir de los riesgos específicos o calculada a partir de las P_1 y P_0 , o como cociente de productos cruzados) da 10.09, valor muy próximo al RR = 10. Esta similitud entre el RR y el OR ocurre siempre que las proporciones son próximas a cero y es más acusada cuanto más pequeñas son dichas proporciones. *Prueba:*

$$OR = \frac{\frac{R_1}{1-R_1}}{\frac{R_0}{1-R_0}} = \frac{R_1}{R_0} \cdot \frac{1-R_0}{1-R_1} = RR \cdot \frac{1-R_0}{1-R_1} \approx RR \text{ si } R_1 \text{ y } R_0 \approx 0$$

****Ejercicio 13.3:** En una población los “Expuestos” y “Enfermos” son:

	E+	E-	Total
D+	10	1 190	1 200
D-	990		298 800
Total	1 000		300 000

$$R_1 = \frac{10}{1000}$$

$$R_0 = \frac{990}{1000}$$

- Calcule los R's y las P's. ¿A qué cociente o cocientes se va a parecer el OR?
- Calcule R_1 / R_0 .
- Calcule P_1 / P_0 .
- Calcule el OR.

**** Ejercicio 13.4:**

- ¿Qué cociente nos interesa en Medicina para expresar la relación entre un Factor y una Enfermedad?
- ¿Es en general $P_1/P_0 = R_1/R_0$?
- ¿En qué circunstancias es en la Población el OR calculado con las “P’s” igual al OR calculado con las “R’s”?
- ¿Se presentan esas circunstancias frecuentemente en Medicina?

13.5. Tipos de muestreo: Prospectivos y Retrospectivos

Como en la práctica no se estudian poblaciones sino muestras de individuos tomadas de esas poblaciones, veamos qué cantidades poblacionales se pueden estimar dependiendo de cómo se haga el muestreo. Sea la **población** ya usada:

	Fuman	No fuman	TOTAL	
D +	A = 40 000	B = 10 000	M ₁ = 50 000	$P_1 = 4 / 5 = 0.80$
D -	C = 60 000	D = 190 000	M ₀ = 250 000	$P_0 = 6 / 25 = 0.24$
Tot	N ₁ = 100 000	N ₀ = 200 000	N = 300 000	$P_1 / P_0 = 0.80 / 0.24 = 3.33$
	$R_1 = 0.40$	$R_0 = 0.05$	$RR = .40 / .05 = 8$	

Muestreo prospectivo:

Se toma una muestra aleatoria de fumadores y se cuenta la cantidad de ellos que desarrollan la enfermedad. La correspondiente FR muestral estima el R_1 po-

blacional. También se toma una muestra aleatoria de individuos no fumadores y se cuenta la cantidad de ellos que desarrollan la enfermedad. Esta FR muestral estima el R_0 poblacional. El cociente de estos dos estimadores estima el **RR** poblacional. Con este muestreo no se puede estimar P_1 ni P_0 ni el cociente P_1 / P_0

Muestreo retrospectivo o caso-control:

Se toma una muestra aleatoria de individuos Enfermos y se evalúa la FR de ellos que estaban Expuestos. Esta FR muestral estima la correspondiente P_1 poblacional. También se toma una muestra aleatoria de NO Enfermos y se evalúa la FR de ellos que estaban Expuestos. Esta FR muestral estima la P_0 poblacional. Con este muestreo no se puede estimar R_1 ni R_0 ni el cociente $R_1 / R_0 = RR$.

Con muestreo Caso-Control no se pueden estimar R_1 ni R_0 ni RR , porque los valores muestrales que estimarían R_1 y R_0 dependen de la **cantidad de Casos y Controles** que se haya decidido tomar.

**** Ejercicio 13.5:** Veamos cómo varían los presuntos estimadores de R_1 y R_0 de la anterior población en dos muestras Caso-Control concretas si las FR muestrales de expuestos salen igual a las poblacionales. En cada ejemplo calcular R'_1 , R'_0 y $RR' = R'_1 / R'_0$ y ver si estiman R_1 , R_0 y RR poblacionales.

Ejemplo 1: 200 D+ Y 25 D-

		Fuma	No Fuman	
D+	160	40	200 → $P_1 = .80$	
D-	6	19	25 → $P_0 = .24$	
Tot				$RR' =$
		$R'_1 =$	$R'_0 =$	

Ejemplo 2: 20 D+ Y 2500 D-

		Fuman	No Fuman	
D+	16	4	20 → $P_1 = .80$	
D-	600	1900	2500 → $P_0 = .24$	
Tot				$RR' =$
		$R'_1 =$	$R'_0 =$	

El interés del investigador es estimar el **RR** poblacional, para lo cual lo más lógico es hacer un muestreo prospectivo. Sin embargo, en muchas ocasiones son más baratos, y a veces los únicos factibles, los muestreos Caso-Control, que desafortunadamente no permiten estimar R_1 ni R_0 ni el cociente RR . **Con muestreo Caso-Control solo se puede estimar P_1 y P_0 y el cociente P_1 / P_0 , que es distinto de R_1 / R_0 .** Pero con el muestreo Caso-Control estimamos P_1 , P_0 , y por tanto la OR poblacional correspondiente y también la OR con las R' s, por ser el mismo valor que la OR con las P 's. Y con enfermedades de baja frecuencia, digamos menor del 0.10, el **RR** es muy próximo a la OR, por lo que el muestreo Caso-Control permite estimar el OR poblacional y también el **RR** poblacional.

El razonamiento clave es: la OR de la muestra Caso-Control estima la OR poblacional con las “P’s” y esta es igual a la OR poblacional con las “R’s” y si las R’s son menores de 0.10 esa OR poblacional tiene valor muy próximo al RR poblacional.

Con R_1 y R_0 pequeños la OR de la muestra Caso-Control estima el RR poblacional.

**** Ejercicio 13.6:** La Dra. Largaespada quiere estimar la FR de diabéticos en la población de Nicaragua y para ello toma una muestra de 200 varones entre los que encuentra 40 diabéticos. Con ello estima que la FR poblacional es en torno a $40 / 200 = 0.20$. Posteriormente quiere estimar la FR de diabéticas en la misma población y disponiendo de más recursos que en su estudio con varones toma una muestra de 800 mujeres, entre las que encuentra 240 diabéticas y estima que la FR poblacional es en torno a $240 / 800 = 0.30$.

Por otra parte el Dr. Bagatella quiere estimar la FR de cada sexo en esa población y para ello tiene en cuenta que entre las 1000 personas estudiadas por la Dra. Largaespada 200 eran varones y 800 eran mujeres, por lo que cree que la FR de mujeres en la población se estima por $800 / 1000 = 0.80$.

	Diabet+	Diabet-	Total	
Varones	40	160	200	$P_1 = 0.20$
Mujeres	240	560	800	$P_0 = 0.30$
Total				1 000

- ¿Es correcta esa estimación?
- A partir de los estudios de la Dra. Largaespada, ¿cuál es la estimación correcta de la proporción de mujeres en la población?
- Posteriormente la Dra. Largaespada recibe más dinero para ampliar el estudio en varones y toma una segunda muestra de 600, por lo que en total tiene 800. De ese modo ha estudiado 1 600 personas, 800 varones y 800 mujeres.

	Diabet+	Diabet-	Total	
Varones			800	$P_1 =$
Mujeres	240	560	800	$P_0 = 0.30$
Total				1 600

- ¿Podemos estimar que en Nicaragua las mujeres son el 50% de la población?
- Para estimar la hipertensión en cada sexo en Nicaragua, la Dra. Lucía decidió estudiar 100 mujeres y 300 varones. ¿Podemos estimar la FR poblacional de mujeres como $100 / 400 = 0.25$?

**** Ejercicio 13.7:**

- En una población la FR de enfermos es 0.8. ¿Cuánto vale la ODD de enfermos?
 - ¿En qué casos el valor de la ODD se parece mucho al de la proporción?
- Los individuos de una población se clasifican según tengan o no cierta enfermedad (D+) y hubieran estado o no expuestos a cierto factor (E+ y E-)

	E+	E-	Total	
D+	A	B	M_1	$P_1 = A/M_1$
D-	C	D	M_0	$P_0 = C/M_0$
Total	N_1	N_0	N	

Responda usando la notación de la tabla.

- c. ¿A qué se llama Riesgo Específico de los expuestos, R_1 ?
- d. ¿A qué se llama Riesgo Específico de los NO expuestos, R_0 ?
- e. ¿A qué se llama Riesgo Relativo, RR?
- f. ¿A qué se llama ODD RATIO, OR?
- g. ¿Bajo qué circunstancias el valor de la OR se parece mucho al valor del RR?

En un estudio **Caso-Control** tomando 50 enfermos y 80 sanos obtenemos:

	E+	E-	Total
D+	30	20	50
D-	10	70	80

- h. ¿En cuánto estimamos la P_1 poblacional?
- i. ¿En cuánto estimamos la P_0 poblacional?
- j. ¿En cuánto estimamos R_1 , el riesgo de enfermedad en expuestos?
- k. ¿En cuánto estimamos R_0 , el riesgo de enfermedad en no-expuestos?
- l. ¿En cuánto estimamos el RR poblacional?
- m. ¿En cuánto estimamos la OR poblacional?
- n. ¿Por los datos de esta muestra podemos decir si será el OR parecido al RR?

13.6. Inferencias sobre OR

Aunque en una población NO haya relación entre el factor “E” y la enfermedad “D” ($OR_{Poblacional} = RR_{Poblacional} = 1$), en las muestras tomadas de esa población siempre habrá una relación más o menos débil. Sería mucha casualidad que el OR muestral fuera exactamente 1. El hecho de que en la muestra aparezca cierta relación entre el factor y la enfermedad (es decir, que haya OR OR muestral diferente de 1) no implica que hay ese tipo de relación en población. A partir del valor del OR muestral se puede hacer un test en el que la H_0 es que en población no hay relación, es decir, $OR_{Poblacional} = RR_{Poblacional} = 1$. También se puede calcular el IC dentro del cual creemos que se halla el valor de la OR poblacional.

1. Test de significación

	E+	E-	Tot.	
D+	a	b	m_1	$p_1 = a/m_1$
D-	c	d	m_0	$p_0 = c/m_0$
Tot	n_1	n_0	n	

$$Z = \sqrt{\frac{(a \cdot d - b \cdot c)^2 \cdot n}{n_1 \cdot n_0 \cdot m_1 \cdot m_0}}$$

La fórmula para el test es la misma que la usada en el test para comparar dos proporciones independientes. La H_0 dice que $RR_{Poblacional} = 1$, es decir, $R_1 = R_0$, lo que

implica $P_1 = P_0$. El valor P del test se obtiene mirando el valor Z en las tablas de la Distribución Normal. Esta expresión usa la aproximación de la distribución Binomial por la Normal y la aproximación es buena si ningún valor esperado es menor de 5. Para cada celda el valor esperado es el total de la columna multiplicado por el total de la fila y dividido por el total de la tabla. Cuando hay valores esperados menores de 5 el valor P del test se halla con el método exacto de Fisher, que requiere más cálculos (que hacen los ordenadores) y se interpreta como en todos los test de significación. Dice la prob de encontrar por azar una muestra con OR tan alejado de 1 como el de nuestra muestra o aún más alejado en el mismo sentido, si el OR poblacional es 1, es decir, si en población no hay relación entre ese factor y esa enfermedad.

2. Intervalo de Confianza

$$OR_i, OR_s = \hat{OR}^{1 \pm \frac{Z_\alpha}{Z}}$$

donde Z es el valor del estadístico obtenido al hacer el test y $Z_\alpha = 1.96$ para confianza = 95% y $Z_\alpha = 2.58$ para confianza = 99%. Por ejemplo, con estos datos

	E+	E-	Tot.		OR	Z	P	IC _{95%}
D+	8	2	10		2.67	1.2	0.11	0.54 -13.3
D-	30	20	50					
Tot.	38	22	60					

es $OR = 8 \cdot 20 / 2 \cdot 30 = 16 / 6 = 2.67$

$$Z = [60 \cdot (8 \cdot 20 - 2 \cdot 30)^2 / 10 \cdot 50 \cdot 22 \cdot 38]^{1/2} = 1.2 \rightarrow P_{UNIL} = 0.11$$

$$IC_{95\%} = 2.67^{1 \pm 1.96/1.2} = 2.67^{1 \pm 1.633} = 2.67^{-0.633} \text{ y } 2.67^{2.633} = 0.54 \text{ y } 13.3$$

Es decir, si en población es $OR = RR = 1$, en 11 de cada 100 estudios como este aparecerá OR muestral igual o mayor de 2.67. No rechazamos H_0 . Los datos no son evidencia fuerte a favor de la asociación entre el factor y la enfermedad. Si la incidencia de la enfermedad es baja el RR poblacional tendrá valor próximo al OR poblacional y el IC dice que tenemos confianza 95% en que la incidencia de la enfermedad en los expuestos sea desde 13.3 veces mayor hasta 0.54 que en los no expuestos, es decir, en población el factor puede ser preventivo, puede no estar asociado, o puede ser factor de riesgo para la enfermedad.

**** Ejercicio 13.8:** ¿Hay un componente hereditario en la predisposición a las toxicomanías. Es decir, ¿tienen los toxicómanos mayor proporción de hijos toxicómanos que los no toxicómanos? No es fácil tomar muestras que nos informen directamente de estas proporciones. Un estudio Caso-Control dio esta información:

En una muestra de 225 toxicómanos, 25 tenían padres toxicómanos. En una muestra de 250 controles, 10 tenían padres toxicómanos.

- ¿Podemos estimar el RE de ser toxicómano en hijos de toxicómanos?
- ¿Podemos estimar el RE de ser toxicómano en hijos de No Toxicómanos?
- A qué llamamos RR del factor Toxicomanía paterna para la toxicomanía?
- A partir de las muestras, ¿en cuánto estimamos ese Riesgo Relativo?

- e. ¿Tenemos motivos para afirmar con un alto grado de probabilidad de acertar que la Toxicomanía paterna aumenta la probabilidad de toxicomanía en los hijos?
- f. Calcule e interprete el Intervalo de Confianza al 95% para el OR poblacional.
- g. Informaciones posteriores permiten saber que entre los hijos de los toxicómanos adquieren toxicomanía el 15 por mil. Si en un pueblo hay 20 000 jóvenes y la mitad de ellos tienen padre toxicómano, ¿cuántos jóvenes esperamos que se hagan toxicómanos?

13.7. Recordando el Análisis Estratificado y la Confusión

El siguiente ejercicio muestra tres ejemplos de análisis estratificado. En uno de ellos hay fuerte confusión que hace parecer al factor mejor de lo que es, y en otro colectivo la confusión hace parecer al factor peor de lo que es.

**** Ejercicio 13.9:** En cada una de tres poblaciones: España, Francia y Alemania se consideraron dos grupos de edad: jóvenes y añosas. En cada estrato se contó el número de madres expuestas al factor “E”, E+, y el número de recién nacidos con el defecto congénito “D”, D+. Calcule los riesgos específicos y RR en cada edad y los correspondientes al Total de la población, es decir, juntando jóvenes y añosas. ¿Qué relaciones numéricas causan la confusión en cada país?

ESPAÑA: JÓVENES		AÑOSAS		TODAS			
	E+	E-	E+	E-	→	E+	E-
D	60	2 000	150	2			2 002
Total	1 000	100 000	50 000	2 000			102 000
R _i =	R ₀ =	R _i =	R ₀ =			R _i =	R ₀ =
RR=		RR=				RR=	

FRANCIA: JÓVENES		AÑOSAS		TODAS			
	E+	E-	E+	E-	→	E+	E-
D	60	80	15	20		75	
Total	1 000	4 000	5 000	20 000			24 000
R _i =	R ₀ =	R _i =	R ₀ =			R _i =	R ₀ =
RR=		RR=				RR=	

ALEMANIA: JÓVENES		AÑOSAS		TODAS			
	E+	E-	E+	E-	→	E+	E-
D	6 000	40	3	50			90
Total	100 000	2 000	1 000	50 000		101 000	
R _i =	R ₀ =	R _i =	R ₀ =			R _i =	R ₀ =
RR=		RR=				RR=	

13.8. Análisis estratificado en diseños Caso-Control

En una muestra de 515 enfermos ($D =$ carcinoma) y otra muestra de 770 No-enfermos se indaga si habían sido fumadores ($E =$ fumar) o no. En cada individuo se recoge la edad porque podría ser factor de confusión. La tabla que sigue da los datos ignorando la edad. El OR muestral es 0.46, es decir, en la muestra la ODD de fumadores es en enfermos 0.46 de la que es en sanos. Estimamos que la OR poblacional debe tener un valor próximo a 0.46 y si la enfermedad es de baja incidencia también el RR poblacional estará próximo a 0.46, e indica que el factor reduce aproximadamente a la mitad el riesgo de enfermedad.

	$E+$	$E-$	Tot.	OR	Z	P	I.C.
$D+$	185	330	515				
$D-$	422	348	770	0.46	6.64	<0.001	.37-.58
Total	607	678	1285				

El test da valor $P < 0.001$ por lo que rechazamos la H_0 que dice que la FR de enfermos es igual en fumadores y no fumadores. Concluimos que *en el grupo de fumadores sí* hay menor FR de enfermos.

Pero ello no implica necesariamente que el fumar disminuya la FR de enfermos. Si, por ejemplo, los fumadores fueran más jóvenes y en ellos la enfermedad es menos frecuente, la menor FR de enfermos en los fumadores se debería total o parcialmente a su juventud, no a que el tabaco reduzca el riesgo de enfermedad. Para ver esto se hace análisis estratificando por la edad. Se deciden tres grupos: jóvenes, edad mediana y viejos, y se indaga en la muestra anterior a qué grupo pertenecía cada individuo. Estos son los datos:

<i>JOVENES</i>	$E+$	$E-$	Total	OR	Z	P	I.C.
$D+$	5	30	35				
$D-$	2	48	50	4	1.69	=.09	.80-19.9
Total	7	78	85				

<i>MEDIANOS</i>	$E+$	$E-$	Total	OR	Z	P	I.C.
$D+$	80	290	370				
$D-$	20	210	230	2.9	4.13	<.000	1.75-4.8
Total	100	500	600				

<i>VIEJOS</i>	$E+$	$E-$	Total	OR	Z	P	I.C.
$D+$	100	10	110				
$D-$	400	90	490	2.25	2.35	=.018	1.14-43
Total	500	100	600				

Vemos que en cada estrato fumar incrementa el riesgo de enfermedad. Ese efecto solamente es estadísticamente significativo en los medianos, pero la magnitud del efecto no es muy distinta entre las tres edades, 4, 2.9 y 2.25.

Las diferencias de OR en las tres muestras pueden deberse a que realmente la relación entre el tabaco y la enfermedad es diferente según las edades. Pero también podría ser la misma a nivel poblacional en las tres edades y las diferencias muestrales deberse a la VRM. Haremos un test de **Homogeneidad de OR's** que plantea como H_0 que el OR poblacional es igual en las tres edades, es decir, que el tabaco es igualmente perjudicial en las tres.

Test de Homogeneidad de OR's → $H_0: OR_{JOVENES} = OR_{MEDIANOS} = OR_{VIEJOS}$

- * Si el **test de homogeneidad** da valor P muy pequeño, se rechaza H_0 , se asume que la asociación factor-enfermedad no es igual en todos los estratos y se hace el test para $OR_{Poblacional} = 1$ y se calcula el IC en cada estrato.
- * Si el **test de homogeneidad** da valor P grande se acepta H_0 como posible, se asume que la asociación puede ser igual en todos los estratos y se procede a estimar el OR poblacional común, a calcular un Intervalo de Confianza para ese valor común y hacer el test para la H_0 que dice que ese $OR_{Poblacional Común}$ es 1.

Los cálculos del test de homogeneidad son pesados pero los hacen los ordenadores. Pero compete al investigador interpretar el resultado obtenido. En este ejemplo el **test de homogeneidad** da $P > 0.20$, que no invita a rechazar la H_0 de igualdad de OR's en las tres poblaciones. Podemos asumir que el OR es el mismo en las tres y que las diferencias entre los OR's muestrales son por la VRM.

¿En cuánto estimamos el OR poblacional común a los tres grupos de edad? Hay varios modos de calcular ese estimador. Uno de los más usados se llama **OR COMBINADO de Mantel-Haenszel, OR_{M-H}** . Es la media de los tres OR's muestrales ponderando cada uno por una cantidad que depende del número de individuos en algunas celdas de las tablas. La tabla que sigue da la notación y la fórmula:

E+	E-	Tot	E+	E-	Tot.	OR_{M-H}	
D+	a_1	b_1	m_{11}	a_K	b_K	m_{IK}	$= \frac{\sum \frac{b_i c_i}{n_i} OR_i}{\sum \frac{b_i c_i}{n_i}}$
D-	c_1	d_1	m_{01}	c_K	d_K	m_{0K}	
T0							
n_{11}	n_{01}	n_1	n_{IK}	n_{0K}	n_K		

Los ordenadores realizan este cálculo y en nuestro ejemplo da:

$$OR_{COMBINADO} (\text{Mantel-Haenszel}) = 2.69$$

Por tanto, promediando entre las tres edades encontramos que en las muestras la OR combinada es 2.69, es decir, la ODD (número de enfermos por cada sano) es 2,69 veces mayor en expuestos que en no expuestos. Estimamos que la OR poblacional es próxima a 2.69 y si la enfermedad es de baja prevalencia estimamos que el RR poblacional también de ese orden.

Pero podría ser que el OR común a las tres poblaciones fuera 1, es decir, que el tabaco fuera inocuo en cada una de las tres edades y que en las tres muestras haya salido $OR > 1$ por la VRM. Haremos un test que plantea como $H_0: OR_{común poblacional} = 1$. Se le llama test de Mantel-Haenszel y la fórmula es:

$$Z^2_{M-H} = \chi^2_{M-H} = \frac{\left[\sum (a_i d_i / n_i) - \sum (b_i c_i / n_i) \right]^2}{\sum \frac{n_{0i} n_{1i} m_{0i} m_{1i}}{(n_i - 1) n_i^2}}$$

Los ordenadores realizan este cálculo y al investigador le corresponde interpretar los resultados. En nuestro ejemplo este test da:

$$\chi^2_{M-H} = 24.51 \quad gl=1, \quad Z_{M-H} = 4.95 \quad \rightarrow \quad P < 0.00001$$

Con tan pequeño valor P rechazamos la H_0 , rechazamos que si hay un valor común de OR en las tres poblaciones ese valor sea 1, es decir, rechazamos que el tabaco sea inocuo en las tres edades, y concluimos que es perjudicial.

Para cuantificar ese efecto negativo del tabaco calculamos el IC para el OR común poblacional. La fórmula es igual a la usada para calcular el IC para el OR de una sola población:

$$IC(OR_{POBLACIONAL}) = OR_{M-H}^{1 \pm Z/Z_{M-H}}$$

donde Z_{M-H} es el valor encontrado en el test anterior y $Z = 1.96$ para confianza de 95%. En nuestro ejemplo es $Z_{M-H} = 4.95$

$$IC(OR_{POBLAC.}) = 2.69^{1 \pm 1.96/4.95} = 2.69^{1 \pm 0.396} = 2.69^{0.704} \text{ y } 2.69^{1.396} = \mathbf{1.81 \text{ y } 3.96}$$

Resumiendo: Los datos son compatibles con que el efecto del tabaco sea el mismo en las tres edades multiplicando el riesgo de enfermedad por un valor que probablemente está entre 1.81 y 3.96.

**** Ejercicio 13.10:** Se desea estudiar la relación del Factor E con la Enfermedad D.

- De 14 mujeres enfermas, 12 habían estado expuestas y de 70 sanas, 40 no estuvieron expuestas.
- De 8 varones enfermos, 6 habían estado expuestos y de 35 sanos, 14 no estuvieron expuestos.
- a. ¿En cuanto estimamos el Riesgo Relativo del factor para la enfermedad en varones? ¿Cree que hay asociación en esta población?
- b. ¿En cuanto estimamos el Riesgo Relativo del factor para la enfermedad en mujeres? ¿Cree que hay asociación en esta población?
- c. Si hubiera considerado estos datos sin distinguir a los individuos por su sexo, ¿qué habría dicho de la relación entre D y E? ¿Es estadísticamente significativa?
- d. El test de homogeneidad de OR's da Chi-cuadrado = 1.43. Un autor cree que la relación entre D y E es igual en ambos sexos en población. ¿Usted qué opina?
- e. El valor de P en la pregunta anterior es $P = 0.23$ (23%) ¿Cómo interpretamos ese número en términos de frecuencia relativa?
- f. Otro autor cree que en población el OR es en varones 4 veces mayor que en mujeres. ¿Qué opina usted sobre esta hipótesis?

+++ 13.9. Medidas de Impacto: Riesgos Atribuibles

Dado un factor que aumenta el riesgo de una enfermedad en una población, la cantidad de enfermos debidos a la presencia de dicho factor es la *cantidad de casos que habríamos evitado* si hubiéramos suprimido el factor. Depende de la cuantía del Riesgo Relativo, de la Incidencia de la enfermedad y de la proporción de individuos expuestos. A veces es más fácil estimar qué porcentaje representa esa cantidad respecto a uno de estos tres “denominadores”:

A = cantidad de enfermos y expuestos

M_1 = cantidad de enfermos

N = cantidad total de individuos

Veamos el cálculo en la de la tabla que sigue. Y recuerde que para calcular el “porcentaje de un porcentaje” se multiplican las proporciones.

	E+ (Fuman)	E- (NO Fuman)		
D+	A = 640 → 160 + 480	B = 200	$M_1 = 840$	$P_1 = A/M_1 = 640/840 = \mathbf{0.762}$
D-	C = 7 360	D = 9 800	$M_0 = 17\,160$	$P_0 = C / M_0 = 7\,360 / 17\,160 = \mathbf{0.429}$
	$N_1 = 8\,000$	$N_0 = 10\,000$	$N = 18\,000$	$P = N_1 / N = 8\,000 / 18\,000 = 0.44$
	R₁ = 0.08	R₀ = 0.02	$R = 0.046$	RR = 4

En esta población hay 200 enfermos no expuestos. Esto quiere decir que este factor, si bien aumenta el riesgo de enfermar, no es el único causante de la enfermedad. De los 640 que son enfermos y expuestos hay que ver cuántos deben su enfermedad a este factor, es decir, cuántos se evitarían si se suprimiera el factor.

Exceso de enfermos por fumar = Número de enfermos evitados si suprimimos E.

Como el riesgo de enfermar en los no fumadores es $R_0 = 0.02$, si los 8 000 fumadores No hubieran fumado, habrían producido $8\,000 \times 0.02 = 160$ enfermos en vez de los 640 encontrados. Por tanto, suprimiendo el tabaco se hubieran evitado $640 - 160 = \mathbf{480}$ enfermos. Es decir, el exceso de enfermos por fumar es **480**. Veamos qué porcentaje representa esos 480 respecto a:

1. Todos los Enfermos y Expuestos (son 640): $R(DE) = 480 / 640 = \mathbf{0.75} = 75\%$
2. Todos los Enfermos (E+ y E-) (son 840): $R(D) = 480 / 840 = \mathbf{0.57} = 57\%$
3. Total de la Población (son 18 000): $R(T) = 480 / 18\,000 = \mathbf{0.027} = 2.7\%$

Es decir, el exceso de enfermos debidos al tabaco (el número de enfermos que se habría evitado si nadie hubiera fumado) es el 75% de los enfermos fumadores, es el 57% de todos los enfermos y es el 2.7% del total de la población.

**** Ejercicio 13.11:** Se sospecha que beber alcohol en gran cantidad y con continuidad favorece la aparición de arteriosclerosis, AT. Un estudio Caso-Control muestra que de 80 enfermos con AT habían sido bebedores 60 y de 100 controles sanos 30 habían sido bebedores.

- a. El ciudadano normal tiene un cierto riesgo de padecer AT. Si un ciudadano bebe, ¿cuánto aumenta ese riesgo? Se pide estimar por cuánto se multiplica ese riesgo a partir de los datos muestrales, si es que se puede.
- b. En un pueblo de 1 000 habitantes todos beben ¿Se puede estimar cuántos de ellos enfermarán de AT?
- c. ¿Podemos afirmar que en población beber aumenta el riesgo de padecer AT?
- d. El valor del OR en la población no se conoce. ¿Puede calcular un IC dentro del cual tenemos 95% de confianza que estará el valor del OR poblacional?
- e. Estudios posteriores muestran que de cada 1 000 personas que no beben 5 contraen AT ¿Qué proporción de bebedores contraerán AT?
- f. En un pueblo de 20 000 habitantes la mitad son bebedores. ¿Cuántos contraerán AT?
- g. Si en ese pueblo nadie hubiera bebido, ¿cuántos casos de AT se habrían evitado?
- h. En otro pueblo beben el 20%. ¿Qué proporción de habitantes contraerán AT?
- i. Entre los enfermos de la pregunta anterior, ¿qué proporción de ellos son enfermos por haber sido bebedores?

+++13.10. Riesgos atribuibles: Estimadores con C-C

Las proporciones anteriores se pueden calcular también a partir de otros datos poblacionales y estimar a partir de los valores muestrales que estiman esos datos.

1. El exceso de enfermos dividido por el número de enfermos que fumaban es

$$R(DE) = (RR - 1) / RR$$

$$\text{Prueba: } R(DE) = \frac{N_1 R_1 - N_1 R_0}{N_1 R_1} = \frac{R_1 - R_0}{R_1} = \frac{R_1 / R_0 - R_0 / R_0}{R_1 / R_0} = \frac{RR - 1}{RR}$$

En nuestro ejemplo es $R(DE) = (4-1) / 4 = \frac{3}{4} = 0.75$

2. El exceso de enfermos dividido por el número de enfermos es

$$R(D) = R(DE) \times P_1$$

Demostración: $R(DE)$ es la proporción del exceso de enfermos respecto a los enfermos fumadores y P_1 es la proporción de enfermos fumadores respecto al total de enfermos. Por ello $R(DE) \times P_1$ es la proporción del exceso de enfermos respecto al total de enfermos. En nuestro ejemplo es $R(D) = 0.75 \times 0.762 = 0.57$. Es decir, el 76.2% de los enfermos son fumadores y el 75% de los enfermos fumadores se habrían evitado, por tanto, se habrían evitado el 75% del 76.2%, que es el 57%.

3. El exceso de enfermos dividido por el Total de la Población es

$$R(T) = R(D) \times R$$

Demostración: $R(D)$ es la proporción del exceso de enfermos respecto a los enfermos y R es la proporción de enfermos respecto al total de la población. Por ello $R(D) \times R$ es la proporción del exceso de enfermos respecto al total de la población

En nuestro ejemplo es $R(T) = 0.57 \times 0.046 = \mathbf{0.027}$. Es decir, el 4.6% del total son enfermos y el 57% de los enfermos se habrían evitado, por tanto, se habrían evitado el 4.6% del 57%, que es el 2.7%.

Las expresiones anteriores nos permiten calcular el porcentaje de enfermos debido al factor si se tienen los datos de toda la población. Pero si los datos que tenemos corresponden a una muestra Caso-Control de dicha población, podemos estimar los correspondientes valores poblacionales teniendo en cuenta que:

- La OR de la muestra estima la OR de la población.
- La OR de la población es similar al RR de la población si R_1 y R_0 son menores de 0.10 (enfermedad de baja frecuencia).

Las siguientes expresiones dicen cómo se estiman esas tres proporciones a partir de una muestra Caso-Control:

1. $R(DE) = \frac{RR - 1}{RR}$ Se estima por $\frac{OR - 1}{OR}$
2. $R(D) = \frac{RR - 1}{RR}$ P_1 Se estima por $\frac{OR - 1}{OR}$ P_1 (El P_1 de la muestra)
3. $R(T) = \frac{RR - 1}{RR}$ $P_1 R$ Se estima por $\frac{OR - 1}{OR}$ $P_1 R$

La R poblacional no se puede estimar a partir de una muestra Caso-Control; solamente se puede usar si se puede estimar a partir de otras informaciones.

NO OLVIDE RECORDAR - 13

1. La ODD de una característica es la proporción (o la cantidad) de individuos con ella dividida por la proporción (o la cantidad) de individuos sin ella y nos dice cuántos individuos la tienen por cada uno que no la tiene.
2. La ODD ratio, OR, de enfermos es la ODD de enfermos en los fumadores dividida por la ODD de enfermos en los no fumadores. La ODD ratio, OR, de fumadores es la ODD de fumadores en los enfermos dividida por la ODD de fumadores en los no enfermos. Ambas OR's tienen el mismo valor.
3. Si el riesgo de enfermedad en fumadores y en no fumadores es pequeño, digamos inferior al 0.10, las ODD's toman valores próximos a las proporciones y la OR toma valores próximos al RR.
4. En los **estudios prospectivos** se toma una muestra de, por ejemplo, fumadores y otra de no fumadores y en cada una de ellas se calcula la proporción de enfermos. Permiten estimar la proporción de fumadores que enferman, R_1 , la proporción de no fumadores que enferman, R_0 , y su cociente, llamado Riesgo Relativo, RR.
5. En los **estudios Caso-Control** se toma una muestra de enfermos y otra de no enfermos y en cada una de ellas se calcula la proporción de ellos que fumaban. Permiten estimar la proporción de enfermos que fumaban, pero no la proporción de fumadores que enferman.
6. Con un estudio Caso-Control se estima la OR de fumadores y por tanto la OR de enfermos y si el riesgo de enfermedad es pequeño, el RR del tabaco para esa enfermedad.
7. Si la enfermedad es menos frecuente que el factor, el muestreo Caso-Control tendrá potencia estadística muy superior al muestreo prospectivo.
8. La no relación en la población entre el factor y la enfermedad se corresponde con $RR_{Poblacional} = OR_{Poblacional} = 1$.
9. El test estándar plantea como H_0 que en la población es $OR = 1$ y el valor P_{UNIL} del test da la probabilidad de encontrar muestras con OR tan alejado de 1 como el de nuestra muestra o aún más alejado en la misma dirección, si es $OR_{Poblacional} = 1$ (es el mismo que el test para comparar dos proporciones independientes).
10. Cuando existe otro posible factor que puede confundir la relación entre el factor principal y la enfermedad, se estratifica por él y se hace test de homogeneidad de OR's seguido de estimación, test e IC del $OR_{COMÚN}$, si procede o de estimación, test e IC del OR de cada estrato, si procede.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 13

Califique cada afirmación de las que aparece a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. En los estudios prospectivos se toma una muestra de expuestos al factor y otra de no expuestos y en cada una de ellas se calcula la proporción de enfermos.
2. Los estudios prospectivos permiten estimar la proporción de expuestos que enferman, R_1 , la proporción de no expuestos que enferman, R_0 , y su cociente, llamado Riesgo Relativo, RR.
3. El Riesgo Relativo nos dice cuál es el riesgo de enfermar en los expuestos.
4. El Riesgo Relativo nos dice cuál es el riesgo de enfermar en los no expuestos.
5. El Riesgo Relativo nos dice cuánto mayor (o menor) es el riesgo de enfermar en los expuestos que en los no expuestos.
6. En los estudios Caso-Control se toma una muestra de enfermos y otra de no enfermos y en cada una de ellas se calcula la proporción de ellos que estaban expuestos.
7. Los estudios Caso-Control permiten estimar la proporción de enfermos que están expuestos, pero no la proporción de expuestos que enferman.
8. La ODD de una característica es la proporción (o la cantidad) de individuos con ella dividida por la proporción (o la cantidad) de individuos sin ella.
9. ODD = 4 indica que tiene la característica uno de cada cuatro individuos.
10. ODD = 4 indica que hay cuatro individuos sin la característica por cada individuo con ella.
11. ODD = 4 indica que hay cuatro individuos con la característica por cada individuo que no la tiene.
12. La ODD nos dice cuantos individuos tienen la característica por cada uno que no la tiene.
13. La ODD Ratio, OR, de enfermos es la ODD de enfermos en los expuestos dividida por la ODD de enfermos en los no expuestos.
14. La ODD Ratio, OR, de expuestos es la ODD de expuestos en los enfermos dividida por la ODD de expuestos en los no enfermos.
15. Ambas OR's tienen el mismo valor solamente si la enfermedad es poco frecuente.
16. Ambas OR's tienen el mismo valor solamente si el factor es poco frecuente.
17. Ambas OR's tienen el mismo valor siempre.
18. Si el riesgo de enfermedad en expuestos y en no expuestos es pequeño, digamos inferior al 0.10, las ODD's toman valores próximos a las proporciones.
19. Si el riesgo de enfermedad en expuestos y en no expuestos es pequeño, digamos inferior al 0.10, la OR toma valores próximos al RR.

20. Con un estudio Caso-Control se puede estimar la OR poblacional de expuestos y, por tanto, la OR poblacional de enfermos y, si el riesgo de enfermedad es pequeño, se estima el RR del factor para esa enfermedad.
21. Potencia estadística de un estudio que intenta descubrir la relación entre un factor y una enfermedad es la probabilidad de detectar que hay asociación entre el factor y la enfermedad a nivel poblacional, cuando realmente la hay.
22. Potencia estadística de un estudio que intenta descubrir la relación entre un factor y una enfermedad es la probabilidad de detectar que hay asociación entre el factor y la enfermedad a nivel poblacional si realmente no la hay.
23. Los estudios Caso-Control tienen más potencia estadística que los prospectivos.
24. Los estudios Caso-Control tienen menor potencia estadística que los prospectivos.
25. Si la enfermedad es poco frecuente y el factor afecta a una considerable proporción de la población, el muestreo Caso-Control tendrá potencia estadística muy superior al muestreo prospectivo.
26. Si la enfermedad es muy frecuente y el factor afecta a una pequeña proporción de la población, el muestreo Caso-Control tendrá potencia estadística muy inferior al muestreo prospectivo.
27. En la población puede ser $RR = 1$ y $OR > 1$.
28. En la población puede ser $RR = 1$ y $OR < 1$.
29. La “no relación” en la población entre factor y enfermedad implica $RR = 0$ o $OR = 1$.
30. Si en la población no hay relación entre el factor y la enfermedad, en la muestra tampoco la habrá.
31. Si en la población es $RR = OR = 1$, la OR muestral también será 1.
32. Prácticamente en todas las muestras se encontrará OR distinto de 1.
33. El test estándar plantea como H_0 que en la población es $OR = 1$ y el valor P_{UNIL} del test da la probabilidad de encontrar muestras con OR tan alejado de 1 como el de nuestra muestra o aun más alejado en la misma dirección.

Capítulo 14

TABLAS DE CONTINGENCIA

En una muestra de 300 personas se clasifican según el grupo de edad al que pertenecen y según la cantidad de deporte que hacen.

	Adolescente AD	Joven JO	Maduro MA	Viejo VI	Total
Mucho deporte = D2	16	10	2	2	30
Deporte moderado = D1	12	8	2	4	26
No deporte = D0	52	42	16	34	144
Total	80	60	20	40	200

Para estudiar la relación entre estas dos variables, haremos como en el Capítulo 3, la DF de Deporte condicionado a edad.

	AD	JO	MA	VI	Total
Mucho deporte = D2	0.20	0.17	0.10	0.05	0.15
Deporte moderado = D1	0.15	0.13	0.10	0.10	0.13
No deporte = D0	0.65	0.70	0.80	0.85	0.72
Total	1	1	1	1	1

Entre los adolescentes hacen mucho deporte el 20% ($= 16 / 80$), deporte moderado el 15%, y no hacen el 65%. En esta muestra la distribución de deporte no es igual en las 4 edades. Y nos preguntamos si también en la población habrá diferencias. La muestra nunca permite asegurar que en población sean iguales las distribuciones (aunque en las muestrales fueran muy parecidas o incluso iguales), pero puede permitir sospechar que en población no lo son, si en la muestra son muy diferentes. Planteamos como H_0 que las poblacionales son iguales y se rechaza si es muy improbable que las muestrales sean tan diferentes como las de nuestra muestra o aún más diferentes. El valor P del test nos da esa probabilidad.

En este capítulo vemos la Inferencia con estas Tablas de Contingencia que se forman al relacionar variables cualitativas o cuantitativas agrupadas en intervalos.

14.1. Tablas R x C: R muestras con C categorías

En general, hablamos de tablas de contingencia “R x C” siendo “R” el número de filas (de *row* en inglés) y C el número de columnas. Veamos un ejemplo de **tabla 3 x 3**. En una muestra de N = 200 individuos se estudia la relación entre *raza* (“A”, “B” y “C”) y *resistencia* a las infecciones (baja, media, alta). La tabla a la izquierda da el número de individuos en cada raza y resistencia.

Datos				FR de resistencia en cada raza				
	Baja	Media	Alta	Total	Baja	Media	Alta	
A	2	22	16	40	A	.05	.55	.40
B	12	30	18	60	B	.20	.50	.30
C	26	48	26	100	C	.26	.48	.26
Total	40	100	60	200	Total	.20	.50	.30

Vemos en los marginales que hay 40 de la raza A, 60 de B y 100 de C y que hay 40 con resistencia baja, 100 con media y 60 con alta. La tabla de la derecha da las FR de individuos de cada tipo de resistencia condicionada a cada raza. Vemos que la resistencia tiene las cifras más favorables en la raza A (40% alta y 5% baja) y las menos favorables en C (26% alta y 26% baja). Se plantea como H_0 que raza y resistencia son independientes en población, es decir, la DF de la resistencia es igual en las tres razas. Si en la muestra la DF de la resistencia es *parecida* en las tres Razas, no rechazaremos H_0 , y si la DF muestral de la Resistencia es *muy diferente* entre las razas, rechazaremos H_0 . El cálculo del valor P del test puede ser pesado pero todos los paquetes informáticos lo dan. Aquí resulta ser **0.08**. Si fuera cierta la H_0 , diferencias muestrales como estas o mayores aparecerían por azar en 8 de cada 100 veces que repitiéramos el estudio. No hay evidencia fuerte contra H_0 , no queda probado que la evolución sea diferente en alguna de las razas.

Cuanto mayores son las diferencias entre las distribuciones muestrales menor es el valor P. La siguiente tabla tiene datos muy parecidos a la anterior pero algunas diferencias aumentadas (en la raza C ahora hay 42 individuos con resistencia baja y 10 con alta).

Datos				Resistencia para cada raza				
	Baja	Media	Alta	Total	Baja	Media	Alta	
A	2	22	16	40	A	.05	.55	.40
B	12	30	18	60	B	.20	.50	.30
C	42	48	10	100	C	.42	.500	.10
Total	56	100	44	200	Total	.23	.50	.22

Ahora es **P = 0.00001**

Y unas mismas diferencias es más fácil que aparezcan por azar cuando los tamaños son menores. En la siguiente tabla las FR de resistencia son iguales que en la anterior pero el tamaño de las muestras es la mitad:

Datos				Resistencia para cada raza				
	Baja	Media	Alta	Total	A	Baja	Media	Alta
A	1	11	8	20	A	.05	.55	.40
B	6	15	9	30	B	.20	.50	.30
C	21	24	5	50	C	.42	.500	.10
Total	23	50	22	100	Total	.23	.50	.22

Ahora es $P = 0.00400$

** **Ejercicio 14.1:** Calcule con un programa estadístico el valor P de las tres tablas anteriores de este apartado.

Veamos ahora un ejemplo de **tabla 2 x 4**. En la variable “Evolución” de los pacientes con neumonía se consideran C = 4 categorías: mal, regular, bien y muy bien. Se compara la evolución en una muestra de **40** casos causados por bacterias frente a la evolución de otra muestra de **60** casos causados por virus.

VALORES ABSOLUTOS					PROPORCIONES				
	MAL	REG	BIEN	M-B	Tot	MAL	REG	BIEN	M-B
Bacteria	16	12	8	4	40	.40	.30	.20	.10
Virus	6	15	15	24	60	.10	.25	.25	.40

En la muestra de 40 casos bacterianos el 40% (16/40) evolucionan mal, el 30% (12/40) regular, etcétera. En las *muestras* observamos que la evolución no es igual en las dos etiologías. Es más favorable en la vírica. Pero podría ser que las FR *poblacionales* fueran iguales en ambas etiologías. Planteamos esa H_0 y se encuentra $P = 0.0004$. Nos da la prob de que por azar aparezcan diferencias entre las DF muestrales como estas o aún mayores, si no hubiera diferencias entre las DF poblacionales. Invita a pensar que la evolución no es igual en las dos poblaciones. En el último apartado se explica el cálculo del valor P, pero lo importante para el investigador no es saber hacer ese cálculo, sino interpretarlo correctamente cuando lo calcula el ordenador o lo lee en las publicaciones científicas.

Es obvio que el valor P es menor cuanto más se diferencian entre sí las distribuciones muestrales y/o cuanto mayores son las muestras. En la siguiente tabla las diferencias entre las distribuciones muestrales son menores que en la anterior

	MAL	REG	BIE	M-B	Total	MAL	REG	BIE	M-B
Bacterias	16	12	8	4	40	.40	.30	.20	.10
Virus	12	15	15	18	60	.20	.25	.25	.30

Aquí es $P = 0.04$. Pero esas mismas diferencias entre las dos distribuciones muestrales es más difícil que aparezcan por la VRM con muestras mayores. En la tabla siguiente las FR son iguales, pero el tamaño de las muestras es el doble.

	MAL	REG	BIE	M-B	Total	MAL	REG	BIE	M-B
Bacterias	32	24	16	8	80	.40	.30	.20	.10
Virus	24	30	30	36	120	.20	.25	.25	.30

Ahora es $P = 0.0009$. Es más difícil que aparezcan estas diferencias.

14.2. Comparación de varias proporciones

Retomemos la tabla de contingencia 3 x 4 de la introducción:

	Adolescente AD	Joven JO	Maduro MA	Viejo VI	Total
Mucho deporte = D2	16 (0.20)	10 (0.17)	2 (0.10)	2 (0.05)	30 (0.15)
Deporte moderado = D1	12 (0.15)	8 (0.13)	2 (0.10)	4 (0.10)	26 (0.13)
No deporte = D0	52 (0.65)	42 (0.70)	16 (0.80)	34 (0.85)	144 (0.72)
Total	80	60	20	40	200

Cada celda da la frecuencia absoluta y la FR respecto al total de esa edad. Aquí la H_0 es que en población la DF de deporte es la misma en todas las edades. El test da $P = 0.34$, por lo que no la rechazamos. Los datos no son evidencia fuerte a favor de que la práctica del deporte varíe con la edad. Pero podemos continuar el análisis juntando ambos grupos de deportistas en uno solo. Así la tabla de 2 x 4 es:

	AD	JO	MA	VI	Total
Deporte, D	28	18	4	6	56
No deporte	52	42	16	34	144
Total	80	60	20	40	200
% D+	0.35	0.30	0.20	0.15	0.28

De los 80 adolescentes, 28 son deportistas, un 35%, de los 60 jóvenes 18 son deportistas, un 30%), etc. Como la DF de deporte para cada edad tiene solamente dos posibles valores (deportistas y no deportistas) y como las FR de ambas suman la unidad, la situación queda descrita dando solamente una de ellas. Para destacarlas más se registran en la última fila. Ahora se trata de comparar estas cuatro proporciones y la H_0 es que en población las 4 son iguales. Se quiere ver si las diferencias observadas en las muestras pueden deberse al azar o son tan grandes que llevan a rechazar H_0 . El test da $P = 0.11$. Las diferencias muestrales no son suficiente evidencia a favor de que haya diferencias en población.

Si las distintas muestras se pueden ordenar a priori por algún criterio, además del test anterior puede estudiarse si la proporción de casos “positivos” *crece* o *decrece* progresivamente con la variación de dicho criterio. En este ejemplo las cuatro situaciones se han ordenado de menor a mayor edad. El **test de Tendencia**

Lineal propone como H_0 que no hay crecimiento ni decrecimiento progresivo al aumentar la edad. Los cálculos para obtener el valor P son tediosos, pero los hace el ordenador. Se obtiene $P = 0.01$, es decir, si en población la proporción de deporte no crece ni decrece progresivamente con la edad, en 1 de cada cien veces que repitiéramos este estudio encontraríamos una tendencia decreciente como la de nuestra muestra o aún mayor. Es una notable evidencia contra la H_0 y a favor de que la proporción de deporte disminuye con la edad en la población.

Para ver las diferencias entre el test general, que detecta cualquier tipo de diferencias entre las FR de los 4 grupos, y el test de Tendencia Lineal, que detecta específicamente *crecimiento o decrecimiento progresivo*, consideremos estos datos, muy parecidos a los de la tabla anterior, pero están intercambiadas las proporciones de deporte en Jóvenes y Viejos. Aquí la proporción de deporte es 0.15 en los Jóvenes y 0.30 en los Viejos.

	AD	JO	MA	VI	Total
Deporte, D+	28	6	4	18	56
No deporte	52	34	16	42	144
Total	80	40	20	60	200
% D+	0.35	0.15	0.20	0.30	0.28

El test general da $P = 0.11$, como antes, puesto que son los mismos 4 grupos. Pero el de Tendencia Lineal ahora da $P = 0.55$, puesto los grupos están ordenados de distinta forma y ahora ya no se ve una tendencia decreciente.

Aún podemos considerar otra variación de los datos. La siguiente tabla es muy parecida a la anterior pero la proporción de deporte es mayor que antes en adolescentes y en viejos. Al ser mayores las diferencias entre las 4 proporciones muestrales esperamos un valor P menor en el test general.

	AD	JO	MA	VI	Total
Deporte, D+	44	6	4	30	56
No deporte	36	34	16	30	144
Total	80	40	20	60	200
% D+	0.55	0.15	0.20	0.50	0.28

Obtenemos $P = 0.0002$ para el test general que plantea la hipótesis de igualdad de FR poblacionales, pero sigue sin haber tendencia al crecimiento o decrecimiento al aumentar la edad, por lo que para el test de Tendencia Lineal esperamos un valor de grande. En efecto, los cálculos dan $P = 0.56$. Con estos datos concluiríamos que la FR poblacional de deporte no es igual en las cuatro edades, pero no concluiríamos que esas FR aumenten o decrezcan progresivamente al aumentar la edad.

** **Ejercicio 14.2:** Si se dispone de un paquete estadístico, calcular el valor P de Tendencia Lineal de la tabla anterior.

14.3. Colapsando tablas

En algunos casos puede ayudar al análisis fundir dos o más categorías en una sola, si la naturaleza del problema lo permite. En el apartado anterior se colapsaron las celdas de mucho y moderado deporte en una sola, generando la tabla:

	AD	JO	MA	VI	Total
Deporte, D+	28	18	4	6	56
No deporte	52	42	16	34	144
Total	80	60	20	40	200
% D+	0.35	0.30	0.20	0.15	0.28

Para la H_0 : en población la FR de deporte es igual en las 4 edades, el valor $P = 0.11$ no es evidencia contra ella. Como en la muestra la FR de deporte es menor en las edades superiores, se analizó específicamente la Tendencia Lineal al decrecimiento con el aumento de la edad y se encontró $P = 0.01$, que es un notable aval a la sospecha de que hay esa tendencia en la población.

Otro enfoque podría ser considerar que debido a la presión de la vida laboral y a las costumbres imperantes la bajada en la FR real (es decir, en población) de deporte se produce sobre todo al pasar de joven a maduro. Podemos plantear como H_0 que la FR es en población igual en adolescentes y jóvenes, mientras que también es muy parecida en maduros y viejos, pero menor que en las edades juveniles. Para analizar esa H_0 colapsamos las dos primeras columnas y las dos últimas, teniendo entonces solo dos grupos de comparación: adolescentes y jóvenes frente a maduros y viejos.

	AD + JO	MA + VI	Total
Deporte, D+	46	10	56
No deporte	94	50	144
Total	140	60	200
% D+	0.33	0.17	0.28

En la muestra la diferencia en la FR de deporte entre esos dos grupos etáreos es $0.33 - 0.17 = 0.16$ y el test que plantea como H_0 que en población esa diferencia es cero, da $P = 0.0116$, es decir, notable evidencia de que la FR de deportistas es en población mayor en el primer grupo. El hecho de tener solamente dos grupos permite expresar las diferencias de proporciones de deporte mediante un número, en este caso **0.16**, y calcular un IC para el valor poblacional de esa diferencia. En este caso el IC al 95% sería **0.04 – 0.28**. La FR de deporte en la población es entre 4 y 28 puntos mayor en el primer grupo.

Como segundo ejemplo de colapso veamos de nuevo los datos de la tabla donde se comparaba la resistencia a la infecciones en tres razas:

Datos originales				FR de cada nivel de resistencia en cada raza				
	Baja	Media	Alta	Total	Baja	Media	Alta	
A	2	22	16	40	.05	.55	.40	1
B	12	30	18	60	.2	.50	.30	1
C	26	48	26	100	.26	.48	.26	1
Total	40	100	60	200	Total	.20	.50	.30

En la muestra hay diferencias moderadas entre las tres razas, pero el valor P era 0.08, solamente una modesta evidencia contra la H_0 . Si el investigador tuviera *motivos previos* a la obtención de los datos para pensar que quizás la resistencia es semejante en B y C, podría:

- a) Hacer test comparando B contra C para confirmar que las diferencias muestrales entre ellos son compatibles con la igualdad en población.
- b) Si el anterior test no da un valor P muy pequeño, se puede hacer un test comparando A contra B+C.
- a) Comparando B contra C:

Datos				FR de Resistencia en cada raza				
	Baja	Media	Alta	Total	Baja	Media	Alta	
B	12	30	18	60	.20	.50	.30	1
C	26	48	26	100	.26	.48	.26	1

En el test da $P = 0.66$. Las divergencias muestrales bien pueden ser por azar.

- b) Comparando B+C contra A:

	Baja	Media	Alta	Total	A	Baja	Media	Alta	
A	2	22	16	40	.050	.550	.400	.1	
B+C	38	78	44	160	.237	.468	.275	.1	
Total	40	100	60	200	Total	.20	.50	.30	

Ahora es $P = 0.023$ que constituye cierta evidencia a favor de que hay diferencias entre estos dos grupos.

Podría ahora considerarse, si fuera lógico hacerlo *independientemente de la observación de los datos*, que quizás la FR con evolución media es en población muy similar en los dos grupos étnicos ahora considerados, pero puede haber diferencia entre baja y alta. Para comparar alta contra baja se forma esta tabla excluyendo a los de la clase media

	Baja	Alta	Total	A	Baja	Alta	
Blanca	2	16	18		.11	.89	
Neg+Orie	38	44	82	B+C	.46	.54	
Total	40	60	100	Total	.20	.30	

y se plantea como H_0 que la FR poblacional de alta es igual en ambos grupos. Ahora es $P = 0.003$. Al tratarse de la comparación de dos FR, lo más adecuado es dar su diferencia en las muestras y el IC para el valor de esa diferencia en la población. En este ejemplo diríamos que una vez excluidos los de clase media, la FR con resistencia alta es en A 0.35 mayor que en los B+C ($0.89 - 0.54 = 0.35$) y que el IC al 95% es 0.17 y 0.53.

Las posibilidades de colapsar tablas son muchas, pero deben basarse en razones lógicas independientemente de la observación de los datos.

14.4. El tipo de muestreo en las Tablas de Contingencia

A los datos de una Tabla de Contingencia se puede llegar a través de diferentes tipos de muestreo. Dependiendo de cómo hayan sido muestreados los individuos de la población, podremos estimar unas u otras FR poblacionales.

Muestreo 1. Reconsideremos el ejemplo en que se toma una muestra de cada una de tres razas y una vez tomada se cuenta el número de personas con cada nivel de resistencia. El investigador decidió estudiar 40 de raza A (2 resultaron tener baja resistencia, 22 media y 16 alta), 60 de B y 100 de C. Estos son los datos:

Datos originales					FR de cada nivel de Resistencia en cada Raza		
	Baja	Media	Alta	Tot		Baja	Media
A	2	22	16	40	A	.05	.55
B	12	30	18	60	B	.20	.50
C	26	48	26	100	C	.26	.48
Total	40	100	60	200	Total	.20	.50
							.30

La FR muestral de personas con cada nivel de resistencia en cada raza estima la correspondiente FR poblacional y a partir del valor muestral se puede calcular el IC para el valor poblacional. Por ejemplo, en los A la FR poblacional con resistencia baja se estima con $2 / 40 = 0.05$ y la FR poblacional de C con resistencia media se estima con $48 / 100 = 0.48$.

Pero con este muestreo no se puede estimar la FR poblacional de cada nivel de resistencia ignorando la raza. Aunque en la población muestreada no hubiera otras razas aparte de A, B y C, la FR de personas con resistencia alta en la población general **no** se puede estimar con $60 / 200 = 0.30$, porque ese valor depende de cuantos individuos se haya decidido tomar de cada raza. Y de igual forma, $40 / 200 = 0.20$ no estima la FR poblacional con resistencia media, ni $60 / 200 = 0.30$ estima la FR de individuos con resistencia alta en la población.

Y, por ejemplo, con las muestras tomadas de esa forma la FR marginal de A en esa tabla ($40 / 200 = 0.20$) **no** refleja la FR de A en la población general, al igual que $100 / 200 = 0.5$ no estima la FR de C en la población. Y de la misma forma ocurre con las distribuciones de raza condicionadas a resistencia: la FR de B con-

dicionada a resistencia media en esa tabla ($30 / 100 = 0.30$) **no** refleja la FR de B en la población de personas con resistencia media, y $16 / 60 = 0.27$ no estima la FR de A en la población de personas con alta resistencia.

- Muestreo 2.** Los datos de la tabla que estamos comentando podrían haberse obtenido tras tomar:
- una muestra de 40 sujetos con resistencia baja
 - una muestra de 100 sujetos con resistencia media
 - una muestra de 60 sujetos con resistencia alta

y contar en cada una de ellas los que había de cada raza,

Datos originales				FR de cada Raza en cada nivel de Resistencia				
	Baja	Media	Alta	Tot	Baja	Media	Alta	
A	2	22	16	40	.05	.22	.27	.2
B	12	30	18	60	.30	.30	.30	.3
C	26	48	26	100	.65	.48	.43	.5
Total	40	100	60	200	Total	1	1	1

En ese caso la FR de A en la población de personas de resistencia baja **sí** se estima por $2 / 40 = 0.05$ Y la FR de B condicionada a resistencia media en esa tabla ($30 / 100 = 0.30$) **sí** refleja la FR de B en la población con resistencia media. Pero no se puede estimar la FR de A en la población general, pues el número de A depende de cuántos individuos de cada resistencia se decidió estudiar en las muestras.

Muestreo 3. Otro modo de muestrear habría sido tomar una muestra aleatoria de 200 individuos de la población general y contar el número de ellos de cada raza y cada resistencia. En este caso tanto las distribuciones marginales de la tabla como las condicionadas en ambos sentidos estiman las correspondiente FR poblacionales, siempre teniendo en cuenta la VRM.

De la misma forma que los distintos tipos de muestreos permiten estimar unas FR y otras no, también permiten plantear unos tests y otros no. Si es de interés, puede hacerse un test que plantee, por ejemplo, como H_0 cierta distribución de razas en la población (este test no tendría sentido hacerlo con el muestreo 1, en el que el investigador decidió tomar esas cantidades de individuos de cada raza). Con el tipo 3 de muestreo podemos plantear, por ejemplo, la H_0 que dice que en la población hay 30% de A, 30% de B y 40% de C. En el último apartado de este capítulo vemos cómo hacer este test.

El test para independencia entre las dos variables, raza y resistencia, se realiza e interpreta del mismo modo que cuando se toma una muestra de cada raza.

+++14.5. Cálculo para test con Tablas de Contingencia

Para hacer el test hay que calcular en primer lugar los **Valores Esperados** bajo la H_0 . El valor esperado de cada celda se calcula multiplicando el total de la fila por el total de la columna y dividiendo ese producto por el total de la tabla. En el ejemplo de las neumonías era

VALORES ABSOLUTOS					PROPORCIONES				
	MAL	REG	BIE	M-B	Total	MAL	REG	BIE	M-B
Bacterias	16	12	8	4	40	.40	.30	.20	.10
Virus	6	15	15	24	60	.10	.25	.25	.40
	22	27	23	28	100				

Valor Esperado de la casilla MAL-Bacterias: $E = 40 \times 22 / 100 = 8.8$

Valor Esperado de la casilla MAL-Vírico: $E = 60 \times 22 / 100 = 13.2$

Del mismo modo se hace para el resto de las celdas.

La tabla siguiente da todos los valores Esperados, los totales de cada fila y columna sumando estos valores esperados. Puede verse que esos totales son los mismos que con los observados. También se ve que las FR condicionadas a la etiología en esta tabla de valores esperados son iguales en las dos causas. Esto ocurre siempre con los valores esperados. Es decir, los valores *Esperados* son el número de pacientes que tendría que haber de cada etiología y cada evolución (cada casilla de la tabla) para que, con los mismos tamaños de muestra, las dos distribuciones condicionadas fueran iguales.

VALORES ESPERADOS					PROPORCIONES CON LOS VALORES ESPERADOS				
	MAL	REG	BIE	M-B	Total	MAL	REG	BIE	M-B
Bacterias	8.8	10.8	9.2	11.6	40	.21	.27	.23	.29
Virus	13.2	16.2	13.8	17.4	60	.21	.27	.23	.29
Total	21	27	23	29	100				

Cuanto mayor es la divergencia entre las dos distribuciones muestrales, la condicionada a bacterias y la condicionada a virus, mayor es la distancia entre los valores Observados y los Esperados. Esa divergencia se resume mediante un estadístico con dos sumatorios (uno para recorrer todas las filas y el otro todas la columnas), que tendrá tantos sumando como celdas haya en la tabla de contingencia:

$$\chi^2_{C-1} = \sum_1^2 \sum_1^C \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$$

En nuestro ejemplo el sumatorio abarca a las 8 casillas de la tabla.

$$\chi^2 = (16 - 8.8)^2 / 8.4 + (6 - 13.2)^2 / 13.2 + \dots = 18$$

Cuando las dos distribuciones muestrales son iguales, los O_i (observados) son iguales a los E_i (esperados) y χ^2 es cero. Y cuanto más divergen las dos distribuciones muestrales más se alejan los O_i de los E_i y mayor es χ^2 . Pequeños valores de χ^2 , pueden deberse al azar y no son evidencia contra la H_0 . Cuanto mayor sea el valor χ^2 de la muestra, más evidencia es contra la H_0 .

Para encontrar el valor P habría que construir una población donde se cumple la H_0 , hacer MA, es decir, sacar millones de parejas de muestras aleatorias y ver en cuántas de ellas el valor χ^2 es igual o mayor que en la de nuestro estudio.

Los programas informáticos de estadística calculan el valor χ^2 de cada estudio y el valor P que le corresponde. También se puede encontrar el valor P que corresponde a cada χ^2 en la tabla Chi-cuadrado, al final del libro. En este ejemplo se buscaría el valor P en la fila correspondiente a 3 “grados de libertad”, gl. En general, el número de gl es el número de filas menos uno multiplicado por el número de columnas menos uno. Con esas tablas no se puede calcular el valor P detalladamente, pero se puede saber si es mayor o menor que ciertas cantidades. Con 3 gl al valor $\chi^2 = 11.24$ le corresponde $P = 0.01$ y a $\chi^2 = 12.84$ le corresponde $P = 0.005$. Como a medida que aumenta χ^2 disminuye P, a $\chi^2 = 18$ (el obtenido con nuestros datos) le corresponde $P < 0.005$. Con esta tabla no se puede ser más precisos. El valor $P = 0.0004$ que se dio inicialmente lo proporciona el paquete informático.

**** +++ Ejercicio 14.3:** Se pretende saber si la distribución *poblacional* de grupos sanguíneos es igual en franceses y españoles. Para ello tomamos una *muestra* de cada país, y encontramos que quedan distribuidas de la siguiente forma:

	0	A	B	AB	Total
España	15 ()	12 ()	8 ()	5 ()	40
Francia	9 ()	12 ()	18 ()	21()	
Total					

- Calcule los totales de filas y de columnas y la FR de cada tipo en cada país.
- Calcule el valor P del test e interprete esa cantidad como frecuencia relativa.

+++ 14.6. Una muestra con C categorías

Un caso muy particular —y menos frecuente— de tablas de contingencia es el de “tablas” de dimensión 1 x C, que se generan cuando tenemos una sola muestra y sus individuos se clasifican en C categorías posibles. Consideremos una enfermedad cuya distribución estacional (por estaciones del año) *poblacional* en 1950 era prácticamente la misma en toda la tierra:

	Otoño	Invierno	Primavera	Verano
Proporción <i>poblacional</i> de casos en cada estación	.30	.40	.10	.10

Los expertos creen que debido al cambio climático se ha modificado esa distribución. Para analizar el tema se estudian *muestras* de N = 40 enfermos en cuatro regiones y en cada una se mira la estación en la que ocurrió cada caso. Se han anotado las distancias de cada FR de la muestra (p_i) a la frecuencia relativa de la población en 1950 (Π_i):

		Otoñ.	Invie.	Prima.	Verano
FR poblacional de casos en cada estación en 1950	$\pi_i =$.30	.40	.20	.10
América: FR en la muestra actual de N = 40	$p_i =$.30	.35	.20	.15
	$p_i - \pi_i =$	0.00	-0.05	0.00	+0.05
Asia: FR en la muestra actual de N = 40	$p_i =$.20	.35	.25	.20
	$p_i - \pi_i =$	-0.10	-0.05	+0.05	+0.10
Australia: FR en la muestra actual de N = 40	$p_i =$.20	.25	.35	.20
	$p_i - \pi_i =$	-0.10	0.15	+0.15	+0.10
Europa: FR en la muestra actual de N = 40	$p_i =$.05	.15	.50	.30
	$p_i - \pi_i =$	-0.25	-0.25	+0.30	+0.20

- Las frecuencias observadas en América son muy próximas a las poblacionales de 1950, por lo que esa muestra no es evidencia contra la H_0 que dice que las proporciones poblacionales actuales en América son como las de 1950.
- Las frecuencias observadas en Europa son muy lejanas a las poblacionales de 1950, por lo que esa muestra es fuerte evidencia contra la H_0 que dice que en Europa las proporciones poblacionales actuales son como las anteriores.
- Las FR observadas en Asia se alejan de las poblacionales de 1950 un poco más que las americanas. ¿Son los datos de Asia compatibles con la H_0 que dice que en Asia las proporciones poblacionales actuales son como las de 1950? Unos investigadores pueden pensar que esos datos son compatibles con la H_0 y por ello no constituyen evidencia contra ella; otros pueden inclinarse a pensar que las FR muestrales se alejan demasiado de las poblacionales de 1950, por lo que esa muestra es evidencia contra la H_0 . La Inferencia Estadística puede ayudar calculando el valor P del test, que es la prob de que en una muestra de ese tamaño aparezcan FR como las de nuestro estudio o aún más alejadas de las de 1950 si las FR poblacionales de Asia son como las de 1950.

Para resumir en un solo número las distancias de los p_i a los π_i , de las FR muestrales a las poblacionales, se suma del cuadrado de esas distancias en cada celda divididas por los respectivos valores de π_i y todo ello multiplicado por N, el tamaño de la muestra:

$$\chi^2 = N \cdot \sum \frac{(\pi_i - p_i)^2}{\pi_i}$$

Este estadístico, χ^2 , que se lee “Chi-cuadrado”, es cero si los p_i coinciden exactamente con los π_i y es mayor cuanto mayor sea la divergencia entre los p_i y los π_i . Para esta muestra es:

$$\chi^2 = 40 [0.1^2 / 0.3 + 0.05^2 / 0.4 + 0.05^2 / 0.2 + 0.1^2 / 0.1] = 40 \cdot 0.1521 = 6.1$$

Pequeños valores de χ^2 , no constituyen evidencia contra la H_0 . Pero esa evidencia es mayor cuanto mayor sea el valor χ^2 de la muestra. El valor P de este test indica cuan probable es que, siendo cierta la H_0 , salga por azar un valor χ^2 como el de nuestra muestra o aún mayor, es decir, que salgan muestras con FR observadas tan discrepantes de las esperadas como las de nuestra muestra o aún

más discrepantes. En la tabla siguiente se da el valor de P para cada una de las muestras estudiadas:

	Otoño	Invier.	Primav.	Verano	Chi-Cuadrado	P
Prop. poblacional en 1950	.30	.40	20	.10		
América: N = 40	.30	.35	.20	.15	1.3	0.74
Asia: N = 40	.20	.35	.25	.20	6.1	0.11
Australia: N = 40	.20	.25	.35	.20	12.0	0.007
Europa: N = 40	.05	.15	.50	.30	48.6	0.00000001

El valor P = **0.74** dice que en el MA de una población donde se cumple H_0 , es decir, se da la distribución estacional de la enfermedad en 1950 (las π_i son 0.3, 0.4, 0.2 y 0.1), en **74** de cada **100** muestras de N = 40 salen FR tan diferentes de las poblacionales como las de esa muestra o aún más diferentes. Y el valor P = **0.11** dice que en el MA de una población donde se cumple H_0 , en **11** de cada **100** muestras de N = 40 salen FR tan diferentes de las poblacionales como las de esa muestra o aún más diferentes.

El valor P lo calculan los programas estadísticos. Si no se tiene a mano uno de ellos, la tabla de Chi-Cuadrado, al final del libro, da los valores de χ^2 correspondientes a algunos valores de P. Para usarla debe tenerse en cuenta la cantidad llamada “grados de libertad”, gl, que en estos casos es el número de celdas menos uno. Con esas tablas no se puede calcular el valor P detalladamente, pero se puede saber si es mayor o menor que ciertas cantidades. Fíjese en la explicación que aparece al pie de la tabla y compruebe que, por ejemplo, para la muestra de Asia con 3 gl el valor $\chi^2 = 6.1$ no aparece en la tabla, pero en ella se ve en la fila de 3 gl que el valor más próximo es $\chi^2 = 6.25$ que tiene asociado un valor P = 0.10 (en la cabecera de la columna). Como a medida que aumenta χ^2 disminuye P, en nuestro ejemplo el valor P sería mayor de 0.10, suficiente como para concluir que los datos observados en la muestra de Asia son compatibles con la H_0 .

NO OLVIDE RECORDAR - 14

1. Estudiamos situaciones en las que los individuos de una muestra quedan clasificados según la distribución conjunta de dos variables (o en más de dos grupos según el valor de una variable cualitativa o cuantitativa agrupada)
2. Las **Tablas R x C** se generan cuando los individuos de una muestra se clasifican conjuntamente según dos variables, una con R categorías y la otra con C categorías; o cuando se toman R muestras y en cada una los individuos se clasifican según una variable con C categorías; o cuando se toman C muestras y en cada una los individuos se clasifican según una variable con R categorías.
3. En las Tablas R x C la Hipótesis nula planteada es que las dos variables son, en población, independientes, es decir, las DF de cada variable son iguales para cada valor de la otra variable. Si en la muestra la DF de una de las variables es “parecida” en los distintos niveles de la otra no rechazaremos la H_0 , la aceptaremos como posible; en caso contrario rechazaremos H_0 .
4. En las Tablas R x C los valores Esperados son los valores que tendría que haber en la tabla para que, con los mismos tamaños de muestra, las distribuciones condicionadas fueran iguales, es decir, para que se cumpla en la muestra lo que propone la H_0 para la población. Cuanto mayor es la divergencia entre las distribuciones muestrales mayor es la distancia entre los valores Observados y los Esperados.
5. +++ La divergencia en Tablas R x C se cuantifica mediante el estadístico llamado Chi-Cuadrado, donde los sumatorios recorren uno las filas y el otro las columnas de modo que habrá tantos sumando como casillas haya en la tabla (R x C casillas).

$$\chi^2_{C-1} = \sum_{1}^R \sum_{1}^C \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$$

6. +++ Las **Tablas 1 x C** se generan cuando en una muestra hacemos la Distribución de Frecuencias, DF, de una variable en la que consideramos C categorías. Planteamos como Hipótesis que las frecuencias relativas de individuos en cada categoría tienen en población ciertos valores: $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_C$; y vemos si las frecuencias encontradas en la muestra: p_1, p_2, \dots, p_C son compatibles con dichos valores poblacionales.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 14

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. Las **Tablas R x C** se generan cuando los individuos de *una muestra* se clasifican conjuntamente según dos variables, una con R categorías y la otra con C categorías.
2. Las Tablas R x C se generan cuando se toman *R muestras* y en cada una los individuos se clasifican según una variable con C categorías.
3. Las Tablas R x C se generan cuando se toman *C muestras* y en cada una los individuos se clasifican según una variable con R categorías.
4. Si una Tabla R x C se genera porque los individuos de *una muestra* se clasifican conjuntamente según dos variables, todas las frecuencias relativas de la tabla, marginales y condicionadas, estiman sus homólogas poblacionales.
5. Si una Tabla R x C se genera porque los individuos de *una muestra* se clasifican conjuntamente según dos variables, solo las frecuencias relativas marginales de la tabla estiman sus homólogas poblacionales.
6. Si una Tabla R x C se genera porque los individuos de *una muestra* se clasifican conjuntamente según dos variables, solo las FR condicionadas de la tabla estiman sus homólogas poblacionales.
7. Si una Tabla R x C se genera porque los individuos de *una muestra* se clasifican conjuntamente según dos variables, ninguna de las frecuencias relativas de la tabla, marginales y condicionadas, estiman sus homólogas poblacionales.
8. Si una Tabla R x C se genera porque se toman *R muestras* y en cada una los individuos se clasifican según una variable con C categorías, las C frecuencias relativas muestrales de cada categoría **no** estiman sus homólogas poblacionales.
9. Si una Tabla R x C se genera porque se toman *R muestras* y en cada una los individuos se clasifican según una variable con C categorías, las C frecuencias relativas muestrales de cada categoría estiman sus homólogas poblacionales.
10. Si una Tabla R x C se genera porque se toman *R muestras* y en cada una los individuos se clasifican según una variable con C categorías, las C FR muestrales marginales de cada categoría estiman sus homólogas poblacionales.
11. Si una Tabla R x C se genera porque se toman *R muestras* y en cada una los individuos se clasifican según una variable con C categorías, las C FR muestrales marginales de cada categoría **no** estiman sus homólogas poblacionales.
12. Con una Tabla R x C la Hipótesis nula planteada es que las 2 variables son, en población, independientes.
13. Con una Tabla R x C la H_0 planteada es que la variable con C categorías tiene en población la misma distribución en todos los niveles de la otra variable.

14. Si en la muestra la DF de una de las variables es “parecida” en los distintos niveles de la otra, rechazaremos la H_0 .
15. Si en la muestra la DF de una de las variables es “parecida” en los distintos niveles de la otra no rechazaremos la H_0 , la aceptaremos como posible.
16. Si en la muestra la DF de una de las variables es “muy diferente” en los distintos niveles de la otra, rechazaremos la H_0 .
17. Si en la muestra la DF de una de las variables es “muy diferente” en los distintos niveles de la otra, no rechazaremos la H_0 , la aceptaremos como posible.
18. Los valores Esperados son los valores que tendría que haber en la tabla para que, con los mismos tamaños de muestra, las DF condicionadas fueran iguales.
19. Los valores Esperados son los valores que tendría que haber en la tabla para que se cumpla exactamente la igualdad de las distribuciones en las muestras.
20. Cuanto mayor es la divergencia entre las distribuciones muestrales menor es la distancia entre los valores Observados y los Esperados.
21. Cuanto mayor es la divergencia entre las distribuciones muestrales mayor es la distancia entre los valores Observados y los Esperados.
22. La divergencia entre los valores esperados y los observados se cuantifica mediante el estadístico llamado Chi-Cuadrado.
23. Para calcular el estadístico Chi-Cuadrado, en cada celda se divide el cuadrado de la diferencia entre el valor observado y el esperado, por el esperado. Ese cociente se suma para todas las celdas.
24. El valor P del test nos dice la probabilidad de obtener muestras en que las distribuciones de una variable condicionada a cada nivel de la otra se diferencian entre sí tanto como lo hacen en nuestra tabla de contingencia o más aún.
25. El valor P del test nos dice la probabilidad de obtener muestras en que las distribuciones de una variable condicionada a cada nivel de la otra se asemejan entre sí tanto como lo hacen en nuestra tabla de contingencia o más aún.

Capítulo 15

ANÁLISIS DE VARIANZA

En el Capítulo 9 estudiamos la Inferencia con **una** media y en el 10 la Inferencia con **dos** medias. En este se ve la Inferencia con **tres o más** medias.

Si tenemos K grupos de individuos y en ellos medimos una variable cuantitativa, tenemos K medias muestrales. Si se plantea la hipótesis nula que dice que las medias poblacionales son iguales

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_K$$

el Análisis de Varianza (ANOVA) es la técnica que nos permite calcular el valor P correspondiente, es decir, la prob de encontrar medias muestrales tan dispares entre sí como las nuestras o aún más dispares, si las medias poblacionales son iguales (en estas situaciones no es lícito hacer tests-t comparando cada pareja de medias)

- Si H_0 es cierta esperamos medias muestrales, M , no muy diferentes:

$$M_1 \approx M_2 \approx \dots \approx M_K$$

- M 's muy “parecidas” no son evidencia contra la H_0 , pues las pequeñas diferencias entre ellas pueden aparecer por azar. M 's muy “distintas” unas de otras constituyen evidencia contra H_0 , pues es muy improbable que ocurra eso en las muestras si las medias poblacionales son iguales.

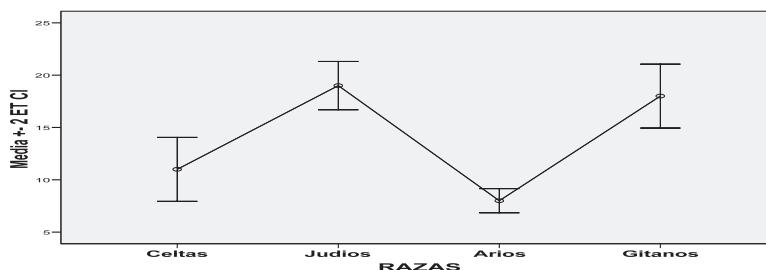
¿Cuán grandes tienen que ser las diferencias entre las medias muestrales para que nos hagan pensar que en las poblacionales no son iguales? No hay respuesta única para esta cuestión. El test Anova calcula el valor P y, como en todos los tests, cuanto menor es el valor P, más evidencia proporciona contra la H_0 .

15. 1. La salida típica con los resultados del Anova

Veremos los cálculos fundamentales del ANOVA analizando este ejemplo. Se mide el Coeficiente Intelectual, CI, (en unidades especiales) en muestras de 4 razas diferentes (3 individuos en cada una), obteniéndose medias muestrales de 11, 19, 8 y 18. El objetivo del Anova es ver si las diferencias entre estas medias muestrales son compatibles con que las poblacionales sean iguales o más bien sugieren que hay diferencias entre las medias poblacionales.

	Celtas	Judíos	Arios	Gitanos
12	21	8	16	
8	17	7	21	
13	19	9	17	
M	11	19	8	18
SC	14	8	2	14
Varianza S ²	7	4	1	7
ES	1.53	1.15	0.58	1.53

Estos resultados muestrales obtenidos pueden resumirse en una gráfica donde para cada raza se representa la media (M) ± el Error Estándar (ES):



Los programas informáticos que hacen este test producen como salida esta tabla:

	SC	gl	MC	F	P
ENTRE	$SC_E = 258$	3	86	18.1	0.0006
DENTRO	$SC_D = 38$	8	4.75		

Veamos en detalle cada una de estas entradas.

15.2. Suma de Cuadrados y Media Cuadrada DENTRO de grupos

- **Suma de Cuadrados Dentro, $SC_D = 38$** es la suma de las Suma de Cuadrados en todos los grupos implicados. $SC_D = 14 + 8 + 2 + 14 = 38$. Es mayor cuanto mayor es la dispersión de los valores individuales respecto a la media de su grupo.

- **Grados de Libertad Dentro, $gl_D = 8$** es la suma de los tamaños de todos los grupos menos el número de tratamientos: $gl_D = 12 - 4 = 8$. También se obtiene como la suma de los tamaños de cada grupo menos 1: $gl_D = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$
- **Media Cuadrada Dentro, $MC_D = SC_D / gl_D = 38 / 8 = 4.75$** . Mide la dispersión de los valores de la variable dentro de los grupos. Cuando los grupos son del mismo tamaño se puede calcular como el promedio de las cuasivarianzas muestrales, S^2 , en los K grupos ($K = 4$ razas).

$$MC_D = (7 + 4 + 1 + 7) / 4 = 19 / 4 = 4.75$$

15.3. Suma de Cuadrados y Media Cuadrada ENTRE grupos

- **Suma de Cuadrados Entre, $SC_E = 258$** es la Suma de Cuadrados entre las medias de los grupos multiplicada por el tamaño de ellos, si todos son de igual tamaño. Con grupos de diferentes tamaños el cálculo es similar (se verá en un apartado posterior). En este ejemplo las medias muestrales son 11, 19, 8 y 18. La media de las 4 medias es **14** y la Suma de Cuadrados entre las medias es:

$$(11 - 14)^2 + (19 - 14)^2 + (8 - 14)^2 + (18 - 14)^2 = 86.$$

Multiplicando por 3, que es el tamaño de los grupos, se obtiene $SC_E = 86 \cdot 3 = 258$.

- **Grados de Libertad Entre, $gl_E = 3$** es el número de grupos menos 1: $4 - 1 = 3$
- **Media Cuadrada Entre, $MC_E = SC_E / gl_E = 258 / 3 = 86$** . Mide las diferencias entre las medias muestrales: es cero cuando todas son iguales y es mayor cuanto más difieren entre sí dichas medias. Los datos son más difícilmente compatibles con la H_0 cuanto más diferentes son las medias muestrales, es decir, cuanto mayor es la MC_E . La idea básica es:
 - Medias muestrales parecidas, implica MC_E pequeña, esto es, datos compatibles con la H_0 , que no constituyen evidencia contra ella.
 - Medias muestrales muy diferentes, implica MC_E grande, esto es, datos difícilmente compatibles con la H_0 , que constituyen evidencia contra ella.

¿Cuán grande tiene que ser la MC_E para que sea fuerte evidencia contra la H_0 ? Depende de cuán dispersa sea la variable estudiada. Un mismo valor de MC_E es más indicativo de que hay diferencias entre las medias poblacionales, si la variable es poco dispersa (MC_D pequeña) que si es una variable muy dispersa (MC_D grande).

15.4. La razón de medias cuadradas o Razón F y el valor P

En la evidencia contra la H_0 , lo relevante no es el valor absoluto de la MC_E , sino cuánto supera a la MC_D . La relación entre MC_E y MC_D se cuantifica por su cociente, llamado Razón de Medias Cuadradas, Razón de Varianzas o valor F.

$$F = MC_E / MC_D$$

Los datos contienen más evidencia contra la H_0 cuanto mayor sea F. ¿Y qué valores de F son suficientemente “grandes” como para hacernos pensar que H_0 no es cierta? Depende del **valor P** que le corresponde. El valor P nos dice la prob de que con medias poblacionales iguales aparezca un valor F tan grande como el de nuestros datos o aún mayor, es decir, que aparezcan medias muestrales tan distintas entre sí como las nuestras o aún más distintas.

Todos los programas estadísticos que hacen los cálculos del Anova dan el valor P correspondiente. Ocasionalmente el investigador puede tener que hallar el valor F con calculadora y el valor P correspondiente consultando las tablas estadísticas para F. Una versión resumida de ellas se da al final del libro y al final de este apartado se explica su uso.

Un valor P grande dice que el valor F obtenido en nuestros datos puede aparecer fácilmente cuando las medias poblacionales son iguales, por lo que no es evidencia contra esa igualdad. Un valor P muy pequeño dice que el valor F obtenido es difícil que aparezca siendo iguales las medias poblacionales, por lo que los datos son evidencia contra la hipótesis de igualdad. La evidencia contra la H_0 es mayor cuanto menor es P (es decir, cuanto mayor es F). En la tabla que sigue resumimos las 4 cantidades finales del cálculo en el Anova.

Cantidades del ANOVA		
Nombre	Lo que mide	Ejemplo
Media Cuadrada Entre, MC_E	Las diferencias entre las medias muestrales	86
Media Cuadrada Dentro, MC_D	Dispersión de esa variable	4.75
Razón de varianzas, F	MC_E / MC_D	18.1
Valor P del test	$P(F \geq \text{que la obtenida si se cumple } H_0)$	0.0006

Interpretación del valor P: si no hay diferencias entre las medias poblacionales y se repitiera este estudio millones de veces, F tomaría valores en torno a 1 en la mayoría de los estudios y solo 6 cada 10 000 veces sería, por la Variabilidad y Regularidad propias del Muestreo, VRM, igual o mayor que 18.1. Es decir, solo en 6 de cada 10 000 repeticiones aparecen medias muestrales tan diferentes entre sí como las de nuestro estudio o aún más diferentes, si son iguales las medias poblacionales. Este valor de P es fuerte evidencia contra la H_0 , nos lleva a rechazarla y pensar que no son iguales las 4 medias poblacionales. Esto no quiere decir que las cuatro sean diferentes. El Análisis Postanova que se ve más adelante nos permitirá establecer entre qué medias hay realmente diferencias.

El ejemplo 1 a continuación es el utilizado antes. En el ejemplo 2, a la derecha, la dispersión de la variable es la misma (iguales varianzas muestrales e igual MC_D) que en el 1, pero las medias muestrales son más parecidas entre sí. La MC_E , que antes era 86 ahora es 8.75. El valor F baja de 18.1 a 1.84, y es **P = 0.22**.

Ejemplo 1				Ejemplo 2			
Cel	Jud	Ari	Git	Cel	Jud	Ari	Git
12	21	8	16	12	12	8	10
8	17	7	21	8	8	7	15
13	19	9	17	13	10	9	11
11	19	8	18	11	10	8	12
7	4	1	7	7	4	1	7
$MC_D = 4.75$		$MC_E = 86$		$MC_D = 4.75$		$MC_E = 8.75$	
$F = 18.1$		$P = \mathbf{0.0006}$		$F = 1.84$		$P = \mathbf{0.22}$	

El valor P del Anova depende también de la dispersión de la variable, que se mide por la MC_D . En el ejemplo 3 a continuación hay iguales medias muestrales que el 1º, pero con mayor dispersión dentro de cada grupo, $MC_D = 24.7$. Por ello, el cociente F es menor que en el ejemplo 1 y el valor P es mayor. Es más fácil obtener esas diferencias entre medias muestrales con una variable que tiene mayor dispersión.

Ejemplo 3			
Cel	Jud	Ari	Git
14	23	8	16
6	15	3	25
13	19	13	13
11	19	8	18
19	16	25	39
$MC_D = 24.7$		$MC_E = 86$	
$F = 3.47$		$P = \mathbf{0.07}$	

** Ejercicio 15.1:

- a. Comentar los datos de la siguiente tabla explicando por qué se obtiene un valor P mayor que en los tres supuestos anteriores:

	Celtas	Judíos	Arios	Gitanos
M	14	14	8	10
S ²	6	6	3	19
	13	10	13	7
M	11	10	8	12
	19	16	25	39
$MC_D = 24.7$		$MC_E = 8.75$		
$F = 0.35$		$P = \mathbf{0.79}$		

- b. Explicar qué indica $P = 0.79$ diciendo qué evento ocurre 79 cada 100 veces.

** Ejercicio 15.2: Para comparar la eficacia de tres técnicas del tratamiento del dolor producido por una intervención quirúrgica, se aplica a un grupo de 5 individuos un analgésico “A”, a otros 5 un analgésico “B” y a un tercero grupo

de 5 individuos una técnica de acupuntura: “C”. En cada paciente se anotó el tiempo, en minutos, que tardó en remitir el dolor obteniéndose:

Tratamiento “A”: 10 – 5 – 8 – 6 – 11 Media con “A” = 8 → SC(A) = 26

Tratamiento “B”: 10– 15– 13– 11– 16 Media con “B” = 13 → SC(B) = 26

Acupuntura: 7 – 6 – 5 – 4 – 3 Media con “Ac.” = 5 → SC(Acup) = 26

- a. ¿Qué técnica estadística emplearía para analizar estos datos?, es decir, ¿qué test utilizaría para hacer inferencia?
- b. ¿Cuál es la Hipótesis Nula que se plantea? (Enunciela breve y claramente y en los términos del enunciado del problema).
- c. Calcule: SC_{DENTRO} , MC_{DENTRO} , SC_{ENTRE} y MC_{ENTRE} .
- d. Calcule el valor F del test.
- e. Si el valor P del test Anova es $P = 0.0004$, ¿qué concluimos respecto a la eficacia comparativa de los tres tratamientos?
- f. ¿Cómo interpretaría ese valor de P?

Todos los programas estadísticos dan el valor P del test a partir de F y de los grados de libertad Dentro y Entre. En su defecto se usan la “tabla F de Snedecor” que aparece al final del libro. Solamente nos da los valores de F que corresponden a $P = 0.05$ y a $P = 0.01$. De ese modo podemos saber si al valor F de nuestro estudio le corresponde P mayor de 0.05 o menor de 0.01 o entre 0.05 y 0.01. En la tabla se busca la columna que tiene en su cabecera los gl_E . Y se busca la fila que tiene en su cabecera los gl_D . En el primer ejemplo del primer apartado era $gl_E = 3$, $gl_D = 8$ y $F = 18.2$. En el cruce de la columna “3” y la fila “8” vemos $F_{0.05} = 4.07$ y $F_{0.01} = 7.59$. Esto quiere decir que si hubiéramos obtenido con nuestros datos valor $F = 4.07$, le correspondería valor P del test de 0.05, y si hubiéramos obtenido $F = 7.59$ sería $P = 0.01$ (a mayor valor F, menor valor P). Como en nuestros datos es $F = 18.2$, su valor P es menor de 0.01.

15.5. Los fundamentos lógicos del Análisis de Varianza

Recordemos (Capítulo 7) cómo se distribuyen las medias muestrales, \bar{M} , en el Muestreo Aleatorio, MA. Sea la variable “X” que se distribuye en una población con media μ_x y desviación σ_x . Hagamos MA y consideremos la población formada por las medias muestrales:

$$\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3, \dots, \bar{M}_{1000}, \dots, \bar{M}_{1\,000\,000} \dots \bar{M}_{1000\,000\,000} \dots$$

Tendremos tantas medias como muestras saquemos en el MA. Cualquiera que sea la forma de la distribución de X y con cualquier N (pero el mismo en todas las muestras) se cumple:

$$\bar{\mu}_M = \bar{\mu}_x$$

$$\sigma^2_M = \sigma^2_x / N$$

Es decir, la media de todas las medias muestrales es igual a la media de los individuos y la varianza entre las medias muestrales es igual la varianza entre los individuos dividida por N.

Por ejemplo, si la variable “X” tiene $\mu_x = 400$ y $\sigma^2_x = 100$ y se hace MA de tamaño $N = 25$, la media y la σ^2 del conjunto de las medias muestrales del MA son:

$$\mu_M = 400 \quad \text{y} \quad \sigma^2_M = 100 / 25 = 4$$

Esta relación, $\sigma^2_M = \sigma^2_x / N$, es la base de todos los “Análisis de Varianza”, “Análisis de Covarianza” y “Diseños Factoriales”. σ^2_M nos informa de la dispersión entre las medias muestrales y σ^2_x nos informa de la dispersión entre los individuos. Esa relación entre σ^2_M y σ^2_x también se puede escribir así:

$$\sigma^2_M \cdot N = \sigma^2_x$$

Es decir, la varianza entre las medias muestrales multiplicada por N es igual a la varianza entre los individuos. Y también se puede expresar así:

$$\sigma^2_M \cdot N / \sigma^2_x = 1$$

Es decir, si la varianza entre las medias muestrales multiplicada por N se divide por la varianza entre los individuos, el cociente es 1.

En la práctica el investigador no toma “millones de muestras” de una población. Lo que hace es tomar un pequeño número de ellas, y aplicar a cada una un tratamiento. Si los tratamientos no modifican la variable en estudio las diferencias entre las K medias muestrales se deberán solamente a la VRM y la cuasivarianza entre ellas tendrá un valor próximo a la σ^2_M que se obtendría si se tomaran millones de muestras. Por el contrario, si algunos de los tratamientos modifican la variable en estudio, algunas de las medias serán mayores o menores que si no hubiera esos efectos y la cuasivarianza entre las K medias muestrales será considerablemente mayor de σ^2_M .

La idea básica del ANOVA es:

- Calcular la cuasivarianza entre las K medias y multiplicarla por N. Eso es precisamente la MC_E .
- Si los tratamientos no hacen efecto, esa MC_E tendrá un valor próximo a la varianza entre los individuos, σ^2_x . Pero como esta varianza tampoco se conoce, se estima por la MC_D . Es decir, si los tratamientos no modifican la variable, la MC_E tendrá un valor próximo a la MC_D y el cociente $F = MC_E / MC_D$ tomará un valor próximo a la unidad.
- Si algunos de los tratamientos modifican la variable, las medias de esas muestras estarán aumentadas o disminuidas, las diferencias entre las medias muestrales serán mayores, la MC_E será mayor y el cociente F será mayor de 1 (recordemos que la H_0 es que los tratamientos no modifican la variable).
 - La MC_D de nuestro estudio estima σ^2_x siempre.
 - La MC_E de nuestro estudio estima $\sigma^2_M \cdot N$ si H_0 es cierta.

Si H_0 es cierta, es $\sigma^2_M \cdot N = \sigma^2_x \rightarrow MC_E \approx MC_D \rightarrow MC_E / MC_D \approx 1$

** **Ejercicio 15.3:** Para ver si los tratamientos A, B y D modifican la variable “X” en ratas se toman 4 muestras aleatorias de $N = 4$ cada una. Una muestra se deja intacta como control y a cada una de las otras se le aplica uno de los tratamientos.

Control	A	B	D
12	21	8	16
18	17	7	21
15	19	9	17
11	23	12	14
M	14	20	9
SC			
Varianza S ²			

- a. La media de las medias es:
- b. La varianza de la población, σ^2_x , se estima por la $MC_D =$
- c. Si los tratamientos no modifican “X” la varianza entre las medias muestrales debe ser próxima a $\sigma^2_x / 4$, es decir próxima a $MC_D / 4$, es decir, próxima a:
- d. La MC_E es la varianza entre las medias muestrales multiplicada por N

$$MC_E = [(14-15)^2 + (-15)^2 + (-15)^2 + (-15)^2] / 3] 4 =$$

- e. El cociente F nos dice cuánto mayor es la MC_E que la MC_D y vale $F =$
- f. Pero ese valor de la varianza entre medias muestrales podría, quizás, haber aparecido por la variabilidad propia del muestreo. El valor P del este test nos dice cuál es la probabilidad de que la varianza entre medias muestrales sea tan grande como la de nuestro estudio si los tratamientos no modifican “X”. En este caso es **P = 0.0007**. Explique lo que indica esa cantidad.

+++ 15.6. La Homogeneidad de Varianzas

En teoría el valor P del ANOVA, que llamaremos “P-Anova” solamente coincide con el “P-verdadero” si se cumplen, las mismas condiciones que en la comparación de dos medias (Apartado 10.9 y siguientes): Normalidad y Homogeneidad de Varianzas. Respecto a esta condición deben tenerse en cuenta estos hechos:

- a) Robustez del ANOVA ante la no homogeneidad de varianzas

El valor P-Anova es bastante próximo al P-verdadero aunque las varianzas poblacionales sean moderadamente distintas. En la jerga estadística esto se expresa diciendo que el ANOVA es bastante robusto ante la no homogeneidad de varianzas. La discrepancia entre el P-Anova y el P-verdadero aumenta progresivamente al aumentar las diferencias entre las varianzas poblacionales. Pero no está cuantificada esa relación. Simulaciones con ordenador muestran que la aproximación aún es buena cuando unas varianzas poblacionales triplican a otras.

b) Imposibilidad de afirmar la homogeneidad de varianzas

Nunca se conocen las varianzas poblacionales y por ello nunca se puede tener la seguridad de que sean exactamente iguales. La única pista que tenemos sobre ellas es la observación de las varianzas muestrales, que siempre presentarán algunas diferencias entre ellas, aun en el caso de que las poblacionales sean iguales.

Cuando las varianzas muestrales son “parecidas” se asume que las poblacionales son iguales o suficientemente parecidas entre sí para que el P-Anova se aproxime mucho al P-verdadero. Cuanto más diferencias hay entre las varianzas muestrales más riesgo hay de que haya diferencias grandes entre las poblacionales y de que el P-Anova se aleje sensiblemente del P-verdadero.

c) Test de homogeneidad de varianzas

Hay tests estadísticos que plantean como H_0 la HOMOGENEIDAD DE VARIANZAS y su valor P nos dice la prob de encontrar muestras con varianzas tan distintas entre sí como las de nuestro estudio o aún más distintas, si las poblacionales son iguales. Cuanto mayor sea el valor P de este test menos evidencia tenemos contra la Homogeneidad de Varianzas, pero los valores de P grandes no son evidencia a favor de la homogeneidad de varianzas, solo son falta de evidencia para rechazarla. Y no hay un valor P frontera. Por ello no se puede simplificar la situación diciendo que si este test da $P > 0.05$ hay homogeneidad y el P-Anova es el P-verdadero, mientras que si $P < 0.05$, no hay homogeneidad y el P-Anova no es el P-verdadero. Solamente con valor P muy pequeño el test de homogeneidad nos indica claramente que **no** hay tal homogeneidad. Pero aun en este caso hay que tener en cuenta la mencionada robustez del Anova frente a la no homogeneidad.

Debe estar clara la diferencia entre el test ANOVA, (para comparar medias), y el test de HOMOGENEIDAD DE VARIANZAS (para comparar varianzas):

• Test ANOVA para comparar medias:

- H_0 : iguales *medias* poblacionales.
- La evidencia contra la H_0 es mayor cuanto más distintas son las medias muestrales.
- El valor P dice la probabilidad de encontrar medias muestrales tan distintas como las de nuestro estudio o aún más distintas, si las medias poblacionales son iguales.
- El P-Anova coincide exactamente con P-verdadero solo si hay homogeneidad de varianzas.

• Test de HOMOGENEIDAD DE VARIANZAS:

- H_0 : iguales *varianzas* poblacionales.
- La evidencia contra la H_0 es mayor cuanto más distintas son las varianzas muestrales.
- El valor P dice la probabilidad de encontrar varianzas muestrales tan distintas como las de nuestro estudio o aun más distintas, si las varianzas poblacionales son iguales.

+++ 15.7. El test de Homogeneidad de Varianzas tiene poca potencia estadística cuando son muestras pequeñas

La Potencia estadística de un test de Homogeneidad de Varianzas es la prob de detectar que las varianzas no son iguales cuando realmente no lo son. Poca potencia quiere decir que aun cuando las varianzas sean desiguales el test de homogeneidad da valores P que no invitan especialmente a rechazar la hipótesis de igualdad.

En el ejemplo 4 que aparece a continuación la varianza muestral, S^2 , mayor es **7 veces** mayor que la menor ($175 / 25 = 7$). Estos datos son compatibles, obviamente, con que en la población haya diferencias de varianzas de ese orden. Pero el test de Homogeneidad de Varianzas da $P = 0.66$, mostrando que también lo son con la homogeneidad de varianzas poblacionales. Es decir, si las varianzas poblacionales fueran iguales y repitiéramos este estudio millones de veces, en 66 de cada 100 repeticiones las varianzas muestrales diferirían entre sí tanto como estas o más. Por tanto, es bastante fácil obtener varianzas muestrales tan diferentes como las obtenidas en este ejemplo, si las varianzas poblacionales fueran iguales.

Es decir, incluso con tanta diferencia entre las varianzas muestrales no hay evidencia de que las poblacionales sean diferentes. En el ejemplo 5 las varianzas muestrales son aún más diferentes. La mayor es **196 veces** mayor que la menor. Y a pesar de ello el valor P del test de homogeneidad es **0.08**, lo que constituye solamente modesta evidencia contra la hipótesis de homogeneidad de varianzas.

M
S^2

Ejemplo 4					
Cel	Jud	Ari	Git		
60	105	40	80		
40	85	35	105		
65	95	45	85		
55	95	40	90		
175	100	25	175		
$MC_F = 2150$		$MC_D = 118.6$			
$F = 18.1$		$P = \mathbf{0.0006}$			
$S^2_{\max} / S^2_{\min} = 175 / 25 = 7$					
H_0 : Varianzas poblacionales iguales → $P = 0.66$					

Ejemplo 5					
Cel	Jud	Ari	Git		
60	105	40	80		
40	85	39	106		
65	95	41	84		
55	95	40	90		
175	100	1	196		
$MC_F = 2150$		$MC_D = 118$			
$F = 18.2$		$P = \mathbf{0.0006}$			
$S^2_{\max} / S^2_{\min} = 196 / 1 = 196$					
H_0 : Varianzas poblacionales iguales → $P = 0.08$					

+++ 15.8. Tests No Paramétricos para comparar más de dos medias

Los llamados *Tests no Paramétricos* no asumen homogeneidad de varianzas. El más conocido para comparar más de dos medias es el de Kruskal-Wallis.

En cada uno de los 6 ejemplos siguientes se estudian 4 muestras, con 3 individuos en cada muestra, obteniéndose las medias, M, y varianzas muestrales, S^2 , que se indican. Para cada uno de ellos se realiza el test Anova (en el que se plantea como H_0 que las 4 medias poblacionales son iguales), el test de homogeneidad de varianzas (en el que se plantea como H_0 que las 4 varianzas poblacionales son iguales) y el test de

Kruskal-Wallis (alternativa del Anova cuando no se pueden asumir homogeneidad de varianzas). En cada uno de estos tests se obtienen los valores de P indicados.

		Ejemplo 1						Ejemplo 2			
		11	19	8	18			11	10	8	12
M		7	4	1	7			7	4	1	7
ANOVA: P= 0.0006						ANOVA: P= 0.22					
Homog. Varianzas: P = 0.66						Homog. Varianzas P = 0.66					
Kruskal-Wallis: P = 0.03						Kruskal-Wallis: P = 0.20					
		Ejemplo 3						Ejemplo 4			
		11	19	8	18			11	10	8	12
M		19	16	25	39			19	16	25	39
ANOVA: P= 0.07						ANOVA: P= 0.79					
Homog. Varianzas: P = 0.94						Homog. Varianzas: P = 0.94					
Kruskal-Wallis: P = 0.07						Kruskal-Wallis: P = 0.80					
		Ejemplo 5						Ejemplo 6			
		55	95	40	90			55	95	40	90
M		175	100	25	175			175	100	1	196
ANOVA: P= 0.0006						ANOVA: P= 0.0006					
Homog. Varianzas: P = 0.66						Homog. Varianzas: P = 0.08					
Kruskal-Wallis: P = 0.03						Kruskal-Wallis: P = 0.03					

De estos resultados podemos hacer los siguientes comentarios:

Ejemplo 1 vs. Ejemplo 2:

- La varianzas muestrales son iguales en los dos ejemplos, por lo que el valor P del test de homogeneidad de varianzas es el mismo: P = 0.66. Este valor no nos invita a concluir que las varianzas poblacionales sean diferentes, por lo que sería perfectamente lícito hacer Anova.
- Las medias muestrales son más diferentes en el ejemplo 1 que en el 2, lo que se refleja en un valor P (tanto del test Anova como el de Kruskal-Wallis) mayor en el ejemplo 2 que en el 1. Las conclusiones para ambos tests son similares: no hay evidencia en contra de la igualdad de medias poblacionales en el ejemplo 2 (las medias poblacionales pueden ser iguales) y sí hay tal evidencia en el ejemplo 1 (las medias de las poblacionales de las que salieron las muestras no son iguales).

Ejemplo 3 vs. Ejemplo 4:

- La varianzas muestrales son iguales en los dos ejemplos, por lo que el valor P del test de homogeneidad de varianzas es el mismo, P = 0.94. Es perfectamente lícito hacer Anova.
- La conclusión de los dos tests que plantean que no hay diferencias entre las medias poblacionales entre los 4 grupos (Anova y Kruskal-Wallis) es la misma ya que sus valores P son similares (en los dos ejemplos): Mayores diferencias muestrales del ejemplo 3 hace que se obtengan valores de P menores (P = 0.07) que en el 4 (P en torno a 0.80).

Ejemplo 5 vs. Ejemplo 6:

- La varianzas muestrales (en los dos ejemplos) son bastante diferentes entre sí, por lo que los valores P del test de homogeneidad de varianzas son muy diferentes: P = 0.66 y 0.08. Estos valores no nos permiten concluir que las varianzas poblacionales sean diferentes en el ejemplo 5, pero hay indicios de que puedan serlo en el ejemplo 6. En el primer caso es perfectamente lícito hacer Anova, pero tenemos serias dudas respecto al segundo.
- Como las diferencias entre las medias muestrales son iguales en los ambos ejemplos, los valores P y las conclusiones de los dos tests que plantean que no hay diferencias entre las medias poblacionales entre los 4 grupos (Anova y Kruskal-Wallis) es la misma ya que sus valores P son los mismos en los dos ejemplos, mostrando una clara evidencia contra la H_0 planteada en el test de Anova, pero no muy clara en el de Kruskal-Wallis (en la mayoría de los casos los tests No-Paramétricos son más conservadores que sus correspondientes paramétricos, es decir, con ellos se obtienen, para el mismo conjunto de datos, valores de P más grandes).

**** Ejercicio 15.4:** Analice estos datos con Kruskal-Wallis y con Anova y comente los resultados obtenidos con cada uno de los dos métodos.

Grupo A (N = 7) → 1 , 1 , 2 , 3 , 4 , 7 , 10.

Grupo B (N = 6) → 4 , 4 , 6 , 6 , 8 , 8.

Grupo C (N = 5) → 8 , 11 , 12 , 13 , 16.

**** Ejercicio 15.5:** Se mide el efecto de 4 fármacos: A , B , C y D sobre cierta variable X en 4 grupos independientes, cada uno con 5 individuos. Los datos son:

	A	B	C	D	
	7	13	4	9	
	10	17	11	14	
	8	17	11	11	
	10	18	14	14	
	15	20	15	22	
Medias	10	17	11	14	Media =
SC	38	26	74	98	$\Sigma=$
ES	1.38	1.14	1.92	2.21	

- a. Haga el test correspondiente para comparar las cuatro medias muestrales, suponiendo que no se asume Distribución Normal en las poblaciones, ni Homogeneidad de Varianzas.

- b. Haga Anova:

	SC	GL	MC	F ; P
TOTAL		19		
ENTRE				
DENTRO				

- c. Compare los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores y resuma las conclusiones obtenidas.

+++ 15.9. La condición de Normalidad

Otra de las razones, además de que no se cumpla la homogeneidad de varianzas, por las que el P-Anova no es igual al P-verdadero es que la variable cuantitativa medida en los individuos (coeficiente intelectual, en nuestro ejemplo) no se distribuya de modo Normal en cada una de las poblaciones estudiadas (en las cuatro razas, en nuestro ejemplo). Pero a partir de las muestras estudiadas ¿cómo comprobar si esto se cumple?

1. Puesto que no conocemos los valores de todos los individuos de cada una de las poblaciones, no podemos saber con certeza si la variable se distribuye o no de modo Normal. A partir de las observaciones de cada muestra lo único que podemos hacer es un test de NORMALIDAD, que plantea como H_0 que la variable se distribuye de modo Normal en cada una de las poblaciones implicadas. Valores de P bajos muestran clara evidencia en contra de la hipótesis y valores de P altos nos llevarían a pensar que la hipótesis puede ser cierta, pero no proporcionan certeza de que lo sea.
2. El test de Normalidad tiene poca potencia estadística cuando las muestras son pequeñas (que es la situación más común en investigación). Aunque los datos muestrales se distribuyan de forma muy diferente a la Normal, el valor P del test no será lo suficientemente pequeño como para pensar en rechazar la hipótesis de ajuste Normal (lo que nos llevaría a poder realizar el test Anova de forma lícita).
3. El Anova es robusto ante la no normalidad. Es decir, aun con distribuciones poblacionales que se alejan moderadamente de la normalidad, el valor P-Anova se aproxima mucho al P-verdadero.

+++ 15.10. Anova con tamaños desiguales

Si los tamaños de las muestras no son todos iguales el cálculo de la SC_{ENTRE} es un poco más trabajoso, pero de ello se encargan generalmente los ordenadores. No obstante, cuando los tamaños son pequeños el cálculo del valor F se puede hacer en pocos minutos con ayuda de una calculadora elemental.

Con tamaños desiguales la SC_{ENTRE} se calcula multiplicando para cada muestra el cuadrado de la diferencia entre la media de esa muestra y la media total por el número de individuos de dicha muestra, y sumando para todas las muestras. Veámoslo en este ejemplo con tamaños 10, 2, 4 y 4. Un grupo de 20 personas están clasificadas según el nivel de agresividad (Nada = 1, Poco = 2, Media = 3 y Mucha = 4). En cada una se mide su rendimiento en el trabajo en una escala con valores de 0 a 20. La media total es $200 / 20 = 10$

Agresividad	Rendimiento	N	Media	SC	S ²
1 (NO)	8 , 7 , 10 , 9 , 6 , 5 , 11 , 8 , 6 , 10	10	8	36	
2 (POCO)	8 , 12	2			
3 (MEDIA)	11 , 9 , 12 , 16	4		26	
4 (MUCHA)	13 , 10 , 15 , 14	4	13		

$$SC_E = 10 \cdot (8 - 10)^2 + 2 \cdot (10 - 10)^2 + 4 \cdot (12 - 10)^2 + 4 \cdot (13 - 10)^2 = 112$$

** Ejercicio 15.6:

- Complete los resultados que faltan en la tabla de datos arriba.
- ¿Qué relación existe en la *muestra* entre las variables estudiadas?
- Complete los resultados de la siguiente tabla para hacer el Anova.

	SC	MC	
ENTRE			F =
DENTRO			P =

- ¿Cuál es la hipótesis nula planteada? No diga una frase genérica, sino en los términos del enunciado.
- ¿Cómo se interpreta el valor P obtenido?
- ¿Hay relación, en la *población*, entre el nivel de agresividad y el rendimiento?
- Observe las 4 varianzas muestrales. Al hacer el test de homogeneidad de Varianzas se obtiene P = 0.92.
- ¿Cuál es la Hipótesis Nula planteada en el anterior test?
- ¿Cómo se interpreta el valor P obtenido. ¿Qué ocurre 92 veces de cada 100?
- ¿Qué se concluye acerca de las varianzas poblacionales?

+++ 15.11. Comparaciones post-anova

La hipótesis nula planteada en el Anova es que varias medias poblacionales son iguales. Un valor P “grande” indica que los datos son compatibles con la H_0 de igualdad de medias poblacionales, no hay evidencia a favor de que haya diferencias entre ellas. Por el contrario, un valor P muy pequeño invita a rechazar la H_0 y pensar que no son iguales las medias de todas las poblaciones muestreadas, pero no especifica entre qué poblaciones parece haber diferencias y cuáles podrían ser iguales. Si, por ejemplo, se comparan 4 medias, rechazar la H_0 puede implicar que hay tres medias iguales entre sí y la otra es distinta, que hay dos semejantes y las otras dos también semejantes entre sí y muy diferentes de las dos primeras, o que cada una es diferente de las otras tres.

Es pues necesario, evaluar entre qué poblaciones parece haber diferencias y cuáles podrían ser iguales. Es lo que se llama análisis Post-Anova, etapa obligada tras hacer el Anova general. Lo primero a tener en cuenta es la diferencia entre las llamadas “comparaciones a priori” y “comparaciones a posteriori”:

- Las comparaciones a priori son planeadas antes de ver los resultados, basándose en la lógica del problema estudiado y en resultados previos.
- Las comparaciones a posteriori surgen a la vista de los resultados y conlleven el problema de las *comparaciones múltiples* que veremos enseguida.

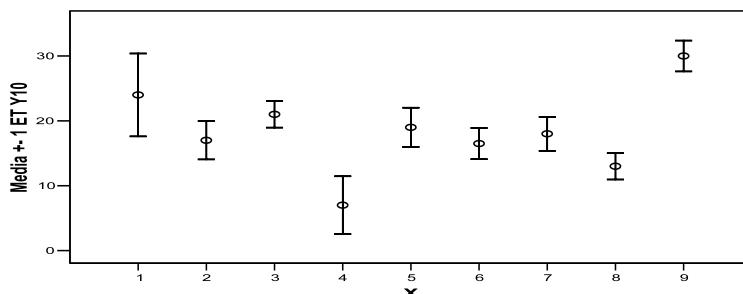
Por ejemplo, si estamos comparando el comportamiento de cierta variable en distintos países europeos, podemos planificar de antemano comparar los mediterráneos contra los bálticos, o los ricos contra los pobres, etcétera. Son comparaciones a priori. Otra opción es comparar cada país contra cada uno de los otros y ver si algunas de esas diferencias son llamativamente grandes.

+++ 15.12. Comparaciones a priori: dos medias o dos grupos

- Si nuestro interés se centra en comparar *dos medias* determinadas se plantea la H_0 que dice que son iguales en población y el valor P del test es la prob de que las medias muestrales correspondientes sean tan distintas entre sí como las encontradas en nuestro estudio o aún más distintas, si las poblacionales son iguales. La mayoría de los programas estadísticos ofrecen esta opción bajo el epígrafe “Contrastes” y piden que se identifiquen las dos medias a comparar introduciendo una lista de ceros y unos. Por ejemplo, en un estudio que compara el nivel de conocimiento de los estudiantes de bachiller en 9 países, A, B, ... I, analizando una muestra de $N = 4$ individuos en cada país, se obtienen estos resultados y el Anova da $P = 0.006$.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
41	11	25	10	28	11	22	16	43	
10	21	18	12	17	21	13	9	26	
22	13	17	2	15	20	14	10	23	
23	23	24	4	16	14	23	17	28	
Medias	24	17	21	7	19	16	18	13	30
S^2	163.3	34.7	16.7	22.7	36.7	23.0	27.3	16.7	79.3

La media y error estándar de cada grupo se muestran en la gráfica que sigue:



Si, por ejemplo, teníamos planeado inicialmente comparar el país A contra el D, que en nuestra tabla son el 1º y el 4º, se lo indicamos al programa introduciendo esta lista de nueve números, uno por cada grupo del experimento: **1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0**, que suelen llamarse “coeficientes” del contraste y donde aparece 1 en los países a comparar (con distinto signo) y 0 en el resto. La H_0 planteada en este test es que el nivel de conocimientos medio del país A es igual al del D. Un valor de P pequeño indica incompatibilidad de los datos muestrales con dicha hipótesis y sugiere que ambos países no presentan igual nivel medio de conocimientos.

Y si queremos comparar el país H contra el I, que en nuestra tabla son el 8º y el 9º, introducimos estos coeficientes: **0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1**.

- También puede compararse la media de un *grupo de países* frente a la media de otro país u otro grupo de países, cuando hay razones que justifican esas agrupaciones y se había pensado hacerlo antes de ver los datos. Si, por ejemplo, en los países A e I (1º y 9º) a los chicos se les dan “deberes para casa” y en F y G (6º y 7º) toda la tarea se realiza en el colegio, se comparan esos dos grupos tecleando estos coeficientes: **1, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 1** (el mismo signo en los países del mismo grupo). El resto de los países podrían no entrar en esta comparación porque o bien no se conoce en ellos esa circunstancia u ocupan respecto a ella posiciones intermedias que no interesa contemplar en un primer análisis para evitar resultados intermedios que dificulten la detección de efectos.

Los números deben tener signo distinto en los dos grupos y no importa a cuál de ellos le corresponda el negativo. El programa informático realiza los mismos cálculos si se le introduce, para el ejemplo anterior, esta lista: **-1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, -1**

Y si en A, B y C (1º, 2º y 3º) los alumnos asisten a clase mañana y tarde mientras que en E, F y G (5º, 6º y 7º) van solamente por la mañana, se compara la media del primer grupo contra la del segundo introduciendo esta lista: **1, 1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0**

También se pueden comparar grupos con distinto número de países. En ese caso los coeficientes, además de llevar signo contrario en los dos grupos, deben sumar igual cantidad en ambos. Si, por ejemplo, en el país 1º la enseñanza es bilingüe y en los 7º, 8º y 9º es monolingüe, pueden compararse esas situaciones con los coeficientes:

$$\mathbf{-3, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1}$$

Y si en los países 7º y 9º hay actividades deportivas obligatorias, mientras que en 2º, 4º y 8º no las hay, pueden compararse esas situaciones con los coeficientes: **0, 2, 0, 2, 0, 0, -3, 2, -3**. Un valor de P del test grande indicaría compatibilidad de los datos obtenidos con la hipótesis de que las actividades deportivas obligatorias no modifican el nivel medio de conocimientos, mientras que un valor de P pequeño indicaría evidencia en contra de esa hipótesis.

La suma de los coeficientes de un grupo tiene que ser igual a la suma de los coeficientes del otro, pero con distinto signo.

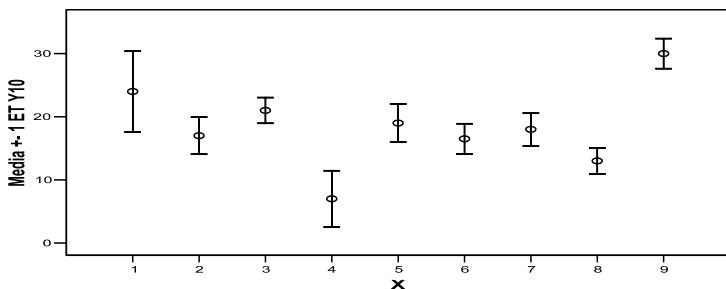
Para no caer en el problema de las comparaciones múltiples que exponemos más adelante, se suele aceptar que el número de comparaciones a priori no supere al de tratamientos menos uno.

+++ 15.13. Comparaciones a priori de Tendencia Lineal

Estos tests tienen por objeto detectar el crecimiento o decrecimiento progresivo de la variable respuesta (rendimiento académico, en nuestro ejemplo) a medida que aumenta cierto aspecto de los grupos, en nuestro ejemplo países, que entran en la comparación. La H_0 planteada es que no hay tal variación, es decir, que las medias poblacionales no crecen ni decrecen regularmente cuando se ordenan los grupos según ese carácter.

Si en nuestros datos los países están ordenados por su tamaño, de modo que A, el 1º, es el de menor extensión e I, el 9º, el más extenso, la gráfica que representa la media y el error estándar del nivel de conocimientos es

Países ordenados por tamaño

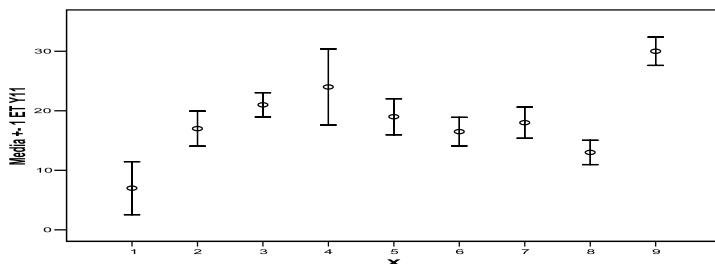


La observación de las medias y de la gráfica indica que no parece haber especial relación entre el nivel de conocimientos y la superficie del país. El valor P del test de Tendencia Lineal resulta ser $P = 0.56$. Es decir, si realmente las medias poblacionales no crecen ni decrecen regularmente al ordenar los países de menor a mayor superficie, en 56 de cada cien veces que se repitiera este estudio, las medias muestrales presentaríaían por azar una ordenación de crecimiento o decrecimiento tan acusada como la de nuestro estudio o aún más acusada. El valor $P = 0.56$ dice que estos datos no constituyen evidencia contra la Hipótesis Nula de no tendencia lineal en la población.

Podemos, a continuación, reordenar los países por su nivel económico. La gráfica siguiente presenta las medias muestrales obtenidas:

Países ordenados por nivel económico

	D	B	C	A	E	F	G	H	I
Medias	7	17	21	24	19	16	18	13	30

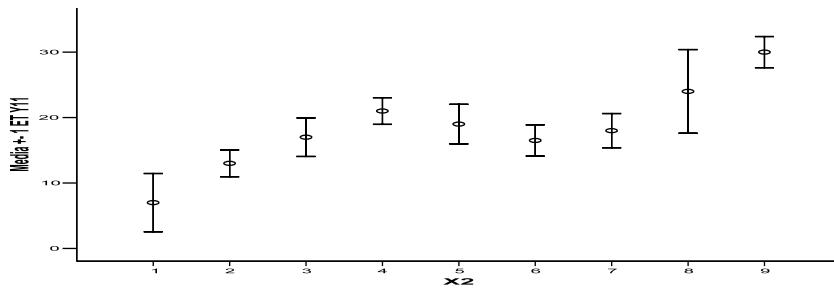


Vemos que D es el más pobre e I el más rico. El ANOVA general da el mismo valor de antes, $P = 0.006$, porque las medias son las mismas, pero en esta reordenación las medias presentan cierta tendencia a crecer a medida que nos desplazamos a la derecha, es decir, a países con más nivel económico. El test de Tendencia Lineal ahora da $P = 0.018$. Si realmente las medias poblacionales no crecen ni decrecen regularmente al ordenar los países de menor a mayor nivel económico, en 18 de cada mil veces que se repitiera este estudio, las medias muestrales presentarían por azar una tendencia creciente tan acusada como la de nuestro estudio o aún más acusada. Como no es fácil que esa tendencia creciente se presente en la muestra solo por azar, consideramos el resultado como una notable evidencia contra la H_0 y a favor de que el rendimiento académico tiende a ser mayor en los países con mayor nivel económico.

Podemos a continuación reordenar los países por su nivel científico. La gráfica siguiente muestra las medias ordenadas de este modo.

Países ordenados por nivel científico

	D	H	B	C	E	F	G	A	I
Medias	7	13	17	21	19	16	18	24	30



Tendencia lineal: $P = 0.00008$

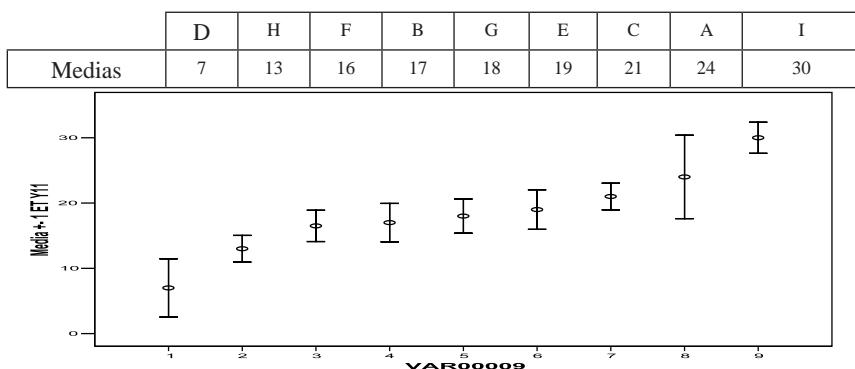
Vemos que D, que era el más pobre, es también el de menor nivel científico. Pero el segundo país más pobre era B y en nivel científico el segundo país es H. También ahora el ANOVA da el mismo valor de antes, $P = 0.006$, porque las medias siguen siendo las mismas, pero en esta reordenación las medias presentan una marcada tendencia a crecer a medida que nos desplazamos a la derecha, es decir, hacia países con mayor nivel científico. El test de Tendencia Lineal ahora da $P = 0.00008$. Si no hay tendencia en las medias poblacionales, solamente en 8 de cada cien mil veces que se repitiera este estudio, las medias muestrales presentarían por azar una ordenación de crecimiento progresivo tan acusada como la de nuestro estudio o aún más acusada. Como es muy difícil que esa tendencia creciente se presente en la muestra solo por azar, el resultado es una fuerte evidencia contra H_0 y a favor de que el rendimiento académico tiende a ser mayor en los países con mayor nivel científico.

Aquí hemos considerado tres posibles criterios de ordenación para mostrar cómo el valor P del test de Tendencia Lineal es menor cuanto más acusado es el crecimiento progresivo del rendimiento académico en la muestra. En las situaciones reales se entiende que el investigador tiene en mente cierto criterio de ordenación en base a

la estructura de los datos y hará el test de Tendencia Lineal para ese criterio. Si se probara reiteradamente ese test con muchos criterios hasta encontrar uno que diera valor P pequeño, dicho valor debe ser interpretado con precaución, pues aunque no haya tendencia lineal en las medias poblacionales, la repetición de muchos tests sobre los mismos datos da un valor $P \leq 0.05$ cada veinte comparaciones, un valor $P \leq 0.01$ cada cien comparaciones y un valor $P \leq 0.001$ cada mil comparaciones.

De hecho, buscando con insistencia siempre se podrá encontrar un criterio de ordenación con el que las medias muestrales crecen o decrecen constantemente, sin excepción, y el valor P del test de Tendencia Lineal es muy pequeño. En nuestro ejemplo se encontró que si se ordenan los países de acuerdo con el número de medallas de bronce obtenidas en la última olimpiada, el nivel académico crece sin excepción.

Países ordenados por número de medallas de bronce



Test de Tendencia lineal: $P = 0.00002$

Pero esa relación no tiene credibilidad alguna por la naturaleza de las variables implicadas y por el modo “a posteriori” en que fue encontrada.

Este problema de las *comparaciones múltiples* puede aparecer en cualquier tipo de análisis estadístico y se comenta más detenidamente a continuación.

+++ 15.14. El problema de las comparaciones múltiples

Como en alguna ocasión anterior, comenzamos con una caricatura llamativa para enfatizar una idea importante.

Método fácil y seguro para obtener el Nobel de Medicina sin falsificar datos (solo hay que ocultar algunos)

Se trata de estudiar el posible efecto beneficioso del producto “A” (es solo agua mineral, pero la comunidad científica no lo sabe) sobre una enfermedad importante. Se compararán las medias muestrales de una variable que refleje mejoría en N pacientes que han recibido “A” frente a otros N que no lo han recibido. Puesto que en realidad “A” no hace nada, al realizar este estudio una vez encontraremos que en el grupo tratado la media es ligeramente mayor o menor que en el control y un

valor P grande que no invita a pensar que el tratamiento es efectivo. Pero por las oscilaciones del muestreo, si repetimos muchas veces el estudio —lo que equivale a hacer Muestreo Aleatorio— en 5 de cada 100 estudios saldrá $P \leq 0.05$, en 1 de cada 100 encontramos $P \leq 0.001$. Por tanto, solo hay que repetir el estudio hasta que aparezca $P \leq 0.01$ y publicar ese resultado sin mencionar los demás.

Dado el número de repeticiones que se hagan, es fácil calcular la prob de que aparezca $P \leq 0.01$ u otro valor P. Por ejemplo, si se hacen 100 estudios esperamos que haya uno con $P \leq 0.01$ y la prob de que aparezca $P \leq 0.01$ en al menos uno de ellos es **0.63**. La siguiente tabla indica la prob de obtener ciertos valores P del test según la cantidad de repeticiones. Lo importante es entender lo que dice ese resultado. No es esencial saber cómo se llega a él. Pero para el lector interesado se explica en el último apartado del apéndice A.

Num. de repeticiones →	20	50	100	200
$P \leq 0.05$	0.64	0.92	0.994	0.9999
$P \leq 0.01$	0.18	0.39	0.63	0.87
$P \leq 0.001$	0.02	0.05	0.09	0.18

Es decir, si hacemos 200 estudios, la prob de que aparezca al menos uno con $P \leq 0.05$ es 0.999 y la prob de que aparezca al menos uno con $P \leq 0.01$ es 0.87. Este último valor quiere decir que si millones de grupos hacen el mismo proceso (repetir el estudio 200 veces), 87 de cada 100 van a tener al menos uno con $P \leq 0.01$. Por ello es muy fácil que en nuestra serie de 200 repeticiones aparezca al menos una con $P \leq 0.01$. Si se publica ese estudio sin mencionar los demás, la comunidad científica lo considerará un notable indicio a favor de que el “fármaco” es efectivo para esa enfermedad.

+++ 15.15. Sesgo de publicación

Parte de la caricatura expuesta en el apartado anterior está ocurriendo en la realidad, no porque algunos investigadores quieran engañar a la comunidad científica, sino por circunstancias que es muy difícil de evitar. Cuando se sospecha que un producto puede hacer cierto efecto muypreciado son muchos los investigadores que llevan a cabo estudios para comprobarlo. Si se trata de un producto que no hace realmente el efecto que se le atribuyó inicialmente, la mayoría de los investigadores encuentran valor P grande y *muchos de ellos, desalentados por ese resultado “negativo”, no lo publican*. Es una actitud lógica que no conlleva intento de engaño. Pero si son muchos los que investigan sobre ese producto, alguno encuentra por azar un valor P pequeño y lo publica. Si la comunidad científica solo recibe noticia de ese estudio, lo considerará fuerte indicio de que el producto hace el efecto buscado. Si se supiera que ese resultado con valor P pequeño es uno entre muchos con valores P mayores, la comunidad científica lo interpretaría como fruto de las muchas repeticiones del estudio y no como indicio de que hay ese efecto en la población.

Para evitar ese “sesgo de publicación” la única solución es publicar tanto los resultados negativos como los positivos. Las políticas científicas actuales van en ese sentido. Por ejemplo, la autorización de realización de un Ensayo Clínico implica el compromiso de publicar el resultado, cualquiera que sea.

La cuestión de las comparaciones múltiples está tan universalmente presente que merece la pena ilustrarla con un ejemplo más. Sospechamos que una moneda no está bien balanceada, en el sentido de que si se tira muchas veces la FR de caras es mayor de 50%, $\pi_{CARA} > 0.50$. Hacemos una “investigación” lanzándola $N = 10$ veces y resulta que sale cara en todas ellas. Se plantea la H_0 : $\pi_{CARA} = 0.50$. El valor P del test es $P = 0.001$, es decir, si la serie de 10 lanzamientos se repite millones de veces con una moneda correcta, solo una de cada mil series tendrá cara en las 10 tiradas. Pensamos que la moneda es defectuosa.

Pero si hacemos muchas series de 10 tiradas con un moneda *buenas*, acabaremos encontrando una serie con cara en las 10 tiradas y si solo publicamos ese resultado con su valor $P = 0.001$, la comunidad científica lo considerará un claro indicio a favor de que la moneda es desequilibrada. Con cualquier moneda buena acabamos consiguiendo que salga cara en las 10 tiradas. Suponga que empieza a correr la falsa sospecha de que las monedas de un Euro están mal equilibradas, de modo que en ellas la prob de cara es mayor de 50%. Puesto que eso es falso, si cada español hace la prueba de lanzar una moneda 10 veces, la mayoría encontrará 5 caras o un valor próximo a 5, pero uno de cada mil encontrará que sale cara en las 10 tiradas. Si los que tuvieron en torno a 5 caras no lo comentan y solamente hablan de su resultado los que tuvieron 10 caras, la conclusión general será que la sospecha era cierta.

La diferencia está en que obtener 10 caras en una única serie realizada, es un claro indicio de que la moneda es sesgada, porque con una moneda buena eso ocurre muy raramente. Pero obtener 10 caras en una serie no sugiere que la moneda es mala si ello ocurre tras hacer cientos de series, porque con una moneda buena ello ocurre habitualmente.

+++ 15.16. Comparaciones a posteriori tras el ANOVA

Si un ANOVA implica la comparaciones de **K** medias, el número de parejas posibles es $K(K-1) / 2$. En el ejemplo con $K = 9$ grupos hay $9 \cdot 8 / 2 = 36$ parejas posibles. Si se comparan las dos medias de cada pareja con el típico test de t de Student, tenemos el problema de las *comparaciones múltiples*. Al no ser independientes esas comparaciones no es fácil calcular la prob de encontrar cierto valor P en alguna de ellas por azar. Pero hay métodos que tienen en cuenta esa repetición de cálculos y para la diferencia de dos medias determinadas dan el valor P adecuado, que es la prob de encontrar por azar una diferencia tan grande como esa o aún mayor, teniendo en cuenta el número de comparaciones hechas.

Comentaremos los métodos más usados con nuestro ejemplo de 9 países.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	2	3	4	5	6	7	8	9
41	11	25	10	28	11	22	16	43
10	21	18	12	17	21	13	9	26
22	13	17	2	15	20	14	10	23
23	23	24	4	16	14	23	17	28
M	24	17	21	7	19	16	18	13
S ²	163.3	34.7	16.7	22.7	36.7	23.0	27.3	16.7
								79.3

Anova: P = **0.006**

Nos fijaremos en la comparación “8” vs. “9”, cuya diferencia de medias muestrales es **17** (30 -13). La tabla siguiente indica los valores P obtenidos con el test t de Student típico para comparar dos grupos (ignorando que hay otros implicados), con la comparación de país H frente al I si hubiera sido pensada antes de ver los datos (contraste a priori) y con los distintos métodos que implican comparaciones múltiples (Dunnet, Tukey y Scheffé).

t Student	P = 0.013	(MC _D = 48) gl = 6
A priori		
Contrastes	P = 0.002	(MC _D = 46.7) gl = 27
A posteriori		
Dunnet	P = 0.010	
Tukey	P = 0.035	
Scheffé	P = 0.188	

- Si se pide esa comparación (país H frente a país I) como contraste a priori no se penaliza porque haya otros grupos, ya que se entiende que ha sido pensada inicialmente (y no por ser la mayor diferencia encontrada en las muestras). Las comparaciones a posteriori sí llevan cierta penalización. Con el test t de Student se utiliza como estimador de la varianza poblacional la media de las varianzas de las muestras implicadas en la comparación (en nuestro ejemplo, la media de las varianzas de los países H e I es 48), mientras que en las comparaciones a priori tras el Anova se utiliza como estimador la media de las varianzas de las 9 muestras del estudio. Esta estimación es MC_D = 46.7, en este ejemplo semejante al 48. Pero al estar implicados todos los grupos, esa estimación de la varianza poblacional es más fiable, y da lugar a menores valores P. Es decir, el valor P = **0.002** obtenido con el test a priori es menor que P = **0.013** obtenido con t de Student porque la MC_D de todas las muestras está construida sobre más valores que cuando se usan solamente los grupos “8” y “9”.
- El método de Dunnet está pensado para cuando se comparan con un grupo de referencia todos los demás, por ejemplo, cuando un grupo es el control (sin ningún tratamiento, por ejemplo el “9”) y los restantes corresponden a los distintos tratamientos que se están investigando. Si hay K grupos el método debe tener en cuenta que se hacen K-1 comparaciones, en este ejemplo se compara cada una de las 8 primeras medias con la 9^a. El valor P al comparar “8” contra “9” es ahora P = **0.010**. Es decir, si es cierta la H₀ de igualdad de las medias poblacionales “8” y “9” y se repite muchas veces este estudio y en cada repetición se calculan las

diferencias de cada media con la última, 10 de cada 1 000 de esas diferencias son iguales o mayores de 17 (la diferencia de las medias muestrales de los países H e I). Aparecen más diferencias de tamaño 17 o mayor cuando en cada experimento se miran 8 diferencias que cuando se mira una.

3. El método de Tukey está pensado para cuando se inspeccionan las diferencias entre dos medias para todas las parejas posibles, es decir, $K(K-1) / 2$ comparaciones, que en nuestro ejemplo con $K = 9$ son $9 \cdot 8 / 2 = 36$ parejas posibles. Realizando el test de Tukey para la comparación del rendimiento medio de los países H e I, se obtiene valor $P = 0.035$ que indica que si es cierta la H_0 de igual rendimiento medio de ambos países y se repite muchas veces este estudio y en cada repetición se calculan las 36 diferencias de medias, 35 de cada 1 000 de esas diferencias son iguales o mayores de 17. Aparecen más diferencias de tamaño 17 o mayor cuando en cada experimento se miran 36 diferencias que cuando se mira una o cuando se miran 8.
4. El método de Scheffé está pensado para cuando se inspeccionan todas las diferencias entre medias de muestras y de grupos de muestras. De ese modo el número de posibles diferencias se eleva muchísimo. Por ejemplo, con $K = 4$ el número de parejas de medias es $4 \cdot 3 / 2 = 6$, pero hay hasta **28** diferencias entre medias de grupos. Si se hace el test de Scheffé con la H_0 de que el rendimiento medio es igual en los países H e I, se obtiene valor $P = 0.188$ que indica que si es cierta la H_0 y se repite muchas veces este estudio y en cada repetición se calculan las innumerables diferencias entre medias de grupos, 188 de cada 1 000 de esas diferencias son iguales o mayores de 17. Como es lógico, aparecen más diferencias de tamaño 17 o mayor cuando en cada experimento se miran cientos de diferencias que cuando se mira una o cuando se miran 8 o cuando se miran 36.

Los cálculos del valor P correspondiente a cada método los hacen los ordenadores, pero el investigador tiene que saber seleccionar el test que en cada caso se ajusta a su procedimiento, tiene que saber interpretar esas cantidades y valorar el grado de evidencia contra la H_0 planteada.

Resumiendo, el test para comparar dos medias puede hacer con diferentes métodos:

- t de Student, si no hay otros grupos que aporten más información sobre la varianza de esa variable en las poblaciones implicadas.
- Contraste a priori tras el ANOVA, si realmente está pensada de antemano, en base a la naturaleza del experimento y no a la vista de los datos obtenidos.
- Test de Dunnet, si es una de las posibles comparaciones de cada grupo frente a uno de referencia, por ejemplo, comparación de cada tratamiento frente a uno control.
- Test de Tukey, si es una comparación entre todas las posibles parejas de medias.
- Test de Scheffé, si es una comparación entre todas las posibles comparaciones entre medias de muestras y medias de grupos de muestras.

NO OLVIDE RECORDAR - 15

1. El Análisis de Varianza, “Anova”, plantea como H_0 que cierta variable tiene la misma media en tres o más poblaciones.
2. El valor P de este test es la probabilidad de encontrar muestras con medias tan distintas entre sí como las de nuestro estudio o más distintas, si es cierta la H_0 .
3. Con valores muy pequeños de P rechazamos H_0 y creemos que no son iguales entre sí todas las medias de las poblaciones implicadas, pero sin especificar entre cuales de ellas habría diferencias. El “Análisis Postanova” tiene por objeto intentar descubrir entre qué medias hay diferencias y entre cuáles no.
4. En teoría el Anova es válido solamente si hay Homogeneidad de Varianzas y Normalidad, pero debe estar claro que ninguna variable real se ajusta **exactamente** a estos modelos matemáticos. Si la variable se **aproxima estrechamente** a estos modelos el Anova es válido, pero el investigador no puede tener certeza de que se da esa estrecha aproximación (solamente podría tener esa certeza con muestras muy grandes, muy inusuales en la práctica).
5. Hay tests estadísticos que pueden informar de que una variable **no** se ajusta a esos modelos. Pero, en la mayoría de las investigaciones, tienen poca potencia estadística, es decir, aunque la variable se aleje sensiblemente de esos modelos, los tests no lo detectan.
6. En la práctica se aplica casi siempre ANOVA, pues el valor P que nos da no se ve afectado seriamente por las desviaciones de las variables reales respecto al modelo matemático para el que fue desarrollado (Normal y con varianzas iguales).
7. La Media Cuadrada Entre grupos, MC_E , refleja la divergencia entre las medias muestrales. Es cero si son idénticas y es mayor cuanto más se diferencian entre sí.
8. La Media Cuadrada Dentro de grupos, MC_D , refleja la divergencia entre los valores dentro de cada grupo. Es la media de las varianzas de los grupos.
9. Si las medias poblacionales son iguales entre sí, MC_E y MC_D son estimadores de un mismo parámetro: la varianza de esa variable en esas poblaciones, por lo que su cociente, $F = MC_E / MC_D$, toma valores en torno a 1.
10. El fundamento lógico de todos los Anova es que en el Muestreo Aleatorio la varianza entre las medias es igual a la varianza entre los individuos dividida por N, el tamaño de las muestras.

11. El “Análisis Post Anova” tiene por objeto intentar descubrir entre qué medias hay diferencia y entre cuáles no, tras haber realizado Anova.
12. Si siendo cierta la H_0 se repite varias veces el mismo tipo de estudio, aumenta la prob de encontrar valores de P pequeños por azar y por ello rechazar erróneamente la H_0 .
13. Las comparaciones a priori son planeadas antes de ver los resultados, basándose en la lógica del problema estudiado y en resultados previos. Pueden ser entre medias de grupos, pero también puede compararse la media de un conjunto de varios **grupos** frente a la media de otro grupo o de otro conjunto de varios grupos. Los programas estadísticos ofrecen esta opción como “contrastes”.
14. El test de Tendencia Lineal tiene por objeto detectar el crecimiento o decrecimiento progresivo de las medias a medida que aumenta cierto aspecto de los grupos.
15. Las comparaciones a posteriori surgen a la vista de los resultados y conllevan el problema de las comparaciones múltiples.
16. Las *comparaciones múltiples* aumentan la prob de que aparezca un valor P pequeño aunque sea cierta H_0 . El *sesgo de publicación* ocurre cuando sobre un tema se publican solamente los resultados “significativos” y hay otros muchos “no significativos”.
17. El método de **Dunnet** se aplica cuando se compara un grupo de referencia con todos los demás. Si hay K grupos se hacen K-1 comparaciones.
18. El método de **Tukey** se aplica cuando se comparan las diferencias entre todas las parejas posibles, es decir, $K(K-1)/2$ parejas.
19. El método de **Scheffé** se aplica cuando se comparan todas las diferencias posibles entre medias de dos muestras y entre medias de grupos de muestras.
20. Si siendo cierta la H_0 se repite millones de veces el mismo tipo de estudio, encontramos, $P \leq 0.05$, en 5 de cada 100 repeticiones.
21. Si siendo cierta la H_0 se repite 100 veces el mismo tipo de estudio, ESPERAMOS encontrar, por definición, $P \leq 0.05$, en 5 de ellas, pero en esa serie concreta de 100 puede aparecer $P \leq 0.05$ más o menos de 5 veces. La prob de que aparezca $P \leq 0.05$ al menos una vez es **0.994**. Es decir, encontraremos $P \leq 0.05$ en 994 series de cada 1 000.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 15

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. El Análisis de Varianza (Anova), como su nombre indica, es una técnica para comparar varianzas de tres o más colectivos.
2. El Anova plantea como H_0 que la variable estudiada tiene la misma varianza en varias poblaciones.
3. El Anova plantea como H_0 que la variable estudiada tiene la misma media en varias poblaciones.
4. Un valor P del test Anova muy pequeño invita a rechazar la H_0 y a aceptar que cada una de las medias poblacionales implicadas es distinta de cualquier otra.
5. Un valor P del test Anova muy pequeño invita a rechazar la H_0 y a aceptar que al menos una de las medias poblacionales implicadas es distinta de alguna otra.
6. El valor P de este test es la probabilidad de encontrar muestras con medias tan distintas entre sí como las de nuestro estudio o más distintas, si en la población las medias son tan distintas entre sí como en la muestra.
7. El valor P es la probabilidad de encontrar muestras con medias iguales entre sí, si en la población las medias son tan distintas como en la muestra.
8. El valor P es la probabilidad de encontrar muestras con medias iguales entre sí, si en la población las medias son iguales entre sí.
9. El valor P es la probabilidad de encontrar muestras con medias iguales entre sí, si en la población son iguales a las medias muestrales.
10. El valor P es la prob de encontrar muestras con medias tan distintas entre sí como las de nuestro estudio o más distintas, si en población las medias son iguales entre sí.
11. El valor P de este test es la probabilidad de encontrar medias muestrales con diferencias significativas, si en la población las medias son iguales entre sí.
12. El valor P de este test es la prob de encontrar medias muestrales con diferencias significativas, si en población las medias tienen también diferencias significativas.
13. En el caso particular de comparación de dos medias no se puede aplicar Anova.
14. En el caso particular de comparación de dos medias si se hace Anova se obtiene el mismo valor P que con el test “t de Student” para dos muestras.
15. En teoría, el Anova es válido solamente si hay *Homogeneidad de Varianzas* y *Normalidad*, pero en la práctica se aplica casi siempre el ANOVA, pues el valor P que nos da no se ve afectado seriamente por las desviaciones de las variables reales respecto al modelo matemático para el que fue desarrollado, *Homogeneidad de Varianzas* y *Normalidad*.
16. Ninguna variable real se ajusta **exactamente** a estos modelos matemáticos.

17. Si la variable se *aproxima estrechamente* a estos modelos el Anova es válido.
18. Hay tests que permiten comprobar que la variable analizada se aproxima estrechamente al modelo de Normalidad y de Homogeneidad de Varianzas.
19. No hay tests que permiten al investigador comprobar que la variable que está analizando se aproxima estrechamente al modelo de Normalidad y de Homogeneidad de Varianzas.
20. Hay tests estadísticos que pueden informar de que una variable **no** se ajusta a esos modelos y tienen gran potencia estadística, es decir, si la variable se aleja de esos modelos, los tests lo detectan claramente.
21. Los tests que pueden informar de que una variable **no** se ajusta a esos modelos tienen poca potencia estadística, es decir, aunque la variable se aleje sensiblemente de esos modelos, los tests no lo detectan.

El fundamento lógico del Anova

22. En el Muestreo Aleatorio la varianza entre las medias muestrales es *igual* a la varianza entre los individuos.
23. En el Muestreo Aleatorio la varianza entre las medias muestrales es igual a la varianza entre los individuos *multiplicada* por N, el tamaño de las muestras.
24. El fundamento lógico de todos los Anova es que en el Muestreo Aleatorio la varianza entre las medias es igual a la varianza entre los individuos *dividida* por N, el tamaño de las muestras.
25. La Media Cuadrada Entre grupos, MC_E , refleja la divergencia entre las medias muestrales. Es cero si son idénticas mayor cuanto más se diferencian entre sí.
26. La Media Cuadrada Entre grupos, MC_E , es la cuasivarianza entre las medias muestrales multiplicada por N, el tamaño de las muestras.
27. La Media Cuadrada Dentro de grupos, MC_D , refleja la divergencia entre los valores dentro de cada grupo. Es la media de las varianzas de los grupos.
28. Si las medias poblacionales son iguales entre sí, MC_E estima la varianza de esa variable en esas poblaciones.
29. La MC_D estima la varianza de esa variable en esas poblaciones, solamente si las medias poblacionales son iguales entre sí.
30. La MC_D estima la varianza de esa variable en esas poblaciones, aunque las medias poblacionales no sean iguales entre sí.
31. Si las medias poblacionales son iguales entre sí, MC_E y MC_D son estimadores de un mismo parámetro: la varianza de esa variable en esas poblaciones, por lo que su cociente, $F = MC_E / MC_D$, toma valores en torno a 1.

Comparaciones postanova

32. Si en el Análisis de Varianza (Anova) encontramos un valor P muy pequeño concluimos que cada una de las medias poblacionales es distinta de todas las demás.
33. Si en el Análisis de Varianza encontramos valor P muy pequeño concluimos que al menos una de las medias poblacionales es distinta de alguna otra.

34. Si en el Análisis de Varianza encontramos un valor P muy pequeño concluimos que al menos una de las medias poblacionales es distinta de alguna otra y para saber entre qué medias poblacionales hay diferencias hacemos el llamado Análisis post-Anova.
35. El análisis post-Anova puede hacerse aunque en el Análisis de Varianza encontramos un valor P no muy pequeño.
36. Las comparaciones a priori son planeadas antes de ver los resultados, basándose en la lógica del problema estudiado y en resultados previos.
37. Las comparaciones a posteriori surgen a la vista de los resultados y conllevan el problema de las comparaciones múltiples.
38. Si siendo cierta la H_0 se repite muchas veces un estudio, aumenta la prob de encontrar valores P pequeños que lleven a rechazar, erróneamente, la H_0 .
39. Para comparar a priori la media de una o más muestras frente a la media de otra muestra o grupo de muestras se le dan al programa estadístico los coeficientes del contraste.
40. El número de coeficientes es igual al número de medias del Anova. A las medias que no entran en juego en un contraste les corresponde coeficiente cero.
41. Los coeficientes del contraste tienen signo positivo para las medias de un conjunto y negativo para las medias del otro conjunto y deben sumar cero.
42. Para ver si las medias crecen o decrecen a medida que cierta característica de los grupos toma valores mayores, se hace el test de Tendencia Lineal de medias.
43. En el test de Tendencia Lineal de medias la H_0 es que a medida que cierta característica de los grupos toma valores mayores, las medias de la variable respuesta van *creciendo*.
44. En el test de Tendencia Lineal de medias la H_0 es que a medida que cierta característica de los grupos toma valores mayores, las medias de la variable respuesta *decrecen*.
45. En el test de Tendencia Lineal de medias la H_0 es que a medida que cierta característica de los grupos toma valores mayores, las medias de la variable respuesta no varían.
46. Si en el Anova entran en juego K grupos y procedemos a comparar cada media con una que tomemos como referencia, se hacen $K - 1$ comparaciones y el test de Tukey tiene en cuenta ese número de comparaciones múltiples.
47. Si en el Anova entran en juego K grupos y procedemos a comparar cada media con una que tomamos como referencia, se hacen $K - 1$ comparaciones y el test de Dunnet tiene en cuenta ese número de comparaciones múltiples.
48. Si en el Anova entran en juego K grupos y procedemos a comparar cada media con todas las demás, se hacen $K \cdot (K-1) / 2$ comparaciones y el test de Sheffé tiene en cuenta ese número de comparaciones múltiples.

49. Si en el Anova entran en juego K grupos y procedemos a comparar cada media con todas las demás, se hacen $K \cdot (K-1) / 2$ comparaciones y el test de Tukey tiene en cuenta ese número de comparaciones múltiples.
50. Si en el Anova entran en juego K grupos y se compara cada media de cada muestra o grupos de muestras con todas las demás, se hace un gran número de comparaciones y el test de Scheffé tiene en cuenta ese número de comparaciones múltiples.
51. Para la comparación entre dos medias determinadas el test de Dunnet tiene en cuenta que se hacen $K-1$ comparaciones y, por ello, da valor P **menor** que la comparación a priori entre esas dos medias.
52. Para la comparación entre dos medias determinadas el test de Dunnet tiene en cuenta que se hacen $K-1$ comparaciones y, por ello, da valor P **mayor** que la comparación a priori entre esas dos medias.
53. Para la comparación entre dos medias determinadas el test de Tukey tiene en cuenta que se hacen $K \cdot (K-1) / 2$ comparaciones y, por ello, da valor P **mayor** que el test de Dunnet.
54. Para la comparación entre dos medias determinadas el test de Tukey tiene en cuenta que se hacen $K \cdot (K-1) / 2$ comparaciones y, por ello, da valor P **menor** que el test de Dunnet.
55. Para la comparación entre dos medias determinadas el test de Scheffé tiene en cuenta que se hacen muchas más de $K \cdot (K-1) / 2$ comparaciones y, por ello, da valor P **menor** que el test de Tukey.
56. Para la comparación entre dos medias determinadas el test de Scheffé tiene en cuenta que se hacen muchas más de $K \cdot (K-1) / 2$ comparaciones y, por ello, da valor P **mayor** que el test de Tukey.
57. Si siendo cierta la H_0 se repite millones de veces un estudio, en 5 de cada 100 repeticiones aparece $P \leq 0.05$, en 1 de cada 100 repeticiones aparece $P \leq 0.01$ y en 1 de cada 1 000 repeticiones aparece $P \leq 0.001$.
58. Si siendo cierta la H_0 se repite 20 veces un estudio, en esa serie de 20 repeticiones *esperamos* encontrar una con $P \leq 0.05$.
59. Si siendo cierta la H_0 se repite 20 veces un estudio, en esa serie de 20 repeticiones podemos encontrar $P \leq 0.05$ en más o menos de una.
60. Si siendo cierta la H_0 se repite 20 veces un estudio, la prob de encontrar en esa serie de 20 repeticiones al menos una con $P \leq 0.05$ es $0.05 \cdot 20 = 1$.
61. Si siendo cierta la H_0 se repite 20 veces un estudio, la prob de encontrar que en esa serie de 20 repeticiones las 20 dan $P > 0.05$ es $0.95^{20} = 0.36$.

Capítulo 16

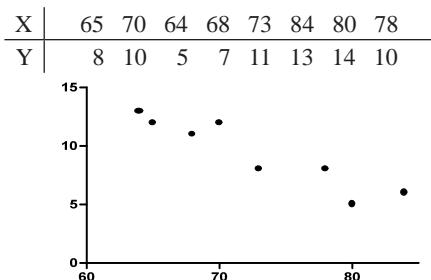
REGRESIÓN LINEAL

En el Capítulo 3 exponíamos y enfatizábamos un principio de aplicación general en el análisis de datos:

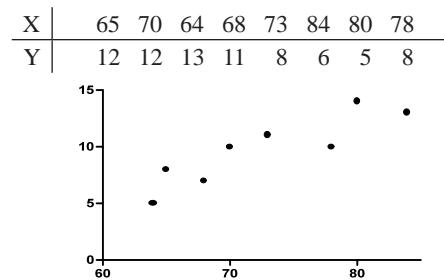
Analizar la relación entre dos variables es estudiar el comportamiento de una de las variables (dando su media o proporción) en los distintos niveles de la otra.

Si para cada individuo de un colectivo se miden dos variables cuantitativas puede hacerse una representación gráfica de **nube de puntos** que permite una apreciación visual de la relación entre ellas. Puede que valores elevados de una se acompañen de valores elevados de la otra (correlación positiva) o que valores elevados de la primera se acompañen de valores bajos de la segunda (correlación negativa) o que haya otro tipo de asociación o ausencia de ella.

En cada uno de los ejemplos que siguen se han medido dos variables, X e Y, en 8 individuos. En el primer ejemplo, el primer individuo tiene $X = 65$, e $Y = 8$, el segundo tiene $X = 70$ e $Y = 10$, etc., y se ha representado cada par de valores (X, Y) correspondiente a cada individuo por un punto.



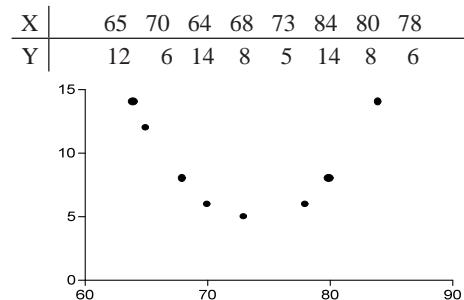
Correlación negativa,
aproximadamente lineal



Correlación positiva,
aproximadamente lineal

X	65	70	64	68	73	84	80	78
Y	12	8	7	10	12	12	7	9
	15							
	10							
	5							
	0							

No correlación



Correlación no lineal

De especial interés, por la simplicidad de cálculo y de la interpretación biológica, son las relaciones que llamamos **lineales**, de modo que a igual incremento de X corresponde igual incremento o decremento de Y, como en los dos primeros ejemplos.

16.1. Crecimiento y decrecimiento lineal

- Imaginemos una situación en la que medidas dos variables cuantitativas en 6 individuos se obtuvieran los datos de las dos primeras filas de la tabla siguiente:

X, en años	5		6		7		8		9		10
Y	17		15		13		11		9		7
Incremento de Y por año		-2		-2		-2		-2		-2	

Cuando se pasa de 5 a 6 años, el valor de Y pasa de 17 a 15 (2 unidades menos), y cuando pasamos de 6 a 7, los valores Y pasan de 15 a 13 (2 unidades menos); y lo mismo ocurre siempre que aumentamos una unidad en los valores de X. Decimos entonces que Y decrece **linealmente** con la edad a razón de **2 unidades por año**. La “pendiente de la recta” o “Coeficiente de Regresión” es -2 unidades/año.

- Y si la variable Y varía con la edad según estos valores:

X , en años	5		6		7		8		9		10
Y	17		20		25		32		41		53
Incremento de Y por año		3		5		7		9		11	

Decimos que Y crece **no linealmente** con la edad, puesto que el incremento de Y por cada año no es el mismo en los distintos años.

- Si Y varía con la edad según estos otros valores, también en 6 individuos:

X , en años	5		6		7		8		9		10
Y	17		20		23		26		29		32
Incremento de Y por año		3		3		3		3		3	

vemos que al aumentar un año, Y aumenta siempre 3 unidades. Decimos que Y crece **linealmente** con la edad a razón de **3 unidades por año**. La “pendiente de la recta” o “Coeficiente de Regresión” es 3. Los valores de Y se relacionan con

los de X por esta expresión: $Y = 2 + 3X$ que se llama ecuación de la recta y hace corresponder un valor de Y a cada valor de X. Así, para $X = 5$ es $Y = 2 + 3 \cdot 5 = 17$ y para $X = 6$ es $Y = 2 + 3 \cdot 6 = 20$, etc.

En general, decimos que los valores Y dependen linealmente de los valores X si la relación es $Y = a + bX$, donde ‘a’ y ‘b’ son dos constantes, que pueden ser mayores o menores de la unidad y positivos o negativos. Si se calcula el valor Y que corresponde a distintos valores de X con esa expresión y cada pareja de valores X e Y se representa por un punto en un sistema de ejes perpendiculares (los valores de X en el eje horizontal y los de Y en el vertical), los puntos quedan sobre una recta. La recta es ascendente hacia la derecha si es $b > 0$ y descendente hacia la derecha si es $b < 0$. La recta tiene más pendiente (más inclinada) cuanto mayor es b. La tabla que sigue da los valores de Y correspondientes a $X=0$, $X=1$, $X=2$ y $X=3$ en dos rectas.

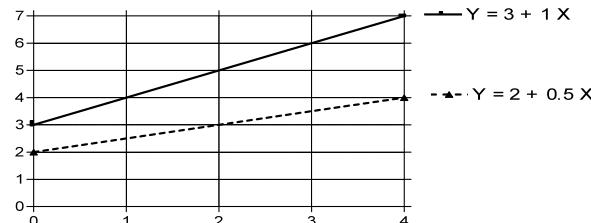
X	0	1	2	3
$Y = 3 + 1X$	3 (= a)	4	5	6
$Y = 2 + 0.5X$	2 (= a)	2.5	3	3.5

Dibujando en los ejes un punto por cada uno de los pares (X, Y), se obtiene la representación gráfica de las dos rectas: para la primera recta (0,3), (1,4), (2,5) y (3,6) y para la segunda (0,2), (1,2.5), (2,3) y (3,3.5). La recta con coeficiente de regresión 1 tiene mayor pendiente que la recta con coeficiente de regresión 0.5.

La constante “a” es el valor de Y cuando X vale 0 y se le llama ordenada en el origen. Si X = 0 es Y = a.

A la constante “b” se le llama “**Pendiente de la recta**” o “**Coeficiente de regresión**” y dice cuánto varía Y cuando X aumenta una unidad.

$$Y_{x+1} - Y_x = a + b(x+1) - a + bx = b(x+1) - bx = b$$



El valor de “b” depende de las unidades en que se expresen las dos magnitudes que se estén relacionando. Por ejemplo, si Y indica la distancia en kilómetros recorrida por un vehículo y X el tiempo en horas transcurrido, la relación $Y = 0 + 120X$, nos dice que por cada hora que pasa, el camino andado aumenta 120 km. Si el tiempo se midiera en minutos, la misma relación vendría expresada por $Y = 0 + 2X$, y si, además, la distancia se expresara en metros, la relación sería $Y = 0 + 2000X$. Es decir, $120 \text{ km / hora} = 2 \text{ km / minuto} = 2000 \text{ m / minuto}$.

La tarea del investigador que pretende averiguar cuál es la relación lineal entre dos variables de la naturaleza a partir de las medidas hechas en una muestra, se parece mucho a la tarea que se propone en el ejercicio que sigue.

**** Ejercicio 16.1:** En cada grupo de datos identifique la ecuación lineal, $Y = a + bX$, que relaciona Y con X (“a” y “b” pueden ser positivos, cero o negativos y pueden ser enteros o fraccionarios).

A	
Y	X
18	6
13.5	4.5
69	23
$Y =$	

B	
Y	X
20.2	15
12.2	7
18.7	13.5
$Y =$	

C	
Y	X
74	10
60	8
25	3
$Y =$	

D	
Y	X
20	12
36	20
0	2
6	5
$Y =$	

E	
Y	X
14	3
17	4
80	25
41	12
$Y =$	

F	
Y	X
79	10
78	20
76	40
71	90
$Y =$	

**** Ejercicio 16.2:** En el ejemplo en la tabla que sigue no podrá encontrar dos valores para a y b que permitan relacionar exactamente los valores de Y con los de X por una expresión de regresión lineal. Se trata entonces de buscar una recta, es decir, unos valores de a y de b, que produzca valores de Y *los más próximos posibles* a los de la tabla. ¿Cuál de las rectas del ejercicio anterior da valores de Y muy próximos a los de este ejercicio? Evidentemente, la recta del ejemplo E. Calcule con esa recta los valores de Y que corresponden a cada valor de X. Se les llama “valores calculados” y se les indica por Y' . Rellene con ellos la tercera columna de la tabla que sigue. Calcule las distancias de los valores de Y observados (segunda columna) a los calculados con su recta y rellene la cuarta columna. Rellene la quinta columna con las distancias al cuadrado y la suma de ellas.

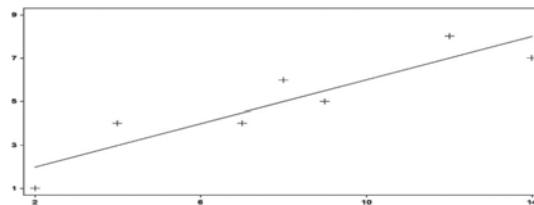
Y	X	Y' calculada	$d = Y - Y'$	$(Y - Y')^2$
14.1	3	$Y' = 3 \cdot 3 + 5 = 14$	$14.1 - 14 = 0.1$	$0.1^2 = 0.01$
16.8	4			
79.7	25			
41.4	12			
				$\Sigma =$

16.2. Recta más ajustada a los datos. Criterio de mínimos cuadrados

Solamente hay una ecuación de la forma $Y = a + b X$ que relate *exactamente* los valores Y con los de X si los puntos de la representación gráfica están exactamente sobre una línea recta. Cuando los puntos no quedan sobre una recta (no hay una ecuación lineal que relate *exactamente* los valores Y con los de X) se busca la función lineal que a partir de los valores de X produzca valores de Y' los más próximos que sea posible a los valores Y observados, es decir, una recta que pase lo más cerca posible de los puntos, como se hizo en el ejercicio 16.2 arriba.

Veamos como ejemplo las variables X, edad en años, e Y, fuerza en newtons en el brazo izquierdo, medida en cada uno de N = 7 niños.

X →	2	4	7	8	9	12	14	M = 8
Y →	1	4	4	6	5	8	7	M = 5



- La tabla de la izquierda a continuación contiene los valores X e Y observados. El primer niño tuvo $X = 2$ años e $Y = 1$ newton, el segundo $X = 4$ años e $Y = 4$ newtons, etc.

Vamos a comparar tres ecuaciones lineales, es decir, tres rectas, para seleccionar entre ellas la que produzca valores calculados por dichas rectas, $Y' = a + b X$, más próximos a los valores Y observados en la muestra.

- La segunda tabla, a la derecha de los datos, contiene los cálculos para la recta $\hat{Y} = -2 + 1 \cdot X$. La columna de la izquierda da los valores \hat{Y} calculados. Al primer niño con $X = 2$, corresponde valor calculado $\hat{Y} = -2 + 1 \cdot 2 = 0$. La segunda columna da las distancias de cada \hat{Y} al Y observado, llamadas “errores de estimación”, $d = Y - \hat{Y}$. Para el primer niño es $d = 1 - 0 = 1$. La tercera columna contiene los errores al cuadrado. Para el primer niño es $d^2 = (Y - \hat{Y})^2 = 1^2 = 1$. La suma de todos los d^2 está en la última fila, es $\sum d^2 = 39$.

- La tabla central contiene los cálculos para la recta, $\hat{Y} = 1 + 0.5 X$ y la tabla de la derecha los cálculos para $\hat{Y} = -3 + 1 X$.
- En cada ecuación, para cada valor X de la tabla el valor \hat{Y} calculado indica la altura de la recta para ese valor de X y el valor Y observado indica la *altura del punto* observado, por ello $d = Y - \hat{Y}$ es la *distancia vertical* del punto observado a la recta. Por ejemplo, el primer niño tiene $X = 2$ e $Y = 1$ y con la recta $\hat{Y} = 1 + 0.5 \cdot X$ el estimado es 2. El error de estimación es $d = 1 - 2 = -1$, lo que indica que el punto observado para $X = 2$ está 1 unidad por debajo de la recta. El penúltimo niño tiene $X = 12$, por tanto $\hat{Y} = 1 + 0.5 \cdot 12 = 7$ y como el observado es $Y = 8$, el error de estimación es $8 - 7 = 1$. El punto observado queda 1 unidad por encima de la recta.

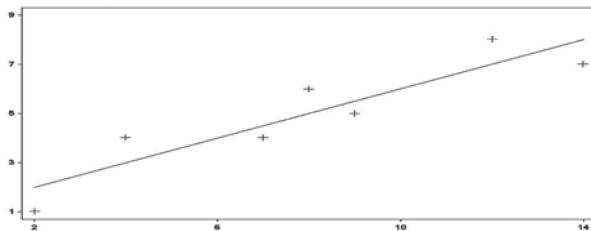
¿Cuál de las tres rectas produce valores calculados más próximos a los observados en la muestra, es decir, menores errores de estimación? Para unos niños el error de estimación es menor con una ecuación y para otros con otra. Por ejemplo, para el primero, con $X = 2$, la tercera recta produce mayor error de estimación ($d = 4$) que las otras dos ($d = 1$), pero en el tercero, con $X = 4$, el error de estimación es menor con la tercera recta ($d = 0$), y mayor (en valor absoluto) con la primera ($d = -1$). Es decir, ninguna recta produce mejor estimación que otra en todos y cada uno de los valores de X . Por ello buscaremos la recta que da menor “error promedio”. La media de los errores es la suma de ellos dividida por el número de casos. La media es menor con la recta que de menor suma. Podría elegirse la recta que diera menor suma de los errores en valor absoluto, sin signo. Pero es más útil al hacer Inferencia la recta que hace mínima la suma de los errores al cuadrado, $\sum d^2$. Se le llama **Recta de Mínimos Cuadrados**. El criterio de Mínimos Cuadrados es muy utilizado en muchos campos del Análisis Estadístico. En nuestro ejemplo la $\sum d^2$ es 39 para la primera recta, 5.5 para la segunda y 32 para la tercera. Por tanto, entre las tres estudiadas la mejor es $\hat{Y} = 1 + 0.5 X$.

El investigador busca la recta de mínimos cuadrados entre todas las posibles. Ello podría parecer una tarea ingente porque el número de rectas candidatas es infinito, ya que tanto “ a ” como “ b ” pueden tomar infinitos valores posibles. Por ejemplo, una recta distinta de $\hat{Y} = 1 + 0.5 X$ es $\hat{Y} = 0.99 + 0.5 X$ y distinta de las dos anteriores es $\hat{Y} = 0.99 + 0.501 X$ y distinta de esa es $\hat{Y} = 0.991 + 0.501 X$. Variando el valor de b y el de a se van obteniendo distintas rectas y cada una de ellas podría dar menor la suma de cuadrados de error. Sin embargo, una vez más, la matemática viene al rescate y permite encontrar directamente, sin tanteos reiterados, la recta que obtiene los valores \hat{Y} más próximos a los Y , en el sentido de que se minimiza la suma de los cuadrados de los errores de estimación.

16. 3. Recta de Mínimos Cuadrados en la muestra

En nuestro ejemplo de los niños la media de edad es 8 años y la media de fuerza es 5 newtons

X, en años	2	4	7	8	9	12	14	$\Sigma X = 56 \rightarrow M_x = 8$
$x = X - M_x$	-6	-4	-1	0	1	4	6	$\Sigma x = 0$
Y, en Newtons	1	4	4	6	5	8	7	$\Sigma Y = 40 \rightarrow M_y = 5$
$y = Y - M_y$	-4	-1	-1	1	0	3	2	$\Sigma y = 0$



Usamos las letras “x” e “y” (minúsculas) para indicar las distancias de cada valor original de X o de Y a su media aritmética. Para el primer niño es $x = 2 - 8 = -6$, es decir, 6 años por debajo de la media del grupo; y tiene una fuerza de 1, $y = 1 - 5 = -4$, es decir, 4 Newton de fuerza por debajo de la media. Ocurre que en toda lista de valores la suma de las distancias a la media es cero, $\Sigma x = 0$ y $\Sigma y = 0$.

$$\begin{aligned} "x" \text{ (minúscula)} &= X - M_x \rightarrow \Sigma x = \Sigma (X - M_x) = 0 \rightarrow S_x^2 = \Sigma x^2 / (N - 1) \\ "y" \text{ (minúscula)} &= Y - M_y \rightarrow \Sigma y = \Sigma (Y - M_y) = 0 \rightarrow S_y^2 = \Sigma y^2 / (N - 1) \end{aligned}$$

Para obtener la recta de mínimos cuadrados hay que calcular en la muestra tres cantidades:

$\Sigma (X - M_x)^2$	$\equiv \Sigma x^2 = 106$
$\Sigma (Y - M_y)^2$	$\equiv \Sigma y^2 = 32$
$\Sigma (X - M_x)(Y - M_y)$	$\equiv \Sigma xy = 53$

A partir de esas tres cantidades se calculan las constantes “a” y “b” y otros valores de la recta de mínimos cuadrados:

“b”, Coeficiente de Regresión Muestral: $b = \Sigma xy / \Sigma x^2 = 53 / 106 = 0.5$

Indica cuánto varía Y, por término medio, en la muestra, por cada unidad que aumenta X. Por cada año más que tiene el niño, su fuerza aumenta en 0.5 newton. El valor de b depende de las unidades empleadas. Por ejemplo, es lo mismo 0.5 Newton / año que 1 newton / bienio o que 2.5 Newton / quinquenio

“a”, Ordenada en el origen: $a = M_y - b M_x = 5 - 0.5 \cdot 8 = 1$

Es el valor de Y que correspondería a un individuo con X = 0 en la recta de mínimos cuadrados. Indica el punto en que la recta de mínimos cuadrados corta al eje vertical.

Por tanto, nuestra recta de Mínimos Cuadrados es **$Y' = 1 + 0.5 X$** .

Vemos que a partir de los estadísticos Σx^2 , Σy^2 y Σxy se encuentra directamente la recta buscada. El investigador no necesita recordar las fórmulas. Los programas informáticos las aplican y dan como salida los valores de “a”, de “b” y otros

estadísticos relacionados con la recta de mínimos cuadrados que veremos en seguida. Tampoco necesita el investigador entender por qué esas fórmulas permiten hallar la recta de mínimos cuadrados. Pero en el apéndice C se demuestra que esa solución es la correcta porque para quien no detesta las matemáticas elementales puede ser interesante ver un caso sencillo de una herramienta tan potente como es el cálculo de máximos y mínimos.

Veamos algunos estadísticos importantes relacionados con esta recta:

X	2	4	7	8	9	12	14	Media = 8
Y	1	4	4	6	5	8	7	Media = 5
$Y' = 1 + 0.5 X$	2	3	4.5	5	5.5	7	8	
$d = Y - Y'$	-1	+1	-0.5	+1	-0.5	+1	-1	
$d^2 = (Y - Y')^2$	1	1	0.25	1	0.25	1	1	$\sum d = 0$ $\sum d^2 = 5.5$

$$\rightarrow \sum d^2 = \text{Suma de errores al cuadrado} = \sum (Y - Y')^2 = \sum (Y - \{1 + 0.5 X\})^2 = 5.5$$

Es la suma de los cuadrados de los errores de estimación, es decir, de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta. La $\sum d^2$ es mínima con esta recta. Se calcula directamente con:

$$\sum d^2 = \sum y^2 - (\sum xy)^2 / \sum x^2 = 32 - 53^2 / 106 = 5.5.$$

$\rightarrow S_{y,x}^2 = \sum d^2 / (N-2)$ se llama **Varianza de la estimación**. La cantidad $\sum d^2 / N$ es la media de los errores de estimación al cuadrado. Podría usarse para resumir en una sola cifra la cuantía de esos errores. Pero se usa una ligera modificación de ella, que consiste en dividir la suma $\sum d^2$ por “N - 2”, en vez de dividir por N.

$\rightarrow S_{y,x} = [\sum d^2 / (N-2)]^{1/2} = [5.5 / 5]^{1/2} = 1.05$. Es el **Error estándar de la regresión**. Indica cuánto, por término medio, nos equivocamos al estimar en la muestra los valores de Y a partir de los valores de X, utilizando la expresión de la recta.

$\rightarrow S_b = S_{y,x} / (\sum x^2)^{1/2} = 1.05 / 106^{1/2} = 0.102$. Es el **Error estándar de la “b”**. Es la cantidad utilizada para hacer tests respecto al Coeficiente de Regresión poblacional y calcular los Intervalos de Confianza para ese parámetro. Estima la desviación estándar entre los b's muestrales si se hiciera MA.

** **Ejercicio 16.3:** Para los datos de este ejemplo calcule $\sum d^2 = \sum (Y - Y')^2$ con dos rectas cualesquiera y compruebe que es mayor de 5.5.

** **Ejercicio 16.4:** En una muestra de 80 individuos de más de 50 años se mide la Tensión Arterial, TA, (en cm.) y la Edad (en años) se encuentra $b = 2$; $S_{y,x} = 0.8$; $S_b = 0.1$; $\sum d^2 = 49.9$; $r = 0.85$. Interprete cada uno de estos números:

- a. $b = 2 \rightarrow$
- b. $S_{y,x} = 0.8 \rightarrow$
- c. $\sum d^2 = 49.9 \rightarrow$
- d. $r = 0.85 \rightarrow$
- e. $r^2 = 0.72 \rightarrow$

16.4. Coeficiente de Correlación Lineal y Coeficiente de Determinación

El valor numérico de b , de $\sum y^2$ y de $\sum d^2$ depende de las unidades en que se mide la variable Y. Por ejemplo, si Y es una longitud expresada inicialmente en metros, al expresarla en centímetros el número es cien veces mayor y el valor de $\sum y^2$ y de $\sum d^2$ es 10 000 veces mayor, por estar elevados al cuadrado. Pero el valor del cociente $\sum d^2 / \sum y^2$ es el mismo cualquiera que sea la unidad usada.

Se llama **Coeficiente de Determinación**, r^2 , a la cantidad $1 - \sum d^2 / \sum y^2$.

Puede interpretarse como la proporción de variación entre los valores de Y “explicada por” la X. En nuestro ejemplo es $r^2 = 1 - \sum d^2 / \sum y^2 = 1 - 5.5 / 32 = 1 - 0.172 = 0.828$. Con un poco de álgebra se puede ver que también es $r^2 = (\sum xy)^2 / (\sum x^2 \cdot \sum y^2)$, es decir, $53^2 / 32 \cdot 106 = 0.828$.

La fuerza no es igual en todos los niños de esta muestra. Las diferencias entre los valores de Y se cuantifican por $\sum y^2$ (“y” minúscula, es decir, $Y - M_Y$). Las diferencias entre las fuerzas se deben en parte a que las edades difieren sensiblemente, es decir, las diferencias entre las X (las edades) “explican” buena parte de las diferencias entre las Y (las fuerzas). Pero no todas las diferencias entre las fuerzas se deben a las diferencias de edad. Niños con igual edad no tienen todos la misma fuerza, sino que hay diferencias entre ellos. La cantidad $\sum d^2 / \sum y^2 = 0.172$ puede interpretarse como la proporción de la variación entre las fuerzas que **no** se debe a las diferencias de edades y la cantidad $r^2 = 1 - \sum d^2 / \sum y^2 = 1 - 0.172 = 0.828$ es la proporción de la variación entre las fuerzas que se debe a las diferencias de edades. En el apéndice C se comenta un poco más extensamente este punto.

A la raíz cuadrada del Coeficiente de Determinación se le llama **Coeficiente de Correlación**, $r = \sqrt{\sum x^2 \cdot \sum y^2} / \sqrt{\sum x^2} \cdot \sqrt{\sum y^2}$ y se usa con más frecuencia que el de Determinación. En nuestro ejemplo es $r = 0.828^{1/2} = 0.91$. El Coeficiente de Correlación toma valores entre -1 y +1. Vale cero cuando los puntos no se agrupan en torno a una recta ascendente ni descendente, es decir, a mayores valores de X no corresponden valores de Y mayores ni menores, sino parecidos. Cuanto más se aproximan los puntos a una recta, más se aproxima r a la unidad. Vale 1 cuando todos los puntos quedan exactamente sobre una recta ascendente y vale -1 cuando todos los puntos quedan exactamente sobre una recta descendente.

Resumiendo: El Coeficiente de Regresión, b , mide la pendiente de la recta de mínimos cuadrados, dice cuánto varía Y por cada unidad que aumenta X y su valor depende de las unidades en que se expresen X e Y. El Coeficiente de Correlación, r , mide la proximidad de los puntos a esa recta, toma valores entre -1 y +1 y su valor no depende de las unidades en que se expresen X e Y.

16. 5. Regresión Lineal: Modelo Poblacional y Muestreo

En este, como en otros muchos campos del análisis de datos, el estudio de la muestra observada se hace generalmente para intentar conocer ese tipo de relaciones en la población muestreada. En la población se llama *Línea de Regresión* de la variable Y sobre X a la línea formada por las *medias de la variable Y* para cada valor de X. Es decir, hay que considerar todos los individuos con un mismo valor de X y tener en cuenta que la variable Y no tiene el mismo valor en todos ellos, sino que forman una distribución. El modelo más usado se describe por tres propiedades:

- a) La media de Y para todos los individuos con cada valor concreto de X, μ , crece o decrece linealmente al aumentar los valores de X, es decir, $\mu = \alpha + \beta X$.
- b) La desviación estándar entre los valores de Y para todos los individuos con el mismo valor X, $\sigma_{Y|X}$ es igual para todos los valores de X, es decir,

$$\sigma_{Y|X_1} = \sigma_{Y|X_2} = \sigma_{Y|X_3} \dots \equiv \sigma.$$

- c) Los valores Y correspondientes a cada valor X se distribuyen de modo Normal.

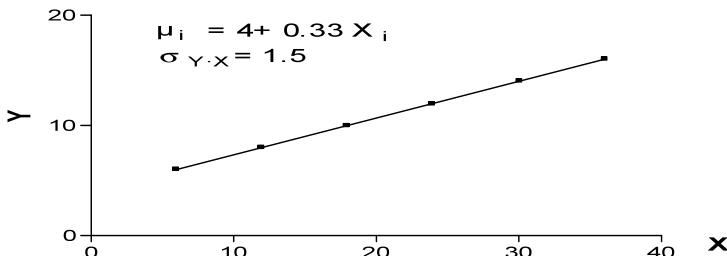
Muchas situaciones reales se aproximan bien a este modelo que queda especificado por los tres parámetros α , β y σ . El investigador no conoce el valor de esos parámetros y debe estimarlos a partir de la muestra. ¿Qué estadísticos muestrales estiman esos parámetros? Si se sacan millones de muestras, todas del mismo tamaño y con los mismos valores de X, y en cada una se calcula la recta de Mínimos Cuadrados, ocurre que:

- $\hat{\beta}$ es estimador insesgado de β , es decir, la media de las $\hat{\beta}$'s en el MA es β .
- $\hat{\alpha}$ es estimador insesgado de α , es decir, la media de las $\hat{\alpha}$'s en el MA es α .
- $\hat{S}_{Y|X}^2$ es estimador insesgado de $\sigma_{Y|X}^2$, la media de las $\hat{S}_{Y|X}^2$ en el MA es $\sigma_{Y|X}^2$

Es decir, los estadísticos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{S}_{Y|X}$ calculados en la muestra estiman los parámetros α , β y σ desconocidos. Con esos estadísticos se calculan los IC y se hacen test para los parámetros, usando para ello la distribución de los estadísticos en el MA.

Ejemplo: Supongamos que en *población* la relación entre dos variables cuantitativas X e Y es $\mu = 4 + 0.33 X$, y que es $\sigma_{Y|X}^2 = \sigma^2 = 2.25$. Es decir, la recta de regresión poblacional corta al eje vertical en el valor $Y = 4$. Ese sería el valor medio de Y en los individuos con $X = 0$. Y la pendiente es 0.33, es decir, la media de Y para los individuos con cada valor de X aumenta 0.33 por cada unidad que aumenta X. Y la varianza entre las Y's de los individuos con el mismo valor de X es 2.25. $\Rightarrow \sigma = 1.5$

Ejemplo de algunos valores de μ con $a = 4$ y $b = 0.33$				
X	0	1	2	3
$\mu \equiv \mu_{Y X=X}$	4	4.33	4.66	4.99



Si de esa población tomamos una muestra de $N = 6$ individuos con valores de X : 6, 12, 18, 24, 30 y 36, para el individuo con $X = 12$, por ejemplo, no sabemos el valor Y que va a salir. Saldrá una cantidad al azar, dentro de las que forman la distribución de todos los Y que corresponden a $X = 12$ y que tienen media $4 + 0.33 \cdot 12 = 8$. Si hacemos MA tomando en cada muestra siempre 6 individuos con esos mismos valores X , la variable Y tomará en cada individuo un valor más o menos cercano, pero generalmente no exactamente igual, a $4 + 0.33 X$. A cada muestra corresponde una recta muestral de Mínimos Cuadrados cuya pendiente y ordenada en el origen tendrán valores próximos a los de la recta de regresión poblacional. La tabla que sigue reproduce algunas de las muestras obtenidas en el MA y los estadísticos más relevantes de cada una.

POBLACIÓN → MUESTRA 1 ... MUESTRA 10 ... MUESTRA 1000 ... MUESTRA 10 000

X	μ
6	6
12	8
18	10
24	12
30	14
36	16

X	Y
6	7.2
12	9.8
18	8.3
24	10.5
30	13.9
36	15.1

X	Y
6	5.3
12	8.4
18	9.6
24	10.9
30	13.2
36	17.1

X	Y
6	5.1
12	7.0
18	8.3
24	12.4
30	16.3
36	15.1

X	Y
6	6.6
12	7.6
18	11.0
24	12.5
30	11.3
36	18.0

β estimada por

$$b: 0.28$$

$$0.59$$

$$0.49$$

$$0.15 \rightarrow 0.33$$

α estimada por

$$a: 5.7$$

$$3.4$$

$$2.8$$

$$4.2 \rightarrow 4$$

$\sigma^2_{Y \cdot X}$ estim.

$$S^2_{Y \cdot X}: 2.9$$

$$1.3$$

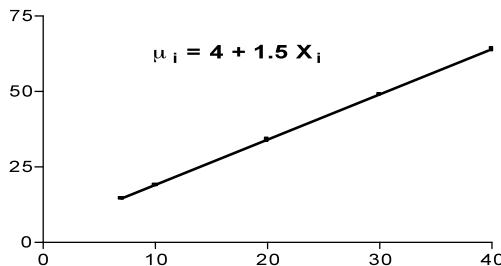
$$4.1$$

$$2.1 \rightarrow 2.25$$

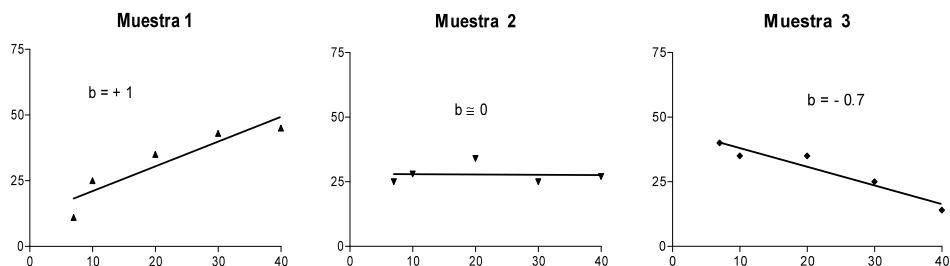
16. 6. Inferencia en la Regresión Lineal

Si de una población con, por ejemplo, $\beta = 1.5$ se toma una muestra, la b muestral puede tomar valores como $+1$ ó 0 ó -0.1 , como se muestra en las figuras:

Modelo poblacional →



El modelo dice que en la población, por cada unidad de aumento de la X, las medias de Y aumentan 1.5 unidades. Si tomamos muestras de esta población, en ellas no ocurrirá exactamente lo mismo. Pueden ser muestras como las que siguen:



Pero en la práctica no sabemos lo que ocurre realmente en la población, solo tenemos los datos de una muestra, a partir de la cual intentaremos saber cómo es la relación entre las dos variables en la población. Aunque realmente no haya relación lineal entre dos variables en la población, en la muestra siempre aparecerá, por la VRM, un cierto grado de asociación positiva o negativa. Para ver hasta qué punto la asociación encontrada en la muestra podría ser por la VRM se hace test estadístico.

Como ejemplo haremos test e intervalo de confianza en el ejemplo de la fuerza medida en el brazo, Y, y la edad en años, X, en cada uno de N = 7 niños:

X, en años →	2	4	7	8	9	12	14	M = 8
Y, en Newtons →	1	4	4	6	5	8	7	M = 5

Con estos datos se calculó la recta de mínimos cuadrados, $\hat{Y} = 1 + 0.5 X$ con coeficiente de regresión $b = 0.5$, error estándar de la regresión $S_{y,x} = 1.05$ y error estándar de la $b S_b = 0.102$.

- **Intervalo de Confianza para β :** $IC(\beta) = b \pm S_b t_{N-2}$

donde S_b es el error estándar de la b calculada con los datos de la muestra. Si se quiere confianza 95% el valor " t_{N-2} " es el valor de la distribución t de Student con $N-2$ grados de libertad, gl, que deja fuera de él, el 2.5% de los valores de esa distribución en cada cola (5% entre las dos colas). En nuestro ejemplo con $N = 7$, utilizaremos el valor que aparece donde se cruzan la fila de 5 gl y la columna

con cabecera BIL = 0.05, que es $t = 2.571$. Si se quiere confianza 99% se toma el valor que deja fuera de él el 0.5% de los valores de esa distribución en cada cola (1% entre las dos colas), (para este ejemplo sería $t = 4.032$). s_b es la estimación que se hace con esta muestra de la desviación estándar entre las b's muestrales si se hiciera MA.

$$IC_{95\%} = 0.5 \pm 0.102 \times 2.571 = 0.5 \pm 0.26 = \mathbf{0.24 \text{ y } 0.76}$$

En la muestra es $b = 0.5$, es decir, por cada año de más, la fuerza aumenta en promedio en 0.5 newtons. No sabemos cuánto es ese aumento en la población, pero tenemos 95% de confianza en que se encuentre entre 0.24 y 0.76 newtons.

- **Tests de significación para β :**

- a) La Hipótesis Nula, H_0 , habitualmente planteada es que en población es $\beta = 0$, es decir, no hay regresión lineal, al aumentar la X la media de Y no crece ni disminuye linealmente. Esta H_0 implica también que en población es $r = 0$.

El estadístico a calcular es:
$$t_{N-2} = b / S_b$$

En nuestro ejemplo la hipótesis planteada dice que en población no hay variación lineal de la fuerza con el aumento de la edad. Encontramos $t_s = 0.5 / 0.102 = 4.9 \rightarrow$ mirando en la tabla “t-Student” con grados de libertad, $gl = N - 2 = 5$, encontramos que el valor más próximo a él es 4.032, al que le corresponde $P_{UNIL} = 0.005$. Al valor $t = 4.9$ obtenido en la muestra le corresponderá $P_{UNI} < 0.005$. Es decir, si en población no hay regresión y repitiéramos este estudio con 7 niños millones de veces, en menos de 5 estudios cada 1 000 aparecería $b = 0.50$ ó mayor. Los datos de la muestra no son fácilmente compatibles con la hipótesis H_0 , por lo que tendremos a rechazar H_0 y pensar que en población sí hay relación lineal entre la edad y la fuerza.

- b) También puede plantearse como H_0 que β tiene cierto valor, es decir, que en población al aumentar la X la media de Y crece o disminuye cierta cantidad β .

El estadístico a calcular es:
$$t_{N-2} = |\beta - b| / S_b$$

En el ejemplo, para $H_0: \beta = 0.7$ es $t_s = |0.7 - 0.5| / 0.102 = 1.96$. En la tabla “t de Student” se encuentra que con $gl = 5$ al valor $t = 2.015$ le corresponde $P_{UNI} = 0.05$, por tanto al valor $t = 1.96$ (que es menor que 2.015) le corresponderá $P_{UNI} > 0.05$. Cuando los cálculos del test los hace un programa informático la salida incluye el valor P, que en este caso es $P_{UNI} = 0.053$. Es decir, si en población es $\beta = 0.7$ y repitiéramos este estudio millones de veces, en 53 de cada 1 000 veces aparecería por la VRM valor b igual o menor que 0.5. Es decir, no es muy raro encontrar unos datos con un coeficiente de regresión como el obtenido ($b = 0.5$) si en la población fuera de 0.7 ($\beta = 0.7$), por lo que decimos que nuestros datos son compatibles con la hipótesis planteada para

la población; no rechazamos H_0 admitiendo el valor $\beta = 0.7$ como un valor posible para la población.

El numerador del estadístico calculado en el test mide la diferencia entre la pendiente de la recta que propone la H_0 para la población y la encontrada en la muestra. Si, por ejemplo, se propone como H_0 que en población Y disminuye 0.3 unidades por cada unidad que aumenta X, es decir, $\beta = -0.3$, (recuerde que en la muestra aumenta 0.5 unidades, $b = 0.5$) es $t_s = | -0.3 - 0.5 | / 0.102 = 0.8 / 0.102 = 7.84$ y $P_{UNIL} < 0.0005$. Rechazamos H_0 , β no es -0.3, será $\beta > -0.3$.

**** Ejercicio 16.5:** Un autor cree que $\beta = 0.4$. Haga un test para esta hipótesis.

**** Ejercicio 16.6:** ¿Podemos asegurar que β NO es 2?

**** Ejercicio 16.7:** Interprete el valor de P obtenido en el ejercicio anterior

**** Ejercicio 16.8:** Para ver si el coeficiente intelectual, C.I. = Y, de los ancianos se modifica con la edad, se mide en una muestra de $N = 12$ individuos obteniéndose los siguientes resultados:

$$\begin{array}{lll} \text{Coeficiente intelectual, Y:} & M_Y = 100 & \sum y^2 = \sum (Y - 100)^2 = 1880, \\ \text{Edad en años, X:} & M_X = 70 & \sum x^2 = \sum (X - 70)^2 = 80 \\ & & \sum x \cdot y = \sum (X - 70)(Y - 100) = -80 \end{array}$$

Al calcular la recta de regresión de Mínimos Cuadrados se obtuvo:

$$b = -1, a = 170, s_{y,x} = 13.4, s_b = 1.5, \sum d^2 = \sum (Y - \{170 - 1 \cdot X\})^2 = 1800$$

- a. ¿Cuánto varía en la *muestra*, por término medio, el C.I. de los ancianos por cada año que pasa?
- b. Escriba la ecuación de la recta que permite estimar, con el mínimo error posible, el C.I. a partir de la edad.
- c. ¿Qué C.I. estimamos para un individuo de *64 años*?
- d. ¿Cuánto vale la suma de cuadrados de los errores de estimación?
- e. ¿Cuánto vale y cómo interpretamos el error estándar de la estimación?
- f. ¿Qué proporción de la variabilidad del C.I. en la muestra se explica por la influencia de la edad?
- g. ¿Cuánto vale y cómo se interpreta el error estándar del coeficiente de regresión?
- h. Un psicólogo opina que, en población, cada año que pasa el C.I. del anciano *aumenta 5* unidades. ¿Es defendible su hipótesis?
- i. El doctor "B" cree que ese *incremento* anual es **1**. ¿Es defendible esta hipótesis?
- j. El doctor "C" cree que cada año el C.I. *baja 2.5* unidades. ¿Tenemos fuertes motivos para rechazar esta posibilidad?
- k. El doctor "D" asegura que el C.I. de los ancianos *disminuye 8* unidades por año. ¿Son compatibles estos datos con su aserto?
- l. Calcule intervalo de confianza (95%) para variación poblacional del C.I. por año.

** **Ejercicio 16.9:** En una muestra de 81 individuos se midió la concentración de calcio en LCR, “Y”, y la concentración de calcio en sangre, “X”.

Al ajustar la Recta de Mínimos cuadrados se obtiene:

$$b = 2, \quad a = 1, \quad S_{y,x} = 10, \quad S_b = 0.20, \quad d^2 = 7900, \quad r = 0.80, \quad r^2 = 0.64$$

- a. En la muestra, ¿Cuanto varía, por término medio, “Y” al aumentar “X” 4 unidades?
- b. Un autor dice que en *población* al aumentar “X” 4 unidades, “Y” aumenta, por término medio, 6 unidades. ¿Vd. Qué opina ?
- c. Interprete el valor de “P” del test anterior como frecuencia relativa.
- d. ¿Estamos prácticamente seguros de que el coeficiente de regresión poblacional no es 3?
- e. ¿Estamos prácticamente seguros de que el coeficiente de regresión poblacional es 2?
- f. Al estimar los valores de Y a partir de los valores de X, ¿cuánto es el error estándar de la estimación?
- g. ¿En cuánto estimamos la $\sigma^2_{y,x}$ poblacional? Explique de qué cantidad estamos hablando.
- h. ¿En cuánto estimamos la desviación estándar entre los b's muestrales en MA?
- i. Un autor cree que en *población* el Coeficiente de Correlación es cero. ¿Qué implica eso respecto a la relación entre las dos variables? ¿Qué podemos decir acerca de esa hipótesis?
- j. ¿Qué valor de Y estimamos en un individuo con X = 30?
- k. ¿Qué porcentaje de la variación de la Y es explicado por la X?
- l. Calcule e interprete el Intervalo de Confianza para β con confianza de 95%.

NO OLVIDE RECORDAR - 16

1. El estudio de la relación entre dos variables se hace de distinta forma dependiendo del tipo de variables implicadas:
 - Si las dos son cualitativas, una con C categorías y otra con K categorías, se forma una tabla de contingencia C x K. La situación es la misma si una de las variables es cuantitativa y sus valores se agrupan en intervalos o si las dos variables son cuantitativas y los datos se agrupan en intervalos en ambas. Se hace Inferencia utilizando el test de chi-cuadrado.
 - Si una es cuantitativa y la otra cualitativa, se calcula la media y desviación de la cuantitativa para cada categoría de la cualitativa y se hace ANOVA.
 - Si las dos son cuantitativas (con valores no agrupados en intervalos) indagamos la posible Regresión Lineal, RL: $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{X}$ a la que gráficamente corresponde una línea recta.
2. Los datos X e Y medidos en cada individuo de una muestra se representan en una gráfica llamada nube de puntos que asocia un punto a cada individuo, representando su valor X en el eje horizontal y su valor Y en el vertical.
3. Se busca la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos. Tiene por expresión $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{X}$ donde la **ordenada en el origen**, “a”, indica el valor de Y que corresponde a X = 0, es el punto en que la recta corta al eje vertical. El **coeficiente de regresión o pendiente** de la recta, “b”, indica cuando varía Y por cada unidad que aumenta X. El valor de b depende de las unidades en que se midan las variables.
4. Calculando los coeficientes ‘b’ y ‘a’ de la recta con estas expresiones: $\mathbf{b} = \sum x \cdot y / \sum x^2$ y $\mathbf{a} = M_y - b \cdot M_x$ se hace mínima la suma de los cuadrados de los errores de estimación, $\sum d^2 = \sum (Y - \{a + bX\})^2$.
5. El **Coeficiente de Correlación** mide la cercanía de los puntos observados a la recta de regresión de Mínimos Cuadrados. Vale **cero** cuando los puntos no se agrupan en torno a una recta. Cuanto más se aproximan los puntos a una recta, más se aproxima a **+1** (recta ascendente) o **-1** (descendente).
6. El **error estándar de la regresión**, $S_{y,x} = [\sum d^2 / (N-2)]^{1/2}$, dice cuánto, por término medio, nos equivocamos al estimar en la muestra los valores de Y a partir de los valores de X. Estima la $\sigma^2_{y,x} = \sigma^2$ poblacional.
7. El **error estándar de la b**, $S_b = S_{y,x} / (\sum x^2)^{1/2}$ estima la desviación estándar entre los b's muestrales si se hiciera MA. Se utiliza para hacer tests e IC para β .

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 16

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. Para estudiar la relación entre dos variables cualitativas se calcula la media y desviación de una para cada categoría de la otra y se hace ANOVA.
2. Para estudiar la relación entre dos variables cualitativas, una con C categorías y otra con K categorías, se forma una Tabla de Contingencia C x K.
3. También se forma una Tabla de Contingencia si hay una variable cualitativa y otra cuantitativa agrupada en intervalos.
4. También se forma una Tabla de Contingencia si las dos variables son cuantitativas y los datos se agrupan en intervalos en ambas.
5. Para estudiar la relación entre una variable cuantitativa no agrupada en intervalos y una cualitativa se analiza la posible Regresión Lineal.
6. Para estudiar la relación entre una variable cuantitativa no agrupada en intervalos y una cualitativa se calcula la media y desviación de la cuantitativa para cada categoría de la cualitativa y se hace ANOVA.
7. Para estudiar la relación entre dos variables cuantitativas (con valores no agrupados en intervalos) se forma una Tabla de Contingencia.
8. Para estudiar la relación entre dos variables cuantitativas (con valores no agrupados) se calcula la media y desviación de una de ellas y se hace ANOVA.
9. Para estudiar la relación entre dos variables cuantitativas (con valores no agrupados en intervalos) indagamos la Regresión Lineal, RL: $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{X}$.
10. Para estudiar la relación entre dos variables cuantitativas (con valores no agrupados) se suele hacer una nube de puntos que asocia un punto a cada individuo, representando su valor X en el eje horizontal y su valor Y en el vertical.
11. La expresión $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{X}$ hace corresponde a cada valor X uno de Y. Si a cada pareja de valores X e Y se hace corresponder un punto en un sistema de ejes perpendiculares se obtiene una línea recta.
12. “a” indica cuánto varía Y por cada unidad que aumenta X.
13. “a” indica cuánto varía X por cada unidad que aumenta Y.
14. “a” indica cuánto vale X cuando Y es cero.
15. “a” indica cuánto vale Y cuando X es cero.
16. “a” es el punto del eje vertical en que la recta lo corta.
17. El coeficiente de regresión o pendiente de la recta, “b”, indica cuánto varía Y por cada unidad que disminuye X.
18. “b” indica cuánto varía X por cada unidad que aumenta Y.
19. “b” indica cuánto varía Y por cada unidad que aumenta X.

20. Velocidad de 20 km/ hora es igual que 20 000 m/ hora.
21. Velocidad de 24 km/ hora es igual que 1km/ día.
22. El valor de “b” depende de las unidades en que se miden X e Y.
23. El valor de “b” no depende de las unidades en que se mide Y.
24. El valor de “b” no depende de las unidades en que se mide X.
25. El valor de “b” siempre toma valores entre 0 y 1
26. $\sum d^2 = \text{Suma de errores al cuadrado} = \sum (Y - \{a + bX\})^2$ dice cuánto, por término medio, nos equivocamos al estimar en la muestra los valores de Y a partir de los valores de X.
27. $\sum d^2$ es mayor cuanto más se alejan los valores calculados, $Y' = a + bX$, de los valores observados de Y.
28. La recta de mínimos cuadrados es la que da menor valor de b.
29. La recta de mínimos cuadrados es la que da menor valor de $\sum d^2$.
30. El Error estándar de la regresión, $S_{y,x} = [\sum d^2 / (N-2)]^{1/2}$, dice cuánto, por término medio, nos equivocamos al estimar en la muestra los valores de Y a partir de los valores de X.
31. Para encontrar la recta de mínimos cuadrados hay que calcular la $\sum d^2$ en millones de rectas.
32. El Error estándar de la b, $S_b = S_{y,x} / (\sum (X - M_x)^2)^{1/2}$ estima la desviación estándar entre los b's muestrales si se hiciera Muestreo Aleatorio.
33. El Error estándar de la b, S_b , dice cuánto, por término medio, nos equivocamos al estimar en la muestra los valores de Y a partir de los valores de X.
34. S_b es la cantidad utilizada para hacer tests y calcular IC para β .
35. El Coeficiente de Correlación relaciona la $\sum d^2$ con la $\sum (Y - M_y)^2$ y no depende de las unidades en que se miden X e Y.
36. El Coeficiente de Correlación relaciona la $\sum d^2$ con la $\sum (Y - M_y)^2$ y depende de las unidades en que se miden X e Y.
37. El Coeficiente de Correlación, r , vale **cero** cuando los puntos no se agrupan en torno a una recta ascendente ni descendente.
38. r vale **1** cuando los puntos quedan sobre una recta ascendente.
39. r vale **1** cuando los puntos quedan sobre una recta descendente.
40. r vale **-1** cuando los puntos quedan sobre una recta descendente.
41. El modelo poblacional de la Regresión Lineal dice que todos los individuos con un mismo valor de X tiene igual valor de Y, el cual se relaciona con el valor X por la expresión $Y = a + bX$.
42. El modelo poblacional de la Regresión Lineal dice que la media de todos los valores Y de los individuos con un mismo valor de X, digamos $\mu = \mu_{Y|X=x}$, se relaciona con el valor X por la expresión $\mu = \alpha + \beta X$.

- 43.** El modelo poblacional de la Regresión Lineal dice que la desviación estándar de los valores Y entre los individuos con un mismo valor de X, digamos $\sigma = \sigma_{Y|X=X}$, se relaciona con el valor X por la expresión $\sigma = \alpha + \beta X$.
- 44.** El modelo poblacional de la Regresión Lineal dice que la $\sigma = \sigma_{Y|X=X}$, es la misma para los distintos valores de X .
- 45.** El modelo poblacional de Regresión Lineal no dice nada respecto a la desviación estándar de los valores Y entre los individuos con un mismo valor X.
- 46.** $\beta = 0$ implica que en la población no hay Regresión Lineal.
- 47.** Si en la población no hay Regresión Lineal, en la muestra tampoco la habrá.
- 48.** Si en la población no hay Regresión Lineal, en las muestras suele haber una pequeña o moderada regresión positiva o negativa.
- 49.** Conociendo la pendiente de la recta de regresión de mínimos cuadrados, conocemos la pendiente en la población.
- 50.** Conociendo la pendiente de la recta de regresión de mínimos cuadrados, podemos calcular un Intervalo de Confianza para la pendiente en la población.
- 51.** Conociendo la pendiente de la recta de regresión de mínimos cuadrados, podemos hacer tests relativos a la pendiente en la población.

Capítulo 17

LA INFERENCIA BAYESIANA

Al valorar la información más recientemente adquirida sobre un tema es consustancial a la mente humana incorporar la *información previa* que sobre él tenemos. Así lo hacemos continuamente en la vida común, porque la lógica lo exige y la experiencia muestra que de ese modo evaluamos más correctamente la realidad. Entre los innumerables ejemplos que podríamos citar consideremos el de un observador que otea el cielo en espera de que haga un día soleado para salir al campo y lo ve parcialmente nuboso. Si esto ocurre en Escocia (82% de días con lluvia) se inclinará por no iniciar la excursión, ante el temor de que llueva. Pero si ocurre en Almería (4% de días con lluvia) se pondrá en marcha, confiado en que las nubes dejarán paso a un radiante sol. Ante un mismo dato observado —cielo parcialmente nuboso— se emite un pronóstico muy distinto según sea la información previa que tenemos sobre ese tema. Y se puede demostrar que actuando de este modo la predicción del clima es, a la larga, más exitosa que si se ignorara la experiencia previa.

También es inevitable —y muy útil— incorporar nuestros conocimientos previos sobre el tema cuando nos planteamos rechazar o no la H_0 en una investigación. Por ejemplo, en un estudio para ver si el fármaco “A” es efectivo, la Inferencia Clásica tiene en cuenta exclusivamente el resultado del experimento actual y calcula la prob de obtener ese tipo de resultado si A no fuera efectivo. No incorpora la información previa que pueda haber sobre la eficacia de A. Pero el investigador no puede —ni debe— librarse de tener en cuenta esa información previa y tener más confianza en la efectividad de A cuanto más fiable es la entidad que lo propone. Todos lo hacemos implícitamente. La llamada **Inferencia Bayesiana** lo hace explícitamente y calcula dos tipos de probabilidades.

- a) La “**Probabilidad a priori**”, P_{PRIORI} , evalúa la confianza que teníamos en que A fuera efectivo antes de conocer el resultado del estudio actual.

- b) La “**Probabilidad a posteriori**”, $P_{\text{POSTERIOR}}$, es la prob de que el fármaco sea efectivo teniendo en cuenta el resultado del estudio actual. Se calcula a partir de la P_{PRIORI} y del resultado.

La mayoría de los investigadores no tienen noticia de la existencia de la Inferencia Bayesiana. En los departamentos de Estadística de las universidades se imparten muy pocos cursos de introducción a este tema. Aquí se exponen los fundamentos lógicos del enfoque bayesiano y su uso en las situaciones más sencillas. Estos fundamentos lógicos pueden ser entendidos por los investigadores legos en matemáticas y su aplicación les permitirá, en algunas situaciones comunes, estimar la prob de que sean ciertas las hipótesis investigadas.

17.1. Probabilidad “a priori” frecuentista

En el apartado 9.7 decíamos que en la mayoría de los estudios no se puede calcular la prob de que la hipótesis planteada sea cierta y veímos un ejemplo en el que sí se puede calcular, similar al que vemos a continuación.

Sabemos que algunas monedas de nuestro país son falsas y están mal balanceadas, de modo que en ellas la prob de salir cara es $\pi_F = 0.8$. En las legales esa prob es $\pi_L = 0.5$. Tenemos una moneda y no sabemos si es legal o falsa, es decir, no sabemos si la prob de cara en ella, que llamaremos π_M , es 0.5 o es 0.8. Para intentar saberlo hacemos 5 tiradas con ella y sale cara en las 5 tiradas. Para la H_0 que dice que la moneda es legal, $\pi_M = 0.5$, se obtiene $P_{\text{UNI}} = 0.0312$. Es decir, haciendo millones de series de 5 tiradas con una moneda legal, aparecen 5 caras en aproximadamente 3 cada 100 series. Es un moderado indicio contra la H_0 . Esto es todo lo que dice la Inferencia Clásica, que en ningún momento tiene en cuenta si la FR de monedas falsas en el país es alta o baja. En general, la *Inferencia Clásica* no evalúa la prob de que la H_0 sea cierta o sea falsa, lo que en este ejemplo equivale a no tener en cuenta la FR de monedas falsas.

Pero si esa FR se conoce, no podemos evitar tenerla en cuenta. En efecto, si nos dicen que la FR de monedas falsas es muy elevada, ya antes de hacer las tiradas tenemos alta prob de que nuestra moneda sea falsa y al valorar el resultado del “estudio” (sale cara en las cinco tiradas) nos inclinamos a pensar que salió ese resultado porque nuestra moneda es una falsa. Por el contrario, si nos dicen que la FR de monedas falsas es muy baja, nos inclinamos a pensar que la nuestra es buena y salió ese resultado por azar.

La Inferencia Bayesiana incorpora esa información sobre la FR de monedas falsas de modo cuantitativo. La FR de monedas legales nos da la “Probabilidad a priori”, P_{PRIORI} , de que la moneda sea legal. La “**Probabilidad a posteriori**”, $P_{\text{POSTERIOR}}$, de que sea legal teniendo en cuenta que al tirarla 5 veces salieron 5 caras, se calcula a partir de la P_{PRIORI} y de las probabilidades de obtener ese resultado con una moneda legal y con una moneda falsa. Ese cálculo se hace aplicando el Teorema de Bayes, como se hizo en el Capítulo 5. Es imprescindible repasar aquel capítulo para entender este.

Si, por ejemplo, son falsas el 10% de las monedas, la prob inicial de que la nuestra sea legal es $P_{\text{PRIORI}} = 0.90$. Si una moneda legal, L, se tira 5 veces, la prob de que salgan

5 caras es $0.5^5 = 0.0312$ (es el valor P del test). Si una moneda falsa, F, (en la que la prob de salir cara es 0.8) se tira 5 veces, la prob de que salgan 5 caras es $0.8^5 = 0.3277$, nos referimos a ella como $P(R | F)$, llamando "R" al resultado de nuestro experimento, es decir, obtener 5 caras en las 5 tiradas. Estos son los cálculos de Bayes.

	$P(L; \pi=0.5) = 0.9$	$P(F; \pi=0.8) = 0.1$	$2BTOTAL$
R	$P(R L) = 0.0312$ $P(L \text{ y } R) = 0.0312 \times 0.9 = 0.02808$ $P(L R) = 0.02808 / 0.06085 \approx 0.46$	$P(R F) = 0.3277$ $P(F \text{ y } R) = 0.3277 \times 0.1 = 0.03277$ $P(F R) = 0.03277 / 0.06085 \approx 0.54$	$P(R) =$ $= 0.06085$
R-	Esta parte de la tabla no necesita ser calculada ahora		

La prob inicial de que la moneda sea legal era de 0.90 y tras realizar el experimento de lanzarla 5 veces y obtener 5 caras, la prob de que sea legal es 0.46. $P_{POSTERIORI} = 0.46$. Es decir, si se toman muchas monedas y cada una se tira 5 veces, entre las que han dado como resultado 5 caras, 46 de cada 100 son legales. Resumiendo:

H_0 : la moneda es legal (si se lanza muchas veces sale cara el 50% de ellas, $\pi=0.5$).

El dato experimental: se lanza la moneda 5 veces y sale cara en todas.

Inferencia clásica: P del test ≈ 0.03 . Resultado poco concluyente. Modesta evidencia contra H_0 . Si fuera cierta no es muy difícil, pero tampoco muy fácil que salga cara en las 5 tiradas. No se tiene en cuenta la FR de monedas falsas en la población.

Inferencia bayesiana:

$P_{PRIORI} = 0.90$. De cada 100 monedas que se tomen, 90 son legales.

Si la tirada de 5 veces de una moneda legal ($\pi=0.5$) se repite millones de veces, sale todo cara 312 cada 10 000 veces.

Si la tirada de 5 veces de una moneda falsa ($\pi=0.8$) se repite millones de veces, sale todo cara 3277 cada 10 000 veces.

$P_{POSTERIORI} = 0.46$. De cada 100 monedas que se tomen y salga todo caras al tirarla 5 veces, 46 son legales y 54 son falsas. Es $P(L | R)$.

17.2. La $P_{POSTERIORI}$ depende de la P_{PRIORI}

La $P_{POSTERIORI}$ depende tanto de la P_{PRIORI} como del resultado del experimento actual. En la tabla siguiente se dan los valores de $P_{POSTERIORI}$ obtenidos aplicando el TB como en la tabla anterior para distintos valores de P_{PRIORI} y el mismo resultado del experimento.

La primera fila del interior de la tabla, por ejemplo, dice que si son legales 999 monedas de cada mil, se toma una al azar y al tirarla 5 veces salen 5 caras, la prob de que sea legal es **0.989**. Es decir, si de una población donde son legales 999 de cada 1 000 monedas se toman millones de monedas y cada una se lanza 5 veces, entre las que hayan dado cara en las 5 tiradas, 989 cada mil son legales. Es grande la prob a priori, y por tanto, también la prob a posteriori.

Por el contrario, si es legal una moneda de cada cien, la prob de que sea legal una moneda que al tirarla 5 veces da cara en todas es **0.001**. Es decir, si de una población donde son legales 999 de cada 1 000 monedas se toman millones de monedas y cada una se lanza 5 veces, entre las que hayan dado cara en las 5 tiradas, una de cada mil es legal. Es pequeña la prob a priori, y por tanto, también la prob a posteriori.

Datos	P del test	Probabilidad H_0 cierta (moneda legal)	
		PRIORI	POSTERIORI
$N = 5 \rightarrow$ Todo caras	0.03	$P_{\text{PRIORI}} = 0.999$	$P_{\text{POSTERIORI}} = 0.989$
$N = 5 \rightarrow$ Todo caras	0.03	$P_{\text{PRIORI}} = 0.90$	$P_{\text{POSTERIORI}} = 0.46$
$N = 5 \rightarrow$ Todo caras	0.03	$P_{\text{PRIORI}} = 0.50$	$P_{\text{POSTERIORI}} = 0.08$
$N = 5 \rightarrow$ Todo caras	0.03	$P_{\text{PRIORI}} = 0.10$	$P_{\text{POSTERIORI}} = 0.01$
$N = 5 \rightarrow$ Todo caras	0.03	$P_{\text{PRIORI}} = 0.01$	$P_{\text{POSTERIORI}} = 0.001$

Recordemos:

- a) La Inferencia Clásica no tiene en cuenta la FR de monedas falsas en la población. Solo maneja el dato del valor P. Es la única opción cuando no se tiene noticia alguna sobre esa FR.
- b) Si el investigador conoce la FR de monedas falsas en la población, no puede evitar tenerla en cuenta, de modo que si sabe que esa FR es muy baja tiende a pensar que su moneda es legal y el resultado del “estudio” (cinco caras seguidas) se debe al azar. Y si sabe que esa FR es muy alta tiende a pensar que su moneda es falsa y el resultado del “estudio” (cinco caras seguidas) se debe a ello.
- c) La Inferencia Bayesiana incorpora la información previa (en nuestro ejemplo la FR de monedas falsas), de modo cuantitativo calculando la prob de que sea cierta la H_0 antes y después de conocer el resultado del estudio actual.

** **Ejercicio 17.1:** En la última fila pone $P_{\text{POSTERIORI}} = 0.001$. Compruebe que es correcto.

** **Ejercicio 17.2:** Compruebe que si la P_{PRIORI} es 0.10 la $P_{\text{POSTERIORI}}$ es 0.01.

** **Ejercicio 17.3:** Diga claramente, sin usar la palabra “probabilidad”, lo que indica cada una de las tres probabilidades de la última fila de la tabla: 0.03, 0.01 y 0.001

17.3. La $P_{\text{POSTERIORI}}$ depende del resultado del experimento actual

La $P_{\text{POSTERIORI}}$ depende del resultado del experimento actual tanto como de la P_{PRIORI} . En la siguiente tabla se dan las $P_{\text{POSTERIORI}}$ correspondientes a los mismos valores de P_{PRIORI} de la tabla anterior, pero ahora en el supuesto de que la moneda se haya lanzado 14 veces y haya salido cara en todas. Ahora el test da $P_{\text{UNI}} = 0.5^{14} = 0.00006$, una fuerte evidencia contra la H_0 . Y la prob de este resultado con una moneda falsa es $P = 0.8^{14} = 0.04398$.

Datos	P del test	Prob de que H_0 sea cierta (moneda legal)	
		PRIORI	POSTERIORI
$N = 14 \rightarrow$ Todo caras	0.00006	$P_{\text{PRIORI}} = 0.999$	$P_{\text{POSTERIORI}} = 0.58$
$N = 14 \rightarrow$ Todo caras	0.00006	$P_{\text{PRIORI}} = 0.90$	$P_{\text{POSTERIORI}} = 0.01$
$N = 14 \rightarrow$ Todo caras	0.00006	$P_{\text{PRIORI}} = 0.50$	$P_{\text{POSTERIORI}} = 0.002$
$N = 14 \rightarrow$ Todo caras	0.00006	$P_{\text{PRIORI}} = 0.10$	$P_{\text{POSTERIORI}} = 0.0002$
$N = 14 \rightarrow$ Todo caras	0.00006	$P_{\text{PRIORI}} = 0.01$	$P_{\text{POSTERIORI}} < 0.000014$

Observando la segunda fila de esta última tabla y de la tabla anterior vemos que si en la población son buenas el 90% de las monedas, tras obtener todo caras en una serie de 5 tiradas con una moneda, la prob de que sea buena es 0.46 y tras obtener todo caras en una serie de 14 tiradas, la prob de que sea buena es 0.01. Obtener 14 caras seguidas es más sospechoso que obtener 5 caras seguidas, es decir, es más evidencia contra la H_0 . Por ello, con 14 caras la $P_{\text{POSTERIORI}}$ baja respecto a la P_{PRIORI} más que con 5 caras.

El resultado del estudio, todo caras en las 14 tiradas, ha sido contundente, pues el valor P nos dice que con una moneda legal eso solamente ocurre 6 veces cada cien mil, por lo que en la inferencia clásica hay consenso en rechazar que sea legal. Pero si la FR de monedas legales es muy grande, es inicialmente muy probable que la nuestra sea legal y hay que contar con la posibilidad de que las 14 caras hayan aparecido por azar. La primera línea del interior de la tabla nos dice que si son legales 999 de cada mil monedas, la prob de que sea legal una que da todo caras en 14 lanzamientos es 0.58.

Por el contrario, si la FR de monedas legales es muy baja, es inicialmente muy improbable que la moneda sea legal, y si a eso se añade que en 14 tiradas salieron todo caras, el investigador tiene casi certeza de que la moneda es falsa. La penúltima línea de la tabla nos dice que si son legales solamente el 10% de las monedas, la prob de que sea legal una que da todo caras en 14 lanzamientos es 0.0002.

**** Ejercicio 17.4:** Compramos un dado en un almacén donde el 10% de los dados están trucados, de modo que en ellos la cara “5” no sale la sexta parte de las veces que se lanza el dado, sino la cuarta parte. Lo lanzamos 4 veces y sale “5” en todas. La prob inicial (a priori) de que el dado sea bueno es $P_{\text{PRIORI}} = 0.90$. Queremos saber la $P_{\text{POSTERIORI}}$, es decir, la probabilidad de que el dado sea bueno una vez que ha salido “5” en las 4 tiradas.

17.4. Inferencia Bayesiana en la investigación real

Veamos un ejemplo de situaciones que se presentan en prácticamente todos los ámbitos del análisis de datos. En cierta enfermedad para la que no hay tratamiento curan el 50% de los pacientes y un investigador propone un nuevo tratamiento, “A”, con el que cree curarán en torno al 70%. Se prueba el fármaco “A” en una muestra de 10 enfermos y se encuentra que entre ellos curan 8, es decir, 80%. Para la H_0 que dice que “A” es inútil se obtiene $P_{\text{UNILATERAL}} = 0.055$, que no constituye evidencia fuerte contra ella. El Intervalo de confianza al 95%, $IC_{95\%} = 48\% \text{ y } 93\%$,

muestra que el resultado es compatible con que “A” sea muy efectivo, sea poco o nada efectivo, e incluso con que sea un poco perjudicial. Esto es lo más razonable que se puede concluir dentro del marco de la Inferencia Clásica.

Pero es inevitable tener más confianza en su efectividad cuanto más fiable sea la entidad que lo propone. Si lo propone un laboratorio con largo historial de descubrimientos farmacológicos, consideramos el resultado un claro indicio a favor de “A”. Si, por el contrario, “A” es una receta casera propuesta por un “paramédico” poco riguroso, consideramos el resultado como pobre, subrayando que es compatible con que “A” sea inútil.

El enfoque bayesiano incorpora esa confianza previa como P_{PRIORI} y después la actualiza teniendo en cuenta el resultado del estudio actual (8 curaciones en 10 tratados), generando la $P_{POSTERIORI}$. Por ejemplo, si “A” procede de un paramédico pintoresco y le damos $P_{PRIORI} = 0.02$ se encuentra $P_{POSTERIORI} = 0.13$. Para calcular esa prob comenzamos por anotar las P_{PRIORI} en una tabla

Cálculo de la $P_{POSTERIORI}$ cuando $P_{PRIORI} = 0.02$ (paramédico exótico)			
Posibles situaciones →	A inutil: “A-“ Cura 50%	A útil: “A+“ Cura 70%	Suma
$P_{PRIORI}: P(A) \rightarrow$	0.98	0.02	1

El siguiente paso es calcular con la Distribución Binomial la prob de que aparezca el resultado obtenido o más extremo aún (8 o más curaciones entre 10 tratados) si “A” es inútil (P del test), es decir, si cura realmente 50%, $P(\text{Resultado} | A \text{ cura } 50\%) = 0.055$ y la prob de que aparezca ese resultado si “A” cura 70%, $P(\text{Resultado} | A \text{ cura } 70\%) = 0.38$. En este contexto a estas probabilidades se les llama **verosimilitudes**. La tabla siguiente recoge esta información:

Cálculo de la $P_{POSTERIORI}$ cuando $P_{PRIORI} = 0.02$ (paramédico exótico)			
	A inútil: “A-“ Curan 50%	A útil: “A+“ Curan 70%	Suma
$P_{PRIORI}: P(A) \rightarrow$	0.98	0.02	1
Verosimilitud: $P(\text{Resultado} A)$	0.055	0.383	

A partir de estos datos se calculan las probabilidades conjuntas y $P_{POSTERIORI}$

Calculo de la $P_{POSTERIORI}$ cuando $P_{PRIORI} = 0.02$ (paramédico exótico)			
	A inútil: “A-“ Curan 50%	A útil: “A+“ Curan 70%	Suma
$P_{PRIORI}: P(A) \rightarrow$	0.98	0.02	1
$P(\text{Resultado} A)$	0.055	0.383	
$P(R \text{ y } A)$	$0.98 \times 0.055 = 0.054$	$0.02 \times 0.008 = 0.008$.062
$P_{POSTERIORI}: P(A R)$	$P(A- R) = 0.054 / 0.062 = 0.87$	$P(A+ R) = 0.008 / 0.062 = 0.13$	

Interpretemos estas probabilidades como FR:

- P_{PRIORI} (“A” cure 70%) = 2% y P_{PRIORI} (“A” cure 50%) = 98% → Asumimos que de cada 100 productos propuestos por el curandero 2 serán útiles y 98 inútiles.

- **Verosimilitud: $P(\text{Resultado} | A^-) = 0.055 \rightarrow$** Si “A” cura realmente 50%, este resultado (8 curaciones en 10 pacientes tratados) ocurrirá, en promedio, 55 de cada 1 000 veces que se repita el estudio.
- **Verosimilitud: $P(\text{Resultado} | A^+) = 0.383 \rightarrow$** Si “A” cura realmente 70%, este resultado ocurrirá, en promedio, 383 de cada 1000 veces que se repita el estudio.
- **$P(R \text{ y } A^-) = 0.054$, $P(R \text{ y } A^+) = 0.008$ y $P(R) = 0.062 \rightarrow$** Si el curandero propone muchos productos, 2% de ellos útiles (curan el 70%), y si se estudia cada uno en 10 pacientes, de cada 1 000 estudios 54 corresponden a producto inútil y con él se curaron 8 pacientes y 8 estudios de cada 1 000 casos corresponden a producto útil y con él se curaron 8 pacientes. Por tanto, en 62 de cada 1 000 estudios se curaron 8 pacientes entre los 10 tratados.
- **$P_{\text{POSTERIORI}}: P(A^- | R) = 0.87$ y $P(A^+ | R) = 0.13 \rightarrow$** De cada 100 estudios en que hubo 8 curaciones, 87 corresponden a producto inútil y 13 a producto útil (cura el 70%).

Veamos ahora cuál es la $P_{\text{POSTERIORI}}$ si “A” ha sido propuesto por un laboratorio de prestigio y estimamos que son efectivos 90 de cada 100 productos propuestos:

Cálculo de la $P_{\text{POSTERIORI}}$ cuando $P_{\text{PRIORI}} = 0.90$ (laboratorio de prestigio)			
	A inútil: “A ⁻ ” Curan 50%	A útil: “A ⁺ ” Curan 70%	Suma
$P_{\text{PRIORI}}: P(A)$	0.10	0.90	1
$P(\text{Resultado} A)$	0.055	0.383	
$P(R \text{ y } A)$	$0.1 \times 0.055 = 0.0055$	$0.1 \times 0.383 = 0.3447$	0.3502
$P_{\text{POSTERIORI}}: P(A R)$	$P(A^- R) = 0.0055 / 0.3502 \approx 0.02$	$P(A^+ R) = 0.3447 / 0.3502 \approx 0.98$	

Es decir, si la prob de que “A” sea útil (cure 70%) es inicialmente 90%, al tener en cuenta el resultado del experimento sube al 98%. Esta desigual valoración de un mismo resultado, dependiendo de la información previa que se tenga sobre el tema no es una arbitrariedad injustificada. Es un imperativo lógico del que no podemos sustraernos y se demuestra que con esa actitud a la larga nos aproximamos más a la realidad.

17.5. La probabilidad A PRIORI “subjetiva”

Al aplicar el TB en los tests estadísticos uno de los puntos más conflictivos es cómo establecer el valor de la P_{PRIORI} . En las ciencias aplicadas, la prob de que ocurra un suceso indica la FR con que se presenta a largo plazo. Por ejemplo, si decimos que la prob de que un individuo tenga la mutación M es 0.15, queremos decir que si tomamos millones de individuos de esa población, 15 de cada cien tendrán M.

En la mayoría de las situaciones de la investigación biomédica no hay una FR que cuantifique el grado de confianza que tenemos en que la hipótesis estudiada sea cierta. Por ejemplo, si la hipótesis de trabajo dice que el tratamiento “A” es útil y cura en torno al 70%, no suele haber una FR que refleje la confianza que tenemos en ello y podamos usarla como P_{PRIORI} para aplicar el TB.

Pero los conceptos “muy probable” y “poco probable” son válidos y utilizables aunque no se puedan cuantificar mediante FR. Por ello es razonable y útil convenir como P_{PRIORI} un número entre 0 y 1 que refleje el grado de confianza que se tiene. Se la llama “*probabilidad subjetiva*”, para distinguirla de la “*probabilidad frecuentista*” que se usa habitualmente.

En nuestro ejemplo, aunque no hubiera datos exactos sobre la FR con que el laboratorio de prestigio y el paramédico exótico habían propuesto anteriormente productos realmente efectivos, seguiría siendo cierto que en el caso del primero es “alta” y en el del segundo es “baja”. Y es razonable usar el TB para calcular la $P_{\text{POSTERIORI}}$ tras concretar la P_{PRIORI} en un número próximo a 1 en el caso del laboratorio y próximo a 0 en el caso del paramédico.

Contra las P_{PRIORI} subjetivas suele argumentarse que son “aproximadas”, lo que conlleva un margen de error en sus valores que se contagia necesariamente a las $P_{\text{POSTERIORI}}$. Ello es cierto, pero debe tenerse en cuenta que también son aproximadas y conllevan cierto margen de variación la mayor parte de las prob que se cuantifican mediante FR. Y en muchas ocasiones las $P_{\text{POSTERIORI}}$, aun teniendo cierto margen de imprecisión pueden ser muy informativas. Si se calcula, por ejemplo, que tras una tormenta el riesgo de que el agua potable de nuestra ciudad esté contaminada es “en torno al 85%”, no parece importante que ese riesgo pueda, en realidad, ser 81.3% o 91.4%. Todos entienden que es un riesgo muy alto y se abstendrán de beber.

17.6. Acotando los posibles valores de probabilidad

En todo caso, cabe estimar valores razonablemente “límites” para las P_{PRIORI} de modo que para las a posteriori podamos decir que serían mayores de tal cantidad y menores de tal otra, lo que puede ser muy útil de cara al problema que se investiga.

También en la vida común aplicamos espontáneamente este criterio. Veamos un ejemplo donde la información previa está cuantificada. Si un alumno obtiene 4.5 sobre 10 en el examen final y sus notas parciales previas son altas, el profesor le aprobará, pero si las notas previas son muy malas le suspenderá. Podría, por ejemplo, calcularse la nota definitiva, D, promediando la media de los exámenes parciales, P, y de la nota del examen final, F: $D = (P + F) / 2$. Pero consideremos el caso en el que se ha extraviado la P y por ello no se puede calcular la nota media definitiva. La Inferencia Clásica equivaldría a calificar al alumno teniendo en cuenta únicamente la nota final, mientras que la bayesiana equivale a atribuir a P valores acordes con la impresión que el profesor tiene al respecto. Si recuerda que el alumno tenía un comportamiento brillante, se usará P en torno a 9, lo que implica $D = 6.75$. Si recuerda que el alumno tenía un rendimiento muy pobre se usará P en torno a 2, lo que implica $D = 3.25$. El sentido común y el análisis riguroso dicen que estas aproximaciones son menos malas que ignorar totalmente el rendimiento durante el curso.

El enfoque de “mayor que” o “menor que” se aplicaría de este modo. Para el alumno con antecedentes brillantes podríamos hacer Previa = 9.5 y D sería 7, o podría hacerse Previa = 8.5 y D sería 6.5. No hay razones objetivas para decantarse

por uno de estos dos valores de Previa u otros del mismo orden, pero en todo caso es razonable y necesario considerar que sería $\text{Previa} > 8$, y por tanto $D > 6.25$, lo que supone un aprobado holgado. Por otra parte, si el alumno había tenido muy bajo rendimiento durante el curso y hacemos $\text{Previa} = 1$, obtenemos $D = 2.75$ y si hacemos $\text{Previa} = 1.5$, la D es 3. Tampoco aquí podemos decantarnos por uno de estos valores en particular, pero podríamos argumentar que la Previa sería inferior a 2, y por tanto la D sería inferior a 3.25, lo que implicaría un suspenso claro. También aquí puede demostrarse que con este criterio el profesor hará justicia más veces que si ignorara las notas previas y hay consenso general en que en muchas situaciones de la vida común y del quehacer científico, la información previa debe ser incorporada.

Vamos ahora al ejemplo de la medicina “A” que podría curar al 70% de los casos en vez el 50% que se obtenía sin tratamiento. La tabla a continuación recoge la $P_{\text{POSTERIORI}}$ de que “A” cure el 70%, en relación a seis distintas P_{PRIORI} :

Sin tratamiento curan 50% → Con “A” quizá 70%								
Muestra de 10 con tratamiento “A”: curan 8 → P del test = 0.055								
P_{PRIORI}	0.02	0.06	0.10	0.80	0.85	0.93
$P_{\text{POSTERIORI}}$	0.13	0.19	0.22	0.91	0.94	0.99

Así, si el promotor de A es muy poco fiable, puede discutirse si la P_{PRIORI} de que A sea eficaz es 0.02 ó 0.06 u otra cantidad parecida, pero habrá acuerdo general en que será menor de 0.10 y por tanto la $P_{\text{POSTERIORI}}$ será inferior a 22%. Si, por el contrario, el promotor es muy fiable, habrá acuerdo general en que la P_{PRIORI} será mayor de 0.80 y por tanto la $P_{\text{POSTERIORI}}$ será superior a 91%.

Estas cantidades son fácilmente calculables e interpretables por el investigador lego en Estadística y en muchos casos complementan la información que da el valor P del test.

17.7. Si el resultado del experimento actual es muy claro las P_{PRIORI} son poco relevantes

En general, la importancia de la información previa es mayor cuanto menos determinante es el resultado del experimento actual. Una vez más, esto es así tanto en la vida común como en la Inferencia Estadística. En el ejemplo del observador que veía el cielo parcialmente nuboso es claro que si observa un cielo totalmente despejado o manifiestamente lluvioso, la previsión del clima para las horas siguientes es escasamente modificada por los antecedentes meteorológicos de la región.

Veamos cómo ocurre lo mismo cuando usamos el TB para estimar las $P_{\text{POSTERIORI}}$. En el ejemplo del fármaco “A”, supongamos ahora que se probó en 50 personas y cayeron 40. La FR de curaciones es 0.80, como en el supuesto inicial, pero al ser la muestra mayor, el valor P del test ahora es $P_{\text{UNI}} = 0.00001$, que constituye notable evidencia contra la H_0 . En el cuadro siguiente vemos que si $P_{\text{PRIORI}} = 0.02$, es $P_{\text{POSTERIORI}} = 0.994$.

Cálculo de la $P_{POSTERIORI}$ cuando $P_{PRIORI} = 0.02$ y se curan 40 de $N = 50$			
Posibles situaciones en población	A no efectivo: "A" Curan 50%	A efectivo: "A" Curan 70%	Suma
$P_{PRIORI} : P(A)$	0.98	0.02	1
$P(\text{Resultado} A)$	0.00001	0.07885	
$P(R \text{ y } A)$	0.0000098	0.0015770	0.0015868
$P_{POSTERIORI} : P(A R)$	$P(A R) = 0.006$	$P(A+ R) = 0.994$	

Es decir, al tratarse de un estudio con más individuos la información que aporta es mayor, en este caso a favor de la eficacia de "A", y por ello aun en el caso de que la P_{PRIORI} sea baja la $P_{POSTERIORI}$ es 0.994, considerablemente más alta que la proporcionada por el estudio hecho sobre 10 enfermos.

Es decir, cuando el test clásico muestra evidencia contundente contra la H_0 , el TB indica que la prob de que sea cierta la alternativa es muy elevada, incluso en el supuesto de que su P_{PRIORI} sea muy modesta. Así vemos que si el tratamiento goza de escasa confianza inicial, $P_{PRIORI} = 0.02$, tras obtener 80% de curaciones en una muestra de 10 enfermos tratados, la prob de que "A" sea efectivo era 0.13. Pero si ese 80% de curaciones se obtuvo en una muestra de $N = 50$, la prob de que "A" sea efectivo es 0.994.

17.8. Varios valores para la hipótesis alternativa

Hemos considerado las $P_{POSTERIORI}$ para el caso en que "A" o bien es inútil (50% de curaciones) o bien cura el **70%**. La realidad es que en la mayoría de las situaciones de este tipo la información previa sugiere que el nuevo tratamiento es efectivo, es decir, cura más del 50%, pero sin que haya motivos para decantarse por una FR concreta de curaciones. Puede que con "A" se obtenga 60% de curaciones o quizá 80% u otra cantidad mayor de 50%. Por ello es más adecuado "repartir" la probabilidad entre diversos valores de FR de curaciones que podría obtenerse con "A", de acuerdo con la impresión que el investigador tiene sobre cuán probable es a priori cada uno de ellos, como en la tabla siguiente.

% de curaciones con A →	50%	60%,	70%	80%	90%
$P_{PRIORI} \rightarrow$	0.15	0.10	0.25	0.40	0.10

La tabla dice que damos $P = 0.15$ a la opción de que "A" sea inútil (con él curan 50%), damos $P = 0.10$ a la opción de que "A" cure 60%, damos $P = 0.25$ a la opción de que cure 70%, etcétera. Estas probabilidades constituyen la **distribución a priori**.

En la siguiente tabla, la tercera fila da las verosimilitudes, es decir, la prob de obtener lo hallado en nuestro estudio, que indicamos con "R" (8 curados entre 10 tratados con "A") condicionada a cada una de esas FR. Por ejemplo, si A cura realmente el 70%, se obtiene este resultado (8 curados entre 10 tratados con "A") en el 23% de las muestras.

La cuarta fila da las prob conjuntas (producto de la P_{PRIORI} por la verosimilitud) y finalmente la quinta fila contiene la **Distribución a Posteriori**, es decir, la prob de que el % de curaciones con “A” sea el de la cabecera de cada columna, dado que entre 10 enfermos tratados curaron 8:

% de curados con A	50%	60%,	70%	80%	90%	Suma
P_{APRIORI}	0.15	0.10	0.25	0.40	0.10	1
Verosimilitud: $P(R \%)$	0.04	0.12	0.23	0.30	0.19	
$P(\% \text{ y } R)$	0.006	0.012	0.058	0.120	0.019	0.215
$P(\% R) = P_{\text{POST}}$	0.03	0.06	0.27	0.56	0.09	1

Si la distribución a priori es otra, la distribución a posteriori toma otros valores. La siguiente tabla indica los cálculos y resultados para el caso en que la información a priori fuera pobre y no permitiera atribuir a cada uno de esos % de curación más probabilidad que a otros.

% de curaciones con A	50%	60%,	70%	80%	90%	Suma
$P_{\text{APRIORI}} = 0.80$	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	1
Verosimilitud: $P(R \%)$	0.04	0.12	0.23	0.30	0.19	
$P(\% \text{ y } R)$	0.008	0.024	0.046	0.060	0.038	0.176
$P(\% R) = P_{\text{POST}}$	0.05	0.14	0.26	0.34	0.22	1

La siguiente tabla indica los cálculos y resultados para el caso en que la información a priori permite tener mucha confianza en que “A” aumenta el % de curaciones.

% de curaciones con A	50%	60%,	70%	80%	90%	Suma
$P_{\text{APRIORI}} = 0.80$	0.05	0.05	0.10	0.30	0.50	1
Verosimilitud: $P(R \%)$	0.04	0.12	0.23	0.30	0.19	
$P(\% \text{ y } R)$	0.002	0.006	0.023	0.090	0.095	0.216
$P(\% R) =$	0.009	0.028	0.106	0.417	0.440	1

La idea es que el investigador establezca como P a priori valores que reflejen razonablemente el conocimiento que se tiene sobre el tema antes de hacer este estudio y encuentre las $P_{\text{POSTERIORI}}$, que reflejan la situación tras el estudio.

17.9. La Inferencia Clásica y la Inferencia Bayesiana.

Ambos enfoques, el clásico y el bayesiano, tienen puntos débiles. Los partidarios de cada uno tienden a denunciar las inconsistencias del otro y a obviar las del propio. Los autores más serios —y el sentido común— consideran tan desplorable la postura excluyente de los estadísticos clásicos que no reconocen los aspectos positivos del bayesianismo, como las posturas maximalistas de los bayesianos que no reconocen sus aspectos más problemáticos. Y subrayan la necesidad de superar los enfrentamientos entre partidarios de uno u otro enfoque y asumir que no son métodos contrapuestos sino complementarios.

NO OLVIDE RECORDAR - 17

1. La experiencia y la lógica muestran que al interpretar los datos actualmente obtenidos sobre un tema, es muy ventajoso incorporar los conocimientos previos sobre él. Ello es así en todos los campos de la actividad humana, incluida la investigación científica.
2. El investigador no puede —ni debe— librarse de tener en cuenta esa información previa. Todos lo hacemos implícitamente y la Inferencia Bayesiana lo hace mediante el Teorema de Bayes, TB.
3. La Inferencia Clásica no incorpora los conocimientos previos sobre el tema que se investiga. La Bayesiana sí incorpora los conocimientos previos. Con ellos evalúa la probabilidad de que sea cierta una determinada hipótesis, P_{PRIORI} , y calcula cómo se modifica esa probabilidad por el resultado del estudio actual, $P_{\text{POSTERIORI}}$.
4. En la mayoría de las situaciones no se encuentra un contexto que permita encontrar una frecuencia relativa como la probabilidad de que sea cierta una hipótesis. Pero los conceptos “muy probable” y “poco probable” son válidos y utilizables aunque no se puedan cuantificar mediante frecuencias relativas. Por ello es razonable y útil convenir como P_{PRIORI} un número entre 0 y 1 que refleje el grado de confianza que se tiene en que sea cierta una hipótesis. Se la llama “**probabilidad subjetiva**”, para distinguirla de la “**probabilidad frecuentista**” que se usa habitualmente.
5. La influencia de la distribución a priori es menor cuanto más contundente es el resultado obtenido en el estudio actual.
6. La Inferencia Bayesiana es una especialidad muy consolidada pero poco accesible para el investigador sin formación matemática y, de hecho, totalmente ignorada por la mayoría de ellos.
7. El TB puede entenderse y aplicarse a situaciones sencillas sin tener formación matemática y sin conocer aspectos más complejos de la Inferencia Bayesiana propiamente dicha. Todos los investigadores podrían usarlo en determinadas situaciones para estimar la probabilidad de las hipótesis que analizan.
8. En el análisis estadístico de datos la Inferencia Clásica y la Inferencia Bayesiana no son alternativas contrarias sino complementarias.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 17

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

1. La experiencia y la lógica muestran que al interpretar los datos actualmente obtenidos sobre un tema, es improcedente incorporar los conocimientos previos sobre él.
2. La experiencia y la lógica muestran que al interpretar los datos actualmente obtenidos sobre un tema, es muy ventajoso incorporar los conocimientos previos sobre él. Ello es así en todos los campos de la actividad humana, incluida la investigación científica.
3. Solo en algunas ocasiones muy especiales tiene sentido incorporar los conocimientos previos.
4. El investigador debe librarse de esa tendencia que todos los humanos tenemos a tener en cuenta la información previa.
5. Todos incorporamos los conocimientos previos implícitamente y la Inferencia Bayesina lo hace explícitamente mediante el Teorema de Bayes, TB.
6. La Inferencia Clásica incorpora los conocimientos previos sobre el tema que se investiga.
7. La Inferencia Clásica no incorpora los conocimientos previos sobre el tema que se investiga.
8. La Inferencia Bayesiana incorpora los conocimientos previos y con ellos evalúa el valor P del test.
9. La Inferencia Bayesiana incorpora los conocimientos previos. Con ellos evalúa la probabilidad de que sea cierta una determinada hipótesis, P_{PRIORI} , y calcula cómo se modifica esa probabilidad por el resultado del estudio actual, $P_{\text{POSTERIORI}}$.
10. Se llama P_{PRIORI} a la probabilidad de que sea cierta una determinada hipótesis, evaluada sin tener en cuenta los resultados del estudio actual.
11. Se llama $P_{\text{POSTERIORI}}$ a la probabilidad de que sea cierta una determinada hipótesis, evaluada sin tener en cuenta los resultados del estudio actual.
12. Se llama $P_{\text{POSTERIORI}}$ a la probabilidad de que sea cierta una determinada hipótesis, evaluada teniendo en cuenta los resultados del estudio actual.
13. En la mayoría de las situaciones se encuentra un contexto que permite encontrar una frecuencia relativa como la probabilidad de que sea cierta una hipótesis.
14. En la mayoría de las situaciones no se encuentra un contexto que permite encontrar una frecuencia relativa como la probabilidad de que sea cierta una hipótesis.

15. Los conceptos “muy probable” y “poco probable” no son válidos y utilizables si no se puedan cuantificar mediante frecuencias relativas.
16. Los conceptos “muy probable” y “poco probable” son válidos y utilizables aunque no se puedan cuantificar mediante frecuencias relativas. Por ello es razonable y útil convenir como P_{PRIORI} un número entre 0 y 1 que refleje el grado de confianza que se tiene en sea cierta una hipótesis.
17. A ese número entre 0 y 1 que refleja el grado de confianza que se tiene en que sea cierta una hipótesis se la llama “*probabilidad subjetiva*”, para distinguirla de la “*probabilidad frecuentista*” que se usa habitualmente.
18. La influencia de la distribución a priori es menor cuanto más contundente es el resultado obtenido en el estudio actual.
19. La influencia de la distribución a priori es mayor cuanto más contundente es el resultado obtenido en el estudio actual.
20. La Inferencia Bayesiana es una especialidad muy poco accesible para el investigador y de hecho totalmente ignorada por la mayoría de ellos.
21. El TB puede entenderse y aplicarse a situaciones sencillas sin tener formación matemática y sin conocer aspectos más complejos de la Inferencia Bayesiana propiamente dicha. Todos los investigadores podrían usarlo en determinadas situaciones para estimar la probabilidad de las hipótesis que analizan.
22. En el análisis estadístico de datos la Inferencia Clásica y la Inferencia Bayesiana son alternativas contrarias y el investigador debe optar por una u otra.
23. En el análisis estadístico de datos la Inferencia Clásica y la Inferencia Bayesiana no son alternativas contrarias sino complementarias.

Capítulo 18

POTENCIA ESTADÍSTICA DE UNA INVESTIGACIÓN Y TAMAÑO DE MUESTRA PARA TESTS

En el Capítulo 12 veíamos las fórmulas relativas al tamaño de la muestra en relación con la **estimación** de proporciones y de medias poblacionales.

En este veremos las fórmulas del tamaño de la muestra en relación con **tests** estadísticos sobre proporciones y sobre medias. Para aplicarlas es necesario incorporar el concepto de **Potencia de un test**, que es, como veremos en detalle, la prob de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa, lo que equivale a la prob de concluir que en la población hay cierto efecto cuando realmente lo hay, por ejemplo, la prob de detectar que una medicina es útil cuando realmente lo es, o la prob de concluir que cierta droga aumenta el riesgo de depresión si realmente lo aumenta.

Aunque las ideas básicas son las mismas que en el Capítulo 12, este tiene alguna dificultad añadida de tipo lógico, no matemático. El lector que tenga dificultades para entenderlo puede prescindir de él o posponer su estudio para una fase posterior. El objetivo fundamental del libro queda cumplido si el lector ha captado las ideas básicas expuestas en los capítulos anteriores. Este capítulo es para quien desee adentrarse un poco más en la lógica de la Inferencia Estadística.

18.1. Error tipo I y Error tipo II. Región Crítica de Rechazo

En los tests de significación que hemos visto en los capítulos anteriores se plantea una cierta hipótesis nula. A la vista del resultado obtenido en la muestra y del valor P del test, esta hipótesis se rechaza o se acepta como posible. Pero en ningún caso estamos seguros de que lo correcto sea rechazar o no rechazar. Cualquiera que sea la decisión que adoptemos lo hacemos con un cierto riesgo de equivocarnos. Definimos los siguientes conceptos:

- **Error Tipo I** es el hecho de rechazar H_0 cuando es cierta. Se llama α a la prob de cometer error Tipo I, es decir, la prob de rechazar H_0 cuando es cierta.

- **Error Tipo II** es el hecho de no rechazar H_0 cuando es falsa. Se llama β a la prob de cometer ese error, es decir, la prob de no rechazar H_0 cuando es falsa.
- **Potencia** es $1 - \beta$, es decir, la prob de rechazar la H_0 cuando es falsa.
- **Región Crítica de Rechazo** es el conjunto de resultados muestrales que llevan a rechazar la hipótesis nula (que dan lugar a valores de $P < 0.05$ u otro valor acordado para rechazar).

Por ejemplo, si un juez plantea como hipótesis inicial que un ciudadano es inocente hasta que se demuestre su culpabilidad, *Error Tipo I* es el hecho de declararle culpable si realmente es inocente y *Error Tipo II* es el hecho de declararle inocente si realmente es culpable.

Cuando se trata de ver si el nuevo tratamiento “B” produce mayor proporción de curaciones que el clásico “A” y se plantea como H_0 que B no cura más que A.

- Error tipo I es concluir que B cura más que A, si realmente B cura igual que A. α es la prob de cometer ese error.
- Error tipo II es no concluir que B cura más que A, si realmente B cura más que A. β es la prob de cometer ese error.
- Potencia = $1 - \beta$ es la prob de concluir que B cura más que A si realmente B cura más que A.

Para ver cómo se calcula la prob de cometer cada uno de estos errores consideremos el caso en que sabemos que en la población de sanos la variable “X” se distribuye $N(50,10)$. En el MA de $N = 25$ las medias muestrales, M , tienen $\mu_{\text{Media}} = 50$ y $\sigma_{\text{Media}} = 10/5 = 2$. Se sospecha que en los pacientes con leucemia la media poblacional de “X” es mayor de 50, $\mu_{\text{Leuc}} > 50$. Para investigarlo tomaremos una muestra de $N = 25$ leucémicos y plantearemos la H_0 : $\mu_{\text{Leuc}} = 50$ (asumimos que σ en leucémicos es próxima a 10).

Si se encuentra, por ejemplo, $M = 58$, es $Z = 4$ y $P(Z > 4) = 0.00003 \rightarrow$
Rechazamos H_0 .

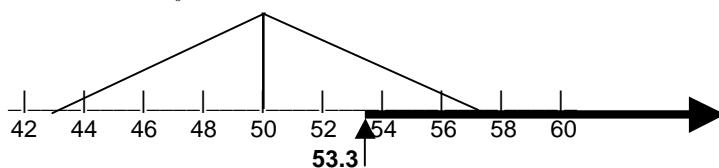
Si se encuentra por ejemplo, $M = 52$ es $Z = 1$ y $P(Z > 1) = 0.16 \rightarrow$
No rechazamos H_0 .

La **Potencia** de este estudio es la prob que tiene el investigador de encontrar un resultado muestral que le lleve a rechazar H_0 , es decir, a concluir que “X” está aumentada en la leucemia. Esta prob depende, entre otras cosas, del valor de P por debajo del cual se acuerda rechazar la hipótesis nula. En lo que sigue adoptamos el convenio de rechazar H_0 cuando sea $P \leq 0.05$. Esto implica riesgo 0.05 de rechazarla equivocadamente, es decir, de rechazar H_0 's que son ciertas. La Potencia del test depende también de:

- a. El valor que tome μ_{Leuc} . Como no se conoce esa cantidad se suele calcular la potencia para dos o tres posibles valores de μ_{Leuc} . Cuanto mayor sea μ_{Leuc} mayor será la prob de rechazar H_0 .
- b. El tamaño de la muestra, N . Cuanto mayor sea N , mayor será la prob de concluir que $\mu_{\text{Leuc}} > 50$ si realmente lo es.

Vamos a calcular la potencia para el caso en que se acuerde rechazar H_0 si es $P \leq 0.05$. ¿Qué valor de la media muestral, M , nos daría $P = 0.05$? En las tablas de la Distribución Normal, DN, encontramos que $P(Z \geq 1.64) = 0.05$ (en realidad, es $P = 0.0505$ para $Z = 1.64$ y es $P = 0.0495$ para $Z = 1.65$). Para utilizar Z con dos decimales podemos elegir cualquiera de los dos y ello puede variar los resultados en cuantía irrelevante). Es decir, el valor P del test es 0.05 si M supera a 50 en 1.64 desviaciones. Puesto que es $\sigma_{\text{Media}} = 2$, 1.64 desviaciones es $1.64 \cdot 2 = 3.28$ unidades y es $M = 50 + 3.28 \approx 53.3$. Por tanto, recharemos H_0 si M es igual o mayor de 53.3, puesto que nos dará $P < 0.05$. La Región Crítica es, por tanto, el intervalo formado por todos los valores mayores o iguales de 53.3. Resumiendo:

Acordamos rechazar H_0 cuando sea $P \leq 0.05$ y por ello cuando sea $M \geq 53.3$.



En la gráfica los segmentos oblicuos representan esquemáticamente la distribución Normal de las medias muestrales al hacer MA de la población de sanos, con $\mu_{\text{Media}} = 50$ y $\sigma_{\text{Media}} = 2$. También sería la distribución de las medias muestrales al hacer MA de la población de leucémicos si en ellos la media poblacional fuera 50, como en sanos. La flecha indica la Región Crítica de Rechazo, desde $M = 53.3$ y extendiéndose indefinidamente a la derecha.

El investigador no sabe si la media poblacional de leucémicos es 50 o es un valor mayor. Tomará una muestra de $N = 25$ y hará el test que plantea la $H_0: \mu_{\text{Leuc}} = 50$. Si encuentra $P \leq 0.05$, es decir, $M \geq 53.3$, rechazará esa hipótesis y concluirá que es $\mu_{\text{Leuc}} > 50$.

Si es $\mu_{\text{Leuc}} = 50$ puede ocurrir que la media de la muestra salga por azar mayor de 53.3 y lleve al investigador a rechazar la H_0 equivocadamente. Lo llamamos Error Tipo I. A la prob de que ocurra ese error la llamamos “ α ”. Si es $\mu_{\text{Leuc}} > 50$ la media muestral tomará, en general, un valor mayor que si es $\mu_{\text{Leuc}} = 50$, pero puede ocurrir que salga una muestra con media menor de 53.3, de modo que el investigador no rechace H_0 , equivocadamente. Lo llamamos Error Tipo II. A la prob de que ocurra ese error la llamamos “ β ”. El investigador desea que la prob de cometer cada uno de esos errores sea lo más pequeña posible. Pero ello depende en gran parte del tamaño de la muestra.

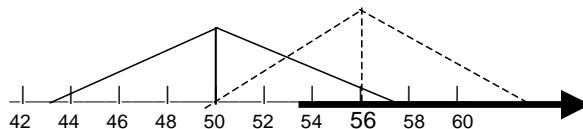
18.2. Potencia estadística de un test

Para calcular cuán probable es cometer cada uno de esos errores calcularemos la prob de que la M esté o no esté en la Región Crítica de rechazo. Lo calcularemos para el caso en que es $\mu_{\text{Leuc}} = 50$ y para algunos valores concretos mayores de 50 de μ_{Leuc} .

1º- Potencia para $\mu_{\text{Leuc}} = 56$

Buscamos la prob de rechazar H_0 , es decir, de que salga $M \geq 53.3$ si es $\mu_{\text{Leuc}} = 56$. En una DN con media 56, el valor 53.3 se separa $Z = -1.35$ desviaciones de 56, por lo que

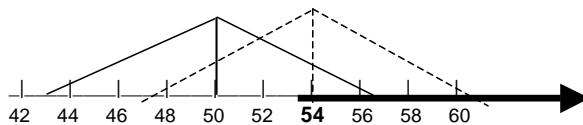
$$\text{Potencia} = P(M \geq 53.3 \mid \mu_{\text{Leuc}} = 56) = P(Z \geq (53.3 - 56) / 2) = P(Z \geq -1.35) = \mathbf{0.91}$$



Si es $\mu_{\text{Leuc}} = 56$, en 91 de cada 100 muestras la media será mayor o igual de 53.3, por lo que dará $P \leq 0.05$ y llevará a concluir, acertadamente, que es $\mu_{\text{Leuc}} > 50$.

2º- Potencia para $\mu_{\text{Leuc}} = 54 \rightarrow$ Buscamos $P(M \geq 53.3 \text{ si } \mu_{\text{Leuc}} = 54)$

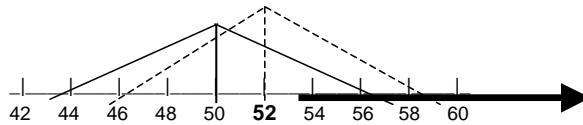
$$\text{Potencia} = P(M \geq 53.3 \mid \mu_{\text{Leuc}} = 54) = P(Z \geq (53.3 - 54) / 2) = P(Z \geq -0.35) = \mathbf{0.63}$$



Si es $\mu_{\text{Leuc}} = 54$, en 63 de cada 100 muestras será $M \geq 53.3$, es decir, $P \leq 0.05$ y llevará a concluir, acertadamente, que es $\mu_{\text{Leuc}} > 50$

3º- Potencia para $\mu_{\text{Leuc}} = 52 \rightarrow$ Buscamos $P(M \geq 53.3 \text{ si } \mu_{\text{Leuc}} = 52)$

$$\text{Potencia} = P(M \geq 53.3 \mid \mu_{\text{Leuc}} = 52) = P(Z \geq (53.3 - 52) / 2) = P(Z \geq 0.65) = \mathbf{0.26}$$

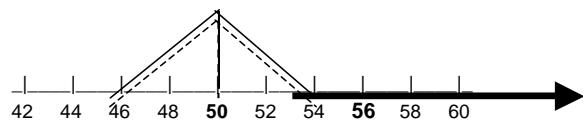


Si es $\mu_{\text{Leuc}} = 52$, en 26 de cada 100 muestras será $M \geq 53.3$, es decir, $P \leq 0.05$ y llevará a concluir, acertadamente, que es $\mu_{\text{Leuc}} > 50$.

Es decir, con un muestra de $N = 25$, la prob de encontrar $M \geq 53.3$ y por ello $P \leq 0.05$, y entonces concluir que "X" está aumentada en la leucemia es 0.91 para $\mu_{\text{Leuc}} = 56$, es 0.63 para $\mu_{\text{Leuc}} = 54$ y es 0.26 para $\mu_{\text{Leuc}} = 52$.

4º- Si es $\mu_{\text{Leuc}} = 50$ la Potencia es $P(M \geq 53.3 \mid \mu_{\text{Leuc}} = 50)$

$$Z = (53.3 - 50) / 2 = 3.3 / 2 \approx 1.64 \quad P(Z \geq 1.64) = 0.05.$$

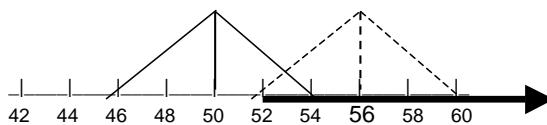


Si es cierta H_0 la prob de rechazarla equivocadamente es precisamente el valor P del test por debajo del cual el investigador decidió rechazar, en este caso 0.05. A esta prob se le llama α .

Veamos ahora cuáles son las potencias con $N = 64$. Ahora es $\sigma_{\text{Media}} = 10 / 8 = 1.25$ ¿Qué valor de M nos daría $P = 0.05$? El valor P es 0.05 si M supera a 50 en 1.64 desviaciones. $M = 50 + 1.64 \cdot 1.25 = 50 + 2 = 52$.

1º- Potencia para $\mu_{\text{Leuc}} = 56 \rightarrow P(M \geq 52 \text{ si } \mu_{\text{Leuc}} = 56)$

$$\text{Buscamos } P(M \geq 52 | \mu_{\text{Leuc}} = 56) = P(Z \geq (52 - 56) / 2) = P(Z \geq -2) = 0.977$$



Con $N = 64$, si es $\mu_{\text{Leuc}} = 56$, en 977 de cada 1000 muestras la M será mayor o igual de 52, por lo que dará $P \leq 0.05$ y llevará a concluir, acertadamente, que es $\mu_{\text{Leuc}} > 50$.

2º- Potencia para $\mu_{\text{Leuc}} = 54 \rightarrow P(M \geq 52 \text{ si } \mu_{\text{Leuc}} = 54)$

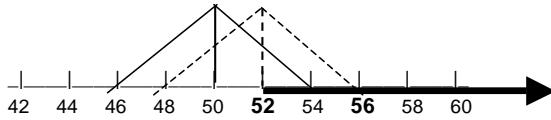
$$\text{Potencia} = P(M \geq 52 | \mu_{\text{Leuc}} = 54) P(Z \geq (52 - 54) / 2) = P(Z \geq -1) = 0.84.$$



Con $N = 64$, si es $\mu_{\text{Leuc}} = 54$, en 84 de cada 100 muestras la M será mayor o igual de 52, por lo que dará $P \leq 0.05$ y llevará a concluir, acertadamente, que es $\mu_{\text{Leuc}} > 50$.

3º- Potencia para $\mu_{\text{Leuc}} = 52 \rightarrow P(M \geq 52 \text{ si } \mu_{\text{Leuc}} = 52)$

$$P(M \geq 52 | \mu_{\text{Leuc}} = 52) = P(Z \geq 0) = 0.50$$

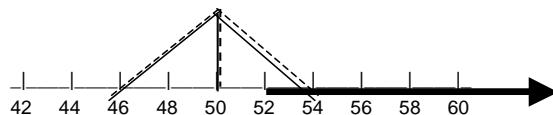


Con $N = 64$, si es $\mu_{\text{Leuc}} = 52$, en 50 de cada 100 muestras la M será mayor o igual de 52, por lo que dará $P \leq 0.05$ y llevará a concluir, acertadamente, que es $\mu_{\text{Leuc}} > 50$.

Es decir, con una muestra de $N = 64$, la prob de encontrar $M \geq 52$ y por ello $P \leq 0.05$, y concluir que "X" está aumentada en la leucemia es 0.999 si $\mu_{\text{Leuc}} = 56$, es 0.84 si $\mu_{\text{Leuc}} = 54$ y es 0.50 si $\mu_{\text{Leuc}} = 52$.

4º- Si es $\mu_{\text{Leuc}} = 50$, Potencia = $P(M > 52 | \mu_{\text{Leuc}} = 50)$.

$$Z = (52 - 50) / 1.25 = 2 / 1.25 \approx 1.64 \quad P(Z > 1.64) = 0.05.$$



En la siguiente tabla que recogen estos resultados y se aprecia claramente que la potencia estadística es mayor cuanto mayor es el efecto real, es decir, cuanto más aumentada está la media de X en leucémicos, y cuanto mayor es el tamaño de la muestra.

Potencia = Prob. de encontrar test con $P \leq 0.05$, según sea μ_{Leuc}				
	$\mu_{\text{Leuc}} = 50$	$\mu_{\text{Leuc}} = 52$	$\mu_{\text{Leuc}} = 54$	$\mu_{\text{Leuc}} = 56$
$N = 25$	0.05	0.26	0.64	0.91
$N = 84$	0.05	0.50	0.84	0.98

** Ejercicio 18.1: Con el mismo planteamiento de los ejemplos anteriores, si tomamos una muestra de $N = 100$:

- ¿Cuál es la Región Crítica de Rechazo?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente es $\mu_{\text{Leuc}} = 50$?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente es $\mu_{\text{Leuc}} = 52$?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente es $\mu_{\text{Leuc}} = 54$?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente es $\mu_{\text{Leuc}} = 56$?

** Ejercicio 18.2: Se sabe que la duración de la vida de cierta cepa de ratones tiene vida media poblacional 300 días y $\sigma = 18$. Se sospecha que la sobrealimentación acorta la vida media, $\mu_{\text{SOBREALI}} < 300$. Se sobrealimentará a una muestra de $N = 36$ ratones. La H_0 que dice que realmente no hay ese efecto, es decir, que es $\mu_{\text{SOBREALI}} = 300$, se rechazará si se encuentra $P_{\text{UNIL}} \leq 0.05$.

- ¿Cuál es la Región Crítica de Rechazo?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente es $\mu_{\text{SOBREALI}} = 300$?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente es $\mu_{\text{SOBREALI}} = 296$?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente es $\mu_{\text{SOBREALI}} = 292$?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente es $\mu_{\text{SOBREALI}} = 289$?

18.3. Potencia estadística de un estudio con variable cualitativa

Si la variable respuesta es dicotómica las probabilidades se calculan usando la Distribución Binomial. Consideremos el caso de una enfermedad para la que hasta ahora no había tratamiento y curaba espontáneamente el 20% de los pacientes. Sospechamos que un nuevo tratamiento, “A” es efectivo, es decir, con él se curan más del 20%, $\pi_A > 20\%$. Damos “A” a una muestra de $N = 10$ enfermos. Plantea-

mos como H_0 que “A” es inútil, $\pi_A = 20\%$ y acordamos rechazar H_0 si es $P \leq 0.05$. La tabla siguiente da las prob de la Distribución Binomial implicada. $FR(X)$ es la proporción de muestras con 0, 1, 2, ... curaciones y P_{COLA} la proporción de muestras con X o más curaciones, o con X o menos curaciones.

Rechazaremos H_0 si $P \leq 0.05$, es decir, si la P_{COLA} es ≤ 0.05 . Vemos en la tabla que esto ocurre si en la muestra aparecen 5 o más curaciones pues P_{COLA} es 0.033 para $X = 5$ y es 0.121 para $X = 4$. La región crítica es $X \geq 5$ (la sombreada).

$\pi = 0.20$											
MA de N = 10											
X →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p →	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
FR(X)	.107	.268	.302	.201	.088	.026	.006	.001	.0001	.000004	.0000001
P_{COLA}	.107	.375		.322	.121	.033	.0071	.0011	.0001	.000004	.0000001

Veamos ahora la prob de encontrar $P \leq 0.05$, es decir, encontrar $X \geq 5$ (concluyendo que A es efectivo) para distintos valores de π_A . Será la Potencia del test para distintos π_A .

1º- Si es $\pi_A = 30\% \rightarrow$ Potencia = $P(X \geq 5 | \pi_A = 0.30)$

En una nueva Binomial con $\pi = 0.30$ hay que calcular la prob de obtener una muestra con 5 curaciones o más. Vemos en la tabla siguiente que esta prob es 0.152.

$\pi = 0.30$											
MA de N = 10											
X →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p →	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
FR(x)	.028	.121	.233	.267	.200	.103	.039	.009	.001	.0001	.000006
P_{COLA}	.149	.270	.537		.352	.152	.0491	.0101	.0011		

La prob de encontrar 5 o más curaciones si realmente con “A” se curan el 30% es $P(X \geq 5 | \pi_A = 0.3) = 0.152$. Si 100 investigadores hacen este estudio, 15 de ellos encontrarán $P \leq 0.05$ y declararán que “A” es útil. Debe estar claro que antes de tomar la muestra el investigador no conoce π_A y tampoco lo conoce después de tomar la muestra y hacer el test. Cuando encuentra $P \leq 0.05$ concluye que es $\pi_A > 0.20$,

2º- Si es $\pi_A = 50\% \rightarrow$ Potencia = $P(X \geq 5 | \pi_A = 0.50)$

$\pi = 0.5$											
MA de N = 10											
X →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p →	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1
FR(x)	.0010	.0098	.0439	.1172	.2051	.2461	.2051	.1172	.0439	.0098	.0010
P _{COLA}		.0108	.0547	.1719	3770	.623	3770	.1719	.0547	.0108	

Si es $\pi_A = 0.5$, la prob de encontrar $P \leq 0.05$, es decir, de encontrar $X \geq 5$, es 0.623. Si 1 000 investigadores hacen este estudio, 623 de ellos encontrarán $X \geq 5$ y por ello $P \leq 0.05$ y declararán que “A” es útil.

3º- Si es $\pi_A = 80\% \rightarrow$ Potencia = $P(X \geq 5 | \pi_A = 0.80)$

Con la Distribución Binomial con $N = 10$ y $\pi_A = 0.8$, vemos que la prob de encontrar $P \leq 0.05$, es decir, de encontrar $X \geq 5$, es 0.994. Si 1 000 investigadores hacen este estudio con un producto que realmente cura 80% (pero los investigadores no lo saben), 994 de ellos declararán que “A” es útil, porque en el test aparece $P \leq 0.05$.

** **Ejercicio 18.3:** Si en el ejemplo anterior se acuerda rechazar H_0 con $P \leq 0.01$:

- ¿Cuál es la Región Crítica de Rechazo?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente “A” cura el 30%?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente “A” cura el 50%?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente “A” cura el 80%?

** **Ejercicio 18.4:** En cierta enfermedad el tratamiento clásico produce 10% de curaciones, $\pi_{\text{Clásico}} = 0.10$. Para ver si el tratamiento “B” es mejor se dará a $N = 5$ enfermos. Llamaremos “X” al número de curados y haremos un test con la hipótesis nula H_0 : “B no es efectivo, es decir, $\pi_B = 0.10$ ”. Se rechazará H_0 , concluyendo que B es mejor que el clásico, si $P_{\text{UNI}} \leq 0.05$.

- ¿Cuántos curados esperamos si es cierta H_0 ?
- ¿Cuál es la Región Crítica de Rechazo?
- Si B es inútil, es decir, si es $\pi_B = 0.10$, ¿cuál es la prob de declarar que es útil?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente “A” cura el 30%?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente “A” cura el 50%?
- ¿Qué potencia tendría el estudio si realmente “A” cura el 90%?

18.4. Tamaño mínimo de muestra para tests con Una Proporción

Consideremos el caso de una enfermedad que sin tratamiento se cura en el 10% de los casos, $\pi = 0.10$. Sospechamos que el nuevo tratamiento “T” cura más de 10%.

Tomaremos una muestra, plantearemos como H_0 que T es inútil ($\pi_T = 0.10$) y la rechazaremos, a favor de que es útil, si la FR muestral de curaciones, p , es mayor de 0.10 y el valor P del test es muy pequeño. Aunque ningún valor de P nos garantiza que T sea útil, para poder cuantificar las utilidades de cada tamaño de muestra es preciso acordar un valor α , que es el valor de P por debajo del cual se calificará el resultado como “significativo”, y el producto T como “útil”. Ya sabemos que no hay un tamaño que sea el “adecuado”. Cuanto mayor sea la muestra más información proporciona. La fórmula que sigue **no** es para determinar el “tamaño adecuado”, sino para calcular las “prestaciones” que proporciona cada tamaño.

$$N = \frac{\left[Z_\alpha \sqrt{\Pi(1-\Pi)} + Z_\beta \sqrt{p_T(1-p_T)} \right]^2}{(\Pi - p_T)^2}$$

$\pi \rightarrow$ Proporción de curados realmente sin tratamiento.

$P_T \rightarrow$ Estimador de la proporción de curados realmente con T.

Si se sospecha que T cura más de 10% pero no se sabe cuánto puede ser p_T , aplicaremos la fórmula varias veces, con diferentes valores de p_T , como veremos en seguida.

$\alpha \rightarrow Z_\alpha$ es el valor de Z que en la DN deja por encima una proporción igual a α . Así, $Z_{0.05} = 1.64$ porque $P(Z > 1.64) = 0.05$ y $Z_{0.01} = 2.33$.

$\beta \rightarrow$ Es la prob de encontrar valor P del test $> \alpha$ y por ello de no declarar T como “útil” si realmente T cura más de 10%. La cantidad $1 - \beta$ se llama **Potencia del Test** y es la prob de declarar “útil” un producto que realmente es útil. Si, por ejemplo, queremos Potencia 85%, es $\beta = 0.15$, Z_β es el valor de Z más allá del cual hay 15% en la DN, es decir, $Z_\beta = 1.04$.

Estas ideas se entienden mejor con ejemplos. *Decidimos* estos valores:

$\pi = 0.10$ Sin tratamiento, la FR poblacional de curados es 10%.

$p_T = 0.40$ Con T, la FR poblacional de curados es próxima a 40%.

$\alpha = 0.05$ $Z_\alpha = 1.64$ Declararemos “útil” un producto cuando el test da $P \leq 0.05$.

De este modo 5 de cada 100 productos inútiles serán declarados “útiles”.

$\beta = 0.15$, $Z_\beta = 1.04$ El 15% de los productos que realmente curan 40% no serán declarados “útiles” y el 85% sí lo serán. Con estas cantidades obtenemos:

$$N = [1.64 (0.1 \cdot 0.9)^{1/2} + 1.04 (0.4 \cdot 0.6)^{1/2}]^2 / (0.1 - 0.4)^2 = 11.14 \approx 12$$

La fórmula no dice que 12 es el tamaño “adecuado” para nuestra investigación, sino que con $N = 12$ tenemos las siguientes prestaciones:

- a) Si T es inútil tenemos riesgo 5% de declararlo “útil” (pues será en el test $P \leq 0.05$)
- b) Si T cura realmente 40% tenemos riesgo 15% de no declararlo “útil” (porque aparece $P > 0.05$) y prob 85% de declararlo “útil” (porque aparece $P \leq 0.05$).

Dicho de otro modo, si probamos muchos productos, unos útiles y otros inútiles, cada uno en una muestra de 12, 5 de cada 100 inútiles serán declarados “útiles” (aparece $P \leq 0.05$) y 15 de cada 100 que realmente curen 40% no son declarados “útiles” (aparece $P > 0.05$).

Por otra parte, si un producto cura realmente el 30%, su efecto real es menor ($30\% - 10\% = 20$ puntos) y para que la potencia (la prob de declararlo “útil”) sea 85%, necesitaremos muestras mayores. Veamos cuánto mayor con la fórmula:

$$N = [1.64 (0.1 \cdot 0.9)^{1/2} + 1.04 (0.3 \cdot 0.7)^{1/2}]^2 / (0.1 - 0.3)^2 = 24$$

Y si un producto cura realmente el 15%, su efecto real es menor ($15\% - 10\% = 5$ puntos) y para que la potencia sea 85% necesitaremos muestras mayores aún.

$$N = [1.64 (0.1 \cdot 0.9)^{1/2} + 1.04 (0.15 \cdot 0.85)^{1/2}]^2 / (0.10 - 0.15)^2 = 299$$

Pero, si queremos que sean declarados “útiles” el 99% de los productos que realmente curan 40%, es $\beta = 0.01$ y $Z_\beta = 2.33$

$$N = [1.64 (0.1 \cdot 0.9)^{1/2} + 2.33 (0.4 \cdot 0.6)^{1/2}]^2 / (0.1 - 0.4)^2 = 29.6 \approx 30$$

La tabla que sigue da los tamaños correspondientes a los distintos efectos y potencias, siendo en todos los casos $\alpha = 0.05$ el riesgo de declarar “útil” un producto que realmente es inútil.

$\pi = 0.10$	π_T		
↓ Potencia	0.4 (efecto = 0.3)	0.3 (efecto = 0.2)	0.15 (efecto = 0.05)
85%	12	24	299
99%	30	61	530

Cuanto mayor es N nos da más información y nos permite detectar efectos menores. Así, para tener prob 99% de dar como “útil” un producto, necesitamos $N = 30$ si realmente cura 40%, necesitamos $N = 61$ si realmente cura 30% y necesitamos $N = 530$ si realmente cura 15%.

En todos los ejemplos anteriores mantuvimos $\alpha = 0.05$, es decir, daríamos como “útiles” a 5 de cada 100 productos inútiles. Si queremos, que solamente 1 de cada mil productos inútiles sean declarados “útiles”, es $\alpha = 0.001$, $Z_\alpha = 3.1$. Así, para $\beta = 0.01$ ($Z_\beta = 2.33$) para $\pi_B = 0.4$ es $N = [3.1 (0.1 \cdot 0.9)^{1/2} + 2.33 (0.4 \cdot 0.6)^{1/2}]^2 / (0.1 - 0.4)^2 = 56$.

** **Ejercicio 18.5:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 299$.

** **Ejercicio 18.6:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 61$.

** **Ejercicio 18.7:** El partido político IOS (Independencia para Orejuela del Sordete) obtuvo en las elecciones pasadas 20% de votos. Sospechamos que actualmente esa FR ha aumentado. Haremos una encuesta preguntando a N ciudadanos y a partir de la FR muestral intentaremos saber si la poblacional, π_{ios} , es mayor de

20%. Los sociólogos que proyectan la encuesta plantean la pregunta: ¿A cuántos ciudadanos debemos preguntar para que esta encuesta sea “fiable”?

Si usted no sabe qué se entiende por “fiable”, no se preocupe, ellos tampoco. Procedamos a calcular el N necesario para tener potencia 85% y 99% para detectar que es $\pi_{\text{IOS}} > 20\%$ si realmente es 30% y si realmente es 80%. Tras tomar la muestra se planteará la H_0 que dice que $\pi_{\text{IOS}} = 20\%$ y se rechazará esa H_0 si es FR muestral $> 20\%$ y es $P \leq 0.05$.

$\alpha = 0.05$	Si es $\pi_{\text{IOS}} = 0.3$	Si es $\pi_{\text{IOS}} = 0.8$
Potencia 85%		3
Potencia 99%		

** **Ejercicio 18.8:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 127$.

** **Ejercicio 18.9:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 7$.

18.5. Tamaño de muestra para tests con Dos Proporciones

En el apartado anterior veíamos el caso en que conocíamos una FR poblacional (la de curados sin ningún tratamiento, $\pi = 0.10$) y el estudio se hacía para ver si la FR poblacional de tratados con T, π_T , es diferente de π . La H_0 era $\pi_T = 0.10$.

En este apartado veremos el caso en que desconocemos las dos FR poblacionales y el estudio se hace para ver si dos productos, A y B, producen igual FR de curaciones en la población. Decimos que B es inútil si realmente cura igual que A, $\pi_B = \pi_A$.

Se hará un estudio tratando N enfermos con A y otros N con B. Viendo las FR de curaciones obtenidas en las muestras, p_A y p_B , intentaremos saber si realmente B es mejor que A. Se planteará la H_0 : $\pi_B = \pi_A$ ó $\pi_B - \pi_A = 0$ (los dos tratamientos curan igual).

Para poder cuantificar el grado de información que distintos tamaños de muestra nos producen es preciso acordar un valor de P por debajo del cual se calificará el resultado como “significativo” y el producto B como “util” (alta sospecha de que cura más que A).

Ya sabemos que no hay un tamaño que sea el “adecuado”. La fórmula correspondiente **no** calcula el “tamaño adecuado”, sino las “prestaciones” que producirá la muestra según el tamaño que se elija.

$$N = \left(\frac{p_A q_A + p_B q_B}{(p_B - p_A)^2} \right) \cdot (Z_\alpha + Z_\beta)^2$$

Si se sospecha que B cura más que A, pero no se sabe cuánto es esa ventaja, aplicaremos la fórmula varias veces, con diferentes valores de “ $p_B - p_A$ ”, como veremos ahora.

$p_A \rightarrow$ estimador del porcentaje real de curaciones con A, π_A , $q_A = 1 - p_A$

$p_B \rightarrow$ estimador del porcentaje real de curaciones con B, π_B , $q_B = 1 - p_B$

$\alpha \rightarrow$ es el valor P del test, por debajo del cual se acuerda calificar el resultado como “significativo”, y por ello calificar a B como “útil”. Para $\alpha = 0.05$, es $Z_{\alpha} = 1.64$.

$\beta \rightarrow$ Riesgo de encontrar valor P > α y por ello no declarar el resultado como “significativo”, no declarar B como “útil”, si realmente B cura más que A, concretamente si $\pi_B - \pi_A$ es la cantidad $p_B - p_A$ puesta en el denominador de la fórmula. $1-\beta$ es la **Potencia del Test** y es la prob de declarar “útil” un producto que realmente lo es. Si, por ejemplo, queremos $\beta = 15\%$, Z_{β} es el valor de Z más allá del cual están el 15% de los valores, es decir, $Z_{\beta} = 1.04$.

Ejemplo: decidimos:

$p_A = 0.60$, la proporción poblacional de curados con A es próxima a 60%.

$p_B = 0.90$, la proporción poblacional de curados con B es próxima a 90%.

$\alpha = 0.05$, $Z_{\alpha} = 1.64$. Declararemos “útil” los B que den $P \leq 0.05$ (de cada 100 productos realmente inútiles, 5 serán declarados “útiles”).

$\beta = 0.15$, $Z_{\beta} = 1.04$. El 15% de los productos B que realmente curan 30 puntos más que A no serán declarados “útiles” y el 85% sí lo serán

$$N = (0.6 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.1) \cdot (1.64 + 1.04)^2 / 0.3^2 = 26.3 \approx 27$$

Con una muestra de $N = 27$ tenemos prob = 0.05 de declarar “útil” los productos inútiles y tenemos prob = 0.15 de no declarar “útil” los productos que incrementan en 30 puntos la FR de curados. Es decir, si comparamos con el A miles de productos, 5 de cada 100 que son iguales a A serán declarados “útiles” erróneamente y 15 de cada 100 que curan 30 puntos más que A no serán declarados “útiles” erróneamente.

Para tener la misma prob de declarar “útil” un producto que realmente cura no 30, sino 20 puntos más que A, hará falta mayor muestra.

$$N = (0.6 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.2) \cdot (1.64 + 1.04)^2 / 0.2^2 = 72$$

Para tener la misma prob de declarar “útil” un producto que realmente cura solamente 10 puntos más que A, hará falta aun mayor muestra.

$$N = (0.6 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.3) \cdot (1.64 + 1.04)^2 / 0.1^2 = 323$$

Y si un producto cura solamente 5 puntos más que A, se necesita mayor N

$$N = (0.6 \cdot 0.4 + 0.65 \cdot 0.35) \cdot (1.64 + 1.04)^2 / 0.05^2 = 1343$$

Es decir, con una muestra de $N = 1343$ tenemos prob 0.05 de declarar “útil” los productos inútiles y tenemos prob 0.85 de declarar “útil” a los productos que curan 65%.

La tabla que sigue da los N recién calculados y los N para potencia de 99%:

$\pi_B - \pi_A \downarrow$	Potencia = 85%	Potencia = 99%
30%	$(.24 + .09)(1.64 + 1.04)^2 / .3^2 = 27$	$(.24 + .09)(1.64 + 2.33)^2 / .3^2 = 179$
20%	$(.24 + .16)(1.64 + 1.04)^2 / .2^2 = 72$	$(.24 + .16)(1.64 + 2.33)^2 / .2^2 = 158$
10%	$(.24 + .21)(1.64 + 1.04)^2 / .1^2 = 323$	$(.24 + .21)(1.64 + 2.33)^2 / .1^2 = 707$
5%	$(.24 + .2275)(1.64 + 1.04)^2 / .05^2 = 1343$	$(.24 + .2275)(1.64 + 2.33)^2 / .05^2 = 2948$

** **Ejercicio 18.10:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 179$.

** **Ejercicio 18.11:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 2948$.

18.6. Tamaño de muestra para tests con Una Media

Sabemos que la media poblacional de la variable “X”, dinero que gastan los franceses mayores de 40 años en medicinas alternativas en un año, fue **120 €** en el 2007, con σ próxima a **20 €**. Se sospecha que la crisis económica del 2008 conllevaría reducción de este gasto, es decir, que la media poblacional de X en el 2008 será inferior a 120, $\mu_{2008} < 120$. Esta es la hipótesis de trabajo. Para comprobarlo estudiaremos muestra de N franceses ¿Qué tamaño “debe” tener la muestra para que si plantemos como H_0 que $\mu_{2008} = 120$ tengamos confianza 90% en encontrar valor $P < 0.05$ cuando sea $\mu_{2008} = 100$?

La fórmula que relaciona el tamaño con sus prestaciones es:

$$N = \frac{(Z_\alpha + Z_\beta)^2 \sigma^2}{(120 - \mu_{2008})^2}$$

donde σ es la mejor estimación que tengamos de la desviación poblacional y Z_α y Z_β indican lo mismo que en el caso de tamaño para test con una proporción. La media poblacional en el 2008, μ_{2008} , no la conocemos (por eso planeamos esa investigación). Aplicaremos la fórmula para dos o tres valores de μ_{2008} , y veremos que los tamaños necesarios para detectar que la media poblacional del 2008 es menor de 120, son menores cuanto menor sea realmente μ_{2008} .

- Acordamos rechazar H_0 si es $P_{\text{UNIL}} \leq 0.05$. ($\alpha = 0.05$, $Z_{0.05} = 1.64$).
- Queremos tener Potencia 90%, es decir, prob 90% de declarar que es $\mu_{2008} < 120$, es decir, de encontrar $P \leq 0.05$ ($\beta = 0.10$, $Z_\beta = 1.29$).

$$N = [1.64 + 1.29]^2 \cdot 20^2 / (120 - \mu_{2008})^2 = 3434 / (120 - \mu_{2008})^2$$

Vemos que fijados α y β , N depende de **(120 - μ_{2008})**, es decir, de cuánto ha bajado la media poblacional en 2008.

Si ponemos $\mu_{2008} = 115$ es $N = 3434 / (120 - 115)^2 = 3434 / 25 = 138$

Si ponemos $\mu_{2008} = 110$ es $N = 3434 / (120 - 110)^2 = 3434 / 100 = 35$

Si ponemos $\mu_{2008} = 100$ es $N = 3434 / (120 - 100)^2 = 3434 / 400 = 9$

Es decir, para tener riesgo 5% de decir que es $\mu_{2008} < 120$ cuando realmente es $\mu_{2008} = 120$ y tener prob 90% de decir $\mu_{2008} < 120$ cuando realmente es $\mu_{2008} < 120$, necesitamos:

$N = 138$, si realmente es $\mu_{2008} = 115$

$N = 35$, si realmente es $\mu_{2008} = 110$

$N = 9$, si realmente es $\mu_{2008} = 100$

Cuanto menor sea μ_{2008} , menos individuos necesitaremos para detectar que es $\mu_{2008} < 120$.

**** Ejercicio 18.12:** Rellene las 4 celdas que faltan en la siguiente tabla.

		$\mu_{2008} \rightarrow$	115	110	100
$\downarrow \alpha$ (Z_α)	$\downarrow \beta$ (Z_β)	$\downarrow (Z_\alpha + Z_\beta)^2$			
0.05 (1.64)	0.10 (1.29)	8.59	138	35	9
0.05 (1.64)	0.01	15.76			16
0.01 (2.33)	0.01	15.84	348		

**** Ejercicio 18.13:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 16$.

**** Ejercicio 18.14:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 138$.

**** Ejercicio 18.15:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 348$.

**** Ejercicio 18.16:** El nivel de conocimientos que tienen los alumnos de último año de Bachiller se evalúa en una puntuación que puede tomar valores entre 1 y 200. La media poblacional en España en el 2000 fue de 50, con $\sigma = 10$. Se sospecha que en 2009 esa media es inferior a 50. Se tomará una muestra de N escolares, la $H_0: \mu_{2009} = 50$ se rechazará si es $P \leq 0.05$. Haga una tabla en la que se anote el tamaño necesario para encontrar $P \leq 0.05$ con prob 90% y con prob 98% si es $\mu_{2009} = 40$ y si es $\mu_{2009} = 30$.

**** Ejercicio 18.17:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 9$.

**** Ejercicio 18.18:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 14$.

18.7. Tamaño de muestra para tests con Dos Medias

Consideremos un estudio destinado a comparar el IR, Índice de Inmuno-resistencia, alcanzado con dos fármacos:

el clásico que llamaremos “1” $\rightarrow \mu_1$ = Media poblacional de IR en pacientes tratados con “1”

el nuevo que llamaremos “2” $\rightarrow \mu_2$ = Media poblacional de IR en pacientes tratados con “2”

¿Qué número de individuos deben incluirse en cada grupo?

$$N = 2 \cdot \left(\frac{\sigma^2}{(\mu_2 - \mu_1)^2} \right) \cdot (z_\alpha + z_\beta)^2$$

Si ponemos: $\delta = (\mu_2 - \mu_1)$ y $C = [\sigma / (\mu_2 - \mu_1)] = (\sigma / \delta)$ queda

$$N = 2 \cdot \left(\frac{\sigma^2}{\delta^2} \right) \cdot (z_\alpha + z_\beta)^2 \equiv 2 \cdot C^2 \cdot (z_\alpha + z_\beta)^2$$

$\sigma \rightarrow$ La σ poblacional de la variable estudiada (se asume igual en ambas poblaciones).

μ_1 y $\mu_2 \rightarrow$ No se conocen, por eso se va a hacer el estudio. Se calculará el N para dos o tres valores de $(\mu_2 - \mu_1)$.

$\alpha \rightarrow$ Convenimos rechazar la $H_0: \mu_2 = \mu_1$, y calificar “2” como “útil” cuando el test dé $P \leq \alpha$. α es el riesgo de concluir que $\mu_2 > \mu_1$ si realmente ambas son iguales.

$\beta \rightarrow$ Riesgo de encontrar $P \geq \alpha$, es decir, de no rechazar que $\mu_2 = \mu_1$, cuando realmente es $\mu_2 > \mu_1$ en la cantidad que se pone en el denominador de la fórmula (enseguida se ven ejemplos).

Los valores Z_α y Z_β se sacan de la tabla de la Distribución Normal.

Como en la fórmula aparece $[\sigma / (\mu_2 - \mu_1)]$, podemos calcular N en función de esa relación. Por ejemplo, puede calcularse N si μ_2 aventaja a μ_1 en *un tercio* de la desviación poblacional. En este caso es $C = [\sigma / (\mu_2 - \mu_1)] = 3$ y en la fórmula pondremos $N = 2 \cdot 3^2 \cdot (Z_\alpha + Z_\beta)^2 = 18 (Z_\alpha + Z_\beta)^2$. Y si μ_2 aventaja a μ_1 en *dos desviaciones*, es $C = [\sigma / (\mu_2 - \mu_1)] = 0.5$ y en la fórmula pondremos $N = 2 \cdot 0.5^2 \cdot (Z_\alpha + Z_\beta)^2 = 0.5 (Z_\alpha + Z_\beta)^2$.

Las cantidades α y β no es cuestión de ‘conocerlas’ sino de **decidirlas**, y para ello no hay criterios objetivos externos. El investigador debe ser consciente de que el tamaño de la muestra depende de cuán pequeños quiere él que sean los riesgos de equivocarse en uno y otro sentido. Veamos posibles N según sean las medias, la desviación y el riesgo de error:

	$(\delta/\sigma) \rightarrow$	2	1	1/2	$1/4$
	$(\sigma/\delta)^2 \rightarrow$	0.25	1	4	16
$\downarrow \alpha \quad (Z_\alpha)$	$\downarrow \beta \quad (Z_\beta)$	$\downarrow (Z_\alpha + Z_\beta)^2$			
0.05 (1.65)	0.20 (0.85)	6.25	4		50
0.05 (1.65)	0.05 (1.65)	10.89	6	22	88
0.01 (2.33)	0.05 (1.65)	15.84	8	32	127
0.001 (3.1)	0.01 (2.33)	29.48		59	236
					944

Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$ y realmente μ_2 aventaja a μ_1 en *dos desviaciones*, con $N = 4$ en cada grupo tenemos potencia 80%. Es decir, tenemos prob 0.80 de encontrar $P \leq 0.05$ y por ello calificar a “2” como “útil”. O lo que es lo mismo, si comparamos muchos productos contra el “1”, 80 de cada 100 en que realmente es $(\mu_2 - \mu_1) = 2 \sigma$ serán declarados “útiles”, porque se encontró $P \leq 0.05$, mientras que los otros 20 no serán declarados “útiles”, porque se encontró $P > 0.05$.

Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.01$ y realmente μ_2 aventaja a μ_1 en *media desviación*, con $N = 127$ en cada grupo tenemos potencia 95%. Es decir, si comparamos muchos productos contra el “1”, 95 de cada 100 en que realmente

es ($\mu_2 - \mu_1$) = **0.5 σ** serán declarados “útiles”, porque se encontró $P \leq 0.05$, mientras que los otros 5 no serán declarados “útiles”, porque se encontró $P > 0.05$.

**** Ejercicio 18.19:** Calcule el N correspondiente a la celda abajo a la izquierda en la tabla anterior. ¿Qué prestaciones nos da ese tamaño?

**** Ejercicio 18.20:** Calcule el N correspondiente a la celda vacía de la primera fila en la tabla anterior. ¿Qué prestaciones nos da ese tamaño?

**** Ejercicio 18.21:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 22$ (si le resulta difícil explicarlo en una sola frase larga, hágalo en dos o tres frases cortas).

**** Ejercicio 18.22:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 200$.

**** Ejercicio 18.23:** Observando la tabla anterior diga, en una frase concisa y clara, qué prestaciones nos da una muestra de $N = 944$.

18.8. Tamaños extremadamente pequeños o grandes

Hemos visto que para entender las prestaciones que da cada tamaño de muestra en relación con el test estadístico que se proyecta hacer es necesario manejar el concepto de **potencia** del test. No obstante, aun sin manejar ese concepto puede entenderse que hay tamaños inadecuadamente pequeños o inadecuadamente grandes.

A. Tamaños inadecuadamente pequeños

Un tamaño es inadecuadamente pequeño si incluso con el resultado muestral más favorable a la hipótesis de trabajo no se alcanzara un valor P suficientemente pequeño para rechazar la H_0 .

Considere el caso de un médico que tiene “la impresión” de que para cierta enfermedad el tratamiento “A” es mejor que el “B” y hace un estudio con **2** pacientes en cada tratamiento. Si con A se curan los dos y con B ninguno, parece que el resultado “confirma” la posición inicial del médico favorable a “A”. Pero el test correspondiente da $P_{BIL} = 0.32$ (se llega a ese valor P con el test exacto de Fisher que se explica en este libro, pero la interpretación del valor P es la habitual). Por tanto, antes de hacer el estudio con estos tamaños ya sabemos que no podremos rechazar la H_0 ni aun en el caso de que los resultados sean los más favorables a la hipótesis de trabajo. Por ello no tiene sentido usar estos tamaños.

En cualquier campo de investigación no deben realizarse estudios con tamaño de muestra claramente insuficiente, porque supone gasto inútil de tiempo y recursos. Pero en investigación médica un tamaño claramente insuficiente no solo es inútil, sino que puede ser explícitamente perjudicial. En este ejemplo, si a partir del resultado obtenido (éxito con los dos tratados con A y fracaso en los dos tratados con B) se optara por usar sistemáticamente “A”, se estaría haciendo sin datos fiables que lo justificaran, y podría estar eligiéndose el tratamiento que realmente

es peor. Por ejemplo, si “A” cura realmente el 40% y “B” cura el 50%, puede ocurrir por azar curen los dos con A y ninguno con B. Ello ocurre en 4 repeticiones de ese estudio cada 100.

Pero al médico que previamente tenía opinión favorable a “A”, después de obtener ese resultado le es muy difícil dar en el futuro “B” a sus pacientes. Si le proponen participar en un estudio más completo, dando “A” a 100 pacientes y “B” a otros 100, se planteará si es lícito dar “B” a 100 pacientes cuando él sospecha que es mejor el “A” y el estudio con 4 casos “lo confirma”. Ese tipo de situaciones se evitan no haciendo estudios con tamaños tan pequeños.

B. Tamaños inadecuadamente grandes

También pueden ser inadecuados los tamaños extremadamente grandes. Siguiendo con nuestro ejemplo supongamos que el Dr. Diógenes Laercio, disponiendo de muchos recursos, decide estudiar 1 000 pacientes con cada tratamiento y se curan 700 con A (70%) y 200 con B (20%). El test da $P = 10^{-149}$. El resultado es contundente y muestra más allá de toda duda que A es mucho mejor que B. Supongamos que la enfermedad que intentamos curar es muy grave y frecuente y que antes de ese estudio había división de opiniones entre los especialistas, pensando unos que A es mejor y otros que lo es B. Encontrar el mejor tratamiento es un acontecimiento relevante científica y socialmente. Diógenes esperará recibir felicitaciones sin cuenta por haber demostrado definitivamente que A es mejor que B.

Pero, para su sorpresa, la comunidad médica y la civil le aplauden intensamente durante un instante, porque realmente ha demostrado definitivamente cuál es el mejor medicamento, pero inmediatamente pasan a acusarle de incompetente e incluso de homicida.

En efecto, si hubiera realizado el estudio con 100 pacientes en cada grupo y las FR muestrales hubieran sido del mismo orden que en las del estudio con 1 000, el test habría dado $Z = 7.1$ y $P = \mathbf{0.000\,000\,000\,1}$, con lo que habría quedado demostrado que A es mejor y se hubiera evitado que recibieran B 900 enfermos. Pero incluso $N = 100$ habría sido un tamaño excesivo porque con 50 en cada grupo es $Z = 5.05$ y $P = \mathbf{0.000\,000\,1}$, que ya es evidencia contundente a favor de A. En realidad un tamaño del orden de $N = 30$, hubiera sido suficiente pues con 70% de éxitos con A y 20% con B el test da $Z = 3.89$ y $P = \mathbf{0.0001}$, que es fuerte evidencia a favor de A. Por tanto al tratar a 1 000 en cada grupo Diógenes dio B a 970 que habrían recibido A de haber él usado unos 30 individuos por grupo. Por recibir B en vez de A dejaron de curarse aproximadamente el 50% de ellos (70% - 20%), es decir, unos 485. Si la no curación implica muerte, Diógenes es responsable de 485 muertes, aproximadamente.

18.9. Potencia de un estudio programado y significación estadística del resultado obtenido

El investigador suele preguntar cómo afecta la potencia que tenía el estudio antes de hacerlo a la conclusión que se alcanza una vez hecho. Consideraremos

4 situaciones posibles, según que sean pequeña o grande la potencia previamente calculada y el valor P del test. Para facilitar la exposición veremos un ejemplo similar al del apartado 18.1 En la población de sanos la variable "X" se distribuye N(50,10). Se sospecha que la leucemia cursa con aumento de 2 unidades, es decir, $\mu_{Leuc} = 52$. Plantearemos la $H_0: \mu_{Leuc} = 50$, tomaremos una muestra de N leucémicos y rechazaremos H_0 si es $P_{UNI} \leq 0.05$, es decir, $Z \geq 1.64$.

Con $N = 4$ en el MA las medias muestrales, M , tienen $\sigma_{Media} = 10 / 2 = 5$. La Región Crítica empieza en $50 + 1.64 \cdot 5 = 58.2$. Si realmente es $\mu_{Leuc} = 52$, tenemos Potencia = $P(M \geq 58.2 | \mu_{Leuc} = 52) = P(Z \geq 6.2 / 5) = P(Z \geq 1.24) = 0.10$.

Con $N = 625$ en el MA las medias muestrales tienen $\sigma_M = 10/25 = 0.4$. La Región Crítica empieza en $50 + 1.64 \cdot 0.4 = 50.656$. Si realmente es $\mu_{Leuc} = 52$, tenemos Potencia = $P(M \geq 50.656 | \mu_{Leuc} = 52) = P(Z \geq -1.344 / 0.4) = P(Z \geq -3.36) = 0.9996$.

1º. Valor P pequeño invita a rechazar H_0 , cualquiera que sea la Potencia previa

Si encontramos un valor P muy pequeño, lo consideramos evidencia contra la H_0 y nos inclinamos a rechazarla con tanta más convicción cuanto menor sea el valor P, cualquiera que fuera la potencia inicial.

2º. Valor P grande con Potencia previa pequeña mantiene la esperanza en que sea cierta la Hipótesis de trabajo

Si hacemos el estudio con $N = 4$, la poca potencia nos dice que aunque sea $\mu_{Leuc} = 52$ es poco probable que al hacer el estudio se encuentre $P \leq 0.05$. Es muy probable que se encuentre $P > 0.05$. Si encontramos $P > 0.05$ pensamos que es compatible con $\mu_{Leuc} = 52$ y que ese valor P grande puede deberse al pequeño tamaño de la muestra.

3º. Valor P grande con Potencia previa grande invita a renunciar a la sospecha de que sea cierta la Hipótesis de trabajo

Si hacemos el estudio con $N = 625$, la elevada potencia nos dice que si es $\mu_{Leuc} = 52$, es muy probable que al hacer el estudio se encuentre $P \leq 0.05$. Por ello si se encuentra $P > 0.05$, sospechamos que no es $\mu_{Leuc} = 52$ (puesto que si lo fuera era casi seguro que encontraríamos $P \leq 0.05$).

La tabla siguiente resume estos criterios, que no son consecuencia de sofisticados razonamientos estadísticos. Son consecuencia obligada de lo que indica el valor P y la Potencia: la prob de obtener media como la de nuestro estudio o aun más alejada de lo que propone H_0 , si es cierta la H_0 (valor P del test) o si es cierta la Hipótesis alternativa (Potencia).

	Poca Potencia	Gran Potencia
Valor P grande	No es argumento a favor de la H_0 Pude ser cierta la hipótesis de trabajo y haber salido P grande por el tamaño pequeño de las muestras	Es argumento a favor de la H_0 , porque si no fuera cierta es muy raro que aparezca P grande.
Valor P pequeño	Rechazamos H_0	Rechazamos H_0

El proceso lógico implicado es el mismo que el usado en la vida común en situaciones semejantes a esta. Suponga que recién llegado a casa Jerónimo se da cuenta de que ha dejado la guitarra en alguna parte del teatro en el que acaba de actuar.

- Planteamos la hipótesis nula que dice que nadie la ha robado y sigue allí.
- La hipótesis alternativa es que la han robado.

Si va a buscarla él solo durante 10 minutos, con una pequeña linterna, en ese momento en que las luces ya están apagadas, es poco probable que la encuentre, aunque aún esté allí. Es un proyecto con poca “potencia”. Si hacer esa búsqueda tiene algún coste aconsejaríamos no hacerla, puesto que es improbable encontrar la guitarra aunque esté allí. Pero si Jerónimo decide ir y resulta que encuentra la guitarra, el feliz resultado no se ve afectado por el hecho de que inicialmente fuera improbable encontrarla. Pero si no la encuentra en esa búsqueda rápida, no concluiremos que la guitarra ha sido robada, pues aunque esté allí es improbable que la encontrara.

Si la búsqueda se hace el día siguiente con todas las luces encendidas y diez personas buscando durante dos horas, es muy probable que la guitarra aparezca, si aún está allí. Es un proyecto con mucha “potencia”. Si en esa búsqueda aparece la guitarra, no importa si la potencia era o no grande. Pero si con esa búsqueda cuidadosa no aparece la guitarra, sospecharemos que ha sido robada, pues si no la hubieran robado es casi seguro que la habrían encontrado.

	Busca Jerónimo solo con linterna durante 10 minutos Proyecto con baja potencia	Buscan 10 personas con luces buenas durante 2 horas Proyecto con gran potencia
No aparece	No es argumento fuerte a favor de que la han robado. Aunque esté allí lo normal es que con esa búsqueda no se la encuentre.	Es argumento fuerte a favor de que la han robado. Si estuviera allí lo normal es que con esa búsqueda se la encuentre
Aparece	Celebramos aparición, no importa la potencia inicial del proyecto	

NO OLVIDE RECORDAR - 18

1. Un juez puede errar declarando culpable a un inocente o declarando inocente a un culpable. Al evaluar la posible utilidad de un nuevo tratamiento podemos equivocarnos declarando útil al que es inútil (error tipo I) y no declarando útil al que es útil (error tipo II).
2. La potencia de un estudio es la prob de rechazar la H_0 cuando es falsa, es decir, cuando lo correcto es rechazarla.
3. Al evaluar la posible utilidad de un nuevo tratamiento la potencia de un estudio es la prob de declararlo útil si realmente lo es.
4. Llamamos β a la prob de no rechazar la H_0 cuando es falsa, es decir, cuando lo correcto es rechazarla, esto es, la prob de cometer error tipo II.
5. Al evaluar la posible utilidad de un nuevo tratamiento, β es la prob de no declararlo útil si realmente lo es. Por ello la potencia de un estudio es $1 - \beta$.
6. Si la variable X tiene en la población de controles $\mu = 500$ y $\sigma = 20$, en el MA de $N = 4$ es $\mu_M = 500$ y $\sigma_M = 10$. Si una muestra de $N = 4$ individuos tratados con "A" tiene $M_A = 516.5$, para $H_0: \mu_A = 500$ es $Z = 1.65$ y $P_{UNIL} = 0.05$. Si se rechaza H_0 , concluyendo que $\mu_A > 500$, con $P_{UNIL} \leq 0.05$, se rechazará siempre que sea $M_A \geq 516.5$. La Potencia es $P [P_{UNIL} \leq 0.05] = P [M_A \geq 516.5]$
7. La Potencia depende de cuál sea el valor de μ_A . Por ejemplo, si es $\mu_A = 520$ es

$$P [P \leq 0.05 | \mu_A = 520] = P [M_A \geq 516.5 | \mu_A = 520] = P [Z \geq -0.35] = 0.64$$
8. La Potencia depende de cuál sea el valor de μ_A . Por ejemplo, si es $\mu_A = 530$ es

$$P [P \leq 0.05 | \mu_A = 530] = P [M_A \geq 516.5 | \mu_A = 530] = P [Z \geq -1.36] = 0.91$$
9. Si la potencia de un estudio es baja, por ejemplo 30%, quizá no procede hacerlo, ya que si el efecto es en población del orden que suponemos, tenemos prob 70% de no detectarlo.
10. Si un estudio con baja potencia no permite rechazar H_0 , puede ser por su baja potencia y por ello no supone evidencia fuerte contra la Hipótesis de trabajo. Pero si un estudio con alta potencia no permite rechazar H_0 , supone evidencia fuerte contra la Hipótesis de trabajo.

EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN - 18

Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible (para que una frase sea verdadera tiene que serlo en su totalidad).

Consideremos el diseño de un estudio destinado a comparar el IR, Índice de Inmuno-resistencia, alcanzado con dos fármacos: el clásico que llamaremos “1” y el nuevo que llamaremos “2”.

μ_1 = Media poblacional de IR en pacientes tratados con “1”

μ_2 = Media poblacional de IR en pacientes tratados con “2”

Diremos que “2” es útil si es mejor que “1”, es decir, si $\mu_2 > \mu_1$

Diremos que “2” es inútil si no es mejor que “1”, es decir, si $\mu_2 = \mu_1$

En el apartado 18.7 calculábamos los valores de N en función de α , β , σ , μ_2 y μ_1 .

		(δ/σ) \rightarrow	2	1	1/2	1/4
		(σ/δ) ² \rightarrow	0.25	1	4	16
$\downarrow \alpha$ (Z_α)	$\downarrow \beta$ (Z_β)	$\downarrow (Z_\alpha + Z_\beta)^2$				
0.05 (1.65)	0.20 (0.85)	6.25	4	13	50	200
0.05 (1.65)	0.05 (1.65)	10.89	6	22	88	349
0.01 (2.33)	0.05 (1.65)	15.84	8	32	127	507
0.001 (3.1)	0.01 (2.33)	29.48	15	59	236	944

- Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, declararemos “útiles” 5 de cada 100 productos inútiles.
- Si se decide rechazar H_0 cuando con $P \leq 0.05$, declararemos “útiles” 5 de cada 100 productos con media poblacional igual a la media poblacional con ‘1’.
- Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, no declararemos “útiles” 95 de cada 100 productos inútiles.
- Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$ y si la media poblacional con ‘2’ aventaja a la media poblacional con ‘1’ en *un cuarto* de la desviación poblacional, con $N = 200$ en cada grupo tenemos potencia 80%.
- Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 200$ en cada grupo, declararemos “útiles” 80 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *un cuarto* de la desviación.
- Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 200$ en cada grupo, tenemos riesgo 5% de declarar “útiles” a los productos inútiles y riesgo 20% de no declarar “útiles” a los productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *un cuarto* de la Desviación.
- Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 13$ en cada grupo, declararemos “útiles”, acertadamente, 20 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *una* desviación.

8. Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 13$ en cada grupo, no declararemos “útiles”, erróneamente, 20 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *una* desviación.
9. Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 13$ en cada grupo, declararemos “útiles”, acertadamente, 20 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *dos* desviaciones.
10. Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 13$ en cada grupo, no declararemos “útiles”, erróneamente, 5 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *una* desviación.
11. Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 13$ en cada grupo, no declararemos “útiles”, erróneamente, 20 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *un cuarto* de desviación.
12. Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 13$ en cada grupo, declararemos “útiles”, acertadamente, 80 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *dos* desviaciones.

Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 13$ en cada grupo:

13. Declararemos “útiles”, erróneamente, 5 de cada 100 productos cuya media poblacional es igual a la media poblacional con ‘1’.
14. No declararemos “útiles”, acertadamente 95 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *una* desviación.
15. Declararemos “útiles”, acertadamente, 80 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *una* desviación.
16. No declararemos “útiles”, erróneamente, 20 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *una* desviación.

Si se decide rechazar H_0 con $P \leq 0.01$, con $N = 127$ en cada grupo:

17. No declararemos “útiles”, acertadamente, 99 de cada 100 productos con $\mu_2 = \mu_1$.
18. Declararemos “útiles”, erróneamente, 1 de cada 100 productos con $\mu_2 = \mu_1$.
19. Declararemos “útiles”, acertadamente, 95 de cada 100 productos con $\mu_2 = \mu_1 + 0.5 \sigma$.
20. No declararemos “útiles”, erróneamente, 5 de cada 100 productos con $\mu_2 = \mu_1 + 0.5 \sigma$.
21. Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.05$, con $N = 50$ en cada grupo, no declararemos “útiles” 20 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *media* desviación.
22. Si se decide rechazar H_0 cuando el test da $P \leq 0.001$, con $N = 236$ en cada grupo, no declararemos “útiles” 1 de cada 100 productos cuya media poblacional aventaje a la media poblacional con ‘1’ en *media* desviación.

Se estima que para cierta patología el fármaco clásico “D” cura en torno al 20% de los casos. Vd. elabora un buen protocolo solicitando autorización y dinero para un estudio que compara el nuevo fármaco “E” con el “D”. Decide

rechazar la H_0 que dice que ambos productos son iguales cuando aparezca $P \leq 0.05$ (lo cual implica riesgo 5% de declarar que E cura más que D si E es inútil). Y quiere tener prob 90% en declarar que E es útil si realmente lo es (lo que implica riesgo 10% de no declarar que es útil un producto que realmente es útil).

Un estadístico dice que para tener potencia 90% se necesita $N = 13$, otro estadístico dice que necesita $N = 40$ y un tercero dice que necesita $N = 320$.

23. Es imposible que esos tres tamaños sean correctos, solo puede serlo uno.
24. Podrían ser ciertos los tres, uno para cada magnitud del efecto real.
25. Para una determinada potencia, cuanto mayor es el efecto real, mayor tamaño de muestra se necesita.
26. Para una determinada potencia, cuanto mayor es el efecto real, menor tamaño de muestra se necesita.
27. Para un determinado tamaño de muestra, la potencia no tiene relación con la magnitud del efecto real.
28. La potencia de un estudio es la prob de encontrar valor P del test igual o menor del valor P por debajo del cual se acordó rechazar.
29. La potencia de un estudio es la prob de declarar útil un producto que realmente lo es.
30. La fórmula a usar en este caso es $N = (p_A q_A + p_B q_B) (Z_\alpha + Z_\beta)^2 / (p_A - p_B)^2$.
31. En este caso la fórmula es $N = (0.16 + p_B q_B) (1.65 + 1.29)^2 / (0.2 - p_B)^2$.
32. La fórmula a usar en este caso es $N = (0.16 + p_B q_B) 8.64 / (0.2 - p_B)^2$.
33. Para un fármaco que cure en torno al 70%, la fórmula a usar es $N = (0.16 + 0.21) 8.64 / (0.5)^2 = 13$.
34. Para esa potencia, la relación entre tamaño y efecto real es:

p_B	0.7	0.5	0.3
Efecto	0.5	0.3	0.1
N	13	40	320

36. $N = 13$ nos da potencia de 90% si realmente E cura el 90% de los casos.
37. $N = 13$ nos da potencia de 90% si realmente E cura el 70% de los casos.
38. $N = 40$ nos da potencia de 90% si realmente E cura el 8% de los casos.
39. $N = 320$ nos da potencia de 90% si realmente E cura el 90% de los casos.
40. $N = 40$ nos da potencia de 90% si realmente E cura el 50% de los casos.
41. $N = 320$ nos da potencia de 90% si realmente E cura el 30% de los casos

Apéndice A

MÁS SOBRE PROBABILIDAD

Continuamente en el análisis de datos, y por ello en este libro, se habla de “probabilidad”. La probabilidad es la FR de veces que se da cierto resultado cuando se repite un gran número de veces un fenómeno aleatorio. En este apéndice se comentan algunos puntos que ayudarán al investigador a moverse con comodidad en este tema. No contiene formalismo matemático.

A.1. Ejercicio para subrayar lo que indica y lo que no indica la probabilidad

** Ejercicio A.1: Lucía y el Tahúr Feroz

Lucía, hermana pequeña de Caperucita, encontró, paseando por el bosque, a un malvado y feroz tahúr que le propone el siguiente juego de azar: “Tiramos un dado perfectamente homogéneo. Si sale la cara “5” te doy un millón de euros, y si no sale “5” me das tú un millón” (jueces externos garantizan que el dado es homogéneo, es decir, si se lanza muchas veces cada cara aparece un sexto de las veces). *Lucía pide consejo a los estadísticos y todos le aconsejan no jugar.* A pesar de esos consejos Lucía decide correr el riesgo y juega. Ocurre que sale “5” y gana un millón. Y piensa que quienes le desaconsejaron jugar quizás estaban equivocados puesto que ella jugó y ganó.

Animada por el éxito decide probar suerte otra vez, apostando de nuevo en los mismos términos. *Pide consejo por segunda vez a los estadísticos y todos le aconsejan, de nuevo, no jugar.* Pero Lucía decide tentar a la fortuna y juega por segunda vez. Y resulta que vuelve a salir “5”, y gana otro millón. De nuevo cuestiona la sabiduría de los estadísticos.

El tahúr feroz le propone una tercera apuesta. *Lucía pide consejo por tercera vez a los estadísticos y todos le aconsejan no jugar.* A pesar de todo juega y, ¡Oh

caprichos del azar!, sale de nuevo “5” (recuerde que jugando al parchís con cierta frecuencia sale “6” tres veces seguidas).

Lucía retorna a casa de su abuelita llena de gozo porque tiene 3 millones y llena de dudas acerca del saber de los estadísticos. Por tres veces ellos le aconsejaron vivamente no jugar, augurándole inminentes pérdidas si lo hacía. Y por tres veces, desoyendo sus razones, jugó y ganó.

- a) Justifique su postura a favor de que Lucía no acepte el juego. No se limite a repetir lo ya dicho arriba, puesto que precisamente la objeción de Lucía es que “los hechos contradicen lo que ustedes me dijeron” y repitiéndolo no se hace más que insistir en la postura “errónea”. Por ello, no se trata de repetir lo dicho antes, sino de exponerlo adecuadamente para que se vea que era correcto y que los hechos no lo contradicen (explicación clara, concisa, sin divagaciones difusas, sin pretensiones matemáticas y sin usar la palabra “probabilidad”).
- b) Un mes más tarde Lucía encuentra otro tahúr que le propone tirar un dado perfectamente homogéneo 4 veces seguidas y si sale “5” las 4 veces él le da 2 millones y si no ocurre eso, ella se los da a él. Lucía le pide opinión a usted y de nuevo usted le aconseja no jugar, pero ella recuerda que la vez anterior usted se “equivocó” y por eso duda de sus conocimientos. ¿Qué cosa concreta, clara y real, y sin usar la palabra “probabilidad”, le diría usted ahora?

A.2. Fenómenos Aleatorios, Probabilidad y la Ley de la Regularidad de las Series Estadísticas en general

Tomar un individuo de una población es un ejemplo clásico de **Fenómeno Aleatorio**. Los Fenómenos Aleatorios, FA, en general son aquellos en los que:

- a) No se conoce de antemano el resultado que se va a obtener cada vez que se repite.
- b) Si el FA *se repite muchas veces* en condiciones macroscópicas semejantes, la FR con que aparece cada resultado posible se aproxima a una cantidad fija.
- c) El resultado de cada repetición es independiente del resultado de la repetición anterior, es decir, si el FA *se repite muchas veces*, la FR con que se presenta cada resultado posible es la misma cualquiera que sea el resultado de la repetición anterior.

A ese valor al que se aproxima la frecuencia relativa al repetir muchas veces el FA se le llama **Probabilidad** de ese resultado. En todos los órdenes de la vida y en todos los campos de investigación se presentan Fenómenos Aleatorios. Un ejemplo típico es el lanzamiento de un dado. No sabemos qué cara va a salir en cada lanzamiento. Pero si el dado es homogéneo y lo lanzamos muchas veces, cada cara saldrá aproximadamente un sexto de las veces. Decimos que la prob de que salga “5”, por ejemplo, es $1/6$, es decir, $P(5) = 1/6 \approx 0.1667$.

Se llama **Ley de la Regularidad de las Series Estadísticas o Ley del Azar**, al hecho de que en todas las series muy largas de repeticiones la FR del resultado

sea muy parecida. Si se hacen varias series largas de lanzamientos con el mismo dado, en todas ellas la FR de veces que aparece la cara “5” se aproxima mucho a 1/6. Como en el caso en que el FA era la extracción al azar de un individuo, aquí también podemos argumentar que en cada tirada puede salir 5 y, por tanto, puede salir en todas las tiradas de la larga serie que se realice. Y con más razón aún podría salir no-5 en todas las tiradas. Pero la experiencia muestra que esos resultados y otros extremos no ocurren “nunca” y que en una serie muy larga de repeticiones la frecuencia relativa de veces que sale 5 se aproxima mucho a 0.1667.

En este ejemplo del dado la **Ley del azar** no exige que sea homogéneo, es decir, que todas las caras tengan la misma prob de salir. Si se construye un dado irregular con caras de tamaños diferentes y decimos, por ejemplo, que la prob de que salga la cara “3” es 0.28, queremos decir que en una larga serie de tiradas salió “3” en 28 de cada 100 tiradas. La Ley del azar dice que en toda otra larga serie de tiradas con ese dado esa cara aparecerá, muy aproximadamente, en 28 de cada 100.

** **Ejercicio A.2:** Se construye un dado de forma irregular y nos interesamos por la probabilidad de que salga la cara “4”. Hacemos varias Series Estadísticas.

1^a Serie: N= 2 000 000 → 400 600 veces sale “4” → FR(“4”) = 0.2003 ó 20.03 %

2^a Serie: N= 4 000 000 → 804 000 veces sale “4” → FR(“4”) = 0.2010 ó 20.10 %

3^a Serie: N= 1 000 000 → 199 700 veces sale “4” → FR(“4”) = 0.1997 ó 19.97 %

- a. A la vista de lo ocurrido en esas tres series, ¿cuál es la prob de que en ese dado salga “4”?
- b. Nos disponemos a hacer otra Serie de N = 500 000. Cada vez que tiremos el dado puede salir “4” y por tanto puede salir todas las veces. Pero también puede no salir “4” cada vez que tiramos y por tanto puede salir ninguna vez en toda la serie. ¿Qué podemos decir respecto a la proporción de veces que saldrá “4”?

** **Ejercicio A.3:** Para ganar en la ruleta se propone este método: El jugador observa y espera pacientemente hasta que salga una larga serie del mismo color y entonces apuesta por el otro. Por ejemplo, si espera hasta que salgan 8 rojos seguidos, puesto que a la larga tienen que salir tantos negros como rojos, parece que tras esos 8 rojos será más probable que aparezca un negro. Este argumento tiene mucha fuerza intuitiva. Pero en cualquier ruleta bien hecha la realidad se aproxima al modelo citado, incluida la condición de independencia. ¿Qué resultados empíricos confirmarían la citada independencia? (Pista: habrá que emplear muchas horas en la ruleta para conseguir los datos en cuestión).

A.3. Asignación de probabilidades a sucesos concretos

Recordemos que el estudio de las probabilidades es aplicable solamente en las situaciones en las que un fenómeno aleatorio se repite muchas veces o está implicado un colectivo grande de individuos, no cuando el fenómeno aleatorio se ejecuta una vez o está implicado un solo individuo. ¿Cómo se establece la prob

de un determinado suceso? En la práctica hay dos opciones, la **vía empírica** y el **Postulado de Indiferencia**.

1º. Asignación de probabilidades a sucesos concretos por vía empírica

En muchos FA no se pueden asignar probabilidades en relación a argumentos teóricos. El único modo de estimar la proba de los sucesos es mediante la FR obtenida en largas series estadísticas.

Ejemplo 1º ¿Cuál es la prob de que un Recién Nacido, RN, español tenga malformación? Respuesta: Entre los últimos 200 000 RN hubo 600 malformados. $FR = 600 / 200\,000 = 0.003$. Esa es la mejor estima que tenemos de la prob del suceso “nacer con malformación”.

Ejemplo 2º Si decimos que la prob de que un varón de 50 años con tensión arterial normal desarrolle hipertensión en los 10 años siguientes es $P = 0.27$, queremos decir que en un gran colectivo de varones de esa edad, al cabo de diez años tuvieron hipertensión 27 de cada 100. De nuevo, para cada sujeto en particular de ese colectivo, no podemos saber si va a tener hipertensión o no. Aunque la expresión usada es “la prob de que *un* varón sea hipertenso es 0.27”, en realidad esa cifra se refiere a un *colectivo grande* de varones y dice que en él tuvieron hipertensión 27 de cada cien.

2º. El Postulado de Indiferencia o de Equiprobabilidad

En muchos casos la prob de un suceso puede establecerse en relación a ciertas consideraciones teóricas razonables. Después la experiencia muestra si los datos empíricos son o no acordes con esas suposiciones.

Consideremos un FA cuyo desenlace se clasifica de modo *exhaustivo* y *excluyente* en K **resultados posibles** $a_1, a_2, \dots, a_{H_1}, \dots, a_K$. Si no se conoce ningún motivo para que alguno de esos resultados sea más ni menos frecuente que cualquier otro, podemos asumir el llamado **Postulado de Indiferencia o de Equiprobabilidad**: la probabilidad de cada uno de esos resultados es igual a la de cualquier otro e igual a $1/K$. En la práctica eso debe reflejarse en que en una larga serie de repetición del FA la FR de cada resultado posible sea “bastante aproximada” a $1/K$.

Si el Fenómeno aleatorio es lanzar un dado homogéneo y se consideran como *resultados posibles* cada una de las 6 caras, el postulado de indiferencia dice que la probabilidad de cada cara es $1/6 = 0.1667$. Si el suceso ‘A’ es {número mayor de 2}, hay 4 caras favorables y es $P(A) = 4/6 = 0.667$. Si el suceso ‘B’ es {múltiplo de 3}, hay dos caras favorables y es $P(B) = 2/6 = 0.33$. Empíricamente esto se refleja en que en una larga serie de tiradas cada cara aparecerá en torno al 16.67% de las veces y por tanto se obtiene {mayor de 2} en torno a $4 \times 16.67\% = 66.67\%$ y {múltiplo de 3} en aproximadamente el $2 \times 16.67\% = 33.33\%$. En general, la probabilidad de que ocurra “A” es el número de **resultados “favorables” dividido por número de resultados posibles**. A este modo de enunciar el postulado de indiferencia se le suele llamar Regla de Laplace.

Recordemos de nuevo la diferencia conceptual entre la FR de individuos con cierta característica en un colectivo y la prob de que al extraer uno tenga esa ca-

racterística. Si en un colectivo de 40 personas, 8 de ellas son calvas, y el FA es tomar una persona al azar, el Postulado de Indiferencia implica que cada una tiene la misma probabilidad de salir y por tanto en una larga serie de extracciones con reposición cada una saldrá en torno al $1/40 = 0.025$ de las veces. Para el suceso “C” {extraer un calvo} la regla de Laplace dice $P(C) = 8/40 = 0.20$.

En este tipo de situaciones —extraer al azar individuos de un colectivo— si se cumple el Postulado de Indiferencia la prob de extraer un individuo con cierta característica es igual a la *Proporción de individuos* que tienen esa característica en el colectivo del que extraemos. Pero hay que distinguir claramente entre esas dos proporciones:

- a) Proporción de calvos en el colectivo.
- b) Proporción de calvos en la muestra con reposición.

La primera describe la composición del colectivo, no ofrece ninguna ambigüedad y no implica muestreo. La segunda es el valor al que creemos se aproximarán las FR en las muestras grandes si se hacen al azar (sin elegir intencionadamente a los individuos que se extraen). A ese valor lo llamamos probabilidad. No hay dato empírico que permita confirmar la validez de ese modelo. Se acepta el modelo cuando es conceptualmente plausible y los datos empíricos *no lo contradicen* más allá de lo que cabe esperar por las oscilaciones inherentes al muestreo.

A.4. ¿Cuándo se asume el Postulado de Indiferencia?

Cuando hay motivos teóricos a su favor y los datos empíricos (FR para cada resultado en largas series) no contradicen la hipótesis de indiferencia. Las FR empíricas en ningún caso pueden confirmar definitivamente dicha hipótesis, puesto que están basadas en series *finitas*. Cuando las series empíricas dan FR próximas a las probabilidades postuladas en la hipótesis de Indiferencia, constituyen apoyo pero no confirmación definitiva de ella.

Pero a la disciplina llamada Cálculo de Probabilidades no le compete decidir qué situaciones reales se ajustan a un determinado modelo. Esta disciplina enseña a calcular las probabilidades de ciertos sucesos *supuesto que se cumplen* ciertos axiomas. Sus conclusiones son aplicables cuando se cumplen los axiomas. Esos axiomas se justifican porque en muchas situaciones reales las FR se aproximan satisfactoriamente a las probabilidades calculadas a partir de ellos. Los valores de esas probabilidades se deducen de los axiomas mediante razonamientos lógicos obligados, de modo que, como en todas las ramas de la matemática, las conclusiones están contenidas en los postulados de partida. Al obrero matemático, que es otro modo de decir el obrero lógico, solo le corresponde quitar el liviano velo que ocultaba momentáneamente esas relaciones (como Miguel Ángel solo tuvo que quitar con el escoplo la parte de mármol que ocultaba *La Piedad*). Se puede ilustrar esto con ejemplos sencillos, como es el cálculo de la probabilidad de que un resultado se repita varias veces seguidas, que se explica en el Capítulo 5. Allí deducimos la expresión $P(X \text{ casos seguidos con el resultado}) = \pi^X$ como consecuencia necesaria y directa de los axiomas iniciales. Podríamos decir que estaba contenida en ellos.

+++ A.5. La fórmula de la distribución Binomial

El investigador de cualquier disciplina y el profesional que analiza información no necesita deducir la fórmula de la Binomial. Le basta con usarla adecuadamente. Solamente para el lector con curiosidad matemática damos una demostración usando ejemplos concretos.

Si de un colectivo con 60% de varones, V, y 40% de mujeres, M, tomamos una muestra de $N = 4$, la probabilidad de que en ella haya 0, 1, ... 4 varones es una $B(4, 0.6)$.

- **La probabilidad de que en la muestra haya 0 varones es $P(0) = [4! / (0! 4!)]$**
 $0.6^0 \cdot 0.4^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0.4^4 = 0.4^4$. En efecto, la prob de que haya 0 varones es la prob de que haya 4 mujeres y siendo 0.4 la prob de que cada persona sea mujer, la de que lo sean las 4 es 0.4^4 , como ya vimos en el apartado 5. 2.
- **La probabilidad de que en la muestra haya 1 varón es $P(1) = [4! / (1! 3!)]$**
 $0.6^1 \cdot 0.4^3 = 4 \times 0.6^1 \times 0.4^3$. Si se toman millones de muestras:

la FR de ellas que son V M M M es $0.6 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.4 = 0.6 \times 0.4^3$

la FR de ellas que son M V M M es $0.4 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.4 = 0.6 \times 0.4^3$

la FR de ellas que son M M V M es $0.4 \times 0.4 \times 0.6 \times 0.4 = 0.6 \times 0.4^3$

la FR de ellas que son M M M V es $0.4 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 = 0.6 \times 0.4^3$

Es decir, hay 4 resultados posibles con un V y tres M. La FR de muestras con un V (en cualquiera de las posiciones) es la suma de esas 4 FR, es decir, $4 \times 0.6 \times 0.4^3$.

- **La probabilidad de que en la muestra haya 2 varones es $P(2) = [4! / (2! 2!)]$**
 $0.6^2 \cdot 0.4^2 = 6 \times 0.6^2 \times 0.4^2$. Si se toman millones de muestras, la FR de ellas con V V M M es $0.6 \times 0.6 \times 0.4 \times 0.4 = 0.6^2 \times 0.4^2$. Y hay 6 tipos de muestras con dos varones:

V V M M , V M V M , V M M V , M V V M , M V M V , M M V V

La FR de cada uno de estos tipos es $0.6^2 \times 0.4^2$ y la FR de una muestra con dos V (en cualquier posición) es la suma de esas 6 FR, es decir, $6 \times 0.6^2 \times 0.4^2$.

En general, para calcular la FR de muestras de N personas en que hay X varones, empezamos por calcular la FR de muestras en que son V las X primeras personas y M las restantes $N - X$.

$$P(V, V, V, \dots, V, M, M, M, \dots, M) = 0.6^X \times 0.4^{N-X}$$

La FR de otras muestras que también tienen X varones pero han salido en distintos lugares es también $0.6^X \times 0.4^{N-X}$ y la FR de muestras con X varones en cualesquier posiciones es $0.6^X \times 0.4^{N-X}$ multiplicado por el número de muestras distintas que hay con X varones y $N - X$ mujeres. Ese número es $N! / (X! (N-X)!)$, que es el que aparece en la fórmula de la Binomial multiplicando a $\pi^X (1-\pi)^{N-X}$.

Por ejemplo, si de la población con 40% de varones, $\pi = 0.4$, tomamos una muestra de $N = 8$ personas, la prob de que sean V las 3 primeras y M las 5 restantes

es $P(V, V, V, M, M, M, M) = 0.4^3 \times 0.6^5 = 0.004977$. Es decir, 4 977 de cada millón de muestras de $N = 8$ serán V, V, V, M, M, M, M.

Pero otras muchas muestras tienen también 3 V, aunque en otras posiciones. Muestras diferentes con 3 V hay $8! / (3! 5!) = 56$ y por eso la prob de que una muestra tenga 3 V, en cualquier posición, es $56 \times 0.004977 = 0.2787$, es decir al hacer MA de $N = 8$, tienen 3 V 2 787 de cada 10 000 muestras.

**** Ejercicio A.4:** Un multimillonario caprichoso nos propone este juego de azar:

Tiramos una moneda bien balanceada (igual proporción de caras que de cruces a la larga) 100 veces. Si salen 100 caras seremos condenados a muerte. Si sale cualquier otra cantidad de caras nos regalan 1 000 millones de dólares (y amor y salud en magnitud semejante).

- ¿Qué es lo razonable: aceptar la apuesta o rehusar? Depende la decisión de lo intrépidos que seamos o de un adecuado razonamiento?
- Si en la Tierra hay 5 000 millones de personas. ¿Cuántos planetas habría que reunir como el nuestro para que jugando todos a ese juego, a uno le tocaran las 100 caras?

+++ A.6. El valor P con comparaciones múltiples

Si la H_0 es cierta, en cualquier estudio la prob de que el valor P del test sea $P > 0.05$ es, por definición, 0.95, es decir que si se repite millones de veces ese estudio, en 95 de cada 100 repeticiones es $P > 0.05$ y en las otras 5 es $P \leq 0.05$.

Si para el obtener el Nóbel de Medicina repetimos el estudio con un producto realmente inútil $N = 100$ veces, como se explica en el apartado 15.14, esperamos que en 5 de ellas sea $P \leq 0.05$ por puro azar. Pero en esa serie concreta de 100 repeticiones el número de ellas con $P \leq 0.05$ puede ser mayor o menor de 5. Para calcular la prob de que aparezca $P < 0.05$ en al menos una de esas repeticiones comenzamos calculando la prob de que eso no ocurra en ninguna, es decir, de que en todas ellas sea $P > 0.05$, que es $0.95^{100} = 0.006$. Por tanto, la prob de que sea $P < 0.05$ en una o más de las 100 repeticiones es $1 - 0.006 = 0.994$. Es decir, si millones de investigadores hacen el mismo proceso (repetir el estudio 100 veces) solo 6 de cada mil investigadores obtendrán $P > 0.05$ en las 100 repeticiones y los restantes 994 obtienen $P \leq 0.05$ en una o más de las 100 repeticiones. Por tanto, si hacemos una serie de de 100 repeticiones es casi seguro que al menos una de ellas dé $P \leq 0.05$. Del mismo modo, la tabla da la prob de tener una o más muestras con P menor que el indicado en la cabecera de cada fila si se hacen tantas repeticiones como dice la cabecera de cada columna.

Num. de repeticiones →	20	50	100	200
$P \leq 0.05$	0.64	0.92	0.994	0.9999
$P \leq 0.01$	0.18	0.39	0.63	0.87
$P \leq 0.001$	0.02	0.05	0.09	0.18

**** Ejercicio A.5:** Califique cada afirmación de las que aparecen a continuación con una “V” si es verdadera y con una “F” si es falsa, absurda o ininteligible.

- a. Para la parte “a” del ejercicio A.1 la respuesta adecuada es: “la prob de que Lucía pierda cada una de las veces es $5 / 6$ ”.
- b. Para la parte “a” del ejercicio A.1 la respuesta adecuada es: “la prob de que Lucía pierda las tres veces es $(5 / 6)^3 \approx 0.58$ ”.
- c. Para la parte “a” del ejercicio A.1 la respuesta adecuada es: “la prob de que Lucía gane las 3 veces es $(1 / 6)^3 \approx 0.004$ ”.
- d. Para la parte “a” del ejercicio A.1 una respuesta adecuada es: “La FR de veces en que sale “5” en las tres tiradas si se repite esa apuesta millones de veces es $(1 / 6)^3 \approx 0.004$, es decir, si millones niñas jugaran, solo a 4 de cada mil les ocurriría sacar “5” las tres tiradas. Lo cual no permite saber si en este caso particular va a ocurrir o no ese hecho”.
- e. Para la parte “b” del ejercicio A.1 la respuesta adecuada es: “Es muy improbable que Lucía gane en ese juego”.
- f. Para la parte “b” del ejercicio A.1 la respuesta adecuada es: “la prob de que Lucía gane en ese juego $(1 / 6)^4 \approx 0.0008$ ”.
- g. Para la parte “b” del ejercicio A.1 una respuesta adecuada es: “La FR de veces que sale “5” en las cuatro tiradas es $(1/6)^4 \approx 0.0008$, es decir, si millones de niñas juegan, solo 8 de cada 10 000 tendrán “5” las cuatro veces. Lo cual no permite saber si en este caso particular va a ocurrir o no ese hecho”. Lo que sabemos es que si 10 000 niñas jugaran, aproximadamente 8 ganarían y las otras 9 992 perderían.

Apéndice B

MÁS SOBRE EL VALOR P DEL TEST

En los Capítulos 8 y 9 se expone el concepto de test de significación y se explica detalladamente lo que indica y cómo se interpreta el valor P del los tests. Siendo este tema el que más dificultad implica para la mayoría de los investigadores, se explica nuevamente aquí con más ejemplos. El lector que ya lo ha entendido claramente no necesita leer este apéndice, que sin embargo, puede ser muy útil para el que necesite pensar más detenidamente sobre esta cuestión crucial de la Inferencia Estadística.

La mayoría de los investigadores no entienden lo que indica ese valor y depositan toda su confianza en una simplificación tan extendida como absurda: la “regla del 5%”:

- **P ≤ 0.05** implica que lo encontrado en la muestra es extrapolable a la población.
- **P > 0.05** implica que lo encontrado en la muestra no es extrapolable a población.

Si toda regla rígida es inapropiada en el quehacer científico, quizá esta es la más extendida y nefasta de todas. Muchos investigadores la asumen con inquebrantable fe y al analizar los resultados de sus investigaciones sus expectativas se centran obsesivamente en que “la P sea menor de 0.05”. Se aferran a esta pintoresca superstición, desoyendo el sentido común y las muchas voces que continuamente les advierten contra de ella.

Por ejemplo, Feinstein (1985) dice: “Adiós “P-menor-del-0.05”, equívoco y traicionero compañero de viaje. Tus efectos colaterales y toxicidad intracerebral son demasiado grandes para compensar cualquier beneficio que pudieras aportar”. (Feinstein A.R. *Clinical epidemiology: the architecture of clinical research*. Philadelphia, WB Saunders 1985. Citado por F.L. Redondo. *El error en las pruebas de diagnóstico clínico*. Díaz de Santos 2002. 52).

Moyé (2000) es igualmente claro: “Debemos reconocer que P<0.05 se ha convertido en el estándar, pero ha llegado el momento de decir que eso es malo. Decidir mecánicamente en base al valor de P es una miope renuncia a razonar. Francamente, si usted desea que los valores P sustituyan a su capacidad pensante

probablemente ha llegado el momento de que usted deje esta actividad. Ya hemos superado el “P<0.05”. Hemos estado rindiéndole pleitesía demasiado tiempo. Ha llegado el momento de revelarse contra la tiranía”. (Moyé. L.A. *Statistical Reasoning in Medicine. The intuitive P-Value Primer*. Springer. 2000).

A continuación presentamos este tema sin utilizar herramienta matemática, puesto que el tema puede ser explicado, entendido y usado recurriendo únicamente a la lógica común del hombre de la calle. Una exposición más detallada y amplia, también sin herramienta matemática, se realiza en el libro:

¿Qué significa estadísticamente significativo?

La falacia del criterio del 5% en la investigación científica

Luis Prieto e Inmaculada Herranz Editorial Díaz de Santos. 2005.

B.1. Test de Significación en la vida común

El tipo de razonamiento propio de los Tests de Significación es muy sencillo. Lo usan en la vida cotidiana constantemente los adultos de cualquier nivel cultural y los niños a partir de los 7 años aproximadamente. Empezaremos poniendo ejemplos de la vida común en los que usamos ese mismo proceso mental y continuaremos mostrando que al elaborar las conclusiones de los trabajos científicos se usa el mismo proceso lógico.

Suele decirse que la ciencia avanza planteando hipótesis y haciendo observaciones o experimentos que nos permitan ver si son ciertas o falsas. Pero Popper, entre otros, hizo notar que muy raramente los experimentos permiten confirmar que una hipótesis es cierta. Los resultados experimentales solo permiten una de estas dos cosas:

- Si son **incompatibles** con la hipótesis nos llevan a concluir que **es falsa**, la rechazamos.
- Si son **compatibles** con la hipótesis nos llevan a concluir que **puede ser cierta**, pero no nos aseguran que lo sea, porque esos resultados son también compatibles con otras hipótesis.

Ejemplo: Coartadas para un crimen

En una señorial mansión se comete un crimen a las 12:00. Bautista, el mayordomo, es uno de los sospechosos, naturalmente. Consideremos la siguiente hipótesis: *Bautista es el asesino*. Por motivos que luego veremos la llamamos **Hipótesis Nula** y escribimos “ H_0 ”.

Ocurre que nadie ha visto cometerse el asesinato pero algunos testigos muy fiables pueden dar información inequívoca sobre la ubicación de Bautista en algún momento preciso. ¿Qué decisión razonable tomaría usted en cada uno de estos casos y por qué?

1. Si Bautista fue visto a las 12:15 en una ciudad a 900 km de la casa concluimos:
 - a) Bautista no es el asesino (Rechazo H_0)

- b) Bautista puede ser el asesino (sigue siendo sospechoso). Acepto H_0 como posible.
- c) Bautista es el asesino (Afirmo que H_0 es cierta)
2. Si Bautista fue visto a las *12:15* en el *portal* de la mansión concluimos:
- Bautista no es el asesino (Rechazo H_0)
 - Bautista puede ser el asesino (sigue siendo sospechoso). Acepto H_0 como posible.
 - Bautista es el asesino (Afirmo que H_0 es cierta)
3. Si Bautista fue visto a las *12:01* en la *sala contigua* a la del crimen concluimos:
- Bautista no es el asesino (Rechazo H_0)
 - Bautista puede ser el asesino (sigue siendo sospechoso). Acepto H_0 como posible.
 - Bautista es el asesino (Afirmo que H_0 es cierta)

Resumamos los razonamientos que llevan a elegir las respuestas 1-a, 2-b y 3-b:

- 1º. Rechazamos la H_0 cuando la información de que disponemos es incompatible con ella, es decir, si fuera cierta la hipótesis sería muy difícil que se diera el hecho que se ha dado.
- 2º. Cuando el hecho observado es compatible con la hipótesis, decimos que puede ser cierta, pero no afirmamos que lo sea (no afirmamos que Bautista es culpable). Decimos que el dato no lleva a rechazar la hipótesis, no constituye evidencia contra ella.

Es decir, hacemos Inferencia en la vida común y en la ciencia formulando una **Hipótesis** y observando unos **Hechos**.

- Si los hechos son incompatibles o difícilmente compatibles con la hipótesis, rechazamos la hipótesis.
- Si los hechos son compatibles con la hipótesis decimos que esta puede ser cierta, pero no lo aseguramos.

B.2. Tests de Significación

La Inferencia Estadística es el intento de conocer acerca de los **parámetros** (media, varianza, proporción... de cada variable en la *población*) a partir de los **estadísticos** (media, varianza, proporción... de cada variable en una *muestra*). Como en la vida común, se trata de enfrentar una *Hipótesis*, que llamaremos **Hipótesis Nula** y simbolizamos por “ H_0 ”, con unos **hechos observados**. Si los hechos son incompatibles con H_0 , esta se rechaza y si son compatibles con ella, se acepta como posible. La “ H_0 ” consiste en postular que en población un parámetro tiene cierto valor. Los “hechos” son el valor del estadístico encontrado en la muestra que hemos observado. A la idea que motiva la investigación se la llama **Hipótesis de Trabajo**. Generalmente la Hipótesis de Trabajo no establece un valor para el parámetro que se está investigando. Dice que dicho parámetro es mayor

o menor que cierto valor. La H_0 sí dice que el parámetro investigado tiene cierto valor. Generalmente dice que no ocurre lo que postula la Hipótesis de Trabajo, que el parámetro investigado no es mayor (o menor) que cierto valor, sino igual a él.

Cuando los datos observados son claramente compatibles o claramente incompatibles con la H_0 no es necesario calcular el llamado valor P del test. Cuando no está claro si el dato empírico es compatible con la hipótesis, porque no es muy fácil, pero tampoco muy difícil, que se dé ese dato si la hipótesis es cierta, el cálculo del **valor P** puede ayudar.

Ejemplo: En cada uno de estos países, España, Francia, e Inglaterra, en 1980 la FR poblacional de personas consumidores de antidepresivos, CA, era $\pi_{1980} = 0.50$. Para ver si actualmente ha aumentado esa FR tomaremos una muestra en cada país y veremos qué FR de personas son CA. En todos ellos planteamos como hipótesis Nula: $\pi_{\text{ACTUAL}} = 0.50$

Para cada país veamos si es fácil o difícil que aparezca el resultado obtenido siendo cierta la H_0 , es decir, si en la población son CA el 50%.

1º España: Se toma una muestra de $N = 3$ y se encuentra que son CA todos los individuos.

Es evidente que en muestra tan pequeña pueden salir todos los individuos CA aunque en la población solamente lo sean el 50%. Por ello, este resultado no constituye evidencia contra esa hipótesis.

2º Francia: Se toma una muestra de $N = 100$ y se encuentra que son CA todos los individuos.

Es evidente que en una muestra de ese tamaño es muy difícil que salgan todos los individuos CA si en la población solamente lo son el 50%. Por ello este resultado constituye evidencia muy fuerte contra esa hipótesis.

3º Inglaterra: Se toma una muestra de $N = 20$ y se encuentra que son CA todos los individuos.

Aquí ya no es evidente cuán difícil es que salgan CA los 20 individuos si en la población lo son el 50%. ¿Cómo podemos cuantificar lo difícil que es que salga una muestra como esta si en la población son CA el 50%? Lo más sensato es:

!!! recurrir a la práctica !!!

Crearemos una población donde realmente el 50% de las personas tienen la característica “C”. Sacaremos millones de muestras de $N = 20$ y contaremos el número de ellas que tienen los 20 individuos con C. Podemos, por ejemplo, poner en una urna 50% de bolas blancas y 50% negras. Extraeremos muchas muestras aleatorias de 20 bolas con reposición y contaremos el número de muestras en que han salido blancas las 20 bolas.

Los estadísticos lo han hecho por nosotros y han encontrado que ese hecho (20 bolas blancas) ocurre en una muestra de cada millón.

Frecuencia Relativa = 0.000001, es decir, 1 por 1 000 000

Vemos, pues, que el resultado es difícilmente compatible con la hipótesis. Si en una población son blancas el 50% de las bolas es extremadamente difícil que en una muestra de 20 sean blancas las 20. Igualmente, si en una población son CA el 50%, es muy difícil encontrar una muestra con las 20 personas CA. El hecho de que en la muestra de 20 ingleses sean CA todos ellos es muy fuerte evidencia contra la Hipótesis que dice que en la población inglesa actual son CA el 50% de ellos.

B.3. Valor P del Test de Significación

La *Frecuencia Relativa* de veces con que aparece el resultado de nuestro estudio cuando es cierta la H_0 es lo que se llama *Valor P del test*.

Si esa FR es muy pequeña consideramos el dato difícilmente compatible con la hipótesis y tendemos a rechazarla. Si esa FR es grande decimos que el dato es compatible con la hipótesis y no la rechazamos, pensamos que puede ser cierta, pero *no* lo aseguramos.

En el caso de España, donde en la muestra de 3 personas todas resultaron ser CA, se encuentra que es **P = 0.12**. Es decir, si en España es $\pi_{ACTUAL} = 0.50$ y tomamos millones de muestras aleatorias de $N = 3$ españoles, en 12 de cada 100 muestras ocurre que los 3 españoles son CA. Vemos que no es difícil obtener ese resultado si es cierta la H_0 , por ello no lo consideramos fuerte evidencia contra ella.

En el caso de Francia, donde en la muestra de 100 personas todas resultaron ser CA, se encuentra **P = 10⁻³⁰**. Es decir, si en Francia es $\pi_{ACTUAL} = 0.50$ y tomamos muchas muestras de 100, solo una muestra cada **10⁻³⁰** tiene los cien individuos CA. Esa FR es despreciable a todos los efectos. (Es millones y millones de veces menor que la prob de que un asteroide grande se estrelle contra la Tierra hoy). Ese resultado es evidencia contundente y prácticamente definitiva contra la H_0 . La rechazamos y estamos convencidos de que en la población de Francia los CA son más del 50%. Resumiendo:

- España: Todos CA en muestra de **3** → **P = 0.12** → No fuerte evidencia contra $\pi_{ACT} = 0.50$
- UK: Todos CA en muestra de **20** → **P = 0.000001** → Fortísima evidencia contra $\pi_{ACT} = 0.50$
- Francia: Todos CA en muestra de **100** → **P = 10⁻³⁰** → Evidencia definitiva contra $\pi_{ACT} = 0.50$

Nota: Ciertamente, los estadísticos no han tenido que construir esa población de bolas y extraer de ella millones de muestras. Un razonamiento lógico sencillo nos dice con qué frecuencia aparece ese tipo de muestra bajo esa condición.

B.4. Valor P de la cola. Valores Esperados bajo la H_0

En los ejemplos anteriores analizamos los casos en que todos los individuos de la muestra resultaban ser CA. El resultado muestral era el más extremo posible. Veremos ahora cómo evaluar la compatibilidad de la muestra con la H_0 cuando los resultados muestrales no son tan extremos.

En Alemania también se quiere hacer un test para ver si la proporción actual de CA es o no mayor de 0.5. Se toma una muestra de $N = 100$ y en ella aparecen **70** CA. La H_0 es: en Alemania $\pi_{\text{ACTUAL}} = 0.50$. Si es cierta, en una muestra de 100 ESPERAMOS, teóricamente, encontrar 50 CA. A esta cantidad se la llama valor **ESPERADO** bajo la H_0 y se suele simbolizar por “**E**” ($E = \pi \cdot N$). En este ejemplo es **E = 50**. El valor **OBSERVADO** en la muestra es **70**. Cuanto más lejos esté el valor observado del esperado bajo una hipótesis, más evidencia constituye contra ella. Esa evidencia contra la hipótesis se mide por la probabilidad de obtener un valor como el observado **o aún más alejado del Esperado**, si se hace MA (Muestro Aleatorio) de una población en que se cumple la Hipótesis.

En este ejemplo el valor P del test es la prob de encontrar muestras con **70 o más** CA si en la población es $\pi_{\text{ACTUAL}} = 0.50$. Se encuentra que es $P = 0.00003$. Es decir, si lanzar 100 monedas equilibradas se hace millones y millones de veces, solamente en 3 de cada cien mil veces ocurre que sale cara en 70 o más monedas. O lo que es lo mismo, si en Alemania es $\pi_{\text{ACTUAL}} = 0.50$ y tomar 100 alemanes al azar se hace millones de veces, solamente en 3 cada cien mil muestras habrá 70 o más CA. Este resultado es evidencia muy fuerte contra la H_0 , la rechazamos y estamos convencidos de que en la población los CA son más del 50%.

Si en Polonia se plantea la misma H_0 y en una muestra de $N = 80$ polacos aparecen 46 CA, tenemos:

Hipótesis de Trabajo: En Polonia la FR poblacional actual es mayor de 0.5:

$$\pi_{\text{ACTUAL}} > 0.50$$

Hipótesis Nula, H_0 : En Polonia es $\pi_{\text{ACTUAL}} = 0.50$

Valor Esperado bajo la H_0 : **E = 40**

Valor Observado: 46

Valor P del Test = $P(\text{muestra con } 46 \text{ o más CA si es } \pi_{\text{ACTUAL}} = 0.5) = 0.09$

Es decir, si en Polonia es $\pi_{\text{ACTUAL}} = 0.50$ y tomar 80 polacos al azar se hace millones de veces, en 9 de cada cien muestras habrá 46 o más CA. No consideramos ese resultado evidencia contra la H_0 . No la rechazamos y pensamos que en la población de Polonia los CA pueden ser 50%.

Para una discusión más detallada de por qué la compatibilidad entre hipótesis y muestra se evalúa mediante la probabilidad de la cola, consultar la bibliografía citada.

B.5. Valor P del Test de Significación. Segundo ejemplo

Sabemos que en 1970 tenía la boca libre de caries (LC) el 20% de los escolares, $\pi_{1970} = 0.2$. Tras una campaña educativa esperamos que aumente el porcentaje de niños LC. En un primer estudio piloto se explora a $N = 5$ niños actuales y se encuentra que los 5 son LC. Plantemos la H_0 : En la *población* actual, tras la campaña educativa, son LC el **20%**, es decir, la campaña educativa *no* fue efectiva

Hipótesis Nula, H_0 : $\pi_{\text{ACTUAL}} = 0.2$.

El hecho: En la *muestra* de $N = 5$ se encuentra que son LC el **100%**

- Si el “hecho” es “dificilmente compatible” con la hipótesis, la rechazaremos y pensaremos que actualmente el porcentaje poblacional de niños LC es mayor de 20%, es decir, que la campaña educativa ha sido efectiva.
- Si el hecho es compatible con la H_0 diremos que el porcentaje actual de niños LC *puede ser 20%*, es decir, los datos no “demuestran” que la campaña educativa haya sido efectiva.

¿Cuán difícil es que en la muestra sean los 5 niños LC si en población son el 20%?

¡¡Recurramos a la práctica!!

Creemos una población donde el 20% de los individuos tienen la característica, C, sacamos muchas muestras de $N = 5$ y contamos cuántas de ellas tienen los 5 individuos con C. Para ello se metieron en un bombo de lotería 20% de bolas blancas y 80% negras y se sacaron 10 millones de muestras, de 5 bolas cada una. Estas son las primeras 142 muestras:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
1	N	N	N	N	N	N	N	B	N	N	N	N	B	N	N	N	N	B	N	N	N	B	N
	N	N	N	N	N	N	N	N	B	N	B	N	B	N	B	N	N	N	B	N	B	N	B
	N	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	N	B	N	N	N	N	B	N	N	N	N	B
	N	N	B	N	B	N	B	B	N	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	B	N	N	B
	N	B	B	N	B	B	N	N	N	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	B	N	B	B
2	N	N	B	N	N	N	N	N	B	N	N	N	N	B	N	N	N	N	B	N	N	B	N
	B	N	N	N	N	N	N	N	B	N	B	N	N	B	N	N	N	N	B	N	N	B	N
	N	B	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	N	N	N	N	B	N	N	N	N
	N	N	N	B	N	N	N	N	B	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	N	N	B	B
	N	N	B	N	B	N	N	N	N	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	N	N	N	B
3	N	N	N	N	B	N	N	N	B	N	N	N	B	N	N	N	N	N	B	N	N	B	N
	N	N	N	N	N	N	N	N	B	N	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	N	B	N
	N	B	N	N	N	N	B	N	N	N	N	N	B	N	N	N	N	B	N	N	N	N	N
	N	N	B	N	B	N	N	N	B	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	B	N	N	B
	N	B	B	N	B	N	N	N	N	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	B	N	N	B
4	N	N	N	N	B	N	N	N	B	N	N	N	B	N	N	N	N	N	B	N	N	B	N
	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	N	B	N	B	N	N	N	N	B	N	N	B	N
	B	B	N	N	N	N	B	N	N	N	N	N	N	B	N	N	N	N	B	N	N	B	N
	N	N	B	N	B	N	N	N	N	B	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	B	N	B
	N	B	B	N	B	N	N	N	N	B	N	B	N	N	N	N	N	B	N	B	N	B	B

Una breve inspección indica que no hay ninguna muestra con 5 blancas ni tampoco con 4. Esto sugiere que este tipo de muestra ocurre con escasa frecuencia. Sacando 10 millones de muestras se encuentra muy aproximadamente estas proporciones:

$$\begin{aligned} \textbf{0 Blancas} &\rightarrow 0.328 , & \textbf{1 Blanca} &\rightarrow 0.410 , & \textbf{2 Blancas} &\rightarrow 0.205 \\ \textbf{3 Blancas} &\rightarrow 0.051 , & \textbf{4 Blancas} &\rightarrow 0.006 , & \textbf{5 Blancas} &\rightarrow \textbf{0.0003} \end{aligned}$$

Vemos que sólo 3 de cada 10 000 muestras tienen las 5 bolas blancas: $P = 0.0003$

Es decir, si la campaña educativa no consiguió aumentar la FR de niños LC en población y actualmente sigue siendo 20%, si sacamos muchas muestras de $N = 5$ niños, solo en 3 de cada 10 000 muestras aparecen los 5 niños LC. Realmente no sabemos si la FR actual de niños LC es 20% o es mayor, pero vemos que si fuera 20% sería muy difícil que en una muestra de 5 todos fueran LC y como en nuestra muestra ha sido así, lo razonable es pensar que el porcentaje actual poblacional es mayor de 20%.

Veamos como razonamos si en la muestra piloto de $N = 5$ aparecen 4 niños LC. Veámos que al hacer MA de una población en la que hay 20% de niños LC, 60 de cada 10 000 tienen 4 niños LC. Es $P(4 \text{ o más}) = P(4) + P(5) = 0.0060 + 0.0003 =$

0.0063. Es decir, si la campaña educativa no consiguió aumentar la FR poblacional de niños LC y actualmente sigue siendo 20%, si sacamos muchas muestras de $N = 5$ niños, solo en 63 de cada 10 000 muestras aparecen 4 o más niños LC.

B.6. El valor “D” del test

La siguiente narración ayudará a entender que al interpretar el valor P del test no hay una cifra frontera y es grave error tomar el valor $P = 0.05$ como frontera sin saber lo que indica.

El centinela Abel tenía encomendada la vigilancia del Fuerte a las 5 en punto de la tarde. Ciertos indicios sugieren que quizás abandonó la guardia, incurriendo en grave delito. Al iniciarse el juicio el juez asume que Abel es inocente mientras no se demuestre lo contrario y por ello parte de la hipótesis de no culpabilidad (“hipótesis de culpabilidad nula” = “hipótesis nula” simbolizada por “ H_0 ”), que solo rechazará - para dar veredicto de culpabilidad - si se aportan datos que son incompatibles o muy difícilmente compatibles con ella.

No hay información sobre dónde estaba Abel a las **5.00**, pero los hay muy fiables sobre donde fue visto a las **6.00**. Designamos por “**D**” la distancia, en kilómetros, entre el punto en el que debería estar a las 5.00 y el punto en que fue visto a las 6.00 y en relación a esa distancia intentamos formarnos opinión sobre si podía estar a las 5.00 en su puesto.

- a) Si es $D = 3\,000$, rechazamos H_0 , porque, **el dato es incompatible con ella**.
Si estaba en su puesto a las 5.00, no podía estar a las 6.00 a 3 000 km. Por tanto, si fue visto a 3 000 km, es que a las 5.00 no estaba en su puesto.
- b) Si es $D = 30$, no rechazamos H_0 , porque, **el dato es compatible con ella**.
Es obvio que por ese dato no afirmamos que Abel estuviera a las 5.00 en su puesto, solo decimos que el dato observado es compatible con ello, que pudo estar en su puesto.
- c) Pero si es $D = 270$, no está claro si ese dato nos lleva a rechazar H_0 o más bien pensamos que puede ser cierta. Quizá cogiendo un helicóptero... o quizás un avión.... pero cerca del fuerte no hay pista de aterrizaje.... Y las mismas dudas surgen con $D = 240$ o $D = 285$. No llevan a rechazar tajantemente H_0 , porque el dato no es definitivamente incompatible con ella, pero nos hacen dudar de ella tanto más cuanto mayores son.



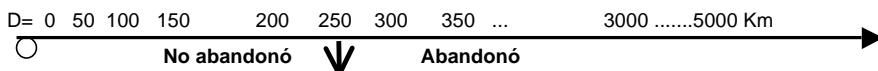
Durante muchos siglos este sencillo modo de razonar se aplicaba en todos los juicios por posible abandono del puesto de trabajo. Pero en los años 30 del XX se acumularon en un juzgado de Cambridge gran número de casos en los que D tomaba algún valor intermedio que hacía dudar de H_0 , pero sin permitir rechazarla definitivamente. Cansado de debatirse en la duda, el Juez Perkins pensaba cuán bueno sería que hubiera una cantidad límite, por ejemplo **250**, de

modo que con $D > 250$ se declarara el dato incompatible con la inocencia y, por tanto, se condenara al acusado, y con $D < 250$ se concluyera que no se podía rechazar la H_0 y por tanto había que seguir investigando. Escribió un artículo comentando ese deseo.

Aunque resulte difícil de creer, el 90% de la siguiente generación de jueces se acogieron incondicionalmente a esa cifra, de modo que siempre que era $D \geq 250$ condenaban y con $D < 250$ no condenaban y seguían estudiando el caso.

La siguiente generación de jueces mantuvo esa dicotomía, pero para simplificar la situación decidió que con $D < 250$, al no quedar demostrada la culpabilidad, se declara inocencia, en vez de seguir estudiando el caso.

Y las siguientes generaciones hasta el presente siguieron aplicando la dicotomía, pero sin saber que “D” es la distancia entre el lugar que debía custodiar el acusado a cierta hora y el lugar en que fue visto una hora más tarde. Solo saben que se encarga a unos técnicos medir una magnitud llamada “D” y con $D \geq 250$ se condena al acusado, mientras que $D < 250$ se le absuelve.



Cuando se pregunta a los jueces actuales qué indica el valor D responden que no lo saben muy bien, quizás la distancia entre el palacio de justicia y el lugar del crimen, medida en millas marinas o en decibelios. Cuando se les pregunta por qué el valor 250 es decisivo, responden que no lo saben, sus predecesores así se lo enseñaron, parece ser que aprendido, a su vez, de sus predecesores. Y, finalmente, cuando se les invita a asistir a un breve curso para liberarles de esa dicotomía absurda, responden que no tienen conocimientos agrimensoras suficientes para entrar en profundidades.

B.7. Diálogo socrático sobre la interpretación del valor P

El Dr. Milton Perkins está seriamente contrariado porque acaba de recibir un email del editor de una prestigiosa revista rechazando un artículo que había enviado para publicación. Este es el resumen del ulterior diálogo entre el editor y Perkins.

Editor: Aunque el tema de su artículo es de máxima actualidad, y los resultados muy interesantes, la publicación no es posible por los graves errores que hay en las conclusiones.

Perkins: Pero las conclusiones son claras y nítidas, y no hay en ellas aspectos polémicos. Se estudian 4 nuevos productos posiblemente anticancerígenos (AC) y en las muestras analizadas se encontraron resultados muy sugestivos. De acuerdo con el criterio más aceptado, decidimos considerar significativos los resultados —y considerar que lo encontrado en la muestras ocurre también en la población general— si es $P < 0.05$. En base a ello se concluye que dos de los productos estudiados son AC ($P < 0.05$) y otros dos no lo son ($P > 0.05$).

E: Al resumir así las conclusiones de un estudio se cometan al menos dos tipos de errores:

- 1º Nuestra convicción en que el tipo de efecto encontrado en nuestro estudio ocurre también en la población general crece progresivamente cuanto menor es el valor P del test. No puede reducirse a un “sí o no” en base a un valor arbitrario de P. En particular, el valor de $P = 0.05$ no tiene ninguna propiedad especial que le erija como frontera natural. Un valor $P = 0.06$ y un valor $P = 0.04$ nos dicen prácticamente lo mismo.
- 2º En ningún caso el investigador decide que el tipo de efecto encontrado en su muestra ocurre o no en la población general. Eso lo “decide” la naturaleza. Lo que compete al investigador es tener o no la convicción más o menos fuerte de que ese efecto ocurre también en población. Y la creencia en esa proposición no es un asunto de todo o nada.

P: Pero nosotros y la mayoría de los autores hemos estado durante décadas “decidiendo” en base a si el valor P era mayor o menor del 5% y nunca nos han reprochado ese criterio.

E: Durante décadas se han hecho mal las cosas y los editores de las revistas científicas tenemos mucha culpa de ello. Sin embargo los buenos especialistas en análisis de datos coinciden en que no se debe usar la simplificación del 5% si no se entiende lo que indica.

P: Resulta cuando menos sorprendente que de un día para otro se considere erróneo lo que se había considerado válido durante muchos años.

E: En realidad no ha habido cambio. Los expertos nunca dijeron que hay algo especial en el valor 5%. Los investigadores se aferran a ese valor como frontera especial porque eso les proporciona una regla fácil de aplicar mecánicamente sin tener que pensar.

P: ¿Entonces no hay un valor P frontera que nos permita decidir si el tipo de efecto encontrado en nuestro estudio ocurre o no ocurre también en la población?

E: Recuerde que el investigador no “decide” nada. Lo que hace es “pensar” que hay o no cierto efecto en la población general. Y no hay ningún valor P por debajo del cual pensemos que ocurre una cosa y por encima de él pensemos lo contrario, ni 5%, ni el 1%, ni ningún otro.

P: ¿Por qué no se nos dijo antes que estábamos cometiendo estas incorrecciones?

E: Continuamente se publican libros, artículos y editoriales recordándolo, pero la mayoría de los investigadores siguen situados en esa receta tan cómoda como perjudicial.

No se gana nada con decir que un resultado es o no “estadísticamente significativo” en base a que el valor P del test esté por debajo o por encima del 5%. La barrera del 5%, u otro valor de P, es adecuada cuando se trata de tomar decisiones fácticas. Pero en la mayoría de las situaciones abordadas en la investigación biomédica no hay que tomar una decisión inmediata. Se trata de ajustar el grado de confianza que tenemos en que el tipo de efecto encontrado en nuestro estudio ocurra también en la población general.

P: ¿Y dice usted que ello no es una cuestión de “todo o nada”?

E: Ciertamente no. En palabras de Silva y Rozeboon: “....el propósito central de un experimento no es precipitar la toma de decisiones sino propiciar un reajuste en el grado de confianza que uno tiene en la veracidad de cierta hipótesis. La creencia en una proposición no es un asunto de todo o nada; la tarea del científico no es prescribir acciones sino establecer convicciones razonables...”

P: Entonces, si un investigador hace un experimento y encuentra cierto efecto en su muestra, ¿No tiene que decidir si ese tipo de efecto ocurre o no en la población general?

E: Por supuesto que no. Una cosa es “decidir” que se ejecuta una u otra acción y otra es “tener el convencimiento de” que la naturaleza funciona de cierto modo. En el primer caso se trata de **hacer o no hacer** algo y eso si que lo decide el interesado. En el segundo caso no se trata de hacer una cosa u otra, sino de pensar cómo funciona la Naturaleza.

P: ¿Y cómo influye el valor de P en ese grado de convicción?

E: La convicción que tenemos en que el tipo de efecto encontrado en nuestro estudio ocurra también en la población general aumenta **gradualmente** a medida que disminuye el valor P del test, pero no hay un valor de P que marque un punto de inflexión.

P: ¿Podría ilustrar esa diferencia con un ejemplo?

E: En el trabajo que usted quiere publicar administraron el producto ”B” a una muestra de 20 ratas de una cepa que hace cáncer espontáneamente en el 90% de los casos. Entre los 20 animales tratados con ”B” hicieron cáncer 15, es decir, el 75%. El test da $P = 0.04$. Entonces usted “decide” que ”B” es AC por ser $P < 0.05$. Pero que ”B” sea o no sea AC no depende de su decisión, sino de cómo es la naturaleza. Lo que usted puede hacer es ”pensar” que ”B” es o no AC y ese valor de $P = 0.04$ no permite decantarse por ninguna de las dos opciones.

P: ¿Qué tipo de resultados permiten decantarse a favor de que el producto es AC?

E: Cuando el valor P encontrado es extremadamente pequeño. Por ejemplo, en su artículo se reporta que de otras 20 ratas tratadas con ”A” solo 8 hicieron cáncer, es decir el 40%. El test da $P = 0.0000003$. Con un valor tan extremadamente pequeño hay consenso en concluir que ”A” es AC. Pero que ”A” sea AC no lo decidimos nosotros. Nosotros pensamos que eso es así.

P: Bien, con $P = 0.04$ no podíamos decantarnos ni a favor ni en contra de que el producto sea AC y con $P = 0.0000003$ sí que nos decantamos a favor de que es AC. ¿Dónde está el límite? ¿A partir de qué valor de P nos decantamos a favor de que el producto es AC?

E: NO hay un valor que marque un límite. Es un proceso que varía gradualmente.

P: A los investigadores biológicos les resulta muy cómodo que haya un valor que marque la diferencia.

E: Sin embargo no lo hay, como ocurre en muchas situaciones de la vida común.

P: ¿Puede ponerme ejemplos de ello?

E: Hay miles. Todos coincidimos en calificar como “millonario” a personas con mucho dinero, pero no hay una cantidad de dinero que separe al millonario del que no lo es. Todos coincidimos en que una temperatura ambiental de 40° es “muy calurosa”, y que 20° no es “muy caluroso”, pero no hay una temperatura que separe el día “muy caluroso” del que no lo es.

**** Ejercicio B.1:** Téngase en cuenta que si algo es **casi seguro**, decir que es “posible” es conceptualmente correcto, pero en la vida real ese adjetivo puede ser totalmente engañoso y por tanto inadecuado. Si un niño piensa tirarse de un quinto piso con un paraguas como paracaídas, decirle que es “possible” que se lesione es totalmente inadecuado, pues es **casi seguro**. Y si un paciente proyecta consumir heroína diariamente durante meses, es totalmente incorrecto decirle que es “possible” que se haga adicto, pues es **casi seguro**. Por ello, al elaborar las conclusiones de una investigación damos como “falso” el calificativo “possible” cuando el correcto sea “casi seguro”.

Para estudiar el posible efecto anticancerígeno (AC) de 4 productos, ‘A’, ‘B’, ‘C’ y ‘D, trabajaremos con una cepa de ratas genéticamente modificada, en la que el 90% desarrolla cáncer espontáneamente el segundo año. Se prueba cada producto en 20 ratas. He aquí los resultados y el valor P del Test para cada uno de los fármacos, así como los Intervalos de Confianza (IC) para el % de cánceres que se obtendría al dar el fármaco a toda la población de ratas:

- “A” → Hacen cáncer 8 ratas → 40%, P = 0.000003, IC_{95%} = 19% y 64%
- “B” → Hacen cáncer 15 ratas → 75%, P = 0.043, IC_{95%} = 51% y 91%
- “C” → Hacen cáncer 16 ratas → 80%, P = 0.133, IC_{95%} = 56% y 94%
- “D” → Hacen cáncer 18 ratas → 90%, P = 0.608, IC_{95%} = 69% y 99%

A partir de estos resultados, diga si es Verdadera o Falsa cada una de estas afirmaciones

AFIRMACIONES ACERCA DEL PRODUCTO “A”:

- a. Es casi seguro que “A” es AC.
- b. Es posible que “A” sea AC.
- c. Es casi seguro que con “A” el % poblacional de cánceres es 40%.
- d. Es casi seguro que “A” es inútil.
- e. Los datos son compatibles con que “A” sea inútil.
- f. Lo razonable es concluir que “A” es inútil.
- g. Si “A” fuera inútil, solo 3 de cada millón de estudios como este darían 8 o menos cánceres.

AFIRMACIONES ACERCA DEL PRODUCTO “B”:

- a. Es casi seguro que “B” es AC.
- b. Es posible que “B” sea AC.
- c. Es casi seguro que con “B” el % poblacional de cánceres es 75%.
- d. Es casi seguro que “B” es inútil.
- e. Los datos son compatibles con que “B” sea inútil.

- f. Lo razonable es concluir que “B” es inútil.
- g. Si “B” fuera inútil, 43 de cada mil estudios como este tendrían 15 o menos cánceres.

AFIRMACIONES ACERCA DEL PRODUCTO “C”:

- a. Es casi seguro que “C” es AC.
- b. Es posible que “C” sea AC.
- c. Es casi seguro que con “C” el % poblacional de cánceres es 80%.
- d. Es casi seguro que “C” es inútil.
- e. Los datos son compatibles con que “C” sea inútil.
- f. Lo razonable es concluir que “C” es inútil.
- g. Si “C” fuera inútil, 133 de cada mil estudios como este darían 16 o menos cánceres.

AFIRMACIONES ACERCA DEL PRODUCTO “D”:

- a. Es casi seguro que “D” es AC.
- b. Es posible que “D” sea AC.
- c. Es casi seguro que con “D” el % poblacional de cánceres es 90%.
- d. Es casi seguro que “D” es inútil.
- e. Los datos son compatibles con que “D” sea inútil.
- f. Lo razonable es concluir que “D” es inútil.
- g. Si “D” fuera inútil, 608 de cada mil estudios como este darían 18 o menos cánceres.

Apéndice C

CÁLCULO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS RECTA DE REGRESIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS

En muy distintas situaciones del hacer común y del científico es necesario **minimizar** o **maximizar** una cantidad que depende de otras. El reto es encontrar los valores de las otras que proporcionan ese valor mínimo o máximo. Un ejemplo típico es cómo regular los semáforos de una ciudad para minimizar el tiempo que tarda en cruzarse por todas las rutas posibles. Otro ejemplo es la organización de las cadenas de montaje en las fábricas para minimizar el tiempo de producción de cada unidad.

Al estudiar la relación entre dos variables cuantitativas construimos la nube de puntos y buscamos la recta que pasa más cerca de ellos en promedio, de modo que sea mínima la suma de los cuadrados de las distancias verticales de cada punto a la recta. Hay que encontrar los valores de “**a**” y de “**b**” que hacen mínimo el valor de $\sum d_i^2 = \sum (Y_i - Y'_i)^2 = \sum (Y_i - [a + b X_i])^2$. Ello es, en principio, una tarea ingente porque el número de rectas candidatas es infinito, ya que tanto “**a**” como “**b**” pueden tomar infinitos valores posibles. Buscar la recta con $\sum d_i^2$ mínima a base de ir probando con diversos valores de “**a**” y de “**b**”, sería interminable. Pero desde el siglo XVII contamos con un recurso genial que permite encontrar esa recta en pocos minutos, como permite el cálculo de máximos o mínimos en muchas otras situaciones: el cálculo de la función derivada. Los padres de este recurso son Newton y Leibniz, independientemente. Ellos forman parte destacada de esa minoría muy reducida que sacó a esta especie de las cavernas y es difícil exagerar la deuda que la humanidad actual tiene con esos gigantes del pensamiento.

Veamos con detalle un ejemplo muy sencillo de cálculo de un máximo. Tenemos 80 metros de cuerda para cerrar una parcela de terreno con forma de rectángulo y queremos que tenga la mayor superficie posible. El rectángulo con lado pequeño 10 y lado largo 30, ($\text{perímetro} = 10 + 30 + 10 + 30 = 80$) tiene superficie $10 \times 30 = 300$. El rectángulo con lado pequeño 15 y lado largo 25, ($\text{perímetro} = 80$) tiene superficie $15 \times 25 = 375$, mayor que el anterior. El rectángulo con lado pequeño 20 y lado largo 20 tiene superficie $20 \times 20 = 400$, que es mayor que el

anterior y que cualquier otro rectángulo de perímetro 80. Probando con otros valores enseguida vemos que el cuadrado de lado 20, cierra mayor superficie que cualquier otro rectángulo del mismo perímetro.

En este ejemplo un breve tanteo nos permitió encontrar la forma del rectángulo que *maximiza* la superficie. También se puede llegar a esa solución por razonamientos matemáticos sencillos que vemos a continuación porque en la mayoría de las situaciones de interés es imposible encontrar la solución por tanteo y necesitamos el razonamiento.

Llamemos A la longitud del lado corto del rectángulo y B a la del largo.

Perímetro 80 quiere decir $2(A + B) = 80$, es decir, $A + B = 40$ y por tanto $B = 40 - A$

Buscamos el valor de A que dé máxima superficie: $S = A \cdot B = A(40 - A) = 40 \cdot A - A^2$.

1º. Sin usar derivadas (Nivel de enseñanza media recibida hacia los 14 años)

$$\begin{aligned} S &= 40A - A^2 = -(A^2 - 40A) = -(A^2 - 2 \cdot 20 \cdot A) = -(A^2 - 2 \cdot 20 \cdot A + 20^2 - 20^2) = \\ &= -([A^2 - 2 \cdot 20 \cdot A + 20^2] - 20^2) = -([A - 20]^2 - 20^2) = 20^2 - [A - 20]^2 = 400 - [A - 20]^2 \end{aligned}$$

La expresión $[A - 20]^2$ tiene valor positivo cualquiera que sea el valor (positivo) de A, porque es un cuadrado. S toma el máximo valor cuando es $[A - 20] = 0$, es decir, $\mathbf{A = 20}$.

2º. Usando derivadas (Nivel de último año de enseñanza media)

$S = 40A - A^2$. Calculamos la derivada de S respecto a A: $dS / dA = 40 - 2A$. Igualamos la derivada a 0: $40 - 2A = 0 \rightarrow 40 = 2A \rightarrow A = 20$. Con $A = 20$ la superficie podría ser mínima o máxima. Pero como la segunda derivada es negativa [$d^2S / dA^2 = d(40 - 2A) / dA = -2$], se trata de un máximo.

Vemos que la búsqueda es mucho más breve usando derivadas, pero hacerlo requiere conocimientos básicos que los planes de estudio de enseñanza media se encargan de que el estudiante no adquiera nunca o los deteste y olvide vertiginosamente si alguna vez los tuvo. Unos razonamientos similares, pero un poco más largos, nos permiten encontrar la pendiente - b - y la altura - a - de la recta que hace mínima $\sum d_i^2$. Al oír la demostración correspondiente el lector se sentirá atemorizado porque parece contener mucha formulación, pero cada paso es sencillo. Gran parte de los profesionales de las Ciencias de la Salud, Sociales y Económicas sienten rechazo y temor por las matemáticas, generados en los años escolares. Felizmente todos los conceptos fundamentales del AED se pueden entender y usar correctamente sin conocer las demostraciones que los avalan. Por eso este libro prescinde de ellas y se centra en las ideas intuitivas. Solamente en este apéndice se usa un poco de formalismo matemático, ya que es él el que permite calcular la recta de mínimos cuadrados y vale como ejemplo del cálculo de máximos y mínimos en general.

C.1. Acerca de la naturaleza de las demostraciones matemáticas.

El razonamiento matemático no es más que el razonamiento lógico común apoyado por notaciones que ayudan cuando la cadena de relaciones lógicas es larga. Nos ayudará a entender esto el siguiente ejercicio

**** Ejercicio C.1:** Juan y su esposa Ana (que es hija única) tienen una hija que no ha tenido descendencia y un hijo que tiene, a su vez, un único hijo.

- Juan le dice a su hijo “Dale este regalo a la abuela paterna de tu hijo”. ¿Quién es la destinataria?
- Juan le dice a su hijo “Dale este regalo a la hija de la hija de la esposa de mi suegro”. ¿Quién es la destinataria?
- Juan le dice a su hijo “Dale este regalo a la abuela paterna de la hija de la hija del esposo de la abuela materna del hermano de la tía paterna de mi nieto” ¿Quién es la destinataria?

En este tercer supuesto no se sabe de inmediato quién es la persona en cuestión. El lector se siente perdido en esa larga cadena de relaciones. Pero cada eslabón de la cadena es una relación muy simple que se entiende perfectamente. Todos sabemos lo que es hijo, tío, abuelo... Para identificar la destinataria del regalo hay que hacer una cuidadosa reflexión que no es “matemática”, sino lógica. Para hacerlo ayuda mucho escribir un esquema con los familiares implicados. Ese esquema es imprescindible si la cadena de familiares es larga. Y hay que ir de atrás hacia delante en la frase que describe el problema. Ese árbol genealógico y la regla de ir de atrás hacia delante son lo equivalente al álgebra en la matemática.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Madre-Juan} & \rightarrow & \text{Juan} & \rightarrow & \text{Anita} \\ \text{Padre-Ana y Madre-Ana} & \rightarrow & \text{Ana} & \rightarrow & \text{Juanito} & \rightarrow & \text{Niño} \end{array}$$

La frase termina refiriéndose al niño. Su tía paterna es Anita. El hermano de ella es Juanito. Su abuela materna es Madre-Ana. Su esposo es Padre-Ana. Su hija es Ana. Su hija es Anita. Su abuela paterna es la Madre de Juan, que es la destinataria del regalo.

C.2. Cálculo inmediato de la recta de Mínimos Cuadrados

(El sumatorio Σ abarca a los N valores de la muestra)

Se trata de encontrar la recta $Y' = a + b X$, es decir los valores de “**a**” y de “**b**” con los que los valores calculados Y' se aproximan lo más posible a los observados Y , de modo que la suma de errores de estimación positivos sea igual a la suma de los errores negativos, es decir, $\sum d_i = 0$ y la suma de los errores al cuadrado sea menor que con cualquier otra recta, es decir, hay que **minimizar** $\sum d_i^2 = \sum (Y_i - Y'_i)^2 = \sum (Y_i - [a + bX_i])^2$

Se puede demostrar que en la recta con $\sum d^2$ mínima es $\sum d = 0$, es decir, suman igual las distancias $Y_i - Y'_i$ positivas que las negativas, la recta deja tan alejados los puntos por encima como por debajo de ella.

A- Sin usar cálculo de derivadas ("Pr" indica prueba, demostración)

1º. Toda recta que dé $\sum d = 0$ contiene el punto correspondiente a la media de las X's y la media de las Y's, es decir, el punto (M_Y, M_X) está en esa recta, es decir, $M_Y = a + b M_X$,

$$\text{Pr: } 0 = \sum d = \sum(Y - [a + bX]) = \sum Y - N a - b \sum X \rightarrow \sum Y = N a + b \sum X_i$$

$$\rightarrow \text{dividiendo por } N: M_Y = a + b M_X. \text{ Por tanto, } a = M_Y - b M_X$$

Si una recta da $\sum d = 0$, pasa por el punto (M_Y, M_X) y conociendo b, inmediatamente calculamos la a.

2º. La media de las Y' calculadas es igual a la media de las Y observadas: $M_{Y'} = M_Y$

$$\text{Pr: } M_{Y'} = (\sum Y'_i) / N = \sum[a + bX'_i] / N = (Na + b \sum X'_i) / N = a + b M_X = M_Y$$

3º. Habíamos definido $d_i = (Y_i - Y'_i)$. Ahora demostramos que es $d_i = (y_i - b x_i)$

$$\text{Pr: } d_i = Y_i - Y'_i = Y_i - [a + bX'_i] = Y_i - a - bX'_i = Y_i - (M_Y - b M_X) - bX'_i = (Y_i - M_Y) + b(X'_i - M_X) = y_i - bx_i$$

4º. { Recordemos que $(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$ }

$$\sum d^2 = \sum[y - b x]^2 = \sum[y^2 - 2bxy + b^2 x^2] = \sum y^2 - 2b \sum xy + b^2 \sum x^2.$$

Sumando y restando $(\sum xy)^2 / \sum x^2$:

$$\begin{aligned} \sum d^2 &= \sum y^2 - 2b \sum xy + b^2 \sum x^2 + (\sum xy)^2 / \sum x^2 - (\sum xy)^2 / \sum x^2 = \\ &= \sum y^2 + \{ b^2 \sum x^2 - 2b \sum xy + (\sum xy)^2 / \sum x^2 \} - (\sum xy)^2 / \sum x^2 \end{aligned}$$

Sacando $\sum x^2$ factor común de la expresión entre corchetes:

$$= \sum y^2 + \sum x^2 \{ b^2 - 2b \sum xy / \sum x^2 + (\sum xy)^2 / (\sum x^2)^2 \} - (\sum xy)^2 / \sum x^2$$

La expresión entre corchetes es el cuadrado de una diferencia: $[b - c]^2 = b^2 - 2bc + c^2$

$$\sum d^2 = \sum y^2 + \sum x^2 \{ b - \sum xy / \sum x^2 \}^2 - (\sum xy)^2 / \sum x^2$$

$\sum d^2$ es **mínimo** cuando la resta entre corchetes es 0, es decir si $b = \sum xy / \sum x^2$, y en ese caso $\sum d^2 = \sum y^2 - (\sum xy)^2 / \sum x^2$.

B- Con cálculo elemental de derivadas

1. Para que $\sum d^2$ sea mínimo tiene que ser $a = M_Y - b M_X$

Expresamos $\sum d^2$ en función de los valores de X, de Y, de "a" y "b"

$$\begin{aligned} \sum d^2 &\equiv \sum(Y_i - Y'_i)^2 = \sum(Y_i^2 - 2Y_i Y'_i + Y'_i^2) = \sum(Y_i^2 - 2Y_i[a + bX'_i] + [a + bX'_i]^2) = \\ &= \sum Y_i^2 - 2a \sum Y_i - 2b \sum Y_i X'_i + N a^2 + 2a b \sum X'_i + b^2 \sum X'_i^2 = \\ &= \sum Y_i^2 - 2a \sum Y_i + N a^2 + 2a b \sum X'_i - 2b \sum Y_i X'_i + b^2 \sum X'_i^2 \end{aligned}$$

Derivada parcial respecto a "a": $d \sum d^2 / d a = -2 \sum Y_i + N 2 a + 2 b \sum X'_i$

Igualamos la derivada a cero: $-2 \sum Y_i + N 2 a + 2 b \sum X'_i = 0$

Dividimos por 2 N: $-M_Y + a + b M_X = 0 \rightarrow a = M_Y - b M_X$

2. $M_Y = a + b M_X$. Es decir, la recta pasa por M_X y M_Y , el punto correspondiente a la media de los valores X y la media de los valores Y.

3. Entonces es $d_i = y_i - b x_i$

$$d_i = Y_i - Y'_i = Y_i - [a + bX_i] = Y_i - a - bX_i = Y_i - (M_Y - b M_X) - bX_i = (Y_i - M_Y) - b(X_i - M_X) \equiv y_i - b x_i$$

4. Entonces es $\sum d = 0$. $\sum d = \sum (y_i - b x_i) = \sum y_i - b \sum x_i = 0 - b 0 = 0$

5. Buscamos "b" para que sea mínimo $\sum d^2$

$$\sum d^2 = \sum [y - b x]^2 = \sum [y^2 - 2b xy + b^2 x^2] = \sum y^2 - 2b \sum xy + b^2 \sum x^2$$

$$\text{Derivada parcial respecto a "b": } d\sum d^2 / d b = -2 \sum xy + 2 b \sum x^2$$

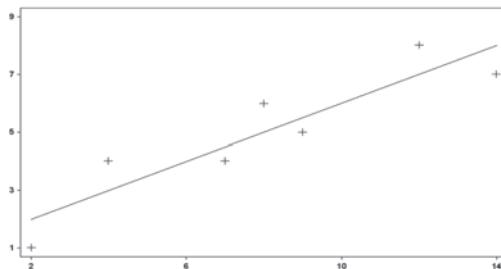
$$\text{Igualamos la derivada a cero: } -2 \sum xy + 2 b \sum x^2 = 0 \Rightarrow b = \sum xy / \sum x^2$$

C.3. El coeficiente de determinación como porcentaje de la variación de Y "explicada" por la variabilidad de X

Supongamos que esta tabla recoge la información al haber medido dos variables cuantitativas en 7 familias: X mide la inteligencia de los padres e Y la de sus hijos:

Familia	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	
X	2	4	7	8	9	12	14	Media = 8
Y	1	4	4	6	5	8	7	Media = 5
$Y' = 1 + 0.5 X$	2	3	4.5	5	5.5	7	8	
$d = Y - Y'$	-1	+1	-0.5	+1	-0.5	+1	-1	$\sum d = 0$

Se representa la nube de puntos (cada punto es un par formado por la inteligencia de un parente y la de su hijo) y se busca la recta que mejor se ajusta a esa nube de puntos, la recta de mínimos cuadrados, $Y = 1 + 0.5 \cdot X$. En la tercera fila de la tabla, después de los datos, aparece el valor de la inteligencia que se estimaría con esa recta para cada uno de los niños a partir de la inteligencia de sus padres. Y en la fila siguiente el error que se comete en cada una de las estimaciones.



$$\sum x^2 = 106, \quad \sum y^2 = 32, \quad \sum xy = 53$$

$$b = \sum y^2 / 106 = 0.5 \quad a = 1 \quad Y = 1 + 0.5b \quad \sum d^2 = 32 - 53^2 / 106 = 5.5$$

$$\sum d^2 / \sum y^2 = 5.5 / 32 = 0.172 \rightarrow \text{Coef. de Determinación: } r^2 = 1 - 0.172 = 0.828$$

No todos los hijos tienen la misma inteligencia, sino que hay diferencias entre ellos. Esas diferencias se resumen mediante la suma de cuadrados de la Y, $\sum (Y_i - M_Y)^2 = 32$. Parte de esas diferencias, pero no todas, se deben a que unos son hijos

de padres más inteligentes que otros. Queremos ver en qué medida la inteligencia de los hijos depende de la de los padres.

Si la inteligencia de los hijos dependiera solamente de la que tienen sus padres, conociendo la inteligencia del padre sabríamos cuál es la del hijo. Es decir, los valores Y de la muestra dependerían exactamente de los X a través de la recta de regresión. En ese caso cada $d = Y - Y'$ sería cero y por tanto sería cero la $\sum d^2$. Pero los valores observados de Y no coinciden exactamente con los calculados por la recta. El valor de las $d = Y - Y'$ expresa esa diferencia en cada caso y la $\sum d^2$ es un modo de expresar la parte de $\sum y^2$ no asociada a las diferencias entre los padres.

Las diferencias entre los valores observados y los predichos por la recta, resumidas por la $\sum d^2$, representan la parte de inteligencia de los hijos no predecible a partir de la de los padres. Y, por tanto, el Coeficiente de Determinación representa la parte de la variabilidad explicada por la inteligencia de los padres.

TABLAS ESTADÍSTICAS

Distribución Binomial

$$P(X = x) = \binom{N}{x} \cdot \pi^x \cdot (1 - \pi)^{N-x}$$

N	X	π	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500	
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000	
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500	
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250	
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750	
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750	
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625	
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500	
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1636	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750	
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312	
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3855	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562	
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125	
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156	
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938	
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344	
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078	
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0574	
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641	
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039	
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312	
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094	
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020	
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176	
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2688	.2162	.1612	.1110	.0703	
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010	
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
11	0	.8952	.5600	.3162	.1691	.0846	.0446	.0226	.0113	.0056	.0026	.0011	
	1	.0994	.3351	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0051	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
12	0	.8860	.5217	.2874	.1459	.0674	.0349	.0179	.0089	.0044	.0020	.0009	
	1	.1034	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0059	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
13	0	.8768	.4834	.2591	.1276	.0601	.0312	.0156	.0071	.0036	.0016	.0007	
	1	.1072	.3759	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0067	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
14	0	.8676	.4451	.2308	.1093	.0523	.0258	.0124	.0059	.0027	.0012	.0005	
	1	.1109	.3679	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0075	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
15	0	.8584	.4068	.2025	.0846	.0371	.0179	.0089	.0044	.0020	.0010	.0004	
	1	.1142	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0083	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
16	0	.8492	.3685	.1742	.0601	.0283	.0124	.0059	.0027	.0012	.0005	.0002	
	1	.1181	.3759	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0091	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
17	0	.8400	.3302	.1460	.0346	.0171	.0079	.0039	.0019	.0009	.0004	.0001	
	1	.1214	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0099	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
18	0	.8308	.2919	.1177	.0192	.0096	.0048	.0024	.0012	.0006	.0003	.0001	
	1	.1252	.3679	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0107	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
19	0	.8216	.2536	.0894	.0162	.0079	.0040	.0020	.0010	.0005	.0002	.0001	
	1	.1286	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0115	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
20	0	.8124	.2154	.0612	.0136	.0063	.0031	.0015	.0007	.0003	.0001	.0000	
	1	.1325	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0123	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
21	0	.8032	.1771	.0334	.0065	.0032	.0016	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	
	1	.1375	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0131	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
22	0	.7940	.1389	.0156	.0031	.0015	.0007	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	
	1	.1426	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0139	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
23	0	.7848	.0997	.0077	.0016	.0007	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1464	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0143	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
24	0	.7756	.0605	.0044	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1481	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0147	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
25	0	.7664	.0224	.0013	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1506	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0151	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
26	0	.7572	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1531	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0155	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
27	0	.7479	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1566	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0159	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
28	0	.7387	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1601	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0161	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
29	0	.7295	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1616	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0162	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
30	0	.7203	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1631	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0163	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
31	0	.7111	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1646	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0164	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
32	0	.7019	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1665	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098	
	2	.0165	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439	
33	0	.6927	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
	1	.1692	.3511	.3874	.3474	.2684	.1877	.121					

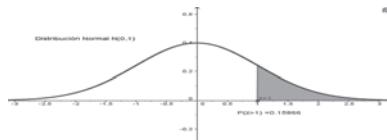
Distribución de Poisson

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$\lambda \downarrow$ $x \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.1	.9048	.0905	.0045	.0002	.0000							
0.2	.8187	.1637	.0164	.0011	.0001	.0000						
0.3	.7408	.2222	.0333	.0033	.0002	.0000						
0.4	.6703	.2681	.0536	.0072	.0007	.0001	.0000					
0.5	.6065	.3033	.0758	.0126	.0016	.0002	.0000					
0.6	.5488	.3293	.0988	.0198	.0030	.0004	.0000					
0.7	.4966	.3476	.1217	.0284	.0050	.0007	.0001	.0000				
0.8	.4493	.3595	.1438	.0383	.0077	.0012	.0002	.0000				
0.9	.4066	.3659	.1647	.0494	.0111	.0020	.0003	.0000				
1.0	.3679	.3679	.1839	.0613	.0153	.0031	.0005	.0001	.0000			
1.1	.3329	.3662	.2014	.0738	.0203	.0045	.0008	.0001	.0000			
1.2	.3012	.3614	.2169	.0867	.0260	.0062	.0012	.0002	.0000			
1.3	.2725	.3543	.2303	.0998	.0324	.0084	.0018	.0003	.0001	.0000		
1.4	.2466	.3452	.2417	.1128	.0395	.0111	.0026	.0005	.0001	.0000		
1.5	.2231	.3347	.2510	.1255	.0471	.0141	.0035	.0008	.0001	.0000		
1.6	.2019	.3230	.2584	.1378	.0551	.0176	.0047	.0011	.0002	.0000		
1.7	.1827	.3106	.2640	.1496	.0636	.0216	.0061	.0015	.0003	.0001	.0000	
1.8	.1653	.2975	.2678	.1607	.0723	.0260	.0078	.0020	.0005	.0001	.0000	
1.9	.1496	.2842	.2700	.1710	.0812	.0309	.0098	.0027	.0006	.0001	.0000	
2.0	.1353	.2707	.2707	.1804	.0902	.0361	.0120	.0034	.0009	.0002	.0000	
2.2	.1108	.2438	.2681	.1966	.1082	.0476	.0174	.0055	.0015	.0004	.0001	.0000
2.4	.0907	.2177	.2613	.2090	.1254	.0602	.0241	.0083	.0025	.0007	.0002	.0000
2.6	.0743	.1931	.2510	.2176	.1414	.0735	.0319	.0118	.0038	.0011	.0003	.0001
2.8	.0608	.1703	.2384	.2225	.1557	.0872	.0407	.0163	.0057	.0018	.0005	.0001
3.0	.0498	.1494	.2240	.2240	.1680	.1008	.0504	.0216	.0081	.0027	.0008	.0002
3.2	.0408	.1304	.2087	.2226	.1781	.1140	.0608	.0278	.0111	.0040	.0013	.0004
3.4	.0334	.1135	.1929	.2186	.1858	.1264	.0716	.0348	.0148	.0056	.0019	.0006
3.6	.0273	.0984	.1771	.2125	.1912	.1377	.0826	.0425	.0191	.0076	.0028	.0009
3.8	.0224	.0850	.1615	.2046	.1944	.1477	.0936	.0508	.0241	.0102	.0039	.0013
4.0	.0183	.0733	.1465	.1954	.1954	.1563	.1042	.0595	.0298	.0132	.0053	.0019
5.0	.0067	.0337	.0842	.1404	.1755	.1755	.1462	.1044	.0653	.0363	.0181	.0082
6.0	.0025	.0149	.0446	.0892	.1339	.1606	.1606	.1377	.1033	.0688	.0413	.0225
7.0	.0009	.0064	.0223	.0521	.0912	.1277	.1490	.1490	.1304	.1014	.0710	.0452
8.0	.0003	.0027	.0107	.0286	.0573	.0916	.1221	.1396	.1396	.1241	.0993	.0722
9.0	.0001	.0011	.0050	.0150	.0337	.0607	.0911	.1171	.1318	.1318	.1186	.0970
10.0	.0000	.0005	.0023	.0076	.0189	.0378	.0631	.0901	.1126	.1251	.1251	.1137
$\lambda \downarrow$ $x \rightarrow$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
3.2	.0001	.0000										
3.4	.0002	.0000										
3.6	.0003	.0000										
3.8	.0004	.0001										
4.0	.0006	.0002										
5.0	.0034	.0013	.0005	.0002								
6.0	.0113	.0052	.0022	.0009	.0003	.0001						
7.0	.0264	.0142	.0071	.0033	.0014	.0006	.0002	.0001				
8.0	.0481	.0296	.0169	.0090	.0045	.0021	.0009	.0004	.0002	.0001		
9.0	.0728	.0504	.0324	.0194	.0109	.0058	.0029	.0014	.0006	.0003	.0001	
10.0	.0948	.0729	.0521	.0347	.0217	.0128	.0071	.0037	.0019	.0009	.0004	.0002

Para cada valor λ (primera columna), el interior de la tabla da la probabilidad del valor “x” (primera fila) en una Distribución de Poisson de parámetro λ , $P(X=x)$. Ejemplo, si de una población con 0.3% ($\pi=0.003$) de enfermos se toma una muestra de $n = 2000$ el valor esperado es $\lambda = 0.003 \cdot 2000 = 0.1606$, es decir, en aproximadamente 16 de cada 100 muestras habrá 6 enfermos. Y la probabilidad de que en ella haya justamente 2 enfermos es $P(X=2 | \lambda = 6) = 0.0446$. Y la probabilidad de que haya más de 13 enfermos es $P(X \geq 14 | \lambda = 6) = 0.0035$. (Los valores en blanco indican que la probabilidad es menor de 0.0001).

Distribución Normal



Z	Área más allá de Z						
0.00	.5000	0.80	.2119	1.60	.0548	2.40	.0082
0.02	.4920	0.82	.2061	1.62	.0526	2.42	.0078
0.04	.4840	0.84	.2005	1.64	.0505	2.44	.0073
0.06	.4761	0.86	.1949	1.66	.0485	2.46	.0069
0.08	.4681	0.88	.1894	1.68	.0465	2.48	.0066
0.10	.4602	0.90	.1841	1.70	.0446	2.50	.0062
0.12	.4522	0.92	.1788	1.72	.0427	2.52	.0059
0.14	.4443	0.94	.1736	1.74	.0409	2.54	.0055
0.16	.4364	0.96	.1685	1.76	.0392	2.56	.0052
0.18	.4286	0.98	.1635	1.78	.0375	2.58	.0049
0.20	.4207	1.00	.1587	1.80	.0359	2.60	.0047
0.22	.4129	1.02	.1539	1.82	.0344	2.62	.0044
0.24	.4052	1.04	.1492	1.84	.0329	2.64	.0041
0.26	.3974	1.06	.1446	1.86	.0314	2.66	.0039
0.28	.3897	1.08	.1401	1.88	.0301	2.68	.0037
0.30	.3821	1.10	.1357	1.90	.0287	2.70	.0035
0.32	.3745	1.12	.1314	1.92	.0274	2.72	.0033
0.34	.3669	1.14	.1271	1.94	.0262	2.74	.0031
0.36	.3594	1.16	.1230	1.96	.0250	2.76	.0029
0.38	.3520	1.18	.1190	1.98	.0239	2.78	.0027
0.40	.3446	1.20	.1151	2.00	.0228	2.80	.0026
0.42	.3372	1.22	.1112	2.02	.0217	2.82	.0024
0.44	.3300	1.24	.1075	2.04	.0207	2.84	.0023
0.46	.3228	1.26	.1038	2.06	.0197	2.86	.0021
0.48	.3156	1.28	.1003	2.08	.0188	2.88	.0020
0.50	.3085	1.30	.0968	2.10	.0179	2.90	.0019
0.52	.3015	1.32	.0934	2.12	.0170	2.92	.0018
0.54	.2946	1.34	.0901	2.14	.0162	2.94	.0016
0.56	.2877	1.36	.0869	2.16	.0154	2.96	.0015
0.58	.2810	1.38	.0838	2.18	.0146	2.98	.0014
0.60	.2743	1.40	.0808	2.20	.0139	3.00	.0013
0.62	.2676	1.42	.0778	2.22	.0132	3.10	.0010
0.64	.2611	1.44	.0749	2.24	.0125	3.20	.0007
0.66	.2546	1.46	.0721	2.26	.0119	3.30	.0005
0.68	.2483	1.48	.0694	2.28	.0113	3.40	.0003
0.70	.2420	1.50	.0668	2.30	.0107	3.50	.0002
0.72	.2358	1.52	.0643	2.32	.0102	3.70	.0001
0.74	.2296	1.54	.0618	2.34	.0096	3.90	.00005
0.76	.2236	1.56	.0594	2.36	.0091	4.00	.00003
0.78	.2177	1.58	.0571	2.38	.0087	5.00	$3 \cdot 10^{-7}$
						6.00	$1 \cdot 10^{-11}$

Para cada uno de los valores Z (1^a columna), la 2^a columna da la probabilidad de un valor igual o superior a él en una Distribución Normal Estandarizada, $N(0,1)$. Es el área sombreada en el gráfico. Ejemplo: en una Normal con Media $\mu = 200$ y Desviación estándar $\sigma = 10$, la proporción de casos con valor mayor de 215 es $P(X > 215) = P(Z > 1.5) = 0.0668$ y la proporción de casos con X mayor de 190 es $P(X > 190) = P(Z > -1) = 0.5 + 0.1587 = 0.6587$. En una Normal con Media $\mu = 80$ y Desviación estándar $\sigma = 5$, la proporción de casos con valor menor de 65 es $P(X < 65) = P(Z < -3) = P(Z > 3) = 0.0013$. Y la proporción de casos con valor entre 70 y 85 es $P(70 < X < 85) = P(-2 < Z < 1) = (0.4772 + 0.3413) = 0.8185$.

Distribución t de Student

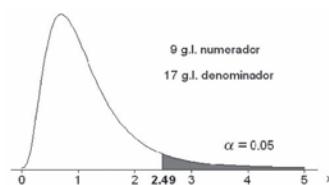


BIL →	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
UNI →	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0005
gl 1	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
↓ 2	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.083	1.356	1.782	2.179	2.618	3.055	4.318
13	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
50	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.497
60	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
80	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.417
100	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.391
∞	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Cada fila da los datos para la Distribución t-Student con los grados de libertad, gl, indicados en la primera columna. Todas las distribuciones t-Student tienen media cero y son simétricas.

- La distribución con, por ejemplo, $gl = 2$, tiene el 0.15 de los valores por encima de 1.386 y otro 0.15 por debajo de -1.386, de modo que deja 30% en la dos colas.
- La distribución con, por ejemplo, $gl = 15$, tiene el 0.005 de los valores por encima de 2.947 y otro 0.005% por debajo de -2.947, de modo que deja 0.01 en la dos colas.
- La distribución con, por ejemplo, $gl = 40$, tiene el 0.01 de los valores por encima de 2.423 y otro 0.01 por debajo de -2.423, de modo que deja 0.02 en la dos colas.
- Si en un test se obtiene, por ejemplo, $t\text{-Student} = 3.3$ con 16 gl, vemos que 3.3 está entre 2.921 y 3.819, por lo que es $P_{UNIL} < 0.005$
- Si en un test se obtiene, por ejemplo, $t\text{-Student} = 1.2$ con 29 gl, vemos que 1.2 está entre 1.055 y 1.311, por lo que es $P_{UNIL} > 0.10$

Distribución F de Snedecor



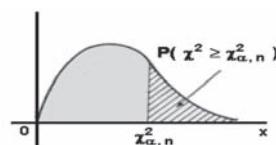
	alfa = 0.05		Grados de libertad del numerador													
	alfa = 0.01		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	60	100	10000
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	248,02	252,20	253,04	254,30		
	4052,2	4999,3	5403,5	5624,3	5764,0	5859,0	5928,3	5981,0	6022,4	6055,9	6208,7	6313,0	6333,9	6365,6		
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,45	19,48	19,49	19,50		
	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,45	99,48	99,49	99,50		
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,66	8,57	8,55	8,53		
	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	26,69	26,32	26,24	26,13		
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,69	5,66	5,63		
	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,02	13,65	13,58	13,46		
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,43	4,41	4,37		
	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,55	9,20	9,13	9,02		
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,74	3,71	3,67		
	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,40	7,06	6,99	6,88		
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,44	3,30	3,27	3,23		
	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,16	5,82	5,75	5,65		
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,15	3,01	2,97	2,93		
	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,36	5,03	4,96	4,86		
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,94	2,79	2,76	2,71		
	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	4,81	4,48	4,41	4,31		
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,77	2,62	2,59	2,54		
	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,41	4,08	4,01	3,91		
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,65	2,49	2,46	2,41		
	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,10	3,78	3,71	3,60		
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,54	2,38	2,35	2,30		
	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	3,86	3,54	3,47	3,36		
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,46	2,30	2,26	2,21		
	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,66	3,34	3,27	3,17		
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,39	2,22	2,19	2,13		
	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,51	3,18	3,11	3,01		
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,33	2,16	2,12	2,07		
	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,37	3,05	2,98	2,87		
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,28	2,11	2,07	2,01		
	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,26	2,93	2,86	2,75		
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,23	2,06	2,02	1,96		
	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,16	2,83	2,76	2,65		
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,19	2,02	1,98	1,92		
	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,08	2,75	2,68	2,57		
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,16	1,98	1,94	1,88		
	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,00	2,67	2,60	2,49		
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,12	1,95	1,91	1,84		
	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	2,94	2,61	2,54	2,42		

Distribución F de Snedecor (continuación)

	alfa = 0.05	Grados de libertad del numerador												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	60	100
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,10	1,92	1,88	1,81
	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	2,88	2,55	2,48	2,36
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,07	1,89	1,85	1,78
	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	2,83	2,50	2,42	2,31
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,05	1,86	1,82	1,76
	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	2,78	2,45	2,37	2,26
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,03	1,84	1,80	1,73
	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	2,74	2,40	2,33	2,21
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,01	1,82	1,78	1,71
	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,70	2,36	2,29	2,17
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	1,99	1,80	1,76	1,69
	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,66	2,33	2,25	2,13
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	1,97	1,79	1,74	1,67
	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,63	2,29	2,22	2,10
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	1,96	1,77	1,73	1,65
	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,60	2,26	2,19	2,07
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	1,94	1,75	1,71	1,64
	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,57	2,23	2,16	2,04
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	1,93	1,74	1,70	1,62
	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,55	2,21	2,13	2,01
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,84	1,64	1,59	1,51
	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,37	2,02	1,94	1,81
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,78	1,58	1,52	1,44
	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,27	1,91	1,82	1,68
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,68	1,45	1,39	1,28
	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,07	1,69	1,60	1,43
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,59	1,35	1,28	1,12
	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	1,92	1,52	1,41	1,17
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,58	1,33	1,26	1,08
	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	1,90	1,50	1,38	1,12
2000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	2,01	1,94	1,88	1,84	1,58	1,32	1,25	1,06
	6,65	4,62	3,79	3,33	3,03	2,81	2,65	2,52	2,42	2,33	1,89	1,48	1,37	1,09
10000	3,84	3,00	2,61	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,57	1,32	1,25	1,03
	6,64	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	1,88	1,48	1,36	1,05

La cabecera de las columnas indica los Grados de Libertad (gl) del numerador de la Razón de Varianzas F y en las filas los gl del denominador. En cada casilla aparece los valores de F para $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$ (este último en negrita). Supongamos un ANOVA en que se comparan 5 grupos con 3 individuos en cada uno. Tenemos $gl_{\text{Entre}} = 4$ y $gl_{\text{Dentro}} = 10$. En el cruce de la columna con cabecera "4" y la fila con cabecera "10" vemos las cantidades 3,33 y 5,64. Al valor F = 3,33 le corresponde P 0,05 y al valor F = 5,64 le corresponde P 0,01. Si F es menor de 3,33, P es mayor de 0,05, y si F es mayor de 5,64, P es menor de 0,01. Si F está entre 3,33 y 5,64, P está entre 0,05 y 0,01. Por ejemplo, si es F = 2,5, es P > 0,05 y si es F = 9,3, es P < 0,01. Los programas informáticos dan el valor exacto de P.

Distribución Chi - cuadrado



Grados libertad	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21
80	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

Cada fila da los datos para la Distribución Chi-Cuadrado con los grados de libertad, gl, indicados en la primera columna. Solamente se consideran las proporciones a la derecha de cada valor, como indica la figura. Por ejemplo, la distribución con, gl = 2, tiene el 0.10 de los valores por encima de 4.61, la distribución con gl = 15, tiene el 0.005 de los valores por encima de 32.80 y la distribución con gl = 40, tiene el 0.01 de los valores por encima de 63.39. Si un test da, por ejemplo, Chi-Cuadrado = 33.4 con 21 gl, vemos que 33.4 está entre 32.67 y 35.48, por lo que es $0.05 > P_{UNIL} > 0.025$.

BIOESTADÍSTICA

SIN DIFICULTADES MATEMÁTICAS

SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

**Luis Prieto Valiente
Inmaculada Herranz Tejedor**

pronóstico.

h. e. i. Dependiendo de la fibra: es 0.20 en los F+ y 0.70 en los F-. Entonces, tener fibra modifica el fibroblast.

e. $P(M-F+) = 480 / 600 = 0.80$, forma parte de la DF, de fibroblastas condicionada a fibra.

d. $P(F-M+) = 980 / 1100 = 0.89$, forma parte de la DF, de fibra condicionada a fibroblastas.

c. $P(F-y M+) = 980 / 2000 = 0.49$, forma parte de la DF, conjunta.

b. $P(F+) = 600 / 2000 = 0.7$, el 70% fibron F-, forma parte de la DF, marginal de fibra.

a. $P(F-) = 1400 / 2000 = 0.7$, el 70% fibron F-, forma parte de la DF, marginal de fibra.

Ejercicio 3.1:

CAPÍTULO 3

$$b. M = 2.2 ; SC = 8.8 ; S^2 = 8.8/4 = 2.2 ; S = 1.48 \text{ y } ES = 1.48 / 5^{1/2} = 0.66.$$

a. No tiene sentido porque no se repiten los valores.

Ejercicio 2.3:

$$\text{Media} = (5.0 + 8.1 + 3.2 + 3.3 + 1.4) / 20 = 2.50 + .40.1 + .15.2 + .15.3 + .05.4 = 1.35 \text{ hijos.}$$

Frecuencias relativas f_i : $\frac{f_i}{n} : \frac{5}{20}, \frac{8}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{20} \rightarrow 1$

Frecuencias absolutas n_i : $5, 8, 3, 3, 1 \rightarrow 20$

Ejercicio 2.2:

medio).

es menor en la primera y mayor en la última (aunque las dos últimas tienen igual dispersión d. Las 3 listas tienen igual media (en las 3, todos los valores están en torno a 8), pero la dispersión

$$c. M = 8 ; DM = 8/4 = 2 ; SC = 32 ; S^2 = 32/3 = 10.67 ; S = 10.67^{1/2} = 3.27.$$

$$b. M = 8 ; DM = 8/4 = 2 ; SC = 16 ; S^2 = 16/3 = 5.33 ; S = 5.33^{1/2} = 2.31.$$

$$a. M = 8 ; DM = 2/4 = 0.5 ; SC = 2 ; S^2 = 2/3 = 0.67 ; S = 0.67^{1/2} = 0.82.$$

Ejercicio 2.1:

CAPÍTULO 2

habrían enfermado. Se habrían evitado 84 000 - 60 000 = 24 000 enfermos.

bebedores. Total 48 000 + 36 000 = 84 000 enfermos. Si nadie hubiera bebido 0.03 · 200 000 000 = 60 000 individuos con riesgo de A de 3 · 0.03 = 0.09; entonces 0.09 · 400 000 = 36 000 enfermos entre los

0.03 · 1 600 000 = 48 000 enfermos entre los no bebedores. Beben 20% de 2 millones = 400 000 Ejercicio 1.6: No beben 80% de 2 millones = 1600000 individuos con riesgo de A de 0.03; entonces

Porcentaje de enfermos debidos al tabaco: $(360 000 / 560 000) \cdot 100 = 64.3\%$.

Exceso de enfermos: $560 000 - 200 000 = 360 000$ deben su enfermedad al tabaco.

Si nadie hubiera fumado: $0.20 \cdot 1 000 000 = 200 000$ enfermos.

80 000 + 480 000 = 560 000 enfermos en total.

0.80 · 600 000 = 480 000 enfermos entre los fumadores.

0.20 · 400 000 = 80 000 enfermos entre los no fumadores.

0.06 · 1 000 000 = 600 000 fumadores y, por tanto, 400 000 no fumadores.

Ejercicio 1.5:

c. $0.0072 \cdot 0.0022 = 0.000016$, 16 por millón tienen hepatitis crónica.

b. $0.043 \cdot 0.0516 = 0.0022$, 0.22% están en UVI.

a. $0.374 \cdot 0.138 = 0.0516$, 5.16% están hospitalizados.

Ejercicio 1.4:

c. $0.20 \cdot 0.224 = 0.0448$, 4.48% de la población parto con cesárea transversal.

b. $0.40 \cdot 0.56 = 0.224$, 22.4% de la población parto con cesárea.

a. $0.80 \cdot 0.70 = 0.56$, 56% de la población ha parto.

Ejercicio 1.3:

Ejercicio 1.2: $0.3083 \cdot 120 = 36.996$ bebedores ≈ 37 bebedores.

Ejercicio 1.1: $0.20 \cdot 300 = 60$ fumadores.

CAPÍTULO 1

- f. $P(0|A) = 0.20$ es la prob de que a cada uno de ellos no les falte ninguna pieza, $0.2 \cdot 0.2 = 0.04$ pues las piezas dentarias que le faltan a uno es independiente de las que le faltan al otro.
- e. Se caen más en la raza A y menos en la B.
- $2 \cdot 0.2 = 1.0$
- d. Utilizando las DF de piezas faltantes en cada una de las razas:
- $M(A) = 0.0 \cdot 2 + 1.0 \cdot 4 + 2 \cdot 0.4 = 1.2$, $M(B) = 0.0 \cdot 6 + 1.0 \cdot 3 + 2 \cdot 0.1 = 0.5$, $M(C) = 0.0 \cdot 2 + 1.0 \cdot 6 + 2 \cdot 0.2 = 1.0$.
- c. $P(2|C) = 10 / 50 = 0.20$.
- b. $P(C) = 50 / 350 = 0.14$.

	0	1	2	Total	0	1	2	Total	0	1	2	Total	
A	20	40	40	100	0.06	0.11	0.11	0.29	A	20	40	40	100
B	120	60	20	200	0.34	0.17	0.06	0.57	B	.60	.30	.10	1
C	10	30	10	50	0.03	0.09	0.03	0.14	C	.20	.60	.20	1
	150	130	70	350	0.43	0.37	0.20	1					

- Ejercicio 3.6: Puesto que se estudiaron 350 individuos, hay 10 que son de la raza C y les faltan 2 piezas.
- sexos.
- d. Sexo y evolución son características dependientes pues la DF de evolución es distinta en los dos géneros.
- c. Además en las mujeres mueren un 50% y solo el 8% de los varones.
- b. En varones hay mejor evolución pues curan un 75% mientras que en mujeres solo cura un 25%.

	M	S	C	Total	M	S	C	Total	H	4/8=.50	2/8=.25	2/8=.25
V	0.05	0.10	0.45	0.60	1							
W	0.20	0.10	0.10	0.40	1							
H	0.25	0.20	0.55	1								

- a y b. Hay 1 V-M, 2 V-S, 9 V-C, 4 H-M, 2 H-S y 2 H-C. Total: 12 V y 8 H. Son las frecuencias absolutas
- Ejercicio 3.5:
- dejaría al mismo resultado si se comparara la otra DF condicionada, es decir, la DF dependiente.
- b. Se dejaría al mismo resultado si se comparara la otra DF condicionada, es decir, la DF dependiente con el tipo de dieta. En este caso diríamos que el hecho de hacer deporte de deporte condicionada a la dieta. Una dieta que incluye una dieta rica en proteínas, mientras que en no deportistas: hay un 15% de los deportistas que siguen una dieta rica en deportistas que en no deportistas; hay un 47.8% de los no deportistas; y similar con las otras dietas.
- a. Dicha y deporte son dependientes pues la frecuencia con que aparece cada dieta no es igual en deportistas que en no deportistas: hay un 15% de los deportistas que siguen una dieta rica en deportistas que en no deportistas; hay un 47.8% de los no deportistas; y similar con las otras dietas.

- c. Cuando son independientes, cuando la presencia de una no condiciona la presencia de la otra.
- Ejercicio 3.4:
- b. Entre 0% y el menor valor de las frecuencias de cada una de las enfermedades, esto es, 0% y 20%.

- a. No se sabe cuántos individuos tienen ambas enfermedades. No pueden tener ambas el 40% ya que el 20% tiene la enfermedad H y ambas serían, como máximo, ese 20%.
- Ejercicio 3.3:

1	$P(B A) = 500/600 = .83$	$P(B A^-) = 300/1400 = .21$	$P(B) = 800/2000 = .40$
2	$P(B A) = 100/600 = .17$	$P(B A^-) = 700/1400 = .50$	$P(B) = 800/2000 = .40$
3	$P(B A) = 240/600 = .40$	$P(B A^-) = 560/1400 = .40$	$P(B) = 800/2000 = .40$
4	$P(B A) = 0/600 = 0$	$P(B A^-) = 800/1400 = .57$	$P(B) = 800/2000 = .40$

Ejercicio 3.2:

FARMACO		NO FARMACO		Efecto de F		Total		Viejos		Jóvenes	
baixa 21 puntos		+	%+			500	365	0.73	50	5	0.10
				+	%+	Total	260	0.52	200	20	0.080
							360	0.80	300	240	0.23
							450	0.80	no efecto	no efecto	

En el grupo sin farmaco, hay mayor FR de jóvenes que en el grupo con farmaco.

Los jóvenes se curan más que los viejos, haya farmaco o no lo haya.

Se debe a que:

Ejercicio 4.3: Decimos que hay confusión, puesto que el farmaco no modifica la respuesta ni en jóvenes ni en viejos cuando no se estatifica por edad parece que la disminuye en 21 puntos (73% - 52%).

Viejos y los viejos se curan "más" que los jóvenes.

(73%) sea mucho mayor que en los tratados (31%) ya que la mayoría de los tratados son Estas dos razones, de forma conjunta, hace que el % de curaciones en los tratados con farmaco

los no tratados son jóvenes (150 de 500).

2) La mayoría de los tratados con farmaco son viejos (450 de 500) mientras que la mayoría de curados entre los viejos tiene a 10% de curados entre los jóvenes.

1) El % de curaciones es mayor en viejos que en jóvenes, tanto con farmaco como sin él (80% de curados entre los viejos, frente a 31% de curados entre los jóvenes).

e. No es necesario el farmaco, pues tanto en jóvenes como en viejos no es efectivo y cualquier persona estaría incluida en uno de estos dos grupos.

d. El farmaco si parece efectivo en las personas pues se cura 2.35 veces más de tratados (73%) que no tratados (31%), efecto del farmaco = 2.35.

c. El farmaco no es efectivo en los viejos pues se cura el mismo % entre los tratados que entre los no tratados (80%), efecto = 1.

b. El farmaco no es efectivo en los jóvenes pues se cura el mismo % entre los tratados que entre los no tratados (10%), efecto = 1.

a. El farmaco no es efectivo en los jóvenes pues se cura el mismo % entre los tratados que entre los viejos (10%), efecto = 1.

Ejercicio 4.2:

hace que el factor sexo sea factor de confusión en la relación tratamiento - enfermedad.

d. El % de curaciones con B al estudiado en las personas parece mayor de lo que realmente es (92.3%) porque en los tratados con B la mayoría son mujeres (500 de 600) y las mujeres curan mejor que los hombres (80% frente a 22% con A y lo mismo con B). Estas dos razones danos de forma conjunta

c. No hay uno más efectivo que el otro. Los dos funcionan igual tanto en hombres como en mujeres.

b. En varones igual que en mujeres, pero curando 22% con cada tratamiento.

a. En mujeres ningún tratamientofunciona mejor que el otro. Con A curaron $80/100 = 0.80$, 80%

y con B curaron $400/500 = 0.80$, también 80%.

MUJERES

VARONES

TOT

A

CAPÍTULO 4

Ejercicio 4.1:

B

en cada uno de los cuales se estudia el efecto del Beber:

Ejercicio 48: Redistribuir los datos de la tabla anterior, formando dos estratos Fumadores y no Fumadores, de enfermedad A 0,34.

Fumar multiplicar 3 (0,90 / 0,30) el riesgo de enfermar en bebedores por 6 (0,12 / 0,02) en no bebedores. La interacción es 6 / 3 = 2; el efecto perjudicial del tabaco es 2 veces mayor en los bebedores. También decimos que beber es factor de confusión porque al juntar bebedores que en los bebedores. Entre los bebedores, el % de enfermos es 0,145 en F+ y 0,269 en F-. Parece que el tabaco reduce la los B+, con los B-, el % de enfermos es 0,145 en F+ y 0,269 en F-. Parece que el tabaco reduce la

Ejercicio 4.7:

	Efecto de F en los B+	Efecto de F en los B-	Efecto bruto de F sin separar B+y-B-	?Interacción?	?Correlación?
1	0	0	0	no	no
2	+25	+25	+25	no	no
3	0	0	+38	no	no
4	+25	+25	-10	no	si
5	+25	+25	+10	no	si
6	30	20	+34	30	no
7	30	20	-15	30	si
8	30	20	+10	30	si
9	50	20	+10	30	si
10	-20	+15	+65	30	no la lugarr

Ejercicio 4.6:

NO FARMACO G			FARMACO G		
Total	%+	Tot	%+	Total	%
500	380	76%			
500	90	18%			
400	40	10%			
50	20	40%			
500	360	80%			
500	30	6%			

centaje de curación tanto en jóvenes como en viejos y en el total la sube en 58 puntos, que es más de lo que hace en cada estrato.

FARMACO B		(90% de júvenes)		NO FARMACO C		(40% de júvenes)	
Total	+	%+	Total	+	%+	Total	+
500	365	0.73	500	134	0.27	580	116
50	35	0.10	50	18	0.36	580	0.20
450	360	0.80	450	18	0.90	580	Baja 10 puntos
←		←		←		←	
Baja 10 puntos		Baja 10 puntos		Baja 10 puntos		Baja 10 puntos	

L-44: En la tabla que sigue se efectuó de acuerdo con las cifras que aparecen en el cuadro que se detalló anteriormente, se observa que el grupo B es más numeroso que el grupo A.

a. En jóvenes, E aumenta el rendimiento en 200 m: 200 m sin E frente a 400 con E.

Ejercicio 4.13:

habrá que compararlo con el efecto en jóvenes + viejos).

- a. La interacción es $200+100 = 300$ m, C produce un efecto de 300 m mayor en jóvenes que en viejos.

b. La interacción es $200+100 = 300$ m; 100 m con D frente a 200 sim D.

c. Cuando no se estabiliza D parece tiene efecto: aumenta el rendimiento en $640 - 230 = 410$ m.

d. No tiene mucho sentido hablar de confusión ya que el efecto de D es muy diferente en jóvenes y viejos, y no tiene sentido promediarlos para hablar de efecto promedio en los estados (que

Exercício 4.12:

c. Cuándo lo hace es cuando, prece que aumenta la demanda en el SII (CSZ-CZQ);
d. Si hay confusión pues en cada estadio C disminuye el rendimiento y en Jóvenes+Vigjos lo aumenta.

- C disminuye el rendimiento en 100 m: 100 m con C frente a 200 s/m C.

Ejercicio 4.11:

d. Si hay confusión pues en los estados eléctricos de B es que disimule el rendimiento en 100m.y en Jóvenes+Viejos lo aumentaba ($235 - 230 = 5$).

- B si parece un poco efectivo, pues corren más los que recibieron B (235) que los que no lo recibieron (230).

b. No hay intere

a. En soberes, B disminuye el rendimiento en 100 m, pues la media sin B fue 200 y con B fue 400. En vijesos, B también disminuye el rendimiento en 100 m, pues la media sin B fue 200 y con B fue 100.

- d. Si hay confusión pues el efecto en jóvenes y viejos (aumenta el rendimiento) no es el mismo que en cada uno de los estados de jóvenes y viejos (no tiene efecto).

CON A (470) C

c. Parece que A tiene efecto (aumenta el rendimiento) en jóvenes+viejos pues la media es mayor.

- A los trae más de 100 años de historia y tradición, que se reflejan en sus espacios y servicios.

Digitized by srujanika@gmail.com

de beber = 2.97 = .315 / .106.

	$P(\text{Test Positivo (T+)})$	$P(\text{Test Negativo (T-)})$	
Ejercicio 5.8:			
No Enf.	$P(\text{Test (T+)}) = 0.99$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.01$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.00000$	$P(\text{Test (T+)}) = 0.72$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.28$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.00493$	
Enf.	$P(\text{Test (T+)}) = 0.952$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.048$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.00001$	$P(\text{Test (T+)}) = 0.792$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.2080$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.00001$	

Al compararlo con el ejercicio anterior podemos ver que al haber mayor prevalencia de la enfermedad, es más probable tener la enfermedad cuando el test dio positivo (0.00493 en ejercicio 5.6 frente a 0.355) y también cuando el test dio negativo (0.00001 del ejercicio 5.6 frente a 0.001).

En el ejercicio 5.8 se muestra que el resultado es más probable que sea negativo (0.792 frente a 0.72).

	$P(\text{Test Positivo (T+)})$	$P(\text{Test Negativo (T-)})$	
Ejercicio 5.7:			
No Enf.	$P(\text{Test (T+)}) = 0.00000$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.99999$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.999$	$P(\text{Test (T+)}) = 0.279$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.720$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.90$	
Enf.	$P(\text{Test (T+)}) = 0.355$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.645$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.10$	$P(\text{Test (T+)}) = 0.180$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.820$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.90$	

	$P(\text{Test Positivo (T+)})$	$P(\text{Test Negativo (T-)})$	
Ejercicio 5.6:			
No Enf.	$P(\text{Test (T+)}) = 0.00000$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.99999$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.00001$	$P(\text{Test (T+)}) = 0.20079$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.99921$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.00001$	
Enf.	$P(\text{Test (T+)}) = 0.00493$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.99507$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.00001$	$P(\text{Test (T+)}) = 0.1980$ $P(\text{Test (T-)}) = 0.8020$ $P(\text{Pr(E)}) = 0.00001$	

En los H+ : $P(\text{A|H+}) = 0.96 \cdot 0.75 / 0.8929 = 0.8064$, $P(\text{B|H-}) = 0.02 \cdot 0.02 / 0.8929 = 0.0004$
 $P(\text{C|H+}) = 0.25 \cdot 0.23 / 0.1071 = 0.5369$
 $P(\text{D|H+}) = 0.04 \cdot 0.75 / 0.1071 = 0.2801$, $P(\text{B|H+}) = 0.98 \cdot 0.02 / 0.1071 = 0.1830$
 $P(\text{E|H+}) = 0.23 \cdot 0.23 / 0.1071 = 0.1071$
 En los H- : $P(\text{A|H-}) = 0.96 \cdot 0.75 / 0.8929 = 0.8064$, $P(\text{B|H-}) = 0.02 \cdot 0.02 / 0.8929 = 0.0004$
 histológicos entre los que tienen hemopatías y entre los que no lo tienen:

Las distribuciones a posteriori de tipo histológico son las probabilidades de cada uno de los tipos de histología que existe entre los que tienen hemopatías y entre los que no lo tienen:

$$P(H-) = 1 - P(H+) = 1 - 0.1071 = 0.8929$$

$$P(H+) = P(H+y A) + P(H+y B) + P(H+y C) = 0.40 \cdot 0.75 + 0.98 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.23 = 0.1071 \quad \text{y}$$

$$\text{a. Distribución a priori: } 75\% \text{ son A}, 2\% \text{ son B y } 23\% \text{ son C.}$$

	$P(\text{BACT}) = .10$	$P(\text{VIR}) = .50$	$P(\text{QUI}) = .40$	
Ejercicio 5.5:				
T	$P(\text{B T}) = .50$ $P(\text{V T}) = .05$ $P(\text{Q T}) = .00$	$P(\text{B V}) = .05 / .25 = 0.20$ $P(\text{V V}) = .1 = 0.5$ $P(\text{Q V}) = .00$	$P(\text{B Q}) = .05 / .25 = 0.20$ $P(\text{V Q}) = .15 / .25 = 0.60$ $P(\text{Q Q}) = 0$	$P(\text{B F}) = .05 / .50 = 0.10$ $P(\text{V F}) = .15 / .50 = 0.30$ $P(\text{Q F}) = .30 / .50 = 0.60$
D	$P(\text{B D}) = .00$ $P(\text{V D}) = .1 = 0$ $P(\text{Q D}) = .30$	$P(\text{B V D}) = 3 \cdot .5 = 0.15$ $P(\text{V V D}) = 1.5 / .25 = 0.60$ $P(\text{Q V D}) = 2.5 / .40 = 0.10$	$P(\text{B Q D}) = 2.5 / .40 = 0.60$ $P(\text{V Q D}) = 1.5 / .25 = 0.40$ $P(\text{Q Q D}) = 0$	$P(\text{B F D}) = .5 \cdot .1 = 0.05$ $P(\text{V F D}) = 3 \cdot .5 = 0.15$ $P(\text{Q F D}) = .75$
F	$P(\text{B B}) = .50$ $P(\text{V B}) = 0$ $P(\text{Q B}) = 0$	$P(\text{B V B}) = 1.5 / .25 = 0.60$ $P(\text{V V B}) = 1 / .25 = 0.40$ $P(\text{Q V B}) = 0$	$P(\text{B Q B}) = 1 / .25 = 0.40$ $P(\text{V Q B}) = 0.5 / .25 = 0.20$ $P(\text{Q Q B}) = 0$	$P(\text{F e}) = 0.50$

Ejercicio 5.4:

- Ejercicio 6.1:** Es una Binomial con $\pi = 0.40$ y $N = 5$.
- a. Es más probable obtener 2 diabéticos que 4.
- b. Es más probable obtener 4 diabéticos que 5 porque 4 es más cerca del valor esperado.
- c. Si de una población donde hay 40% de diabéticos se toman muchas muestras aleatorias de $N = 5$ individuos, en 346 de cada 1 000 muestras hay 2 diabéticos y solo 2.
- d. Si de una población donde hay 40% de diabéticos se toman muchas muestras aleatorias de $N = 5$ individuos, en 77 de cada 1 000 muestras hay 4 diabéticos y solo 4.
- e. Es V pues en una Bin(4,0.25), $P(4) = 0.422$.
- f. Es V pues en una Bin(4,0.25), $P(1) = 0.422$.
- g. Es V pues en una Bin(4,0.25), $P(4) = 0.004$.
- h. Si. Son F porque la ley se refiere al Muestreo Aleatorio, no a cada muestra en particular.
- i. Es V. K. Es F porque I es V.
- j. Es V. K. Es F porque I es V.
- Ejercicio 6.2:**
- a. Es V. b. a es F porque b es V.
- Ejercicio 6.3:** Es una Binomial con $\pi = 0.40$ y $N = 6$.
- Ejercicio 6.4:** Si el examen tenía 40 preguntas, habrá 2 o 3 errores.
- c. No, porque el 40% de 6 es 0.40·6 = 2.4, y no puede haber 2.4 errores. Habrá 2 o 3 errores.
- d. De E se toman muchas muestras aleatorias de 6, en 7667 de cada 10 000 muestras habrá 0 o 1 errores.
- e. No, porque el 40% de 6 es 0.40·6 = 2.4, y no puede haber 2.4 errores. Habrá 2 o 3 errores.
- Ejercicio 6.5:** Necesitaremos saber la probabilidad de que entre 0 y 3 errores en el resto de las unidades.
- Ejercicio 6.6:** Es una Binomial con $\pi = 0.50$ y $N = 6$. Valor esperado = 0.50·6 = 3.
- a. y b. $P(0) = 0.0156$ y $P(1) = 0.0938$.
- c. $P(2) = 0.2344$. Si el 50% de los pacientes mueren al ser operados, la prob de que a este cirujano se vieren despedidos.
- Ejercicio 6.7:** Es una Binomial con $\pi = 0.167$ y $N = 12$.
- a. Le muergan 2 pacientes durante este mes es 23.44%. De cada 100 meses en los que se opera a 6 pacientes por mes, en aproximadamente 23 meses se morirán 2 pacientes.
- b., c. y d. $P(2) = 0.296$, $P(0) = 0.112$ y $P(1) = 0.269$.
- Ejercicio 6.8:** Es una Binomial con $\pi = 0.30$ y $N = 10$.
- a. Esperamos = 0.30·10 = 3 curaciones. b y c. $P(1) = 0.1210$ y $P(8) = 0.0014$.
- d. De cada 10 mil muestras de 10 pacientes cada una, en promedio 14 de ellas se curarán 8 pacientes.
- Ejercicio 6.9:** Es una Binomial con $\pi = 0.25$ y $N = 9$.
- a. $P(9) = 0.0000 < 0.00001$ y $P(0) = 0.0751$
- b., c. $P(8) = 0.00001 + 0.00012 + 0.00012 + 0.00001 + 0.00000 = 0.0489$
- Ejercicio 6.10:** Es una Binomial con $\pi = 0.40$ y $N = 10$.
- a. $\mu^x = \pi N = 4$ y $\sigma^x = [\pi(1-\pi)N]^{1/2} = 1.55$ b. $\mu^d = \pi = 0.4$ y $\sigma^d = [\pi(1-\pi)/N]^{1/2} = 0.15$
- En una Binomial con $\pi = 0.40$ y $N = 100$.

CAPÍTULO 6

Al compararlo con los ejercicios anteriores podemos ver que al haber mayor prevalencia de la enfermedad, es más probable tener la enfermedad cuando el test dio positivo (0.00493 del ejercicio 6.1) que negativo (0.00001 del ejercicio 6.1). Sin embargo, la probabilidad de tener la enfermedad cuando el test dio negativo (0.952) y también cuando el test dio positivo (0.00493 del ejercicio 6.1) es casi igual.

- Ejercicio 7.2: $P(0 < T < 102.5) = P(-2 < Z < 0.5) = P(-2 < Z < 0) + P(0 < Z < 0.5) = 0.4772 + (0.5 - P(Z > 0.5)) = 0.4772 + 0.1915 = 0.6687.$
- Ejercicio 7.1: $P(-2.5 < Z < 2.5) = 2 \cdot P(0 < Z < 2.5) = 2 \cdot 0.4938 = 0.9876;$
 $P(-1.5 < Z < 1.5) = 2 \cdot P(0 < Z < 1.5) = 2 \cdot 0.4332 = 0.8664;$
 $P(-1 < Z < 0) = P(0 < Z < 1) = 2 \cdot 0.3413 = 0.6826;$
 $P(-1 < Z < 1) = 2 \cdot P(0 < Z < 1) = 2 \cdot 0.3413 = 0.6826;$
 $a. P(-1 < Z < 0) = P(0 < Z < 1) = 0.5 - P(Z > 1) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413;$
- Ejercicio 7.2: $P(-1.5 < Z < 1.5) = 2 \cdot P(0 < Z < 1.5) = 2 \cdot 0.4332 = 0.8664.$
- Ejercicio 7.1: $P(-2.5 < Z < 2.5) = 2 \cdot P(0 < Z < 2.5) = 2 \cdot 0.4938 = 0.9876;$
 $P(-1.5 < Z < 1.5) = 2 \cdot P(0 < Z < 1.5) = 2 \cdot 0.4332 = 0.8664.$
 $b. P(-1 < Z < 0) = P(0 < Z < 1) = 2 \cdot 0.3413 = 0.6826.$
 $c. P(-1 < Z < 1) = 2 \cdot P(0 < Z < 1) = 2 \cdot 0.3413 = 0.6826.$
- CAPÍTULO 7
- Ejercicio 6.22: Es una Poisson con $E = 6$ moléculas/cc. $P(\text{alguna}) = 1 - P(0) = 1 - 0.0025 = 0.9975.$
- Ejercicio 6.21: Es una Poisson con $E = 5$. $P(120 \text{ más}) = P(12) + P(13) + \dots = 0.0034 + 0.013 + 0.005$
- Ejercicio 6.20: $P(6) = 0.0278.$
- Ejercicio 6.19: Es una Poisson con $E = 0.5 \cdot 200 = 10$. $\text{a y b. } P(0) < 0.001 \text{ y } P(5) = 0.0378.$
- Ejercicio 6.18: Es una Poisson con $E = 2.4 \rightarrow P(5) = P(6) + P(7) + \dots = 0.0358$. Aprox. 3 o 4 de cada 100 días el servicio se verá desbordado.
- Ejercicio 6.17: $P(10) = 0.1108$. No, pues es razoñablemente probable (0.1108 de c) que no haya ningún caso.
- Ejercicio 6.16: $P(10) = 0.0001$ de a) que aparecerán 10 casos.
- Ejercicio 6.15: Las probas calculadas con Poisson son
- | X | N | FR | $P(x)$ en Poisson con $E=3.8$ |
|---|-----|------|-------------------------------|
| 0 | 25 | .025 | 0.0224 |
| 1 | 89 | .089 | 0.0850 |
| 2 | 153 | .153 | 0.1165 |
| 3 | 200 | .200 | 0.2046 |
- Las FR's empíricas se aproximan basándose en una distribución de Poisson con $E = 3.8$.
- Ejercicio 6.14: $E = 96 / 120 = 0.8$ carcimomas por mes
- Ejercicio 6.13: Poisson con $E = 500 \cdot 0.004 = 2 \rightarrow P(3) = 0.1084$.
- Ejercicio 6.12: $P(3) = 0.1954$.
- Ejercicio 6.11: $P(5) = [300! / (5! \cdot 295!)] \cdot 0.02^5 \cdot 0.98^{295} = 0.1955$
- Ejercicio 6.10: $P(3) = [1000! / (3! \cdot 997!)] \cdot 0.004^3 \cdot 0.996^{997} = 0.1954$.
- Ejercicio 6.9: De cada 10 000 regiones de 1 000 habitantes en las que la GI afecte al 0.4%, en 1954 habrá 3 casos de GI.
- Ejercicio 6.8: Con Binomial de $N=1000$ y $\pi=0.004 \rightarrow P(3) = 0.1954$.
- Ejercicio 6.7: $E = 96 / 120 = 0.8$ carcimomas por mes
- Ejercicio 6.6: $E = 0.8 \cdot P(2 \text{ al mes}) = 0.1438$.
- Ejercicio 6.5: $E = 14\% \text{ de los meses se diagnostican 2 carcinomas de ese tipo.}$
- Ejercicio 6.4: $E = 96 / 120 = 0.8$ carcimomas por mes
- Ejercicio 6.3: Poisson con $E = 500 \cdot 0.004 = 2 \rightarrow P(3) = 0.1084$.
- Ejercicio 6.2: $E = 4 \rightarrow P(3) = 0.1954$.
- Ejercicio 6.1: $E = 3.8$

- g. $P(Z < -2) + P(Z > 2) = 2 \cdot 0.0228 = 0.0456.$
 $2417.$
- f. $P(77 < \text{Media} < 79) = P(-1.5 < Z < 0.5) = P(0.5 < Z < 1.5) = P(Z > 0.5) - P(Z > 1.5) = 0.3085 - 0.0668 = 0.2417.$
- e. $(Z > -1) = 1 - P(Z < -1) = 1 - P(Z > 1) = 1 - 0.1587 = 0.8413.$
d. Además como el peso es Normal, las medias muestrales tienen $\mu = 80$ y $\sigma = 8 / 4 = 2$.
d. En el muestreo aleatorio de $N = 16$, las medias muestrales tienen $\mu = 80$ y $\sigma = 8 / 4 = 2$.
0.9544.
- c. $P(64 < X < 96) = P(-2 < Z < 2) = P(-2 < Z < 0) + P(0 < Z < 2) = 2 \cdot P(0 < Z < 2) = 2 \cdot 0.4772 = 0.9544.$
de 96 kg.
- b. $Z = 2 \quad P(X < 96) = P(Z < 2) = 1 - P(Z > 2) = 0.9772$, el 97.72% de los individuos pesan menos
a. $Z = -2 \quad P(X > 64) = P(Z > -2) = 1 - P(Z > 2) = 1 - 0.0228 = 0.9772$, el 97.72% pesan más de 64 kg.
- Ejercicio 7.7:**
- a. $\mu_M = 160$ y $\sigma_M = 10 / 2 = 5$; $Z = 6 / 5 = 1.2$. Puesto que la variable se distribuye de modo Normal, las medias muestrales también: $P(M < 166) = P(Z < 3) = 1 - P(Z > 3) = 1 - 0.0013 = 0.9987$. El 99.87% de las muestras de 25 individuos tendrán estatura media menor de 166.
- b. $\mu_M = 160$ y $\sigma_M = 6 / 2 = 3$. Puesto que la variable se distribuye de modo Normal, las medias muestrales también: $P(M < 166) = P(Z < 1.2) = 1 - P(Z > 1.2) = 1 - 0.1151 = 0.8849$. El 88.49% de las muestras de 4 individuos tendrán estatura media menor de 166.
- a. $\mu_M = 160$ y $\sigma_M = 10 / 2 = 5$; $Z = 6 / 5 = 1.2$. Puesto que la variable se distribuye de modo Normal, las medias muestrales también: $P(M < 166) = P(Z < 1.2) = 1 - P(Z > 1.2) = 1 - 0.1151 = 0.8849$. El 88.49% de las muestras de 4 individuos tendrán estatura media menor de 166.
- Ejercicio 7.6:**
- no se sabe la proporción de medias en ese intervalo.
- b. $\mu_M = 3000$ y $\sigma_M = 200 / 3 = 66.7$; $Z = 66.7 / 66.7 = 1$. Pero como la distribución no es Normal $P(Z > 1.5) = 0.0668$.
- a. $\mu_M = 3000$ y $\sigma_M = 200 / 20 = 10$; $Z = 15 / 10 = 1.5$. Por el Teorema Central del Límite (TCL), las medias muestrales de $N = 400$ se distribuyen muy aproximadamente Normal. $P(M > 3015) = P(Z > 1.5) = 0.0668$.
- Ejercicio 7.5:**
- las medias muestrales de $N = 64$ se distribuyen muy aproximadamente Normal $P(M < 1975) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 0.0228$.
- b. $\mu_M = 2000$ y $\sigma_M = 100 / 8 = 12.5$; $Z = -2.5 / 12.5 = -0.2$. Por el Teorema Central del Límite (TCL), es Normal no se sabe la proporción de medias en ese intervalo.
- a. $\mu_M = 2000$ y $\sigma_M = 100 / 31.62 = 3.162$; $Z = -50 / 31.62 = -1.58$. Pero como la distribución no es Normal no se sabe la proporción de medias en ese intervalo.
- Ejercicio 7.4:**
- 278000 → 2718000
- h. $Z_1 = -2$; $Z_2 = -1$; $P(-2 < Z < -1) = P(Z > 1) - P(Z > 2) = 0.1587 - 0.0228 = 0.1359 \rightarrow 13.59\%$
- g. $Z = 2.2$; $P(Z > 2.2) = 0.0139 \rightarrow 1.39\% \rightarrow 9204000$
- f. $Z = 0.1$; $P(Z > 0.1) = 0.4602 \rightarrow 46.02\% \rightarrow 9204000$
- e. $Z = -2$; $P(Z > -2) = 1 - P(Z > 2) = 1 - 0.0228 = 0.9772 \rightarrow 97.72\% \rightarrow 19544000$
- d. Igual que "menos de 60".
- c. $Z = 2.2$; $P(Z < 2.2) = 1 - P(Z > 2.2) = 1 - 0.0139 = 0.9861 \rightarrow 98.61\% \rightarrow 19722000$
- b. $Z = 0.5$; $P(Z < 0.5) = 1 - P(Z > 0.5) = 1 - 0.3085 = 0.6915 \rightarrow 69.15\% \rightarrow 13830000$
- a. $Z = -1$; $P(Z < -1) = P(Z > 1) = 0.1587 \rightarrow 15.87\% \rightarrow 0.1587 \cdot 2000000 = 3174000$
- Ejercicio 7.3:**
- g. $P(102.5 < T < 107.5) = P(0.5 < Z < 1.5) = P(Z > 0.5) - P(Z > 1.5) = 0.3085 - 0.0668 = 0.2417.$
- f. $P(90 < T < 92.5) = P(-2 < Z < -1.5) = P(2 < Z < 0) - P(-1.5 < Z < 0) = P(Z > 1.5) - P(Z > 2) = 0.0668 - 0.0228 = 0.0440.$
- e. $P(90 < T < 110) = P(-2 < Z < 2) = 2 \cdot 3 \cdot P(0 < Z < 2) = 0.4772 \cdot 2 = 0.9544.$
- d. $P(97.5 < T < 102.5) = P(-0.5 < Z < 0.5) = 2 \cdot P(0 < Z < 0.5) = 2 \cdot 0.1915 = 0.3830.$
- c. $P(T < 102.5) = P(Z < 0.5) = 0.5 + P(0 < Z < 0.5) = 0.5 + 0.1915 = 0.6915.$
- b. $P(T > 82.5) = P(Z > -3.5) = 1 - P(Z < -3.5) = 1 - P(Z > 3.5) = 1 - 0.0002 = 0.9998.$

- a. La hipótesis de trabajo es H_0 : cura más de 5%. La hipótesis nula es que C es igual, es decir, cura 5%.
- Ejercicio 8.3:**
- i. El resultado obtenido (6 curaciones de 8 tratados) no es compatible con que en la población se cure un 25%; se rechaza H_0 a favor de que B cura más del 25%.
- j. Si la medicina B no hiciera nada, curaría 25% de los tratados, de cada 10000 muestras de 8 tratados en solo 42 muestras se curarán 6 o más tratados.
- k. El valor P del test es el calculado en el apartado anterior: 0.0042.
- l. En una $\text{Bin}(8, 0.25)$ es $P(6) = P(7) + P(8) = 0.0038 + 0.0004 + 0.0000 = 0.0042$.
- m. Es valor esperado es 6 curados de 8 tratados, es decir, $6/8 = 0.75$, 75% de curados.
- n. El valor esperado es 25%, que de 8 tratados es $0.25 \cdot 8 = 2$ curaciones.
- o. La hipótesis de trabajo es B cura más de 25%. La hipótesis nula es que B es igual, es decir, cura 25%.
- Ejercicio 8.2:**
- j. La interpretación correcta es: "si A es útil ... " y no "si A es útil".
- i. Es V pues es $P(3 \text{ o más}) = P(4) + \dots + P(10) = 0.1798$.
- h. Son todos V .
- g. Es Flalsa (F) porque b es Verdadera (V).
- f. Es Flalsa (F) porque b es Verdadera (V).
- e. La aproximación correcta es: "aproximadamente $P(0 < Z < 1) = 0.3413$, es 34.13% de las muestras y $P(0 < Z < 0.5) = 0.3085$ ".
- d. La hipótesis de trabajo es H_0 : cura más de 25%. La hipótesis nula es que C es igual, es decir, cura 5%.

CAPÍTULO 8

- Ejercicio 7.11:**
- a. Aproximadamente $P(0 < Z < 1) = 0.3413$, es 34.13% de las muestras y $P(0 < Z < 0.5) = 0.3085$.
- Ejercicio 7.10:** La variable "número de álbumes en muestras de $N = 4800$ individuos de una población con 25% de albímos" tenderá en el $M_n = 4800 \cdot 0.25 = 1200$ y $\sigma = (\sqrt{4800 \cdot 0.25 \cdot 0.75})^{1/2} = 30$.
- Ejercicio 7.9:**
- a. Aprox. $P(0 < Z < 2) = 0.4772$.
- b. Aprox. $P(0 < Z < 1) = 0.3413$, es 34.13% de las muestras.
- c. Las medias muestrales de $N = 36$ se distribuyen muy aprox. Normal $\Rightarrow P(\text{Media} < 49.5) = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 0.1587$.
- d. Las medias muestrales de $N = 36$ tienen $\mu = 50$ y $\sigma = 3 / \sqrt{36} = 0.5$. Además el TCD dice que las medias muestrales de $N = 100$ tienen $\mu = 50$; $\sigma = 3 / \sqrt{100} = 0.3$. El TCD dice que las medias muestrales de $N = 100$ se distribuyen muy aprox. Normal $\Rightarrow P(\text{Media} < 50.45) = P(Z < 1.5) = 0.7745$.
- e. Con tanto pedazo no está garantizada la distribución aproximadamente Normal de las medias muestrales, aunque las medias muestrales de $N = 9$ tienen $\mu = 50$ y $\sigma = 3 / \sqrt{9} = 1$.
- f. No se sabe, pues se desconoce la distribución de la supervivencia en la población.
- g. No se sabe, pues se desconoce la distribución de la supervivencia en la población.
- Ejercicio 7.8:**
- i. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- j. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- k. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- l. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- m. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- n. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- o. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- p. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- q. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- r. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- s. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- t. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- u. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- v. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- w. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- x. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- y. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.
- z. $Z = -1 / 0.8 = -1.25$, $P(M > 79) = P(Z > -1.25) = 1 - P(Z < -1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$.

(es útil).

- c. Como los resultados obtenidos en la muestra (60 curaciones de 80 tratados) no son compatibles con la hipótesis de que A sea igual a H₀, a favor de que A cura más de 40% se curan 60 o más (un 75% o más de curaciones).

- b. Si A fuera igual se sería muy difícil obtener una muestra de 80 pacientes tratados con A en la que porcentaje de curados con A en la población estaría entre 66% y 84%.

- a. No se conoce cuánto es el porcentaje real de curados con A, pero con una confianza del 95%, el

Ejercicio 8.7:

pesar que esta % tiene que ser mayor de 10%.

- d. Por b, se concluye que los datos son compatibles con la hipótesis de que haya un 25% de diabéticos que es el resultado obtenido en nuestra muestra.

- c. Z = $(.1 - .33) / (.1 \cdot .9 / 30)^{1/2} = 4.2$. P < 0.00003. Si realmente hubiera un 10% de diabéticos en la población, de cada 100 000 estudios con muestras de 30 personas de esta población, en promedio 3 de esos estudios se encontraría una proporción muestral de 33% o aún mayor de 33% o aún mayor (que es el resultado obtenido en nuestra muestra).

- b. Z = $(.25 - .33) / (.25 \cdot .75 / 30)^{1/2} = 1$. P = 0.1587. Si realmente hubiera un 25% de diabéticos en la población, en promedio en la muestra de 30 personas de esta población (es lo planteadó en la H₀), de cada 100 estudios con muestras de 30 personas de esta población se encontraría una proporción muestral de 33% o aún mayor de 33% o aún mayor (que es el resultado obtenido en nuestra muestra).

- a. Con una confianza del 95%, el porcentaje de diabéticos en la población estará entre 16% y 50%.

Ejercicio 8.6:

- 99% en que la verdadera proporción poblaciónal de individuos con C está entre 0.62 y 0.78. IC_{99%} = $0.70 \pm 2.58 (0.7 \cdot 0.3 / 200)^{1/2} = 0.70 \pm 0.08 = 0.62$ y 0.78 . Tenemos una confianza de 95% en que la verdadera proporción poblaciónal de individuos con C está entre 0.64 y 0.76.

- e. IC_{95%} = $0.70 \pm 1.96 (0.7 \cdot 0.3 / 200)^{1/2} = 0.70 \pm 0.06 = 0.64$ y 0.76 . Tenemos una confianza de 90.034 = 1.76 \rightarrow P_{UNIL} = 0.04. d. Son compatibles con las hipótesis: $\tau = 0.67$ y quizás $\tau = 0.64$.

- c. Pesperado = 0.64, p observado = $140 / 200 = 0.70$, Z = $(0.70 - 0.64) / (0.64 \cdot 0.36 / 200)^{1/2} = 0.66$

- b. Pesperado = 0.50, p observado = $140 / 200 = 0.70$, Z = $(0.70 - 0.50) / (0.50 \cdot 0.50 / 200)^{1/2} = 0.20 / 0.035$ = 5.7 \rightarrow P_{UNIL} = 10⁸ = 0.0000001. Rechazamos H₀, no creemos que sea $\tau = 0.50$, será $\tau > 0.50$.

- a. Pesperado = 0.67, p observado = $140 / 200 = 0.70$, Z = $(0.70 - 0.67) / (0.67 \cdot 0.33 / 200)^{1/2} = 0.03 /$

Ejercicio 8.5:

- curar un 50%; no se rechaza H₀, esto es, C puede curar 50%.

- f. El resultado obtenido (9 curaciones de 9 tratados) si es compatible con que en la población se curan 3 o menos tratados.

- e. Si la medicina C curara 50% de los tratados, de cada 100 muestras de 9 tratados en 25 muestras menos.

- d. En una Bin(9, 0.50) es P(3) + P(4) + P(5) = $0.1641 + 0.0703 + 0.0176 + 0.0020 = 0.2540$.

- c. Es valor observado es 3 curados de 9 tratados, es decir, 3/9 = 0.33, 33% de curaciones.

- b. El valor esperado es 50%, que de 9 tratados es 0.50-9 = 4.5, esto es 4 o 5 curaciones.

- a. La Hipótesis Nula es que con C se curan el 50% de los tratados.

Ejercicio 8.4:

- curar un 5%; se rechaza H₀ a favor de que C cura más del 5%.

- g. El resultado obtenido (3 curaciones de 9 tratados) no es compatible con que en la población se curan solo 83 muestras se curan 3 o más tratados.

- f. Si la medicina C no hiciera nada, curaría 5% de los tratados, de cada 10 000 muestras de 9 trata-

- e. En una Bin(9, 0.05) es P(3) + P(4) + ... + P(9) = $0.0077 + 0.0006 = 0.0083$.

Ejercicio 9.11: La respuesta correcta es la c. Revise todas las opciones, solo la c es la correcta.

c. Es muy probable que el niño sea operado SI tiene AA.

a. No puede decirlo. b. Es poco probable que el niño tenga AA.

Ejercicio 9.10:

b. Es muy probable que me vaya al Caribe SI me toca la lotería.

a. No se ha hablado de la prob de que toque la lotería.

Ejercicio 9.9:

llueve.

a. No se ha hablado de la prob de que llueva. b. $P = 0.57$ es la prob de que haya un accidente SI

Ejercicio 9.8:

cuenta el número de individuos estudiados y es perfectamente válido.

valor de P más pequeño, aunque sea con un solo individuo pues el valor de P también tiene en cuenta el número de individuos estudiados y es perfectamente válido.

e y f. El estudio al que se administra D es el que muestra mayor evidencia contra H_0 , ya que tiene

a y b. $Z = 2.5, P = 0.0062$ y $Z = 3, P = 0.0016$ c y d. $Z = 3.5, P = 0.0002$ y $Z = 4, P = 0.00003$

Ejercicio 9.7:

s. Es F porque t es V.

i. Es F porque j es V. k. Es V. l. m y n. Son F porque o es V. p y q. Son F porque r es V.

a. Es Verdad (V). b, c y d. Son F porque e es V. f. Es F porque g es V. h. Es V

Ejercicio 9.6:

d. Los resultados son compatibles con la hipótesis, por lo que no la rechazamos.

La hipótesis plantearía.

mejoría de 102 o aún mayor (que es el resultado obtenido en nuestra muestra) o más allá de

tras de 144 adultos actuales de esta población, en 9 de esos estudios se encontraría una media

c. Si realmente el CI fuera por ejemplo medio 98 en la población, de cada 100 estudios con mues-
tracual de 1950, por lo que rechazamos esa hipótesis a favor de que ha disminuido.

b. Los resultados no parecen compatibles con la hipótesis de que se mantenga el coeficiente inte-
muestrastral de 102 o aún menor (que es el resultado obtenido en nuestra muestra).

a. Si el coeficiente interelectual actual fuera por término medio de 110 en la población, de cada

Ejercicio 9.5:

porque el dato es compatible con $H_1 = 500$. Pensamos que puede ser $H_1 = 500$.

Ejercicio 9.4: Valor P del Test = $P(X \leq 420 | H_1 = 500) = P(Z \leq 1.33) = 0.918$. No rechazamos H_0 .

dato es difícilmente compatible con $H_1 = 500$. Pensamos que no es $H_1 = 500$, sino que se rechazamos H_0 .

Ejercicio 9.3: Valor P del Test = $P(X \leq 320 | H_1 = 500) = P(Z \leq 3) = 0.0013$. Rechazamos H_0 porque el

student Z se mira con 15 gl.

Ejercicio 9.2: $IC_{99\%}(H_1) = 60 \pm 2.97 \cdot 20 / (16)^{1/2} = 45.265$ y 74.735 pues al ser $N < 30$, en tablas t de

CAPÍTULO 9

Ejercicio 8.9: Todas son Verdaderas.

menos pedregoso como para asegurar que T es útil (e es F y f es V). g, h e i. Son V.

dilatadamente significativo", pero esto solo quiere decir que $P \leq 0.05$. No es un valor lo suficiente-

c a f. Es cierto que el valor P es 0.0213, es cierto que convenciones en calificar el resultado como "esta-

a y b. Son Verdaderas (V).

Ejercicio 8.8:

comparables con la hipótesis de que A cura 70% de tratados, no se rechaza, puede ser que en

se obtendría un 75% o más de curaciones. Como los resultados obtenidos en la muestra son

y se realizaría el experimento 100 veces (se tratará con A 80 pacientes), en 16 experimentos

d. $Z = (0.75 - 0.70) / (0.3/80)^{1/2} = 0.98, P = 0.1635$. Si realmente A cura al 70% de los tratados,

- a. V pues IC es de 2 a 6, aproximadamente.
- b. F pues $\hat{P}_{\text{BILAT}} = 0,005$ muestra evidencia en contra de H_0 que plantea que la cereza no modifica el tiempo de respuesta en población.

Ejercicio 10.4:

- e. Es F porque $F \neq V$.
- f. de los planteados en la hipótesis son 15 o menores. $G \neq V$ y H es F .
- g. Para la hipótesis de que la media supera a la de varones en 20 unidades, la diferencia de las medias muestrales se distribuye Normal con media 20 y desviación 5. Entonces, en la mitad de las mujeres superan a los hombres en 20 unidades.
- h. de los planteados en la hipótesis de que la media supera a la de varones en 20 unidades, la diferencia de las medias muestrales se distribuye Normal con media 20 y desviación 5. Entonces, en la mitad de las mujeres superan a los hombres en 20 unidades.

- i. Para la hipótesis de que la media supera a la de varones en 20 unidades, la diferencia de las medias muestrales se distribuye Normal con media 20 y desviación 5. Entonces, en la mitad de las mujeres superan a los hombres en 20 unidades.
- j. Igual que g , respetivamente. $K, Z = 3,5 / 0,5 = 7$. $P_{\text{UNIL}} = 0,0000$. Rechazo.
- k. $Z = 1,5 / 0,5 = 3$; $P_{\text{UNIL}} = 0,0013$. Rechazo. $H_0: Z = 0,5 / 0,5 = 1$. $P_{\text{UNIL}} = 0,1587$. Puede ser H_0 es H_A .

- l. No es la interpretación del valor P antes obtenido por lo dicho en el apartado anterior, pero es una suposición a la otra en 15 unidades (esto es lo que ocurre en las muestras obtenidas).
- m. Es V y C es F porque la hipótesis planteada es que las medias poblacionales son iguales y no que

Ejercicio 10.3:

- n. Es la interpretación del valor P antes obtenido por lo dicho en el apartado anterior, pero es una suposición a la otra en 15 unidades (esto es lo que ocurre en las muestras obtenidas).
- o. Es V .
- p. Igual que g , respetivamente. $K, Z = 3,5 / 0,5 = 7$. $P_{\text{UNIL}} = 0,0000$. Rechazo.

$$E = \sqrt{\frac{SC_1}{N_1(N_1 - 1)} + \frac{SC_2}{N_2(N_2 - 1)}} = \sqrt{\frac{246}{40 \cdot 41} + \frac{119}{34 \cdot 35}} = 0,5$$

$$I.C. (\mu_A - \mu_B) = 2 \pm 1,812 * 1,2 = 2 \pm 2,17 = 0,17 \text{ Y } 4,17$$

q. Por supuesto que no rechazo. Puede ser criterio, no afirmo que lo sea.

r. $H_0: \mu_B - \mu_A = 2$; $t_{10} = 4 / 1,2 = 3,33$; $P_B < 0,01$ Rechazo H_0 . Será $\mu_A - \mu_B < 2$.

s. $H_0: \mu_A - \mu_B = 6$; $t_{10} = (6,2) / 1,2 = 3,33$; $P_B < 0,01$ Rechazo H_0 . Será $\mu_A - \mu_B < 6$.

$$b. H_0: \mu_A = \mu_B; \sqrt{\frac{26+16}{10}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}} = 1,2; t_{10} = \frac{9-7}{1,2} = 1,67; P_B > 0,10. \text{ ``NO''}.$$

$$a. I.C. (\mu_A) = 9 \pm 1,14 * 2,77 = 5,84 \text{ Y } 12,16. I.C. (\mu_B) = 7 \pm 0,60 * 2,44 = 5,54 \text{ Y } 8,46$$

Ejercicio 10.2:

Media	A	B	2º	3º	1º	Iº	IIº	IIIº	IVº	Vº	VIº	VIIº	VIIIº	Vº	VIº	VIIº	VIIIº	IXº	Xº
SC	7	12	122	136	4,07	2,66	1,13												
E			50	60		10	10												
Z			1,23		1,23														
Z				0,49		0,75	1,77												
P _{UNIL}					>> 0,15			> 0,15						> 0,05					
I.C.																			
IC _{95% t_{0,05,7}=2,365}																			
IC _{99% t_{0,01,7}=3,499}																			

CAPÍTULO 10

Ejercicio 10.1:

Cuando hay relación directa entre la presencia de las dos enfermedades (es más frecuente una cuan-
do esa presencia es estadísticamente significativa), es decir, el valor P del test es menor.
Cuando hay relación inversa entre la presencia de las dos enfermedades (es menos frecuente una cuan-
do ambas es estadísticamente “más significativa”, es decir, el diferencia entre la frecuencia de presentación
cuando se observa que cuando no lo es) la diferencia entre la frecuencia de las dos enfermedades (es menos frecuente una
cuando es estadísticamente “menos significativa”, es decir, el valor P del test es mayor.
Si en la población hay 15%, esto es, puede ser 15%, pero no lo aseguramos (falsas).

Ejercicio 11.7:

a.	Planteará la hipótesis de que en los K^+ y que en los K^- , es un test de independencia conditiva que se obtiene $P = 0,0024$, valor suficientemente pequeño como para rechazarla, lo que permite concluir que es más frecuente H_0 que H_1 .
b.	Planteará la hipótesis de que en los K^+ y que en los K^- , es un test de independencia conditiva que se obtiene $P = 0,0067$, valor suficientemente pequeño como para rechazarla, lo que permite concluir que es más frecuente H_1 que H_0 .
c.	Planteará la hipótesis de que en los K^+ y que en los K^- , es un test de independencia conditiva que se obtiene $P = 0,0067$, valor suficientemente pequeño como para rechazarla, lo que permite concluir que es más frecuente H_1 que H_0 .
d.	Planteará la hipótesis de que en los K^+ y que en los K^- , es un test de independencia conditiva que se obtiene $P = 0,0067$, valor suficientemente pequeño como para rechazarla, lo que permite concluir que es más frecuente H_1 que H_0 .

a. Planteará la hipótesis de que es igual al de frecuencia H en los K , es un test de independencia en el que se obtiene $P = 0.0024$, valor suficientemente pequeño como para rechazarla, lo que permite concluir que H es más frecuente en los K , es decir, hay relación entre ambos enfermades; es más frecuente una curadío entre que no tiene curadío.

b. Planteará la hipótesis de que es igual al de frecuencia H que K , es un test de aprobados en el que se obtiene $P = 0.0003$, valor suficiente para rechazarla, lo que permite concluir que H que K , es decir, los que tienen curadío son más aptos para aprobar la asignatura.

2 ^o	H ⁺	H ⁻	Datos Independientes	FR(HIK)=0.6, FR(HIK)=0.1	K ₊	24	16	40	FR(HIK)=0.6, FR(HIK)=0.1	K ₋	25	25	50	Z=2.83, $P_{\text{lim}}=0.0024$	$Z=14/17_{-3}^{+3}=3.9, P_{\text{lim}}=0.0003$	$H^{\text{u}}: \frac{H}{H_0} = \frac{r}{r^{\text{u}}}$	$H^{\text{s}}: \frac{H}{H_0} = \frac{r}{r^{\text{s}}}$	$\text{IC}_{95\%}: \frac{r^{\text{u}}}{r^{\text{s}}} = 3.5 \pm 1.6 = 1.4 \pm 1.46$	$\text{IC}_{95\%}: \frac{r^{\text{u}}}{r^{\text{s}}} = 2.6 \pm 0.74$	$\text{IC}_{95\%}: \frac{r^{\text{u}}}{r^{\text{s}}} = 3.5 \pm 1.6 = 1.4 \pm 1.46$
----------------	----------------	----------------	----------------------	--------------------------	----------------	----	----	----	--------------------------	----------------	----	----	----	---------------------------------	--	--	--	--	--	--

a. H_0 : la población es igual a la frecuencia H en los $K+$ que en los $K-$. \rightarrow es el de independencia con $P = 0.3$, valor muy grande como para no rechazarla, lo que permite conciliar que H es más frecuente que K .

b. H_0 : la población es igual a la frecuencia H en los $K+$ que en los $K-$. \rightarrow es el de dependencia con $P = 0.026$, valor suficientemente pequeño como para rechazarla, lo que permite conciliar que es más frecuente H que K .

c. La frecuencia H en los que tiene K due a los que no la tienen.

I_0^+	H^+	H^-	Datos Independientes	$FR(HIK)=0.5$	K^+	20	40	$FR(HIK)=0.5$	$FR(H(K)=0.5$	K^-
			Datos Apareados	$FR(H)=0.8$	$FR(K)=0.5$					
				$Z = 14 / 25 \approx 2.8$	$p_{\text{UNI}} = 0.0026$					
				$H_0: \tau_H = \tau_K$	$Z = 0, p_{\text{UNI}} = 0.5$					
				$\text{IC}(\tau_H, \tau_K) = -3.5$	$\text{IC}(\tau_H, \tau_K) = -3.5$					
				$95\% (\tau_H - \tau_K) = 1.7$	$95\% (\tau_H - \tau_K) = 1.7$					

Ejercicio 11.6:

e. La conclusión es que ambas estrategias producen resultados iguales de ejecución en la población.

I. de C. $\tau_H = 0.075 \pm 0.130 = -0.055 \pm 0.205$. En la población producen llegar a haber hasta 20% más de enfermos de K que de H, pero también producen que se dñe haya 5% más de H que de K.

Planteada la H_0 : el porcentaje de alcoholicos es igual en la poblacion de juegoso, H_1 : el porcentaje de alcoholicos es mayor que el de juegoso. Se obtiene un valor P muy pequeño que permite rechazarla. Los datos no permiten decir si la poblacion de juegoso es menor o mayor que la de alcoholicos. Con una confianza de 95%, el porcentaje de alcoholicos sera mayor que el de juegoso.

- Ejercicio 12.13:** Se necesitarán estudiar el peso de 3 individuos. La pregunta tal y como esta hecha no tiene respuesta; fallaría por saber cuál es la desviación del peso en la población elegida.
- Ejercicio 12.12:** La pregunta tal y como esta hecha no tiene respuesta; se necesita precisar más.
- Ejercicio 12.11:** La pregunta tal y como esta hecha no tiene respuesta; se necesita precisar más.
- Ejercicio 12.10:** La pregunta tal y como esta hecha no tiene respuesta; se necesita precisar más. orden de $\sqrt{7}$.
- Ejercicio 12.9:** Si se estudián 9 asturianos tenemos prob 90% de que la ineficiencia media de esa muestra no se separará de la población en más de 4 unidades, si la desviación poblacional es de

d = 1	135	327	393	959
d = 4	9	21	25	60
	Conf.=90%	Conf.=99%	Conf.=90%	Conf.=99%
	$\sigma \approx 7$	$\sigma \approx 12$		

- Ejercicio 12.8:** El número de asturianos a estudiar en cada caso es:
- Ejercicio 12.7:** $N = 1.65^2 \cdot 5^2 / 6^2 = 1.89$. La muestra servirá de 2 individuos.
- Ejercicio 12.6:** Utilizando la fórmula con $Z = 1.96$, $d = 0.04$ y $p_A = 0.2$ y $p_B = 0.8$, habrá que estimar más de 0.2.
- Ejercicio 12.5:** Si A y B curan en torno a 50% de los tratados, tratando 8 321 con A y otros tantos con B, tenemos prob de que el efecto encontrado en la muestra no se aleje del poblacional en más de 0.2.

d = 0.02	1226	2996	3404	8321
d = 0.06	137	333	379	925
	Conf.=90%	Conf.=99%	Conf.=90%	Conf.=99%
	$p_A = 0.10$	$p_B = 0.10$	$p_A = 0.50$	$p_B = 0.50$

- Ejercicio 12.4:** El número de enfermos que hay que estudiar con cada fármaco es
- | | | |
|--------------------------------------|---------------|---------------|
| Error de estimación no mayor de 0.02 | 1702 | 4161 |
| Error de estimación no mayor de 0.08 | 107 | 261 |
| | Confianza 90% | Confianza 99% |

- Ejercicio 12.3:** Considerando honestos al 50% de los alcaldes, habrá que estudiar el número de alcaldes que se necesitan estudiar para cada una de las prestaciones indicadas.

Error de estimación no mayor de 0.02	1089	2663
Error de estimación no mayor de 0.08	69	167
	Confianza 90%	Confianza 99%

- Ejercicio 12.2:** Utilizando la fórmula con $Z = 1.65$, para 90% y 2.58 para 99% se obtiene: $N = (0.2 - 0.80 \cdot 1.65^2) / 0.08^2 = 68.0625$. Hay que estudiar a 69 alcaldes para garantizar dichas prestaciones.
- Ejercicio 12.1:**

CAPÍTULO 12

- porcentaje de hipertensas entre las no sordas supera en 10 puntos o más al de sordas).
- El test favor de que sea posible (no es muy difícil, pero tampoco muy fácil, encontrar una muestra en que el la zona de discutible por estar en la zona de no clara evidencia en contra de la hipótesis ni tampoco a la 35 sea solo nos permite hablar de la posibilidad de que así ocurra, aunque el valor de P hace que el test solo nos permita decir que esas hipótesis son independientes).
- 33 a 36. Se refieren al test E. 34 es F porque afirma que sordeas e hipertension son independientes permitié concluir que esas frecuentes la sordera.
- 29 a 32. Se refieren al test D. 30 es F porque 31 es V y se está interpretando el valor de P. El test de igualdad plantearía. La 28 es la interpretación correcta del valor P del test.
- 26, 27 y 28. Se refieren al test C. 26 y 27 son equivalentes y verdaderas pues se rechaza la hipótesis de igualdad planteadas. La 28 es la interpretación correcta del valor P del test.

- c. $R_1 = A / N_1$ d. $R_0 = B / N_0$
- b. Cuando la proporción es pequeña.
- a. $ODD = 0.8 / 0.2 = 4$
- Ejercicio 13.7:**
- d. Igual que los anteriores; no se puede estimar.
- c. No, por la misma razón que en a; la Dra. decidió cuantos varones y mujeres estudiaria.
- b. No se puede saber.
- a. No, pues las caminadas 200 mujeres y 800 varones fueron decididos por la Dra. La estimación sería correcta si hubiera decidido estudiar 1 000 personas y de ellas hubieran resultado ser 200 varones y mujeres 800.

sería correcta si hubiera decidido estudiar 1 000 personas y de ellas hubieran resultado ser 200 varones y mujeres 800.

a. No, pues las caminadas 200 mujeres y 800 varones fueron decididos por la Dra. La estimación

Ejercicio 13.6:

No estimaría los valores poblacionales.

Ejemplo 1: $R_1 = 160 / 166 = 0.964$; $R_0 = 40 / 59 = 0.678$; $R_1 / R_0 = 1.422$

Ejemplo 2: $R_1 = 16 / 16 = 0.026$; $R_0 = 4 / 1904 = 0.0021$; $R_1 / R_0 = 12.376$.

Ejercicio 13.5:

a. El riesgo Relativo R_1 / R_0 . b. No. c. Siempre.

Ejercicio 13.4:

d. $OR = (10 \cdot 297810) / (1190 \cdot 990) = 2.5279$

b y c. $R_1 / R_0 = 0.01 / 0.004 = 2.5$ y $P_1 / P_0 = 0.0083 / 0.0033 = 2.515$

pues cada una de las proporciones es pequeña.

a. $R_1 = 10 / 1000 = 0.01$; $R_0 = 1190 / 298800 = 0.004$; $P_1 = 10 / 1200 = 0.0083$; $P_0 = 990 / 298800 = 0.0033$. OR se parecerá a R_1 / R_0 pues los riesgos Específicos son pequeños. Y también A_P / P_0

Ejercicio 13.3:

de cada 10 000 embarazadas.

g. El 1% del 70% más el 2 por mil del 30% = 0.01 · 0.7 + 0.002 · 0.3 = 0.007 + 0.0006 = 0.0076, 76 + 0.0016 = 0.0036, 36 de cada 10 000 embarazadas de esa población tendrán RN con EB.

mil del 80% es 0.002 · 0.8 = 0.0016, 16 de cada 10 000 no fumarán y tiene riesgo de EB de 0.002. El 2 por 1 000 fumadores tendrán RN con EB. El 80% no fumarán y del 20% = 0.01 · 0.20 = 0.002, 2 de cada

f. El 20% fumarán y tiene un riesgo de EB de 0.01. El 1% del 20% = 0.01 · 0.20 = 0.002, 2 por mil. c. $0.01 / 0.002 = 5$.

Ejercicio 13.1:

CAPÍTULO 13

entre 10 y 14.

Ejercicio 12.18: Si el efecto muestral fue bajar 12 puntos, tenemos confianza 90% en que el efecto poblacional no se diferencia más de 2 puntos del muestral, es decir, el poblacional será una basada entre 10 y 14.

$d = 2$	22	34	67	164
$d = 4$	6	14	17	41
	Conf. = 90%	Conf. = 99%	Conf. = 90%	Conf. = 99%

Ejercicio 12.17: El número de médicos a estudiar en cada grupo es:

Ejercicio 12.16: $N = 200 \cdot 1.96^2 / 2^2 = 192.08$. Hay que estudiar 193 médicos en cada grupo.

Ejercicio 12.15: Si la σ es del orden de 4 en ambas poblaciones, tomado $N = 14$ en cada grupo, tenemos prob = 0.99 de que el efecto encontrado en la muestra no se aleje del poblacional en más de 4 unidades.

$d = 2$	22	34	94	213
$d = 4$	6	14	24	58
	Conf. = 90%	Conf. = 99%	Conf. = 90%	Conf. = 99%

Ejercicio 12.14: Se necesitarán estudiar en cada grupo:

- f. $0.005 \cdot 10000 + 0.035 \cdot 10000 = 50 + 350 = 400$, 35 entre no bebedores y 350 entre bebidores.
- e. $0.005 \cdot 7 = 0.035$, 35 de cada 1 000 bebedores contrarían AT.
- d. $IC = 3.71 - 13.22$. Con confianza 95% el OR muestral es mayor de 3.71 y menor de 13.22.
- c. Para la hipótesis de no asociación entre beber y AT se obtiene $Z = 6$, P muy pequeña, se rechaza la hipótesis. Creemos que en población beber aumenta el riesgo, pues es de due acurte en la muestra.
- b. El riesgo específico de los bebadores no lo podemos estimar a partir de esta muestra Caso-control.
- a. Se puede estimar con el OR muestral $= (60 \cdot 70) / (30 \cdot 20) = 7$. Por beber, el riesgo se multiplica por 7.

Ejercicio 13.11:

- f. Esos es lo que ocurre en las muestras: en la población no sabemos lo que ocurre, pero es posible.
- e. La encuestada o aún mayores si realmente fuera la relación igual en las dos poblaciones.

- d. Que tenemos en el que obtendrásmos asociaciones tan diferentes entre varones y mujeres como que la relación entre D y E sea la misma en las dos poblaciones.

- c. Considerando varones y mujeres juntos, $OR_{muestra} = 4.77$, $Z = 2.85$ y $P = 0.002$. Hubieramos dicho que hay asociación estadísticamente significativa.

- b. Asumiendo enfermedad poco frecuente, el RR se estima con el OR muestral $= 8$. Para la hipótesis de no asociación $Z = 0.79$, $P > 0.10$. Puede que no haya asociación en la población de varones.

- a. Asumiendo enfermedad poco frecuente, el RR se estima con el OR muestral $= 2$. Para la hipótesis de no asociación $Z = 0.79$, $P > 0.10$. Puede que no haya asociación en la población de varones.

Ejercicio 13.10:

ESPAÑA:	JOVENES	ANOSAS	TODAS
R ₊ = 0.06	R ₀ = 0.02	R ₊ = 0.003	R ₀ = 0.001
R ₋ = 0.06	R ₀ = 0.02	R ₋ = 0.003	R ₀ = 0.001
FRANCIA:	JOVENES	ANOSAS	TODAS
R ₊ = 0.06	R ₀ = 0.02	R ₊ = 0.003	R ₀ = 0.001
R ₋ = 0.06	R ₀ = 0.02	R ₋ = 0.003	R ₀ = 0.001
ALMANYA:	JOVENES	ANOSAS	TODAS
R ₊ = 0.06	R ₀ = 0.02	R ₊ = 0.003	R ₀ = 0.001
R ₋ = 0.06	R ₀ = 0.02	R ₋ = 0.003	R ₀ = 0.001
ALEMANYA:	JOVENES	ANOSAS	TODAS
R ₊ = 0.06	R ₀ = 0.02	R ₊ = 0.003	R ₀ = 0.001
R ₋ = 0.06	R ₀ = 0.02	R ₋ = 0.003	R ₀ = 0.001

Ejercicio 13.9:

- g. $0.015 \cdot 10000 + 0.045 \cdot 10000 = 150 + 450 = 600$ jóvenes.

- f. Haciendo el test para la hipótesis de no asociación se obtiene $Z = 2.962$, $P = 0.0015$ y el IC = 1.45 y 6.19. Por tanto, la toxicomanía aumenta la prob de toxicomanía en los hijos, siendo este aumento entre 1.45 y 6.19 en la población.

- e. Solo se puede a partir de OR de la muestra asumiendo que la toxicomanía es enfermedad poco frecuente.

- d. Solo se puede a partir de OR de la muestra asumiendo que la toxicomanía es enfermedad poco

- c. Cuanto mayor es el riesgo de ser toxicomano en los que tienen padres que lo fueron frente a los que tienen padres no toxicomanos.

- b. No se puede pues los datos que tenemos son de una muestra Caso-control.

Ejercicio 13.8:

- n. No, por lo dicho en j y k.

- m. $(30 \cdot 70) / (20 \cdot 10) = 10.5$.

- j. $k \neq l$. No se puede a partir de una muestra Caso-control.

- g. Cuando R₊ y R₀ son menores de 0.10. h. $30 / 50 = 0.6$ i. $10 / 80 = 0.125$

- f. $OR = A \cdot D / B \cdot C$

- e. $R^2 = (A / N_1) \cdot (B / N_0)$

f. Entre si como las de nuestro estudio o aún más diferentes solo ocurriría en χ^2 de cada 1000 estudios.

f. Si los cuatro tratamientos tuvieran el mismo efecto en la población, medidas muestrales tan diferentes

$$e. F = MC^B / MC^D = 88 / 11.67 = 7.54.$$

$$d. MC^B = [(14-15)^2 + (20-15)^2 + (9-15)^2 + (17-15)^2] / 3 = 88.$$

c. Proximamente a $11.67 / 4 = 2.92$.

$$b. SC_{\text{Control}} = 2^2 + 4^2 + 1^2 + 3^2 = 30 ; SC_A = 1^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2 = 20 ; SC_B = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 3^2 = 14$$

$$a. \text{Media} = (14 + 20 + 9 + 17) / 4 = 15.$$

Ejercicio 15.3:

diferentes como las encontradas en el nuestro o aún más diferentes.

e. Si cada uno de los 4 tratamientos, solo en 4 de ellos se obtendrían unas medidas muestrales tan con cada uno de los 4 tratamientos, solo en 4 de ellos se obtendrían unas medidas muestrales tan

f. Remitir el dolor, de cada 10 000 veces que se repiteira este experimento (tratando a 5 individuos

g. Si realmente los 3 tratamientos fueran igual de eficaces, es decir, tardarán el mismo tiempo en

h. Los tres tratamientos no son igual de eficaces. Al menos uno es diferente de los demás.

$$c y d. SC_{\text{CENTRO}} = 2SC^I = 26 + 26 + 10 = 62 ; gI_{\text{CENTRO}} = 12 ; MC_{\text{CENTRO}} = 62 / 1$$

$$en la población.$$

Planteada es H_0 : Las tres técnicas remiten el dolor en el mismo tiempo, por término medio,

a y b. No es lícito hacer comparaciones por pares; hay que hacer ANOVA. La hipótesis nula

Ejercicio 15.2:

Frente al ejemplo 1 \rightarrow Se dan las dos razones anteriores. En el ejemplo actual hay menor diferencia mayor dispersión de los datos, esto es, mayor MC^D . Esto hace que F sea menor y P mayor.

Frente al ejemplo 3 \rightarrow Con igual dispersión de los datos, es decir, menor variancia entre las medidas muestrales, y menor diferencia entre las medidas muestrales, es decir, menor variancia entre las medidas muestrales, y

menor dispersión entre las medidas muestrales, es decir, menor variancia entre las medidas muestrales, y menor valor F , y mayor valor P .

Frente al ejemplo 2 \rightarrow A pesar de haber igual dispersión entre las medidas muestrales (igual MC^B), la dispersión de los datos es mayor en este ejemplo (mayor MC^D), y, por tanto, menor valor F y mayor

P. Esto hace que sea más difícil obtener evidencia contra la H_0 .

Frente al ejemplo 2 \rightarrow A pesar de haber igual dispersión entre las medidas muestrales (igual MC^B), la dispersión de los datos es mayor en este ejemplo (mayor MC^D), y, por tanto, menor valor F y mayor

P. Esto hace que sea más difícil obtener evidencia contra la H_0 .

Ejercicio 15.1:

CAPÍTULO 15

b. Se calculan los valores esperados para cada una de las casillas, $24.40 / 100 = 9.6$ esperados del grupo nidas o mayores, se obtendrían en menos de 1 de cada 100 estudios similares a este.

poblacional fuera la misma en las dos poblaciones, encontrar unas diferencias como las aquí obte-

2.8038 + 2.025 + 0.4 + 0.3692 + 1.8692 = 11.6 que con 3 gl da $P < 0.1$, es decir, si la distribución

$0 y 26.60 / 100 = 15.6$ franceses del AB, por ejemplo. Y el valor de $\chi^2 = 3.0375 + 0.6 + 0.538 =$

0 y 26.60 / 100 = 15.6 franceses del AB, por ejemplo. Y el valor de $\chi^2 = 3.0375 + 0.6 + 0.538 =$

	0	A	B	AB	Total	Francia	España	Total
Total	24	24	26	26	100	9 (0.15)	12 (0.20)	18 (0.30)
Francia	9 (0.15)	12 (0.20)	18 (0.30)	21 (0.35)	60	15 (0.375)	12 (0.30)	8 (0.20)
España	15 (0.375)	12 (0.30)	8 (0.20)	5 (0.125)	40	0	0	0

Ejercicio 14.3:

CAPÍTULO 14

i. Se estima por $(OR - 1) / OR$, P_1 , estimando P_1 por $60 / 80 = 0.75$. Entradas ($6 / 7$) $0.75 = 0.6429$.

j. Entre los bebédores y γ entre los bebédores.

k. $0.005 \cdot 0.80 + 0.035 \cdot 0.20 = 0.004 + .007 = 0.011$, 11 de cada 100 contrarán AT, 4 entre los

l. $0.005 \cdot 20.000 = 100$ enfermos si nadie hubiera bebido. $400 - 100 = 300$ se hubieran evitado.

c. La hipótesis nula planteada es que el rendimiento no depende de la agresividad, es decir, que en la población el rendimiento medio es igual en las 4 categorías de agresividad.

b.	SC	MC	F	84	5,25	DENTRO
				112	37,33	7,11 , P = 0,0012

agresividad.

a. Al comparar las 4 medias muestrales se ve que el rendimiento medio va aumentando con la agresividad.

n	10	8	36	4	8	26	14	4,667	SC	S ²
Medias	10	8	10	4	12	12	13	4		

Ejercicio 15.6:

c. Normalmente se obtienen valores de P más pequeños con el test paramétrico.

b.	SC	GL	MC	F	P
TOTAL	19	50	50	30/14,75 = 3,39 < 0,01 y < 0,05	
DENTRO	150	3	16	14,75	
ENTRE	236	26			

a. Para hacer el test de Kruskal-Wallis hay que emplear sumando los rangos en cada grupo. $R_A = 30,5$, $R_B = 80$, $R_C = 43,5$ y $R_D = 56$. Y el estadístico $H = 7,62$ que al mirar en las tablas de Chi-cuadrado con 3 grados de libertad ($\chi^2 = 7,81$) se rechaza la hipótesis.

Ejercicio 15.5:

ANOVA (Paramétrico):	SC	MC	gl	F	Tabsas F con gl 2 y 15	$F_{0,05} = 3,68$	$F_{0,01} = 6,36$	$P < 0,01$
	193,8	96,9	2	12,3				
DENTRO	118	7,9	15					

con $t =$ número de valores iguales en cada serie. Se suma sobre toda la serie de empates: $T_1 = 2^3 - 2$, $T_2 = 3^3 - 3$, $T_3 = 2^2 - 2$, $T_4 = 3^3 - 3$, $ZT = 24 + 6 + 24 + 6 = 60 \rightarrow H = H / 0,99 = 10,25$

$$\text{En nuestro ejemplo: } H = 12 / 18 \cdot 19 \cdot (40^2 / 7 + 53^2 / 6 + 78^2 / 5) - 3 \cdot 19 = 10,14$$

$$\chi^2_{0,01} = 9,21 \quad \chi^2_{0,05} = 10,60 \quad \Rightarrow \quad P < 0,01$$

$$H = \frac{12}{12} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \right)$$

Si hay empates $\rightarrow H = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N-1} T_i}$ siendo $T = t^3 - t$,

$$\text{Si } K = 3 \text{ y los } n_i < 5 \rightarrow \text{tablas especiales}$$

Estadístico de contrastes, que se distribuye aproximadamente como χ^2 con $K-1$ grados de libertad. $R_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 10 + 14 = 40$, $R_2 = 6 + 6 + 8 + 9 + 12 + 12 + 15 + 16 + 17 + 18 = 78$ $R_3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 10 + 14 = 40$, $R_4 = 6 + 6 + 8 + 9 + 12 + 12 + 15 + 16 + 17 + 18 = 78$ Se suman los rangos de cada uno de los grupos: $N = \sum n_i = 7 + 6 + 5 = 18$

$$\text{En nuestro ejemplo: } H = 12 / 18 \cdot 19 \cdot (40^2 / 7 + 53^2 / 6 + 78^2 / 5) - 3 \cdot 19 = 10,14$$

$$\chi^2_{0,01} = 9,21 \quad \chi^2_{0,05} = 10,60 \quad \Rightarrow \quad P < 0,01$$

$$H = \frac{12}{12} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \right)$$

Estadístico de contrastes, que se distribuye aproxiadamente como χ^2 con $K-1$ grados de libertad. $R_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 10 + 14 = 40$, $R_2 = 6 + 6 + 8 + 9 + 12 + 12 + 15 + 16 + 17 + 18 = 78$ $R_3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 10 + 14 = 40$, $R_4 = 6 + 6 + 8 + 9 + 12 + 12 + 15 + 16 + 17 + 18 = 78$ Se suman los rangos de cada uno de los grupos: $N = \sum n_i = 7 + 6 + 5 = 18$

$$\text{En nuestro ejemplo: } H = 12 / 18 \cdot 19 \cdot (40^2 / 7 + 53^2 / 6 + 78^2 / 5) - 3 \cdot 19 = 10,14$$

$$\chi^2_{0,01} = 9,21 \quad \chi^2_{0,05} = 10,60 \quad \Rightarrow \quad P < 0,01$$

$$H = \frac{12}{12} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \right)$$

Se ordenan los valores de los tres grupos juntos de menor a mayor y a cada uno se le asocia el orden que ocupa en esa lista (rangos). Si dos o más valores son iguales:

- Si perteneceen al mismo grupo se les asigna el rango que tiene
- Si perteneceen a grupos distintos se les asigna el rango promedio.

Ejercicio 15.4: Se ordenan los valores de los tres grupos juntos de menor a mayor y a cada uno se le asocia el orden

que ocupa en esa lista (rangos). Si dos o más valores son iguales:

- Si perteneceen al mismo grupo se les asigna el rango que tiene
- Si perteneceen a grupos distintos se les asigna el rango promedio.

- a. Por término medio, por cada año que pasa la TA aumenta dos unidades.

b. Al estimar los valores de \bar{Y} por la recta, nos equivocamos en 0.8 unidades por término medio.

c. La suma de los cuadrados de los errores cometeidos al estimar cada varlor de \bar{Y} por la recta en los 80 individuos es 49.9.

d y e. Se ven después, bimca que los puntos estan basantme cercana de la recta secundente (0.85 proximamente) y el 72% de toda la variabilidad que presenta la \bar{Y} se debe a su relación con X .

Ejercicio 16.5: $t = 10.4 - 0.5 / 0.102 = 14.7$, $P_{(N-1)} < 0.0005$. Es prácticamente segurro que β NO es 2.

Ejercicio 16.7: Si en la población el coeficiente de regresión tiene 2, en promos de 5 de cada 10.000 estudios similares al realizado se obtendrá un coeficiente muestral de 0.5 o menor.

Ejercicio 16.8: $\bar{Z}x^2 = \bar{Z}(X - 70)^2 = (\bar{X} - 70)^2 = 80$; $\bar{Z}y^2 = \bar{Z}(Y - 100)^2 = 1.880$; $\bar{Z}xy = \bar{Z}(X - 70)(Y - 100) = -80$. a. $b = -80 / 80 = -1$. El CI disminuye una unidad por año.

b. $a = 100 - (-1) 70 = 170$; CI = 170 - EDAD.

c. $X = 64$; $Y = 170 - 64 = 106$.

d. $\bar{Z}d^2 = \bar{Z}y^2 - (\bar{Z}x)^2 / \bar{Z}x^2 = 1.880 - 80^2 / 80 = 1.800$.

e. $S_{xy} = (\bar{Z}d^2 / (n-2))^{1/2} = (1.880 / 10)^{1/2} = 13.4$. Es aproximadamente la media de los errores al cuadrado.

f. $R^2 = (\bar{Z}d^2 / (\bar{Z}x^2 - \bar{Z}d^2)) / \bar{Z}x^2 = (1.880 - 1.800) / 1.880 = 0.043$.

g. $S_{xx} = \bar{Z}x^2 / (n-2) = 13.4 / 80 = 1.66$. $P > 0.10$. No tenemos fuertes motivos. Puede que $\beta = -2.5$.

h. $H_0: \beta = 1$, $H_1: \beta = 2.15$. $t = (5 - 1) / 1.5 = 4$, $P < 0.01$. No es defendible esa hipótesis. Es mayor de 5.

i. $H_0: \beta = 0$, $H_1: \beta \neq 0$. $t = (5 - 1) / 1.5 = 4$, $P < 0.01$. No es defendible esa hipótesis. Es mayor de 5.

j. $H_0: \beta = 0$, $H_1: \beta \neq 0$. $t = 1.33$, $P > 0.10$. Hipótesis defendible. Puede que β sea 1.

k. $H_0: \beta = -2.5$, $H_1: \beta = 1.5$. $t = 1.5 / 1.5 = 1$, $P > 0.10$. No tenemos fuertes motivos. Puede que $\beta = -2.5$.

l. $H_0: \beta = 0$, $H_1: \beta \neq 0$. $t = 2.3 / 1.5 = 1.5$, $P = 2.35$ y -4.35 .

Ejercicio 16.4:

λ	X	Y	Y' , calculada	$d = Y - Y'$	$(Y - Y')$, calculada ^a
14.1.	3	$Y = 3 \cdot 3 + 5 = 14$	$14.1 - 14 = 0.1$	$0.1^{\circ} = 0.01$	0.1° , calculada
16.8.	4	$Y = 3 \cdot 4 + 5 = 17$	$16.8 - 17 = -0.2$	$-0.2^{\circ} = 0.04$	-0.2° , calculada
19.7.	25	$Y = 3 \cdot 25 + 5 = 80$	$19.7 - 80 = -0.3$	$-0.3^{\circ} = 0.04$	-0.3° , calculada
41.4.	12	$Y = 3 \cdot 12 + 5 = 41$	$41.4 - 41 = 0.4$	$0.4^{\circ} = 0.09$	0.4° , calculada

Ejercicio 16.2:

En el ejercicio 16.1 se observó que la variable X tiene una relación lineal positiva con la variable Y . Si realizáramos 100 experimentos diferentes y en cada uno de ellos tomásemos una muestra de 100 individuos, las variables X y Y tendrían una relación lineal positiva. La hipótesis nula es que la pendiente de la recta de regresión es igual a cero ($\beta_1 = 0$). La hipótesis alternativa es que la pendiente es diferente de cero ($\beta_1 \neq 0$). La hipótesis nula es que la media de Y es igual a 5 ($\mu_Y = 5$). La hipótesis alternativa es que la media de Y es diferente de 5 ($\mu_Y \neq 5$). Los datos se obtuvieron de un experimento en el que se midió la altura (X) y el peso (Y) de 100 personas. Los datos se presentan en la tabla 16.1.

Como es muy difícil obtener una diferencia entre las medias muestrales como la de muestra y la teórica, esas diferencias se consideran dentro del error estándar.

d. Si cumplen las hipótesis alternativas se rechaza el estudio anílisis. Solo en 12 de ellos se obtienen resultados más diferentes que los del muestreo o alím mas

tradas, 64 de los datos serán buenos si en el almacén hay 90% de los datos buenos. La $P_{\text{POSTERIOR}}$ es 0.64, es decir, de cada 100 datos lanzados 4 veces y que haya salido „5” en las 4

$P(R B) = 0.00077$	$P(B R) = 0.00077 \cdot 9 = 0.00069$	$P(T B) = 0.00391$	$P(T R) = 0.00391 \cdot 0.1 = 0.00039$	$P(F R) = 0.36$	$P(R) = 0.00109$
$P(B) = 0.1/6 = 0.16$	$P(T) = 0.25 = 0.25$	$P(F) = 0.10$	$TOTAL$		

Ejercicio 17.4:

De cada 100 monedas tiradas 5 veces y que haya salido las 5 caras, 1 de las monedas será legítima 100% de monedas legítimas. Si en la población hay 1% de monedas legítimas y 10 de las monedas serán legítimas si en la población

tirar 5 veces una moneda, 3 de ellas darán 5 caras.

Ejercicio 17.3: Si la moneda fuera legal (5 caras = 0.50), de cada 100 experimentos consistentes en

0.29805 que aproximamos a 0.298. Entonces $P(L|R) = 0.00312 / 0.298 = 0.01$.

$P(R|F) = 0.3277 \cdot 0.90 = 0.2943$, con lo que $P(R) = P(R|L) + P(R|F) = 0.00312 + 0.2943 = 0.29805$ si fura falsa ($P(R|F) = 0.3277$). Si $P_{\text{PRIOR}} = 0.10$, $P(R|L) = 0.0312 \cdot 0.10 = 0.00312$ y y con $\pi = 0.80$ si fura falsa ($P(R|F) = 0.3277$). Si $P_{\text{PRIOR}} = 0.50$ si la moneda es legal ($P(R|L) = 0.0312$) se calcula con Binomial con $N = 5$, $X = 5$ y $\pi = 0.50$ la prob del resultado, R, (5 caras de 5 tiradas) que el 10% de las monedas son legítimas el 90% son falsas. La prob del resultado, R, (5 caras de 5 tiradas) se calcula con Binomial con $N = 5$, $X = 5$ y $\pi = 0.10$, lo que quiere decir

Ejercicio 17.2: Se sigue el mismo razonamiento anterior pero con $P_{\text{PRIOR}} = 0.10$, lo que quiere decir

aproximando a 3 decimales queda 0.001.

$P(R|F) = 0.00031 + 0.32442 = 0.32473$. Entonces $P(L|R) = 0.00031 / 0.32473 = 0.00095$ que

$P(R|Y|L) = 0.0312 \cdot 0.01 = 0.00031$ y $P(R|F) = 0.3277 \cdot 0.99 = 0.32442$, con lo que $P(R) = P(R|Y|L) + P(R|F) = 0.00031 + 0.32442 = 0.32473$. Si $P_{\text{PRIOR}} = 0.01$,

la moneda es legal ($P(R|L) = 0.0312$) y con $\pi = 0.80$ si fura falsa ($P(R|F) = 0.3277$). Si $P_{\text{PRIOR}} = 0.50$ si la prob del resultado, R, (5 caras de 5 tiradas) se calcula con Binomial con $N = 5$, $X = 5$ y $\pi = 0.50$ que el 10% de las monedas son legítimas el 90% son falsas.

Ejercicio 17.1: $P_{\text{PRIOR}} = 0.01$ quiere decir que el 1% de las monedas son legítimas y el 99% son falsas.

CAPÍTULO 17

en la población.

c) En el cálculo en sangre que se aumenta la concentración en LCR varía entre 1.6 y 2.4 unidades. IC = 2 ± 1.96 · 0.20 = 1.6, y 2.4. Tenemos seguridad de 95% en que por cada unidad de concentración de sangre que se aumenta la concentración en LCR varía entre 1.6 y 2.4 unidades.

k. El 64% de la variación de Y es explicado por X.

j. $Y = I + 2 \cdot X = I + 2 \cdot 3.0 = 61$.

i. Correlación en la población es mayor de 0.

o. $t_{79} = 19.6$, $P < <$, se rechazan ambas. Si hay relación lineal entre las variables, el coeficiente de igual a 0 en la población es equivalente a la de coeficiente de regresión en la población igual a

que no hay relación lineal entre ambas variables. La hipótesis de coeficiente de Correlación

h. Se estima en 0.20.

f) g. Es 10 y estimada \hat{y}_{xx} población, es decir, la varianza entre los valores de Y para cada valor fijo de X (que es la misma para todos los X).

e. Puesto que coincide el valor planteado para la población con el encontrado en la muestra, $P = 1$, de ello, también podría ser cualquier otro valor proximo a 2.

d. $t_{79} = 3 - 1.5 / 0.20 = 7.5$, $P < <$. Estamos prácticamente seguros de que no es 3.

c. Si Y aumentaría 2 unidades por cada unidad de X, en 6 de cada 1000 experimentos en los que se estudiará a 81 individuos encontraremos un valor de b como 2 o mayor.

b. Es equivalente a decir que Y aumenta 1.5 unidades por cada unidad de aumento de X. $t_{79} = |2 -$

a. $b = 2$ unidades.

Ejercicio 16.9:

f. La potencia del test si rechazamos H_0 es $P(X \geq 3 | \tau_A = 0.50)$. En la tabla vemos que es $0.5901 + 0.3280 + 0.0729 = 0.991$. Es decir si realmente se $\tau_A = 0.90$ 1 000 invitados hician ese estudio, 991 de ellos encuentrarían $P < 0.05$ y rechazarían, acertadamente, la H_0 .

hícleran ese estudio, 5019 de ellos encontraron $P < 0.05$ y rechazaron, acertadamente, la H_0 .

La probabilidad de que $X \geq 3$ es $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0.50 = 0.50$. En la tabla vemos que $P(X \geq 3) = 0.50$, lo que confirma el resultado anterior.

haciendo ese estudio. 1631 de ellos encuestaron $\chi^2 < 0.5$ y recategorizaron, acordándose la H₀.

d. La χ^2 y rechazan la hipótesis nula (H_0), equivaliendo la muestra a la población.

realmente es la Trop. de que $\alpha = 0.4$ o $\beta = \pi/4$. Esta foto, es $0.00083 = 83$ por 10.000. Si $\alpha = 0.10$, y 100.000 investigadores hicieran ese estudio, 83 de ellos encontrarían $P < H$.

$X = 4$ o $X = 5$. Es decir, la Región Critica de Rechazo es $3 < x \leq 4$ y $5 \leq x < 6$.

rechazamos H_0 , es $\chi^2 = 2$, porque en la tabla de la Binomial se ve que $P(\chi^2 \geq 2) = 0.10$. Por tanto, rechazaremos si es $X = 3$.

b. Rechazaremos H_0 , pensando que $\tau_A > 0.10$, si es $X = 3$, porque en la tabla de la Binomial se ve que $P(X \geq 3 | \tau_A = 0.10) = 0.00081 + 0.00044 + 0.00000 = 0.0085 = 0.85\%$. (no es 85%). Pero no

a. El numero esperado de curaciones si es extra H_0 , es decir si A cura igual que el clasico, es $E = 5 \cdot 0.1 = 0.5$, de modo que esperamos obtener 0 o 1 curaciones.

Ejercicio 184:

d. Si es $\alpha = 80\%$ la probabilidad es $P(X \leq 6 | \alpha = 0.80) = P(X \leq 4 | \alpha = 0.20) = 0.0881 + 0.2013 = 0.377$, es decir, 37% .

b. Si es $\tau_A = 30\%$ la Potencia es $P(X \geq 6) = 0.30$. c. Si es $\tau_A = 50\%$ la Potencia es $P(X \geq 6) = 0.50$.

a. Si se rechaza cuando sea $P_{\text{del test}} \leq 0.01$, se hará cuando sea $X \geq 6$ (esta es la Región Crítica de Rechazo).

$$P(Z \geq 2.03) = 1 - 0.98 = 0.02.$$

$$P(Z \leq 1.05) = 0.5 + 0.3 \cdot 0.15 = 0.675.$$

d. Si es $\mu_{\text{SOPREELI}} = 292$ la probabilidad es $P(M \leq 295.08 | \mu_{\text{SOPREELI}} = 292) = P(M \leq (295.08 - 292) / 3) = P(Z \leq 1.08) = 0.855$.

c. Si $\mu_{\text{SOPREAL}} = 296$ la Potencia es $P(M \leq 295.08 | \mu_{\text{SOPREAL}} = 296) = P(M \leq (295.08 - 296) / 3) = P(Z \leq -0.333) = 0.368$.

b. Si es $\mu_{SOBRE} = 300$ la Potencia es $P(M \leq 295.08 | \mu_{SOBRE} = 300) = P(M \leq (295.08 - 300) / 3) = P(Z \leq -1.64) = 0.05$.

a. $N = 36$, $M_{media} = 18 / 6 = 3$, $P = 0.05$ si $M_{está} = 1.64$ desviaciones por debajo de la media que acortaría la vida) de 300: $300 - 1.64 \cdot 3 = 295.08$. Región de rechazo es $M \leq 295.08$.

Ejercicio 18.2:

1 - 0,0091 = 0,99.
Si es H_0 : $\mu \leq 56$ la Potencia es $P(M \geq 51,64 | H_0)$

$$I_1 - 0.35394 = 0.64.$$

c. Si es $\mu_{\text{LEUC}} = 50$ es $P(M \leq 51.64) = P(Z \leq 1.64 - 50) = P(Z \leq 1.64) = 0.55$.
 b. Si es $\mu_{\text{LEUC}} = 52$ la Probabilidad es $P(M \leq 51.64) = P(Z \leq 1.64 - 52) = P(Z \leq -0.36) = 0.35$.

51.64. Región de rechazo es $M \geq 51.64$. $P(M \geq 51.64) = P(Z \geq 51.64 - 50) = P(Z \geq 1.64) = 0.947$.

CAPÍTULO 18

poblacional es inferior a 50 si realmente es 40.

Ejercicio 18.18: Si aceptamos tener riesgo 5% de concluir que la media poblacional actual es menor de 50 cuando realmente es igual a 50, con $N = 14$ tenemos prob 90% de detectar que la media poblacional es inferior a 50 si realmente es 40.

Ejercicio 18.17: Si aceptamos tener riesgo 5% de concluir que la media poblacional actual es menor de 50 cuando realmente es igual a 50, con $N = 9$ tenemos prob 98% de no detectar que la media poblacional es inferior a 50 si realmente es 40.

$\mu_{2008} = 40$	$N = (1.64 + 1.29)^2 \cdot 10^2 / 10^2 = 9$	$P_{\text{toma}} = 98\%$, $\beta = 0.02$, $Z_{\beta} = 2.05$
$\mu_{2008} = 30$	$N = (1.64 + 1.29)^2 \cdot 10^2 / 20^2 = 3$	$N = (1.64 + 2.05)^2 \cdot 10^2 / 20^2 = 4$

Ejercicio 18.16: $\alpha = 10$, $\mu_{2008} = 50$, $P \leq 0.05 \Leftrightarrow Z_{\alpha} = 1.64$

deci, declarar que hay reducción de gases si realmente es $\mu_{2008} < 115$.

Ejercicio 18.15: Si queremos tener riesgo 5% de concluir que hay reducción de gases si realmente no lo hay (rechazar H_0), estudiando 348 franceses tendremos prob 99% de decir que $\mu_{2008} < 120$ (es decir, declarar que hay reducción de gases).

Ejercicio 18.14: Si queremos tener riesgo 5% de concluir que hay reducción de gases si realmente no lo hay (rechazar H_0), estudiando 138 franceses tendremos prob 90% de decir que $\mu_{2008} < 120$ (es decir, declarar que hay reducción de gases).

Ejercicio 18.13: Si queremos tener riesgo 5% de decir que $\mu_{2008} < 120$ cuando realmente es $\mu_{2008} = 100$ (es decir, declarar que hay reducción de gases si realmente es $\mu_{2008} = 100$).

0.01 (2.33)	0.01 (2.33)	21.72	348	87	23
0.05 (1.64)	0.01 (2.33)	15.76	253	64	16
0.05 (1.64)	0.10 (1.29)	8.59	138	35	9
$\uparrow \alpha (Z_{\beta})$	$\uparrow \beta (Z_{\alpha})$	$\uparrow (Z_{\alpha} + Z_{\beta})^2$			
	$\mu_{2008} \leftarrow$		115	110	100

Ejercicio 18.12:

clarar el producto B útil si realmente cura 5% más que A.

Ejercicio 18.11: Si acordamos declarar como útiles (que cura más que B) a 5 de cada 100 productos inútiles (que cura igual que B), estudiando 2948 tratados con B tendremos una prob de 99% de decir que el producto B útil si realmente cura 30% más que A.

Ejercicio 18.10: Si acordamos declarar como útiles (que cura más que B) a 5 de cada 100 productos inútiles (que cura igual que B), estudiando 179 tratados con B tendremos una prob de 99% de decir que el producto B útil si realmente cura 30% más que A.

Ejercicio 18.9: Si se decide concluir que es mayor que 20% si realmente es 80%.

Ejercicio 18.8: Si se decide concluir que el porcentaje de votos es mayor de 20% cuando en realidad sea 20% (es decir, cuando P del test sea ≤ 0.05), encuestando a 127 ciudadanos tendremos prob de 99% de detectar que T_{105} es mayor que 20% si realmente es 80%.

Ejercicio 18.7: Si se decide concluir que el porcentaje de votos es mayor de 20% cuando en realidad sea 20% (es decir, cuando P del test sea ≤ 0.05), encuestando a 127 ciudadanos tendremos prob de 99% de detectar que T_{105} es mayor que 20% si realmente es 80%.

$a = 0.05$,	$S_i \text{ es } \alpha_{105} = 0.3$	$S_i \text{ es } \alpha_{105} = 0.8$	$P_{\text{toma}} = 99\%$	$[1.656+2.33 \cdot 0.21^2] / 0.01 = 297$	$[1.656+2.33 \cdot 0.16^2] / 0.36 = 7$
			$P_{\text{toma}} = 85\%$	$[1.656+1.03 \cdot 0.21^2] / 0.01 = 127$	$[1.656+1.03 \cdot 0.16^2] / 0.36 = 3$

Ejercicio 18.7:

util si realmente cura 30%.

Ejercicio 18.6: Si queremos declarar como útiles (que cura más del 10%) a 5 de cada 100 productos inútiles (que cura 10%), estudiando 61 tratados con B tendremos una prob de 99% de declarar el producto util si realmente cura 15%.

Ejercicio 18.5: Si queremos declarar como útiles (que cura más del 10%) a 5 de cada 100 productos inútiles (que cura 10%), estudiando 299 tratados tendremos una prob de 85% de declarar el producto util si realmente cura 15%.

Ejercicio B.1: Son verdaderas a y g para el producto A; b, e y g para los fármacos B, C y D

APÉNDICE B

Ejercicio A.5: Aunque las cantidades que aparecen en a, b y c son correctas, la respuesta adecuada para el apartado a de A.1 es la d. Y aunque la prob de f es correcta, la respuesta adecuada para B.1 es la g.

capa de arena de 4 m de profundidad, hacen falta 50000 planetas.

hartan falta mil millones de millones de playas. Y si todo el planeta estuviera cubierto por esa m de ancho y 4 metros de profundidad tiene gramos de arena de medio millímetro de diámetro, todos, a uno le tocarán las 100 caras. Otro ejemplo: si una isla medida playa de 5 km de largo, 100 billones de 100 millones de millones de millones de planetas como el necesito para que juzgando b. En la tierra hay unos 5 000 millones de personas. $10^{30} / 5 \cdot 10^9 = 10^{20}$. Habrá que reunir los ha-

a. $(100 \text{ caras}) = 0.5 \cdot 10^6 = 10^6 = 1$ entre 1 000000 000000 000000 000000 000000 000000

Ejercicio A.4:

de 8 rojos seguidos, encontraría del observador se extiende hasta observar no una, sino muchas series

Ejercicio A.3: Si la paciencia del observador se extiende hasta observar no una, sino muchas series anteriores: saldrá a aproximadamente el 20% de las tiradas, el 20% de 500 000 que es 100 000.

Ejercicio A.2: Puede salir siempre cuatro y puede salir nunca 4, pero ocurrirá lo que en las series esas 8, sino de las 992 restantes que perderán.

b. Gamar con 4 tiradas ocurreta $(1/6)^4 = 0.00077$, aproximadamente 8 cada 10 000. Cada 10 000 personas que juzgaran a lanzar 4 dados, solo 8 ganarían y lo más fácil es que Lucía no sea una de de niñas lanzan 3 veces el dado, solo 5 de cada mil obtendrán „5”, las tres veces.

c. Gamar en las tres tiradas es $(1/6)^3 = 0.0046$, aproximadamente 5 por 1 000. Es decir, si milloenes de ganar en las tres tiradas que 5, es 0.17. Y si se tiran 3 dados, las prob

Ejercicio A.1:

APÉNDICE A

Ejercicio 18.23: Si decidimos rechazar H_0 que dice que el fármaco „2” es inútil cuando el test da $P \leq 0.05$, estudiando 94 tratados con cada fármaco tendremos potencia de 99% (esto es, prob de admirir que „2” es útil) si la media poblacional con „2” avientaja a la de „1” en ¼ de desviación estándar.

Ejercicio 18.22: Si decidimos rechazar H_0 que dice que el fármaco „2” es inútil cuando el test da $P \leq 0.05$, estudiando 200 tratados con cada fármaco tendremos potencia de 80% (esto es, prob de admirir que „2” es útil) si la media poblacional con „2” avientaja a la de „1” en ½ de desviación estándar.

Ejercicio 18.21: Si decidimos rechazar H_0 que dice que el fármaco „2” es inútil cuando el test da $P \leq 0.05$, estudiando 22 tratados con cada fármaco tendrremos potencia de 95% (esto es, prob de admirir que „2” es útil) si la media poblacional con „2” avientaja a la de „1” en ⅓ de desviación estándar.

Ejercicio 18.20: $N = 2 \cdot C_2 \cdot (Z_{\alpha/2} + Z_{\beta})^2 = 2 \cdot 1 \cdot 6.25 = 13$. Si decidimos rechazar H_0 que dice que el fármaco „2” es inútil cuando el test da $P \leq 0.05$, estudiando 13 tratados con cada fármaco tendremos potencia de 80% (esto es, prob de admirir que „2” es útil) si la media poblacional con „2” avientaja a la de „1” en 2 desviaciones estándar.

Ejercicio 18.19: $N = 2 \cdot C_2 \cdot (Z_{\alpha/2} + Z_{\beta})^2 = 2 \cdot 0.25 \cdot 2.948 = 15$. Si decidimos rechazar H_0 que dice que el fármaco „2” es inútil cuando el test da $P \leq 0.05$, estudiando 15 tratados con cada fármaco tendremos potencia de 99% (esto es, prob de admirir que „2” es útil) si la media poblacional con „2”

EN BUSCA DE TESOROS ESCONDIDOS

Del rincón en el ángulo oscuro,
de su dueño tal vez olvidada,
silenciosa y cubierta de polvo,
vefase el arpa.

¡Cuánta nota dormía en sus cuerdas,
como el pájaro duerme en la rama,
esperando la mano de nieve
que sabe arrancarla!

¡Ay –pensé- cuántas veces el genio
así duerme en el fondo del alma
y una voz como Lázaro espera
que le diga “levántate y anda”!

Esta rima de Bécquer es un canto a los que buscan y sacan a la luz tesoros escondidos, como hacen los bioestadísticos.

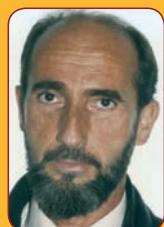
Los submarinistas **bucean** en los mares y encuentran galeones hundidos hace siglos con cofres que esconden tesoros; los escultores **desechan** los trozos periféricos del bloque de mármol y encuentran La Piedad, El David, El Pensador, El Beso...; los bioestadísticos **bucean** en las bases de datos, **desechan** los no necesarios y encuentran relaciones no conocidas antes, como:

- los masajes oculares retrasan la aparición de “vista cansada”
- los bailarines de salsa, tango, vals... consumen mucho menos alcohol en las fiestas
- la práctica regular de ejercicio reduce la hipertensión arterial y la diabetes.

Cada día se generan nuevas Bases de Datos que encierran información muy útil, pero solamente usando las herramientas adecuadas se pueden desenterrar esos tesoros escondidos en ellas. En la investigación médica y sociológica, en los estudios de mercado y en el control de calidad de las empresas, la Bioestadística saca a la luz esas relaciones

Conocer los fundamentos lógicos, que no matemáticos, de esta disciplina permitirá al científico y el profesional de este siglo entender una información inasequible al que ignore esos conceptos básicos.

Este **LIBRO** explica los fundamentos lógicos sin usar herramienta matemática y aplicándolos siempre a situaciones prácticas. Incluye cientos de *ejercicios y encuestas de autoevaluación*.



Los **AUTORES** son profesores de metodología de la investigación en la Universidad Complutense de Madrid. Acumulan más de 60 años explicando estos temas a estudiantes y a profesionales en universidades y empresas. Han publicado más de 200 trabajos de investigación. Sus alumnos destacan en ellos su capacidad para poner al alcance del profano en matemáticas los conceptos fundamentales del análisis estadístico.

ISBN: 978-84-7978-959-6



9 788479 789596

E-mail: ediciones@diazdesantos.es
internet: <http://ediciones.diazdesantos.es>