

分数阶 Langevin 方程随机共振性质研究

专业: 数学与应用数学

学生: 肖睿 指导教师: 邓科教授

摘要: 本研究探讨了非高斯噪声驱动下,受外部周期信号激励的线性分数阶广义 Langevin 方程的随机共振特性。与传统聚焦于高斯噪声的研究不同,本文将内、外噪声分别建模为 Hermite 噪声和双态噪声,以更全面地理解非高斯噪声下的动力学行为。首先,本文介绍了 Caputo 分数阶导数和 Hermite 过程,并利用 Wiener 积分的性质,通过涨落耗散定理,推导出阻尼项与系统粒子位移 $x(t)$ 的 Caputo 导数相关,揭示了不同阶数导数对阻尼核函数记忆性的影响。进一步,通过对广义 Langevin 方程积分,并应用 Picard 迭代、Gronwall 引理和 Banach 不动点定理,证明了带有 Hermite 噪声的分数阶广义 Langevin 方程解的存在唯一性,确保了系统的稳定性和数值模拟的可行性。在方程解的适定性得到证明后,本文推导了带 Caputo 分数阶导数的 Langevin 方程的 EM 方法,并对其数值解进行了强收敛性分析,确立了数值解误差的收敛阶。考虑到分数阶 Brown 运动是 Hermite 过程的特例,本文利用与之对应的分数阶高斯噪声的定义方式给出了 Hermite 噪声的解析式。利用 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换,推导了系统响应的稳态矩和方差表达式,深入分析了随机共振的性质,并导出了一、二阶矩稳定的条件。最终,在矩稳定的基础上,通过数值仿真展示了系统在特定参数下的广义随机共振现象,即系统响应振幅随噪声参数的变化而变化。特别地,本文详细分析了外噪声强度引起的经典随机共振特性,并提出了一种数值迭代算法来计算产生经典随机共振的参数取值。通过参数相图直观展示了不同参数组合诱导随机共振的条件,仿真结果验证了算法的有效性和可靠性。

关键词: 分数阶 Langevin 方程; 随机共振; Hermite 噪声; 线性过阻尼简谐振子

Study on stochastic resonance properties of fractional Langevin equations

Major: Mathematics and Applied Mathematics

Student: Xiao Rui Adviser: Prof.Deng Ke

Abstract: This study investigates the stochastic resonance characteristics of linear fractional-order generalized Langevin equations driven by non-Gaussian noise and stimulated by external periodic signals. Unlike traditional research focused on Gaussian noise, this paper models the internal and external noise as Hermite noise and bistable noise, respectively, to more comprehensively understand the dynamics under non-Gaussian noise. Initially, the paper introduces the Caputo fractional derivative and the Hermite process, and using the properties of Wiener integrals, derives the expression for the damping term through the fluctuation-dissipation theorem. Furthermore, by integrating the Langevin equation and applying Picard iteration, Gronwall's lemma, and Banach's fixed-point theorem, the existence and uniqueness of the solution to the equation with Hermite noise are proven, ensuring the system's stability and the feasibility of numerical simulations. Following that, the paper derives the EM method for the Langevin equation with Caputo fractional derivatives and conducts a strong convergence analysis of its numerical solution, establishing the convergence order of the numerical solution error. Considering that fractional Brownian motion is a special case of the Hermite process, the paper defines the corresponding fractional Gaussian noise and provides an analytical expression for Hermite noise. Using the Shapiro-Loguinov formula and Laplace transform, the paper derives expressions for the steady-state moments and variance of the system response, delving into the properties of stochastic resonance and deriving conditions for the stability of the first and second moments. Finally, based on moment stability, numerical simulations demonstrate the phenomenon of generalized stochastic resonance in the system under specific parameters, where the system response amplitude varies with noise parameters. In particular, the paper analyzes the classical stochastic resonance properties induced by the intensity of external noise and proposes a numerical iterative algorithm to calculate the parameter values for producing classical stochastic resonance. Parameter phase diagrams are presented to visually illustrate the conditions required for inducing stochastic resonance, and simulation results confirm the reliability of the algorithm.

Keywords: Fractional Langevin equation; Stochastic resonance; Hermite noise; Linear overdamped simple harmonic oscillator

目录

1	引言	1
2	理论基础	4
2.1	广义 Langevin 方程	4
2.2	Hermite 过程	5
3	带有 Hermite 噪声的分数阶 Langevin 方程性质分析	7
3.1	系统记忆性	9
3.2	方程解的性质	10
3.2.1	解的存在唯一性	10
3.2.2	方程数值解	13
3.3	系统稳态响应振幅与方差的随机共振分析	16
3.3.1	系统响应稳态振幅	16
3.3.2	系统响应稳态方差	21
4	随机共振性质仿真	24
4.1	系统稳态响应振幅的随机共振仿真	24
4.2	系统稳态响应方差的随机共振仿真	27
4.3	系统稳态响应振幅与外噪声强度的进一步分析与仿真	30
5	结论	37
	参考文献	38

1 引言

振动现象无处不在，既存在于我们的日常生活中，也广泛应用于各种工程系统^[1]。随机共振 (Stochastic Resonance, SR) 这一概念是 Benzi 等人在气候系统的框架模型下提出的，在这个模型中，他们将气候系统建模为双稳系统，而气候系统在一个较短的时间内的随机波动被视为是高斯白噪声，而随机振动是指气候系统在一定强度的噪声调节下，气候的周期响应与外加微弱周期驱动会实现同步^[2]。他们使用双稳态系统对气候系统进行建模，并用高斯白噪声来描述短期气候的随机波动。而 Gitterman 等人提出了广义随机共振^[3]，是指系统响应的稳态矩、自相关函数、信噪比等函数随着噪声的振幅、频率、相关率等参数的改变，呈现出单峰相、单谷相、一峰一谷相等非单调的变化，研究的系统参数不再局限于经典随机共振中的噪声强度这个单一的参数^[4]。

大多数关于随机共振的研究都是基于经典的 Langevin 方程，经典 Langevin 方程是描述粒子在流体中受到的阻力和随机力的平衡的物理模型。它假设阻尼项仅与粒子当前速度有关，且与粒子的速度成正比，而随机项则通常被假设为高斯白噪声，此时相关函数是 Dirac delta 函数 $\delta(t)$ 。这种模型在描述理想的波动环境中的物理现象，如布朗运动，具有很好的效果。相比之下，广义 Langevin 方程^[5] 则是对经典 Langevin 方程的一种推广。它允许阻尼项与粒子的历史速度有关，从而能够描述具有记忆效应的物理过程。此外，广义 Langevin 方程还可以引入非高斯噪声，如 Hermite 噪声，以描述更复杂的随机过程。因此，广义 Langevin 方程在研究复杂介质中的物理现象^[6, 7]，如粘弹性液体中粒子的随机运动或单个蛋白质分子内的亚扩散，以及揭示系统如何通过噪声来增强其对外部信号的响应等方面具有更广泛的应用。

分数阶微积分^[7, 8, 9] 具有时间记忆性和长程空间相关性，比整数阶导数更能精确地描述有记忆和遗传、路径依赖性质的物理过程和生化反应过程。通过将广义 Langevin 方程中的系统内噪声建模为分数阶高斯噪声，推导出分数阶 Langevin 方程，由系统内噪声的 Hurst 指数决定分数阶导数项的阶数。数值模拟表明，在一定的阶数范围内，分数阶 Langevin 方程可以产生随机共振，并且分数阶下的信噪比增益好于整数阶情形。这为理解和预测复杂系统的动力学行为，特别是随机共振现象，提供了新的理论工具。

传统的随机共振研究大多关注高斯噪声、均匀噪声等适用于模拟线性系统或近似线性系统的噪声，自然界中出现随机共振现象的系统有不少是由非高斯噪声驱动的，如 Lévy 噪声^[10]、 α -稳定分布噪声等，并且这类系统通常可以理论求解，这便为共振机理研究的深入与随机共振应用的推广提供了有利条件。在对非高斯噪声的研究早期，Medino^[11] 开发了随机积分的数值方法来求解 Lévy 噪声驱动下的广义 Langevin 方程的解，并用时间序列的方法获得了系统参数的估计公式，揭示了与随机共振现象之间的关系。Srokowski^[12] 研究了非高斯强噪声激发下 Langevin 方程的共振特性，强调了非高斯噪声对系统的剧烈影响。近年来，Rahimi 等人^[13] 研究了 Lévy 噪声驱动下的分数阶 Langevin 方程，研究了共振

频率和分数阶指数之间的关系及对共振特性的影响。虽然前人已经对谐振子系统的随机共振现象有着大量的研究，但是对非高斯噪声影响下的简谐振子的随机共振现象研究并不完善，本文的一个主要工作就是研究在 Hermite 噪声这一非高斯噪声驱动下的系统动力学性质和随机共振现象，并讨论该系统求解的可行性。

Hermite 噪声由于其非高斯、自相似、具有平稳增量和长记忆性等特性^[14]，为理解非线性系统的随机动力学提供了新的视角，比如近年，Hermite 过程在网络流量^[15]或数学金融^[16, 17]中有广泛的应用。一个特别值得关注的情况是，当随机噪声是分数布朗运动 (fBm) 时。fBm 是标准布朗运动的扩展，是一个具有稳态增量和长记忆的高斯自相似过程。由于其广泛的应用，对分数阶布朗运动随机性的分析在过去几十年中得到了深入发展^[18]。利用涨落耗散定理可以得到这种随机扰动项对应的阻尼函数 $\gamma(t)$ 的幂律表达式，这种与生物学中的几个实验非常吻合^[19, 20]。

与 fBm 一样，Hermite 过程也是具有稳态增量和长内存的自相似随机过程。它们还具有与 fBm 相同的协方差结构。秩序 $p \geq 1$ 的 Hermite 过程存在于秩序 p 的维纳混沌中。我们提到 Hermite 过程的类包含 fBm，它是 1 阶的 Hermite 过程，它是唯一的高斯 Hermite 过程。对于 $p \geq 2$ ，Hermite 过程始终是非高斯过程。因此，在将高斯噪声拓展为非高斯噪声进行随机共振性质研究的同时，也保留了高斯噪声的一些性质（噪声的缩放、解的长内存、采样路径的规律性等）。

分数阶随机微分方程在科学与工程现象模拟中的广泛应用也逐渐推动了方程求解的研究。本文先证明在 Hermite 噪声驱动下，广义 Langevin 方程解的存在唯一性^[21]。首先，解的存在唯一性保证了我们可以对 Langevin 方程进行有效的数值模拟和理论分析。其次，解的存在唯一性也意味着系统的行为是确定的，即在给定的初始条件和参数下，系统的行为将遵循一定的规律，不会出现多个可能的结果。这对于理解和预测系统的长期行为至关重要。而且，解的存在唯一性还与系统的稳定性有关。由于随机共振现象通常发生在系统在两个或多个稳定状态之间跳跃时，只有在解的存在唯一性得到保证的情况下，我们才能对系统的行为进行准确的预测和控制^[22]。因此，证明解的存在唯一性对于在物理、生物学和工程学等领域中应用这些理论具有重要意义。

在解存在且唯一的基础上，人们期望得到方程的精确解便于工程应用，但是大多数分数阶微分方程的精确解难以求得，只能提供数值逼近。在过去的研究当中，分数阶随机微分方程可以用平均原理来求解^[23]，即通过平均随机系统的解来近似。也有学者在此基础上施加了一些新的平均条件，发现 Caputo 分数阶随机微分方程可以用均值方程来数值逼近^[24]。于是，在众多基于平均原理的方法中，一种代数结构简单、收敛速度可观的方法引起了大家的兴趣，即 Euler-Maruyama (EM) 方法。本文将利用 EM 方法推导出方程数值解，并验证该方法的强收敛性^[25, 26]。

本文旨在探讨双态噪声^[27]驱动下的分数阶广义 Langevin 方程在添加 Hermite 噪声后的广义随机共振行为。本文先用周期信号激励线性过阻尼分数阶 Langevin 方程，并用双态噪

声干扰系统固有频率, 进一步, 接着定义了 Hermite 过程和关于 Hermite 过程的 Wiener 积分, 为推导出模型方程中阻尼函数的表达式做准备。本文首先利用涨落耗散定理推导阻尼项与系统粒子位移 $x(t)$ 的 Caputo 导数, 然后进一步分析线性过阻尼分数阶 Langevin 方程在周期信号激励下的广义共振行为。通过 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换, 推导线性过阻尼分数阶 Langevin 方程系统响应的一、二阶稳态矩和稳态响应振幅的表达式, 分析和比较内、外噪声和周期激励信号对系统共振情况的影响, 并单独研究了噪声强度对系统稳态响应振幅产生随机共振的影响, 分析表明, 适当参数下, Hermite 噪声驱动的分阶广义 Langevin 方程存在随机共振现象。本文还利用矩稳定的条件, 设计出了计算能产生随机共振的参数取值范围的迭代算法, 并用参数相图和仿真曲线模拟并验证了算法的准确性。

通过本研究, 我们期望能够为非高斯噪声在物理、生物学和工程学等领域的应用提供理论基础, 同时也为控制和优化这些系统的行为提供新的策略。

2 理论基础

2.1 广义 Langevin 方程

一般来说, t 时刻粒子在强噪声下的位置状态 $x(t)$ 可由广义 Langevin 方程表述:

$$m\ddot{x}(t) = -[\omega^2 + N(t)]x(t) - \gamma_0 \int_0^t \gamma(t-u)\dot{x}(u)du + A\sin(\nu t) + F(t)$$

其中, m 是粒子质量, ω 为系统固有频率, $N(t)$ 是系统外噪声, 本文中为双态噪声, $\gamma_0 > 0$ 是阻尼系数, $\gamma(t)$ 是系统阻尼核函数, A, ν 为周期激励信号的振幅和频率, $F(t)$ 是系统内噪声, 即粒子受到的随机噪声, 本文中为 Hermite 噪声。本文认为 $F(t)$ 和 $N(t)$ 是不相关的。

双态噪声 $N(t)$ 满足

$$\mathbb{E}[N(t)] = 0$$

$$\mathbb{E}[N(t)N(s)] = a^2 \exp[-r|t-s|]$$

其中 a 为噪声的强度, r 为噪声的相关率。

一个处于强噪声环境的线性过阻尼 Langevin 方程可以表示为:

$$\gamma_0 \int_0^t \gamma(t-u)\dot{x}(u)du + [\omega^2 + N(t)]x(t) = A\sin(\nu t) + F(t). \quad (2.1)$$

例 2.1. 在均匀介质中, 我们可以将粒子的位移视为一个 Markov 过程, 此时随机噪声 $F(t)$ 是高斯白噪声, 阻尼核函数 $\gamma(t) = \delta(t)$, 于是阻尼项

$$\int_0^t \gamma(t-u)\dot{x}(u)du = \dot{x}(t)$$

广义 Langevin 方程退化为经典的 Langevin 方程, 粒子受到的阻尼力只与粒子的速度有关。

例 2.2. 在真实的物理和生化环境中, 介质对速度通常具有幂律记忆性, 距当前时刻越近, 记忆性越强; 距当前时刻越远, 记忆性越差。系统阻尼核函数 $\gamma(t)$ 为:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} |t|^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

阻尼核函数的这个表达式将在下文讨论系统记忆性时进一步讨论。

2.2 Hermite 过程

Hermite 过程包括分数布朗运动 (Brown Motion)，布朗运动是所有 Hermite 过程中唯一的高斯过程。Hermite 过程中的一大类过程可以模拟长记忆、自相似性和 Hölder 正则性，从而允许与 fBm 和其他高斯过程有显著偏差。由于它们是非高斯的，并且具有稳态增量的自相似性，因此对一些能从非高斯的经验数据中观察到自相似性的模型来说，Hermite 过程也可以作为这类模型的输入。除此之外，Hermite 过程在很多方面都有出色的应用，比如本文关注的正是 Hermite 过程在广义 Langevin 方程中起随机扰动的这一作用。此处先给出 Hermite 过程及相关概念的定义。

定义 2.3. 设 $t \geq 0, p \geq 1$ 且 p 为整数， $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ ，则自相似度指数为 H 的 p 阶 Hermite 过程定义为

$$Z_t^{(p,H)} = C(p, H) \int_{\mathbb{R}} dW(y_1) \dots \int_{\mathbb{R}} dW(y_p) \times \left(\int_0^t (s - y_1)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} \dots (s - y_p)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} ds \right) \quad (2.2)$$

其中 $x_+^\alpha = x^\alpha \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ ， $C(p, H)$ 是使得 $\mathbf{E} \left(Z_1^{(p,H)} \right)^2 = 1$ 的正常数，(3.13) 中给出了该式的表达式， $(W(y), y \in \mathbb{R})$ 是具有时间间隔 \mathbb{R} 的 Wiener 过程。

当 $p = 1$ 时，Hermite 过程是分数阶布朗运动，记为 $Z_t^{(1,H)} = B_t^{(H)}, t > 0$ 。 $B_t^{(H)}$ 是所有的 Hermite 过程中唯一的高斯过程。

$t \geq 0$ 时，随机变量 $Z_t^{(p,H)}$ 是 p 阶 Wiener 混沌的一个元素，下面给出 Wiener 混沌及其相关概念定义如下：

定义 2.4. 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个完备的概率空间， H 是一个实可分的 Hilbert 空间。若 $G = \{G(h); h \in H\}$ 是一族均值为 0 的 Gauss 随机变量，并满足如下等式

$$\mathbf{E}(G(h)G(g)) = (h, g)_H$$

则称空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P; H)$ 为 Guass 概率空间，并称 G 为等正态 (Isonormal) 的 Gauss 过程。

定义 2.5. n 为正整数，形如

$$Z_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-\frac{t^2}{2}})$$

的多项式为 n 阶 Hermite 多项式。特别地， $Z_0(t) = 1$ 。

定义 2.6. 对任意正整数 n ， n 阶 Wiener 混沌 (Wiener Chaos) 为 $\{Z_n(G(h)); h \in H, \|h\| = 1\}$ 生成的线性闭子空间。

从定义2.3看出 $Z_t^{(p,H)}$ 是一个关于 Wiener 过程的 p 重积分。下面将给出 $Z_t^{(p,H)}$ 的另一种定义方式:

定义 2.7. 设 $t \geq 0, p \geq 1$ 且 p 为整数, $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, 则

$$Z_t^{(p,H)} = I_p(L_t), \quad t \geq 0,$$

其中 I_p 是关于 Wiener 过程的 p 重积分。 L_t 是 Hermite 过程的核, 表示为:

$$L_t(y_1 \dots y_p) = C(p, H) \int_0^t (s - y_1)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} \dots (s - y_p)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} ds, \quad y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$$

这种定义方式将在下一章讨论带有 Hermite 噪声的分数阶 Langevin 方程性质时, 为我们利用涨落耗散定理推导阻尼核函数表达式提供方便。

接下来介绍 Hermite 过程的一些重要性质。

命题 2.8. 均值函数:

$$\mathbb{E}Z_t^{(p,H)} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < H < 1$$

命题 2.9. Hermite 过程是一个关于 Hurst 指数 H 自相似的过程, 即对任意 $c > 0$,

$$\left(Z_{ct}^{(p,H)}, t \geq 0 \right) \text{ 和 } \left(c^H Z_t^{(p,H)}, t \geq 0 \right)$$

是两个有相同有限维分布的随机过程。

命题 2.10. Hermite 过程是平稳增量过程, 即任意 $h > 0$:

$$\left(Z_t^{(p,H)}, t \geq 0 \right) \text{ 和 } \left(Z_{t+h}^{(p,H)} - Z_h^{(p,H)}, t \geq 0 \right)$$

有相同有限维分布。

命题 2.11. Hermite 过程的任意有限 q 矩都是有限的:

$$\mathbb{E}|Z_t^{(p,H)}|^q = \mathbb{E}|Z_1^{(p,H)}|^q t^{2H}. \quad t \geq 0$$

命题 2.12. Hermite 过程是 δ 阶 Hölder 连续的 ($0 < \delta < H$), 即任意 $p \geq 1$:

$$\mathbb{E}|Z_t^{(p,H)} - Z_s^{(p,H)}|^q = \mathbb{E}|Z_1^{(p,H)}|^q |t - s|^{qH}$$

Hermite 过程这些性质将对下一章的 Hermite 噪声的定义和性质推导、带 Hermite 噪声的 Langevin 方程的数值求解提供理论基础。

3 带有 Hermite 噪声的分数阶 Langevin 方程性质分析

在过去不少的研究都关注在分数阶布朗运动 (fBm) 对应的分数阶高斯噪声 (FGN), 本节将在 FGN 的定义和带有 FGN 的 Langevin 方程的基础上, 通过与 Hermite 过程相关的 Wiener 积分定义 Hermite 噪声, 在这个过程中还将说明 Wiener 积分是良定义的, 最后将 FGN 替换为 Hermite 噪声, 完成 Hermite 噪声驱动过的阻尼广义 Langevin 方程的构建。

本节先给出了 Hermite 噪声驱动过的阻尼广义 Langevin 方程的特殊形式, 此时阶数为 Hermite 噪声的阶数为 1, 是分数阶布朗运动。所以, 带有分数阶高斯噪声的广义 Langevin 方程及其积分形式可以分别写为:

$$\gamma_0 \cdot D_c^\alpha x(t) = b(x(t)) + \sigma \dot{B}_t^H, t \in [0, T], \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} x_t = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(x_s) ds \\ + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} dB_s^H, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中, σ 是分数阶噪声的密度, dB_s^H 是 (关于分数阶 Brown 运动的) Wiener 积分, 函数 $b(x(t))$ 为

$$b(x(t)) = -[\omega^2 + N(t)]x(t) + A \sin(\nu t)$$

是一个 Lipschitz 函数, 而且是线性增长的, 即

$$|b(x(t)) - b(y(t))| \leq K |x - y|$$

$$|b(x(t))| \leq L(1 + |x|).$$

在将特殊形式推广为一般形式之前, 先定义关于 Hermite 过程的 Wiener 积分, 并通过 \mathcal{H} -范数说明 Wiener 是良定义的。

将 \mathbb{R} 上的初等函数 f 之集记为 \mathcal{E} , 对 $f \in \mathcal{E}$:

$$f(u) = \sum_{l=1}^n a_l 1_{(t_l, t_{l+1}]}(u), \quad t_l < t_{l+1}, \quad a_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, n.$$

定义 3.1. f 关于 Hermite 过程 $Z_t^{(p,H)}$ 的 Wiener 积分为:

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) dZ_u^{(p,H)} = \sum_{l=1}^n a_l (Z_{t_{l+1}}^{(p,H)} - Z_{t_l}^{(p,H)}).$$

则 $Z_t^{(p,H)}$ 的定义(2.3)可改写为:

$$Z_t^{(p,H)} = \int_{\mathbb{R}^p} J(1_{[0,t]})(y_1, \dots, y_p) dW(y_1) \cdots dW(y_p),$$

其中 J 是一个从 \mathbb{R} 上的函数集到 \mathbb{R}^p 的映射:

$$J(f)(y_1, \dots, y_p) = C(p, H) \int_{\mathbb{R}} f(u) \prod_{j=1}^p (u - y_j)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} du.$$

特别地, 这个算子在 $p = 1$ 时可以表示为一个分数阶积分和分数阶导数的形式. 由算子 J 的线性性, f 的 Wiener 积分可以记为:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(u) dZ_u^{(p,H)} &= \sum_{l=1}^n a_l (Z_{t_{l+1}}^{(p,H)} - Z_{t_l}^{(p,H)}) \\ &= \sum_{l=1}^n a_l \int_{\mathbb{R}^k} I(1_{(t_l, t_{l+1}]})(y_1, \dots, y_p) dW(y_1) \cdots dW(y_p) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} J(f)(y_1, \dots, y_p) dW(y_1) \cdots dW(y_p) \end{aligned} \quad (3.3)$$

定义如下的一个空间:

$$\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty\}$$

\mathcal{H} -范数定义为:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^k} (J(f)(y_1, \dots, y_k))^2 dy_1 \cdots dy_p \\ &= C(p, H)^2 \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u) f(v) \prod_{j=1}^p (u - y_j)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} \right. \\ &\quad \left. \times (v - y_j)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} dv du \right) dy_1 \cdots dy_p \\ &= C(p, H)^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u) f(v) \left(\int_{\mathbb{R}} (u - y)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} \times (v - y)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} dy \right)^p dv du \\ &= H(2H - 1) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u) f(v) |u - v|^{2H-2} dv du. \end{aligned}$$

命题 3.2. J 算子与 \mathcal{H} -范数满足:

$$\mathbb{E}[J(f)^2] = \|f\|_{\mathcal{H}}^2.$$

于是当 $f \in \mathcal{H}$ 时, Wiener 积分是良定义的, 并且存在一个 $\mathcal{E} \rightarrow L^2(\Omega)$ 的同构:

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(u) dZ_u^{(p,H)}$$

命题 3.3. *Wiener 积分与 \mathcal{H} -范数满足:*

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{H}}^2 &:= H(2H-1) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dudv f(u)g(v)|u-v|^{2H-2} \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} f(u)dZ_u^{(p,H)} \int_{\mathbb{R}} g(u)dZ_u^{(p,H)}\end{aligned}$$

接下来只需要将(3.2)中的随机噪声 B_t^H 替换为 $Z_t^{(p,H)}$ 就得到了(3.6)一般的形式:

$$\begin{aligned}x_t &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(x_s) ds \\ &\quad + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} dZ_s^{(p,H)}, \quad t \in [0, T], \quad \alpha \in (0, 1)\end{aligned}\tag{3.4}$$

初值 $x_0 \in \mathbb{R}$, 随机噪声 $Z_s^{(p,H)}$ 是一个自相似的过程, Hurst 系数 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, $dZ_s^{(p,H)}$ 是 Wiener 积分(3.3)。

3.1 系统记忆性

在(2.1)、(2.2)中提到了系统的对不同时刻速度的记忆性, 在探究阻尼项的记忆性之前, 先定义分数阶导数。

定义 3.4. 连续函数 $x(t)$ 的 Riemann-Liouville 分数阶积分为

$$I^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} x(u) du, \quad \alpha > 0.$$

定义 3.5. 连续函数 $x(t)$ 的 Caputo 分数阶导数为

$$D_c^\alpha x(t) = I^{n-\alpha} [x(t)^{(n)}], \quad n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}.$$

由定义(3.4)和定义(3.5)可得粒子位移的分数阶导数与阻尼项的关系:

$$D_c^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{-\alpha} \dot{x}(u) du = \int_0^t \gamma(t-u) \dot{x}(u) du\tag{3.5}$$

将(3.5)代入(2.1), 得到过阻尼情形下的分数阶广义 Langevin 方程:

$$\gamma_0 \cdot D_c^\alpha x(t) = -[\omega^2 + N(t)]x(t) + A \sin(\nu t) + F(t)\tag{3.6}$$

由 Caputo 分数阶导数的定义(3.5)可知, 粒子位移 $x(t)$ 的分数阶导数相当于对速度 $\dot{x}(t)$ 做加权积分, 距离当前时刻越近, $\dot{x}(t)$ 的权值越大, 距离当前时刻越远则权重越小。权重

衰减率与分数阶导数的阶次 α 有关。特别地, 阶数 $\alpha \rightarrow 1$ 时, 阻尼核函数 $\gamma(t)$ 退化为单位冲激函数 $\delta(t)$, 失去记忆性, 分数阶转化为整数阶导数, 在初值为 0 时, 求导的结果等于 $\dot{x}(t)$ 。当阶数 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 核函数退化为常数 1, 对各个时刻记忆性完全相同^[28]。

3.2 方程解的性质

3.2.1 解的存在唯一性

Hermite 噪声驱动的过阻尼广义 Langevin 方程解的存在唯一性保证了我们可以对 Langevin 方程进行有效的数值模拟和理论分析。其次, 解的存在唯一性也意味着系统的行为是确定的, 即在给定的初始条件和参数下, 系统的行为将遵循一定的规律, 不会出现多个可能的结果, 保证了系统的稳定性。

下面将利用(3.4)来证明(3.6)解的存在唯一性。思路如下: 先证明(3.4)解的存在性, 由其与(3.6)的等价性, 自然得到后者解的存在性; 再利用(3.4)构造一个压缩映射, 由 Banach 不动点定理得到(3.6)存在唯一解。于是有如下两个定理。

定理 3.6. 当 $\alpha \in (1 - H, 1)$ 时, 方程(3.4)的解 $(x_t, t \in [0, T])$ 存在且唯一, 而且满足任意 q 阶矩有限, 即:

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E}|x_t|^q \leq C \quad (3.7)$$

其中 $q \geq 1$, $C = C(q, T, \alpha)$ 。

证明. 对 $t \in [0, T]$, 记

$$G_t = \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} dZ_s^{(q,H)}.$$

注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}G_t^2 &= H(2H-1) \int_0^t \int_0^t du dv (t-u)^{\alpha-1} (t-v)^{\alpha-1} |u-v|^{2H-2} \\ &= H(2H-1) \int_0^t \int_0^t du dv u^{\alpha-1} v^{\alpha-1} |u-v|^{2H-2} \\ &= 2H(2H-1) \int_0^t du u^{\alpha-1} \int_0^v dv v^{\alpha-1} |u-v|^{2H-2} \\ (\text{令 } \frac{v}{u} = z) &= 2H(2H-1) \int_0^t du u^{2\alpha+2H-3} \int_0^1 dz z^{\alpha-1} |1-z|^{2H-2} \\ &= 2H(2H-1) \beta(\alpha, 2H-1) \frac{1}{2\alpha+2H-2} t^{2\alpha+2H-2}. \end{aligned}$$

定义 Picard 迭代:

$$x_t^{(n+1)} = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(x_s^{(n)}) ds + G_t, \quad n \geq 1, \quad t \in [0, T], \quad \alpha \in (0, 1)$$

其中 $x_t^{(0)} = x_0$ 。我们先证明对任意 $t \in [0, T]$, $q \geq 1$, 序列 $(x_t^{(n+1)}, n \geq 1)$ 在 $L^q(\Omega)$ 中收敛, 且

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| x_t^{(1)} - x_t^{(0)} \right|^q &= \mathbb{E} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(x_0) \mathrm{d}s + G_t \right|^q \\ &\leq C \left[|b(x_0)|^q \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathrm{d}s \right|^q + \mathbb{E} |G_t|^q \right] \\ &\leq C \left(1 + (\mathbb{E} G_t^2)^{\frac{q}{2}} \right) \leq c(q, T, \alpha), \end{aligned}$$

其中常数 $C > 0$ 仅与 $\alpha, q, T, b(x_0)$ 有关。于是, 对于 $n \geq 1$:

$$x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (b(x_s^{(n)}) - b(x_s^{(n-1)})) \mathrm{d}s$$

利用 Lipschitz 函数 $b(x)$ 的性质,

$$\begin{aligned} \|x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}\|_{L^q(\Omega)} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|b(x_s^{(n)}) - b(x_s^{(n-1)})\|_{L^q(\Omega)} \mathrm{d}s \\ &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}\|_{L^q(\Omega)} \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中 K 是函数 b 的 Lipschitz 常数。于是函数序列 $f_{n+1}(t) := \|x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}\|_{L^q(\Omega)}$ 满足对 $n \geq 1$ 和 $t \in [0, T]$,

$$f_{n+1}(t) \leq C \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f_n(s) \mathrm{d}s.$$

命题 3.7. (Gronwall 引理) 令 $g: [0, T] \rightarrow R_+$ 是一个非负函数, 满足

$$\int_0^T g(s) \mathrm{d}s < +\infty.$$

存在非负实数序列 $(a_n, n \in N)$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ 。令 $(f_n, n \in N)$ 是 $[0, T]$ 上的非负函数序列, 存在 h_1, h_2 和 $0 \leq t \leq T$ 使得:

$$f_n(t) \leq h_1 + \int_0^t (h_2 + f_{n-1}(s)) g(t-s) \mathrm{d}s.$$

若 $\sup_{0 \leq s \leq T} f_0(s) = M$, 则任意 $n \geq 1$,

$$f_n(t) \leq h_1 + (h_1 + h_2) \sum_{i=1}^{n-1} a_i + (h_2 + M) a_n.$$

特别地, $\sup_{n \geq 0} \sup_{0 \leq t \leq T} f_n(t) < \infty$, 而且, 当 $h_1 = h_2 = 0$ 时, $\sum_{n \geq 0} f_n(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致收敛。

由上述引理^[29],

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{t \in [0, T]} f_n(t) < \infty,$$

且

$$x_t^{(n)} = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (x_t^{(k+1)} - x_t^{(k)})$$

在 $L^q(\Omega)$ 关于 $t \in [0, T]$ 一致收敛。故序列的极限 $(x_t, t \in [0, T])$ 是方程(3.4)的解, 且满足(3.7)。□

(3.4)解的存在性得证, (3.6)解的存在性自然成立。证明(3.6)解的唯一性之前, 先定义如下一个算子 \mathcal{L} 以及其相关的范数 $|\cdot|_\lambda$:

$$\mathcal{L}x(t) = x_{\mathcal{L}}^0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(x_s) ds + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} dZ_s^{(p,H)},$$

$$|x|_\lambda = \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\frac{E[|x(t)|^2]}{E_{2\alpha-1}(\lambda t^{2\alpha-1})}},$$

其中,

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}$$

是 Mittag-Leffler 函数。

定理 3.8. 对任意 $T > 0$, 当 $\lambda > \frac{4K^2}{\Gamma^2(\alpha)} \Gamma(2\alpha - 1)$ 时, 有下式成立:

$$|\mathcal{L}x - \mathcal{L}\hat{x}|_\lambda \leq \theta |x - \hat{x}|$$

其中,

$$\theta = \sqrt{\frac{4L^2}{\Gamma^2(\alpha)} \frac{\Gamma(2\alpha - 1)}{\lambda}}.$$

证明. 设 $\Omega([0, T])$ 是所有 $0 < t < T$ 上的可测过程 $x(t)$ 的空间, 在范数 $|x| = \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}[|x(t)|]$ 下是 Banach 空间。不难发现, 范数 $|\cdot|$ 与范数 $|\cdot|_\lambda$ 等价。

设 $x(t)$ 、 $\hat{x}(t)$ 是 $\Omega([0, T])$ 中两个不同的函数, 则由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\mathcal{L}x(t) - \mathcal{L}\hat{x}(t)|^2] &\leq \frac{3}{\Gamma^2(\alpha)} \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (b(x(s)) - b(\hat{x}(s))) ds \right|^2 \right] \\ &\leq \frac{3K^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{2(\alpha-1)} \mathbb{E}[|(b(x(s)) - b(\hat{x}(s))) ds|^2] \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[|\mathcal{L}x(t) - \mathcal{L}\hat{x}(t)|^2]}{E_{2\alpha-1}(\lambda t^{2\alpha-1})} &\leq \frac{3K^2}{\Gamma^2(\alpha)} \frac{|x(s) - \hat{x}(s)|_\lambda^2 \int_0^t (t-s)^{2(\alpha-1)} E_{2\alpha-1}(\lambda s^{2\alpha-1}) ds}{E_{2\alpha-1}(\lambda t^{2\alpha-1})} \\ &\leq \frac{3K^2}{\Gamma^2(\alpha)} \frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\lambda} |x(s) - \hat{x}(s)|_\lambda^2, \end{aligned}$$

即

$$|\mathcal{L}x - \mathcal{L}\hat{x}|_\lambda \leq \theta |x - \hat{x}|,$$

□

算子 \mathcal{L} 是 $(\Omega([0, T]), |\cdot|_\lambda)$ 上的压缩映射, 由于范数 $|\cdot|_\lambda$ 与范数 $|\cdot|$ 等价, 于是 $(\Omega([0, T]), |\cdot|_\lambda)$ 仍然是 Banach 空间, 利用不动点定理, 方程(3.6)存在唯一解。

3.2.2 方程数值解

本节将运用 Euler-Maruyama 方法推导出(3.4)的数值解, 并证明该方法在全局 Lipschitz 条件下具有强收敛性^[25, 26]。

在区间 $[0, t]$ 上, 定义均匀网格的步长 $h = T/N$, 在网格节点 $t_n = nh$ 处对(3.4)等号右边的积分式进行离散化。

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} b(x(s)) ds &\approx \sum_{j=0}^{n-1} b(x(t_j)) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} ds \\ &\approx \frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} [(t_n - t_j)^\alpha - (t_n - t_{j+1})^\alpha] b(x(t_j)). \end{aligned}$$

$$\int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} dZ_s^{(p,H)} \approx \sum_{j=0}^{n-1} (t_n - t_j)^{\alpha-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} dZ_s^{(p,H)} \approx \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_j)^{\alpha-1} \Delta Z_j^{(p,H)},$$

其中, $\Delta Z_j^{(p,H)} = Z_{t_{j+1}}^{(p,H)} - Z_{t_j}^{(p,H)} \sim N(0, h)$ 。

于是, 当 $1 \leq n \leq N$ 时, 有如下 EM 格式,

$$\begin{aligned} y_n &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{n-1} [(t_n - t_j)^\alpha - (t_n - t_{j+1})^\alpha] b(x_j(t_j)) \\ &\quad + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{n-1} (t_n - t_j)^{\alpha-1} \Delta Z_j^{(p,H)} \end{aligned}$$

其中 y_n 是 $x(t_n)$ 的数值解。下面证明 EM 方法得到的数值解的有界性以及连续形式的收敛性。

定理 3.9. 对于 $1 \leq n \leq N$, EM 方法给出的数值解 y_n 的二阶矩有界。

证明. 数值解的二阶矩满足

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y_n^2] &\leq 4\mathbb{E}[x_0^2] + \frac{4}{\Gamma^2(\alpha+1)} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} [(t_n - t_j)^\alpha - (t_n - t_{j+1})^\alpha] b(y_j) \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{4\sigma^2}{\Gamma^2(\alpha)} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} (t_n - t_j)^{\alpha-1} \Delta Z_j^{(p,H)} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

利用 Cauchy 不等式、 $b(x(t))$ 的线性增长性、 $\Delta Z_j^{(p,H)}$ 的独立性, 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} [(t_n - t_j)^\alpha - (t_n - t_{j+1})^\alpha] b(y_j) \right)^2 \right] &= h^{2\alpha} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} b(y_j) \right)^2 \right] \\ &\leq 2L^2 h^{2\alpha} + 2L^2 h^{2\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[y_j^2], \\ \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} (t_n - t_j)^{\beta-1} \Delta Z_j^{(p,H)} \right)^2 \right] &\leq h^{2\beta-2} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} \Delta Z_j^{(p,H)} \right)^2 \right] \leq h^{2\beta-1}. \end{aligned}$$

于是

$$\mathbb{E}[y_n^2] \leq 4\mathbb{E}[x_0^2] + \frac{8L^2 h^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} + \frac{8L^2 h^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[y_j^2] + \frac{4\sigma^2}{\Gamma^2(\alpha)} h^{2\beta-1} = M_1.$$

□

为了分析 EM 方法的强收敛性, 定义随机过程 $(y(t), 0 \leq t \leq T)$ 。令步长 $\hat{s} = \hat{s}(s)$ 在区间 $[t_n, t_{n+1})$ 上满足 $\hat{s} = t_n$, 则

$$y(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(y(\hat{s})) ds + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} dZ_s^{(p,H)} \quad (3.8)$$

定理 3.10. 设 y_n 是 EM 方法的解, 那么 $y(t_n) = y_n, 0 \leq n \leq N$ 。

证明. 显然, $y(0) = x_0 = y_0$, 假设 $0 \leq m \leq n-1 \leq N-1$ 时, $y(t_n) = y_m$, 则

$$\begin{aligned}
 y(t_n) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} b(x(\hat{s})) ds + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} dZ_s^{(p,H)} \\
 &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} b(x(\hat{s})) ds \\
 &\quad + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} dZ_s^{(p,H)} \\
 &= x_0 + \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{n-1} [(t_n - t_m)^\alpha - (t_n - t_{m+1})^\alpha] b(y_m) \\
 &\quad + \frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} dZ_m^{(p,H)} \\
 &= y_n
 \end{aligned}$$

由数学归纳法，定理得证。 \square

本节的最后将推导出 EM 方法数值解的与真实解之间的误差估计的表达式。

定理 3.11. (EM 方法连续形式的误差估计) 当 $0 \leq n \leq N-1$ 时，对任意 $t \in [t_n, t_{n+1})$ ，(3.8)所定义的 y 满足：

$$\begin{aligned}
 \max_{0 \leq n \leq N-1} \mathbb{E}[(y(t) - y(t_n))^2] &\leq \\
 &\left(\frac{6Ch^{2\alpha-1}L^2T}{\Gamma^2(\alpha)} + \frac{6T^\alpha L^2 h^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \right) (1 + M_1) + \frac{6\sigma^2 h^{2\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + C \right)
 \end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \max_{0 \leq n \leq N-1} \mathbb{E}[(y(t) - y(t_n))^2] &\leq \\
 &\frac{3}{\Gamma^2(\alpha)} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(s, y(\hat{s})) ds - \int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1} b(s, y(\hat{s})) ds \right)^2 \right] + \\
 &\frac{3\sigma^2}{\Gamma^2(\alpha)} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} dZ_s^{(p,H)} - \int_0^{t_n} (t_n-s)^{\alpha-1} dZ_s^{(p,H)} \right)^2 \right] \leq \\
 &\frac{6}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\int_0^{t_n} [(t-s)^{\alpha-1} - (t_n-s)^{\alpha-1}]^2 ds \int_0^{t_n} b^2(s, y(\hat{s})) ds + \right. \\
 &\left. (t-t_n)^\alpha \mathbb{E} \int_{t_n}^t (t-s)^{\alpha-1} b^2(s, y(\hat{s})) ds \right) + \\
 &\frac{6\sigma^2}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\int_0^{t_n} [(t-s)^{\alpha-1} - (t_n-s)^{\alpha-1}]^2 ds + \int_{t_n}^t (t-s)^{2\alpha-2} ds \right).
 \end{aligned}$$

由^[30]的引理 2 可得:

$$\int_0^{t_n} [(t-s)^{\alpha-1} - (t_n-s)^{\alpha-1}]^2 ds \leq Ch^{2\alpha-1}$$

其中 C 是一个非负的常数, 结合 b 的线性增长性, 对第一项放缩:

$$\begin{aligned} & \frac{6}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\int_0^{t_n} [(t-s)^{\alpha-1} - (t_n-s)^{\alpha-1}]^2 ds \int_0^{t_n} b^2(y(\hat{s})) ds \right. \\ & \quad \left. + (t-t_n)^\alpha \mathbb{E} \int_{t_n}^t (t-s)^{\alpha-1} b^2(y(\hat{s})) ds \right) \leq \\ & \frac{6Ch^{2\alpha-1}L^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^{t_n} (1 + \mathbb{E}[y_n^2]) ds + \frac{6T^\alpha hL^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_{t_n}^t (t-s)^{\alpha-1} (1 + \mathbb{E}[y_n^2]) ds \leq \\ & \left(\frac{6Ch^{2\alpha-1}L^2T}{\Gamma^2(\alpha)} + \frac{6T^\alpha L^2 h^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \right) (1 + M_1). \end{aligned}$$

对第二项放缩:

$$\begin{aligned} & \frac{6\sigma^2}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\int_0^{t_n} [(t-s)^{\alpha-1} - (t_n-s)^{\alpha-1}]^2 ds + \int_{t_n}^t (t-s)^{2\alpha-2} ds \right) \leq \\ & \frac{6\sigma^2 h^{2\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\frac{1}{2\alpha-1} + C \right). \end{aligned}$$

于是得到了 EM 方法解连续形式的误差估计。 \square

不难发现, 当步长 h 趋近于 0 时, 误差也将无限趋近于 0, 而且数值解的误差阶数为 $2\alpha - 1$ 。

3.3 系统稳态响应振幅与方差的随机共振分析

3.3.1 系统响应稳态振幅

我们的目的是通过建模非高斯随机噪声 (即 Hermite 噪声) 来推广模型。与分数阶 Brown 运动一样, Hermite 过程也是具有稳态增量和长内存的自相似随机过程。它们还具有与分数阶 Brown 运动相同的协方差结构。阶数 $p \geq 1$ 的 Hermite 过程存在于 p 阶 Wiener 纳混沌中。事实上, 分数阶 Brown 运动是 1 阶的 Hermite 过程, 它是唯一的高斯 Hermite 过程, 而 $p \geq 2$ 的 Hermite 过程是非高斯过程。在过去的研究中, 有大量对随机力为分数阶 Brown 运动的系统模型的随机共振的情况, 本节通过把 B_t^H 替换为 $Z_t^{(p,H)}$, 把系统中的分数阶高斯噪声被替换成了非高斯噪声, 在这种情况下推导系统随机共振响应的稳态矩。

分数阶高斯噪声 (FGN) 与分数阶布朗运动 (FBM) 关系紧密, 本节将分数阶布朗运动记为 B_t^H , Hurst 指数 $H \in (0, 1)$, FBM 是 Hermite 过程的特殊情形, 具有相同的均值函数、自相关函数, 且具备自相似性、增量平稳等性质。当 $H = \frac{1}{2}$ 时, FBM 退化为正态布朗运动。

FGN 定义为 $\frac{dB_t^H}{dt}$ 。记噪声 $F(t)$ 为 W_t^H ，并通过令

$$W_t^H = \sqrt{2k_B T} \frac{dB_t^H}{dt}$$

使得噪声是高斯且平稳的。

类似地，Hermite 过程 $Z_t^{(p,H)}$ 对应的 Hermite 噪声 $H_t^{(p,H)}$ 定义为

$$H_t^{(p,H)} = \sqrt{2k_B T} \frac{dZ_t^{(p,H)}}{dt}$$

定理 3.12 (涨落耗散定理). 阻尼核函数 $\gamma(t)$ 和系统内噪声 $F(t)$ 满足:

$$\mathbb{E}[F(t)F(s)] = k_B T \cdot \gamma(t-s)$$

其中 k_B 为 Boltzmann 常数, T 是介质温度。

利用涨落耗散定理的前提是需要获得 Hermite 噪声的自相关函数, 为此, 不妨先探讨 Hermite 过程的自相关函数。

命题 3.13. Hermite 过程的自相关函数

$$\mathbb{E}Z_t^{(p,H)} Z_s^{(p,H)} = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad t, s > 0, 0 < H < 1$$

证明. 由 Fubini 定理和多重 Wiener 积分可得:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z_t^{(p,H)} Z_s^{(p,H)} &= p! \cdot C(p, H)^2 \cdot \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_0^t \int_0^s \prod_{j=1}^p (u - y_j)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} \right. \\ &\quad \left. \times (v - y_j)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} dv du \right) dy_1 \cdots dy_p \\ &= p! \cdot C(p, H)^2 \cdot \int_0^t \int_0^s \int_{\mathbb{R}^p} \left(\prod_{j=1}^p (u - y_j)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} \right. \\ &\quad \left. \times (v - y_j)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} dy_1 \cdots dy_p \right) dv du \\ &= p! \cdot C(p, H)^2 \cdot \int_0^t \int_0^s \left[\int_{\mathbb{R}} (u - y)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} (v - y)_+^{-(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{p})} dy \right]^p dv du. \end{aligned} \quad (3.9)$$

定义 beta 函数为:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 z^{p-1} (1-z)^{q-1} dz, p, q > 0$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} (u - y)_+^{a-1} (v - y)_+^{a-1} dy = \beta(a, 1-2a) |u-v|^{2a-1} \quad (3.10)$$

将(3.10)代入(3.9)可得:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_t^{(p,H)}Z_s^{(p,H)} &= p! \cdot C(p, H)^2 \cdot \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{1-H}{p}, \frac{2H-2}{p}\right)^p \cdot \int_0^t \int_0^s (|u-v|^{\frac{2H-2}{p}})^p \mathrm{d}v \mathrm{d}u \\ &= p! \cdot C(p, H)^2 \cdot \frac{\beta(\frac{1}{2} - \frac{1-H}{p}, \frac{2H-2}{p})^p}{H(2H-1)} \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).\end{aligned}$$

为了保证 $\mathbb{E}(Z_H^k(t))^2 = 1$, 令

$$C(p, H)^2 = \left(\frac{\beta(\frac{1}{2} - \frac{1-H}{p}, \frac{2H-2}{p})^p}{p!H(2H-1)} \right)^{-1}$$

此时

$$\mathbb{E}Z_t^{(p,H)}Z_s^{(p,H)} = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad s, t \geq 0.$$

□

于是, 过程 $\frac{\mathrm{d}Z_t^{(p,H)}}{\mathrm{d}t}$ 的自相关函数为

$$\mathbb{E} \left[\frac{\mathrm{d}Z_t^{(p,H)}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}Z_s^{(p,H)}}{\mathrm{d}t} \right] = H(2H-1)|t-s|^{2H-2}$$

故

$$\mathbb{E} \left[H_t^{(p,H)} H_s^{(p,H)} \right] = 2k_B T H(2H-1)|t-s|^{2H-2}, \quad t, s > 0$$

由涨落耗散定理(3.12)得到阻尼核函数为:

$$\gamma(t) = \frac{\mathbb{E} \left[H_0^{(p,H)} H_t^{(p,H)} \right]}{k_B T} = 2H(2H-1) \cdot t^{2H-2}, \quad t > 0 \quad (3.11)$$

我们通过限制 Hurst 指数的取值为 $(\frac{1}{2}, 1)$, 保证阻尼核函数 $\gamma(t) > 0$ 。将阻尼核函数(3.11)带入到强噪声下的线性过阻尼广义 Langevin 方程(2.1)中, 得到:

$$\gamma \frac{\mathrm{d}^{2-2H} x(t)}{\mathrm{d}t^{2-2H}} + [\omega^2 + N(t)] x(t) = A \sin(\nu t) + H_t^{(p,H)}, \quad (3.12)$$

其中,

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_0 \cdot \Gamma(2H+1), \\ \frac{\mathrm{d}^{2-2H} x(t)}{\mathrm{d}t^{2-2H}} &= \frac{1}{\Gamma(2H-1)} \int_0^t (t-u)^{-(2-2H)} \dot{x}(u) \mathrm{d}u\end{aligned}$$

此时分数阶导数的阶数 $\alpha = 2 - 2H$, H 不同的系统可以刻画不同程度的记忆性。

下面将利用系统响应一阶矩的性质推导出其对应的系统稳态响应振幅的表达式。对

Langevin 方程(3.12)左右两边取期望得到：

$$\gamma \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} \mathbb{E}[x(t)] + \omega^2 \mathbb{E}[x(t)] + \mathbb{E}[N(t)x(t)] = A \sin(\nu t). \quad (3.13)$$

利用 Shapiro-Loginov 公式对 $\mathbb{E}[N(t)x(t)]$ 进行解耦，可知耦合项满足如下微分方程：

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[N(t)x(t)] = \mathbb{E}[N(t)\dot{x}(t)] - r \mathbb{E}[N(t)x(t)], \quad (3.14)$$

其中 r 是双态噪声的噪声相关率。

为了完全解耦，我们需要对新出现的耦合项 $\mathbb{E}[N(t)x(t)]$ 解耦，于是我们将原 Langevin 方程两边乘以 $N(t)$ 并取期望，得到：

$$\begin{aligned} & \gamma e^{-rt} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} (\mathbb{E}[N(t)x(t)] e^{rt}) \\ & + \omega^2 \mathbb{E}[N(t)x(t)] + \mathbb{E}[N^2(t)x(t)] = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

由双态噪声的自相关函数可得：

$$\mathbb{E}[N^2(t)x(t)] = a^2 \mathbb{E}[x(t)]. \quad (3.16)$$

联立(3.13),(3.14),(3.15),(3.16)可得到关于 $\mathbb{E}[x(t)]$ 、 $\mathbb{E}[N(t)x(t)]$ 、 $\mathbb{E}[N(t)\dot{x}(t)]$ 的方程，令 $\mathbb{E}[x(t)] = x_1$ ， $\mathbb{E}[N(t)x(t)] = x_2$ ， $\mathbb{E}[N(t)\dot{x}(t)] = x_3$ ，得到方程组：

$$\begin{cases} \gamma \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} x_1 + \omega^2 x_1 + x_2 = A \sin(\nu t) \\ \frac{d}{dt} x_2 = x_3 - r x_2 \\ \gamma e^{-rt} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} (x_2 e^{rt}) + \omega^2 x_2 + a^2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

对(3.17)做 Laplace 变换，得到：

$$\begin{cases} (\gamma s^{2-2H} + \omega^2) X_1(s) + X_2(s) = \frac{A\nu}{s^2 + \nu^2} + \gamma s^{1-2H} x_1(0) \\ (s + r) X_2(s) - X_3(s) = x_2(0) \\ a^2 X_1(s) + [\gamma(s + r)^{2-2H} + \omega^2] X_2(s) = r\gamma(s + r)^{1-2H} x_2(0) \end{cases} \quad (3.18)$$

其中， $x_1(0), x_2(0)$ 为初值条件，

$$X_i(s) = \int_0^{+\infty} x_i(t) e^{-st} dt, \quad i = 1, 2, 3.$$

解方程组(3.18)得到 $X_i(s), i = 1, 2, 3$ 的解析表达式

$$\begin{aligned} X_i(s) = & \hat{L}_{i1}(s) \cdot \frac{A\nu}{s^2 + \nu^2} + \left[\hat{L}_{i1}(s) \cdot \gamma s^{1-2H} x_1(0) \right. \\ & \left. + \hat{L}_{i2}(s) \cdot x_2(0) + \hat{L}_{i3}(s) \cdot \gamma(s+r)^{1-2H} x_2(0) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中 $\hat{L}_{ik}(s), i, k = 1, 2, 3$ 为 $L_{ik}(s)$ 的 Laplace 变换, 即 $\hat{L}_{ik}(s) = \int_0^\infty L_{ik}(t) e^{-st} dt$, 可以由 Laplace 变换后的方程组得到。特别地,

$$\begin{aligned} \hat{L}_{11}(s) &= \frac{1}{L(s)} [\gamma(s+r)^{2-2H} + \omega^2], \\ \hat{L}_{21}(s) &= \frac{1}{L(s)} (-a^2), \end{aligned}$$

其中, $L(s) = (\gamma \cdot s^{2-2H} + \omega^2) \cdot [\gamma \cdot (s+v)^{2-2H} + \omega^2] - a^2$.

对(3.19)做 Laplace 逆变换, 得到 $x_i(s), i = 1, 2, 3$ 的解析表达式

$$x_i(t) = A \int_0^t L_{i1}(t-u) \sin(\nu u) du + [G_{i1}(t)x_1(0) + G_{i2}(t)x_2(0)]$$

其中,

$$\bar{G}_{i1}(s) = \bar{L}_{i1}(s) \cdot \gamma s^{1-2H}, \bar{G}_{i2}(s) = \hat{L}_{i2}(s) + \hat{L}_{i3}(s) \cdot \gamma(s+v)^{1-2H}, \quad i = 1, 2, 3.$$

令系统参数满足:

$$a^2 < \omega^2 (\gamma v^{2-2H} + \omega^2). \quad (3.20)$$

此时 $L(s) = 0$ 没有正实根, 这样能保证系统响应的一阶稳态矩 $x_i(s)$ 稳定。在一阶稳态矩稳定时, 通过对时间 t 取极限, 刻画出系统响应随着时间逐渐消失的过程, 此时

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x(t)] &= A \int_0^t L_{11}(t-u) \sin(\nu u) du, \\ \mathbb{E}[Z(t)x(t)] &= A \int_0^t L_{21}(t-u) \sin(\nu u) du. \end{aligned} \quad (3.21)$$

结合系统响应一阶矩的稳定性条件, 系统一阶稳态矩对应的稳态响应振幅 A_1 可以表示为:

$$A_1 = A \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_3^2 + k_4^2}} \quad (3.22)$$

其中

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \gamma b^{2-2H} \cos \beta + \omega^2, \\
 k_2 &= \gamma b^{2-2H} \sin \beta, \\
 k_3 &= \gamma^2 (\nu b)^{2-2H} \cos(\beta + \theta) + \omega^2 \gamma \nu^{2-2H} \cos \theta + \omega^2 \gamma b^{2-2H} \cos \beta + \omega^4 - a^2, \\
 k_4 &= \gamma^2 (\nu b)^{2-2H} \sin(\beta + \theta) + \omega^2 \gamma \nu^{2-2H} \sin \theta + \omega^2 \gamma b^{2-2H} \sin \beta, \\
 b &= \sqrt{r^2 + \nu^2}, \\
 \beta &= (2 - 2H) \arctan\left(\frac{\nu}{r}\right), \\
 \theta &= \frac{\pi}{2}(2 - 2H).
 \end{aligned}$$

3.3.2 系统响应稳态方差

为了分析系统稳态响应方差的性质,先讨论二阶稳态矩的性质。对线性过阻尼 Langevin 方程(3.12)两边同时乘以 $x(t)$ 并取期望,得到

$$\begin{aligned}
 \gamma e^{-rt} \int_0^t \frac{(t-u)^{2H-2}}{\Gamma(2H-1)} \mathbb{E}[x(u)\dot{x}(u)] e^{ru} du + \omega^2 \mathbb{E}[x^2(t)] + \mathbb{E}[N(t)x^2(t)] \\
 = A_0 \sin(\nu t) \mathbb{E}[x(t)]
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

对耦合项建立如下方程:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[x^2(t)] = 2\mathbb{E}[x(t)\dot{x}(t)], \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[N(t)x^2(t)] = 2\mathbb{E}[N(t)x(t)\dot{x}(t)] - r\mathbb{E}[N(t)x^2(t)] \quad (3.25)$$

为了对新出现的耦合项解耦,对 Langevin 方程两边同时乘以 $N(t)x(t)$ 取期望,得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma e^{-rt}}{2} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} (\mathbb{E}[N(t)x^2(t)] e^{rt}) + \omega^2 \mathbb{E}[N(t)x^2(t)] + a^2 \mathbb{E}[x^2(t)] \\
 = A \sin(\nu t) \mathbb{E}[N(t)x(t)]
 \end{aligned} \quad (3.26)$$

与第一节一样,联立(3.23)、(3.24)、(3.25)、(3.26)得到一个微分-积分方程组,设 $y_1 = \mathbb{E}[x^2(t)]$, $y_2 = \mathbb{E}[x(t)\dot{x}(t)]$, $y_3 = \mathbb{E}[N(t)x^2(t)]$, $y_4 = \mathbb{E}[N(t)x(t)\dot{x}(t)]$, 可得到方程组

$$\begin{cases} \gamma e^{-rt} \int_0^t \frac{(t-u)^{2H-2}}{\Gamma(2H-1)} y_2(u) e^{ru} du + \omega^2 y_1 + y_3 = A \sin(\nu t) x_1 \\ \frac{d}{dt} y_1 = 2y_2 \\ \frac{d}{dt} y_3 = 2y_4 - r y_3 \\ \frac{\gamma e^{-rt}}{2} \frac{d^{2-2H}}{dt^{2-2H}} (y_3 e^{rt}) + \omega^2 y_3 + a^2 y_1 = A \sin(\nu t) x_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

利用 Laplace 变换可以得到:

$$\begin{cases} \omega^2 Y_1(s) + \gamma(s+r)^{1-2H} Y_2(s) + Y_3(s) = \int_0^{+\infty} A \sin(\nu t) x_1(t) e^{-st} dt \\ sY_1(s) - 2Y_2(s) = y_1(0) \\ (s+r)Y_3(s) - 2Y_4(s) = y_3(0) \\ a^2 Y_1(s) + \left[\frac{\gamma}{2}(s+r)^{2-2H} + \omega^2 \right] Y_3(s) \\ = \int_0^{+\infty} A \sin(\nu t) x_2(t) e^{-st} dt + \frac{\gamma}{2}(s+v)^{1-2H} y_3(0) \end{cases} \quad (3.28)$$

其中 $y_1(0)$ 和 $y_3(0)$ 是初值条件,

$$Y_i(s) = \int_0^{+\infty} y_i(t) e^{-st} dt, i = 1, 2, 3, 4.$$

通过解方程组(3.28), 得到 $Y_i(s), i = 1, 2, 3, 4$ 的表达式, 再做 Laplace 逆变换可以得到系统响应的二阶稳态矩 $y_i(t), i = 1, 2, 3, 4$ 的表达式。

通过令

$$a^2 < \omega^2 \left(\frac{\gamma \nu^{2-2H}}{2} + \omega^2 \right) \quad (3.29)$$

保证二阶稳态矩稳定。我们仍通过对时间 t 取极限, 刻画出系统响应随着时间逐渐消失的过程, 得到时间极限下的二阶稳态矩的解析表达式:

$$y_i(t) = S_i + N_i \sin(2\nu t + \rho_i) \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

其中 S_i, N_i 是二阶稳态矩中的时齐和非时齐部分, S_i, N_i, ρ_i 是由方程组(3.28)决定的常数。

在讨论稳态响应方差之前, 先分析时间极限 $t \rightarrow \infty$ 条件下的一阶稳态矩的表达式(3.21), 不难发现该表达式可以理解为是一个系统函数为 $\hat{L}_{11}(s), \hat{L}_{21}(s)$ 的时不变线性系统后接受输入为周期信号 $A \sin(\nu t)$ 后的输出, 从信号处理的观点分析, (3.21)可以表示为:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x(t)] &= A_1 \sin(\nu t + \phi), \\ \mathbb{E}[Z(t)x(t)] &= A_2 \sin(\nu t + \psi), \end{aligned} \quad (3.30)$$

其中,

$$A_2 = A \sqrt{\frac{a^4}{k_3^2 + k_4^2}} \quad (3.31)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{k_2 k_3 - k_1 k_4}{k_1 k_3 + k_2 k_4}\right) \quad (3.32)$$

$$\psi = \arctan\left(-\frac{k_4}{k_3}\right) \quad (3.33)$$

a^2 为噪声强度, $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ 由(3.3.1)给出。

稳态响应方差 σ^2 是由取时间极限下的一、二阶稳态响应矩 x_1 、 y_1 定义的, 即

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} (y_1 - x_1^2) dt \\ &= A_3 - \frac{A_1^2}{2}.\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}A_3 &= \frac{A}{2} \left[\frac{d \cdot A_1}{\omega^2 \cdot d - 2a^2} \cos \phi - \frac{2A_2}{\omega^2 \cdot d - 2a^2} \cos \psi \right]. \\ d &= \gamma \cdot r^{2-2H} + 2\omega^2\end{aligned}$$

A_1 、 A_2 由(3.22)、(3.31)给出, ϕ 、 ψ 由(3.32)、(3.33)给出。

4 随机共振性质仿真

4.1 系统稳态响应振幅的随机共振仿真

下面分别展示并分析系统稳态响应振幅与噪声强度、相关率、阻尼系数、周期信号频率、外噪声参数（Hurst 指数）的相关性。根据一、二阶稳态矩稳定性条件(3.20)、(3.29)，本节将在满足 $a^2 < \omega^4$ 这一情况下进行对响应振幅的仿真实验。

- 噪声强度 a^2 、Hurst 指数 H 与振幅 A_1 的相关性:

图 4.1 给出在不同噪声 $N(t)$ 的强度 a^2 下响应振幅 A_1 与 Hurst 指数 H 的关系，可以看出，每条曲线都出现了峰值，这意味着在相应的系统中都出现了广义随机共振，峰值越大，共振现象越强。比较不同曲线的峰的位置，不难发现，噪声强度越大，系统共振的振幅峰值越大。而且，噪声强度越大，峰出现的位置越偏右，即峰值出现时的对应的 Hurst 指数越大。

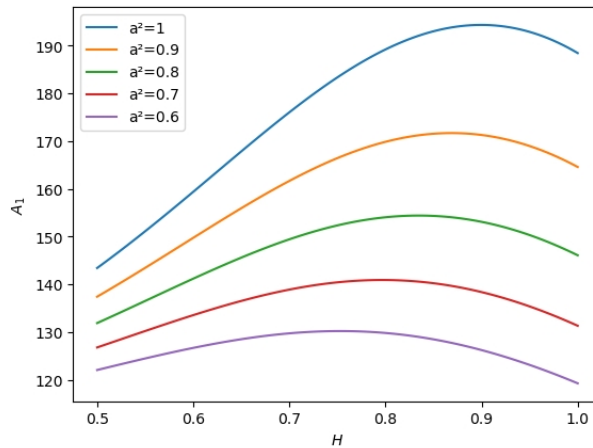


图 4.1: a^2 不同时 $A_1 - H$ 的图像 ($A = 100, \omega = 1, \nu = 0.5, r = 15, \gamma_0 = 0.15$)

- 噪声相关率 r 、Hurst 指数 H 与振幅 A_1 的相关性:

图 4.2 给出在不同噪声相关率 r 下响应振幅 A_1 与 Hurst 指数 H 的关系，每条曲线也都出现了峰值。比较不同曲线的峰的位置，发现噪声相关率越大，系统共振振幅的峰值越小，峰出现的位置越偏右。

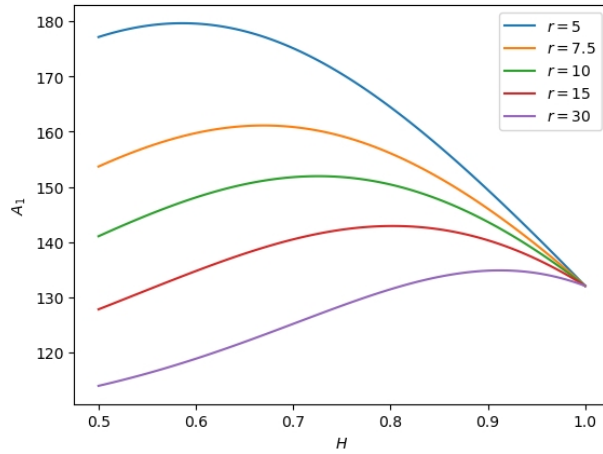


图 4.2: r 不同时 $A_1 - H$ 的图像 ($A = 100, \omega = 1, \nu = 0.5, r = 15, \gamma_0 = 0.2$)

- 阻尼系数 γ_0 、Hurst 指数 H 与振幅 A_1 的相关性:

图 4.3 给出在不同阻尼系数 γ_0 下响应振幅 A_1 与 Hurst 指数 H 的关系, 每条曲线都出现了广义随机共振, 阻尼系数 γ_0 越小, 峰值越大, 峰值出现的位置越偏右。

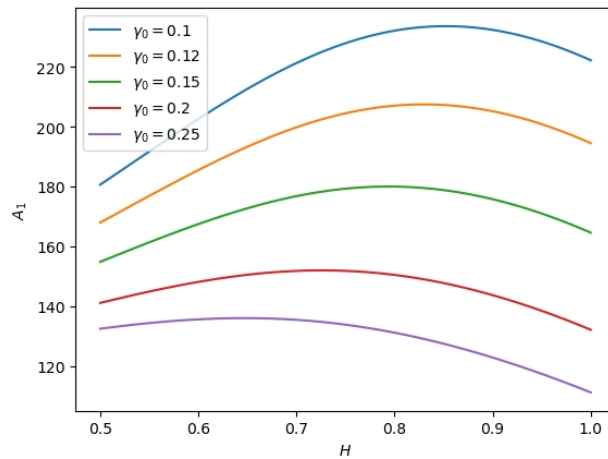


图 4.3: γ_0 不同时 $A_1 - H$ 的图像 ($A = 100, \omega = 1, \nu = 0.5, r = 10, a^2 = 0.9$)

- 外噪声频率 ν 、Hurst 指数 H 与振幅 A_1 的相关性:

图 4.4 给出在不同信号频率 ν 下响应振幅 A_1 与 Hurst 指数 H 的关系。以外部周期激励信号的频率为参数的 $A_1 - H$ 曲线都是非单调的, 而且有不同的变化规律, $\nu = 0.5, 0.8$ 时, 相关曲线是先单增后单减; $\nu = 1.1$ 时, 曲线呈现减-增-减的趋势; $\nu = 1.5, 1.8$ 时, 曲线先递减后递增。每条曲线都有峰值或者谷值, 有的是只具有一个峰值, 有的是只具有一个谷值, 有的是具有一峰一谷, 在每种频率下随机系统都出现了广义随机共振现象。

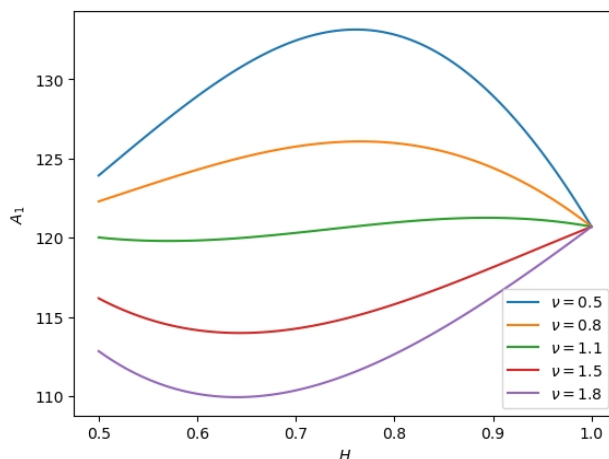


图 4.4: ν 不同时 $A_1 - H$ 的图像 ($A = 100, \omega = 1, r = 15, a^2 = 0.8, \gamma_0 = 0.2$)

- 噪声强度 a^2 、噪声相关率 r 与振幅 A_1 的相关性:

图 4.7 给出了 A_1 与 r 、 a^2 的 3D 关系图, 图 4.5, 图 4.6 分别给出在不同噪声相关率 r 下响应振幅 A_1 与噪声强度 a^2 的关系和在不同噪声强度下响应振幅与噪声相关率的关系。在 Hurst 指数固定时, 系统共振的响应振幅 A_1 与噪声强度 a^2 、相关率 r 的相关曲线都出现了峰值, 而且都符合相同的规律, 即噪声强度或相关率越大, 峰值越大, 峰值出现的位置右移。

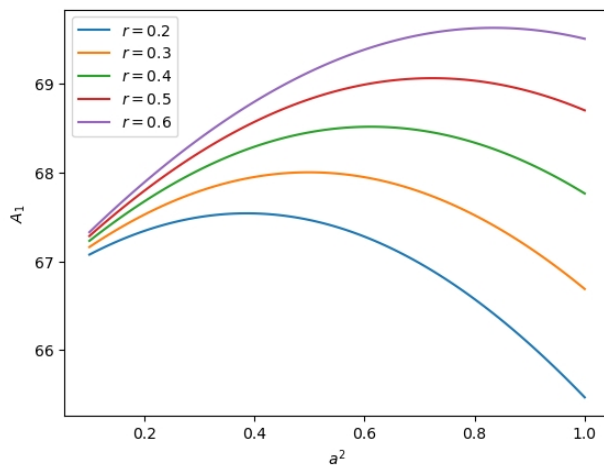


图 4.5: r 不同时 $A_1 - a^2$ 的图像 ($A = 100, \omega = 1, \nu = 1, \gamma_0 = 1, H = 0.53$)

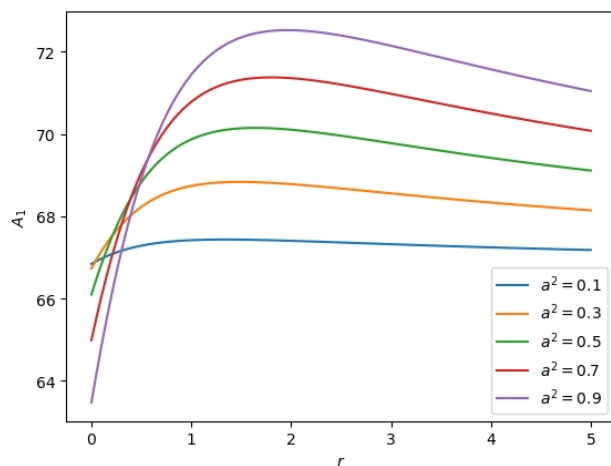


图 4.6: a^2 不同时 $A_1 - r$ 的图像 ($A = 100, \omega = 1, \nu = 1, \gamma_0 = 1, H = 0.53$)

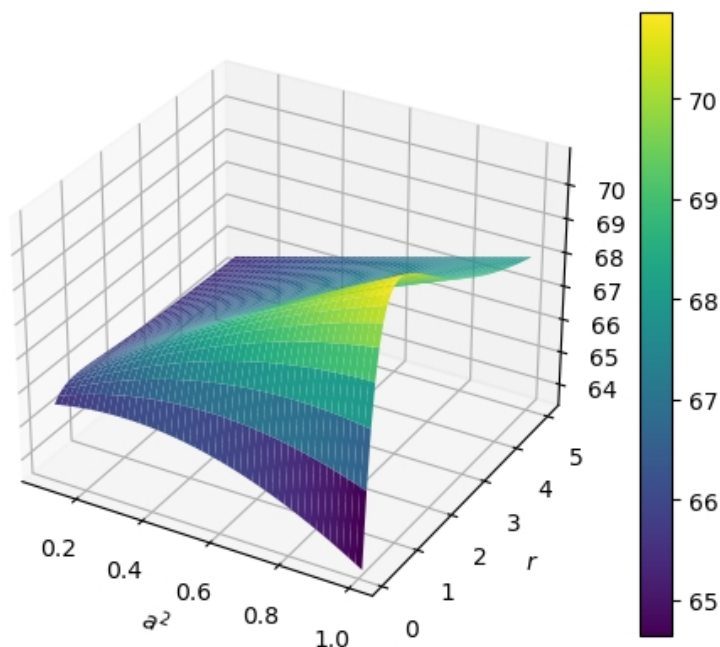


图 4.7: $A_1 - r - a^2$ 的 3D 图像 ($A = 100, \omega = 1, \nu = 1, \gamma_0 = 1, H = 0.53$)

4.2 系统稳态响应方差的随机共振仿真

下面分别展示并分析系统稳态响应方差与噪声强度、相关率、阻尼系数、周期信号频率、外噪声参数 (Hurst 指数) 的相关性。

- 噪声 $N(t)$ 强度 a^2 、相关率 r 与 Hurst 指数 H 、方差 σ^2 的相关性:

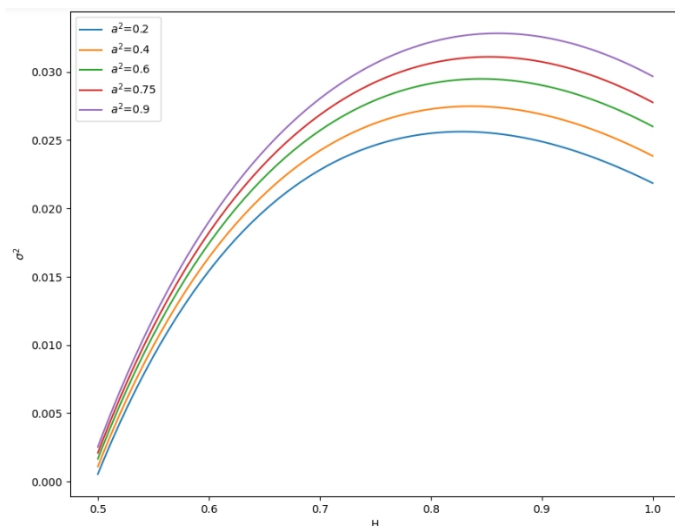


图 4.8: a^2 不同时 $\sigma^2 - H$ 的图像 ($A = 0.5, \omega = 1, \nu = 0.5, r = 10, \gamma_0 = 2$)

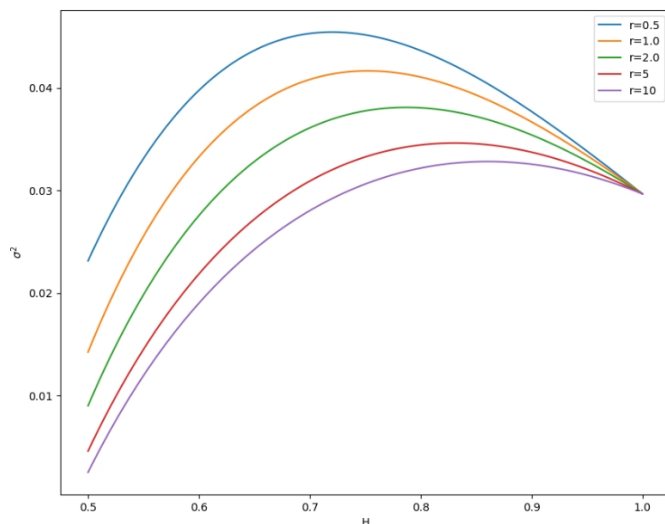


图 4.9: r 不同时 $\sigma^2 - H$ 的图像 ($A = 0.5, \omega = 1, \nu = 0.5, a^2 = 0.9, \gamma_0 = 2$)

图 4.8、图 4.9 分别给出当噪声 $N(t)$ 强度 a^2 和相关率 r 不同时 $\sigma^2 - H$ 的变化曲线。观察响应曲线不难发现，每条曲线都出现共振峰，即对应系统出现了随机共振现象，并且随着强度 a^2 增大、相关率 r 减小，共振峰越来越明显。而且，随着噪声强度 a^2 增大，共振峰出现的位置右移，随着相关率 r 减小，共振峰的位置左移。

- 阻尼系数 γ_0 与 Hurst 指数 H 、方差 σ^2 的相关性：

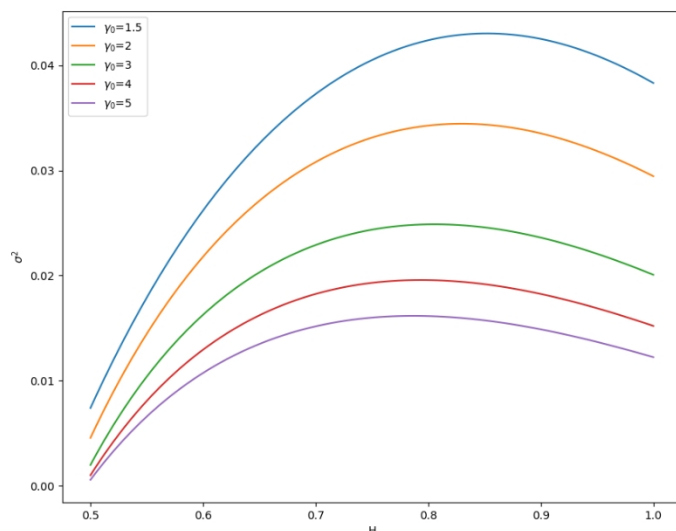


图 4.10: γ_0 不同时 $\sigma^2 - H$ 的图像 ($A = 0.5, \omega = 1, \nu = 0.5, a^2 = 0.9, r = 5$)

图 4.10给出了当阻尼系数 γ_0 不同时 $\sigma^2 - H$ 的变化曲线。图中五条曲线都出现共振峰，并且随着 γ_0 减少，共振峰的高度增加、宽度减小、位置右移。

- 周期激励信号频率 ν 与 Hurst 指数 H 、方差 σ^2 的相关性：

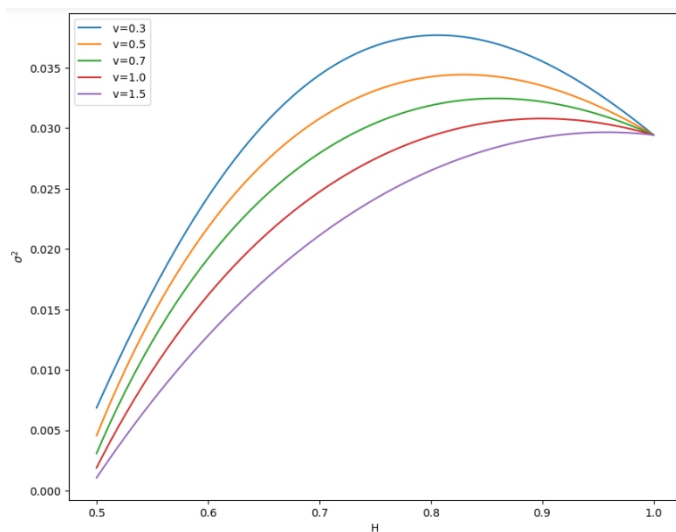


图 4.11: γ_0 不同时 $\sigma^2 - H$ 的图像 ($A = 0.5, \omega = 1, \nu = 0.5, a^2 = 0.9, r = 5$)

图 4.11给出了周期激励信号频率 ν 不同时 $\sigma^2 - H$ 的变化曲线。图中五条曲线都出现共振峰，并且随着 ν 减少，共振峰的高度增加、宽度减小、位置左移。

- 噪声强度 a^2 、相关率 r 与方差 σ^2 的相关性：

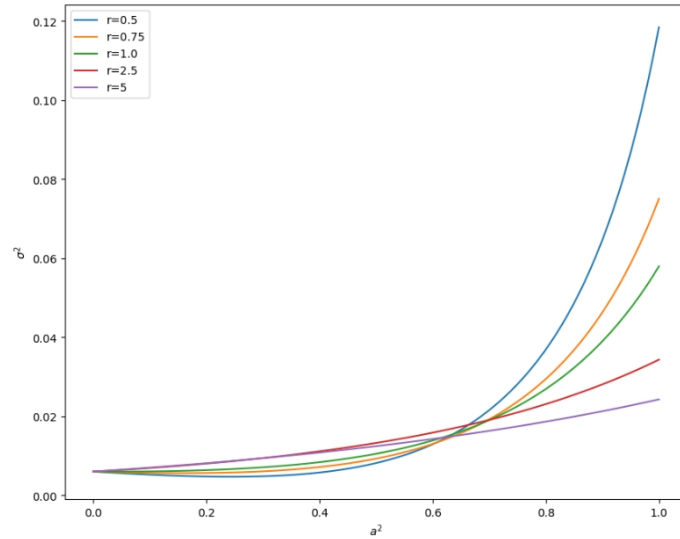
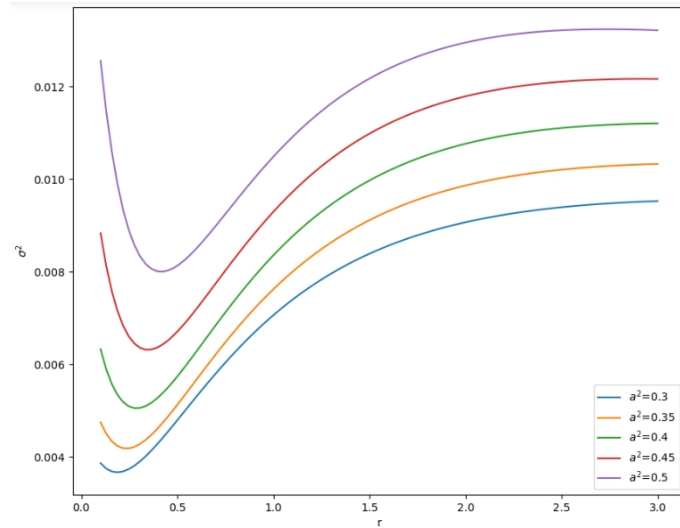

 图 4.12: r 不同时 $\sigma^2 - a^2$ 的图像 ($A = 0.5, \omega = 1, \nu = 0.5, H = 0.54, \gamma_0 = 1$)

 图 4.13: a^2 不同时 $\sigma^2 - r$ 的图像 ($A = 0.5, \omega = 1, \nu = 0.5, H = 0.54, \gamma_0 = 1$)

图 4.12和图 4.13绘制了 σ^2 随着噪声 $N(t)$ 强度 a^2 、相关率 r 的变化曲线。从图 4.12中的响应曲线可以看出，随着噪声强度 a^2 增大，响应稳态方差 σ^2 单调增加，并未产生随机共振现象；从图 4.13的响应曲线可以看出，对于给定噪声强度 a^2 的曲线，随着噪声相关率 r 的增大，曲线出现了单谷相，即出现了一个极小值，并且随着噪声强度的减小，谷底值减小，谷的形状特征也逐渐减弱，趋于消失。

4.3 系统稳态响应振幅与外噪声强度的进一步分析与仿真

基于上文的仿真模拟情况，发现稳态响应振幅 A_1 的随机共振现象十分依赖参数的选取。值得一提的是，前两节所仿真的是广义随机随机共振，即系统响应振幅随噪声相关率、

Hurst 指数等参数产生非单调变化的现象, 而经典随机共振仅考虑稳态响应振幅 A_1 关于外噪声强度 a^2 的改变出现非单调变化。因此, 本节将以现实应用意义最大的外噪声强度 a^2 为例, 推导能系统产生经典随机共振现象时所需要的条件, 并对利用算法推导出的结果进行数值仿真模拟, 以检验算法的可靠性。

根据前文系统稳态响应振幅 A_1 的推导过程, 我们指导系统响应振幅与系统响应一阶矩密切相关, 因此在设计推导系统稳态响应振幅 A_1 产生经典随机共振的条件十分依赖系统响应一阶矩的稳定条件。详细推导如下: 先给出把系统稳态响应振幅 A_1 视为噪声强度 a^2 的函数 $A_1(a^2)$, 通过求导求出极大值点:

$$\begin{aligned} A_1'(a^2) &= -A \cdot (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (k_3^2 + k_4^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot k_3 = 0 \\ \rightarrow a_0^2 &= \gamma^2(\nu b)^{2-2H} \cos[\beta + \theta] + \omega^2 \gamma \nu^{2-2H} \cos \theta + \omega^2 \gamma b^{2-2H} \cos \beta + \omega^4 \end{aligned}$$

其中 k_i 、 b 、 β 、 θ 均与(3.22)一致。

记(3.20)中不等号右边的式子为 a_1^2 , 那么系统只有在满足 $0 < a_0^2 < a_1^2$ 时才会产生随机共振现象。在得到共振条件后, 下面将以两对参数为例, 通过带入适当的参数取值来运行算法并检验算法的准确性。

例 4.1. 为了演示参数选取对系统产生随机共振行为的重要性, 先选取一个参数组合 (此处先以 $\gamma - r$ 为例, 除坐标参数外其他参数取值均需先确定), 通过以下算法来实现参数组的数值迭代。

Algorithm 1 满足随机共振产生条件的参数组合数值迭代算法

输入: 初始参数取值 ν , ω , H

参数 γ_i 的取值范围 Γ

参数 r_i 的取值范围 R

满足共振条件的参数组列表 $\text{list}=[]$

定义函数 Calculation 接受参数 ν , r_i , H :

$$b = \sqrt{r^2 + \nu^2} \quad \beta = (2 - 2H) \arctan\left(\frac{\nu}{r}\right) \quad \theta = \frac{\pi}{2}(2 - 2H)$$

定义函数 Checking 接受参数 γ_i , ν , ω , H :

调用 Calculation

$$a_0^2 = \gamma^2(\nu b)^{2-2H} \cos(\beta + \theta) + \omega^2 \gamma \nu^{2-2H} \cos \theta + \omega^2 \gamma b^{2-2H} \cos \beta + \omega^4$$

$$a_1^2 = \omega^2(\gamma \nu^{2-2H} + \omega^2)$$

for do $\gamma_i \in \Gamma$, $r_i \in R$

if $0 < a_0^2 < a_1^2$ **then**

$\text{list.append}((\gamma_i, r_i))$

输出: list

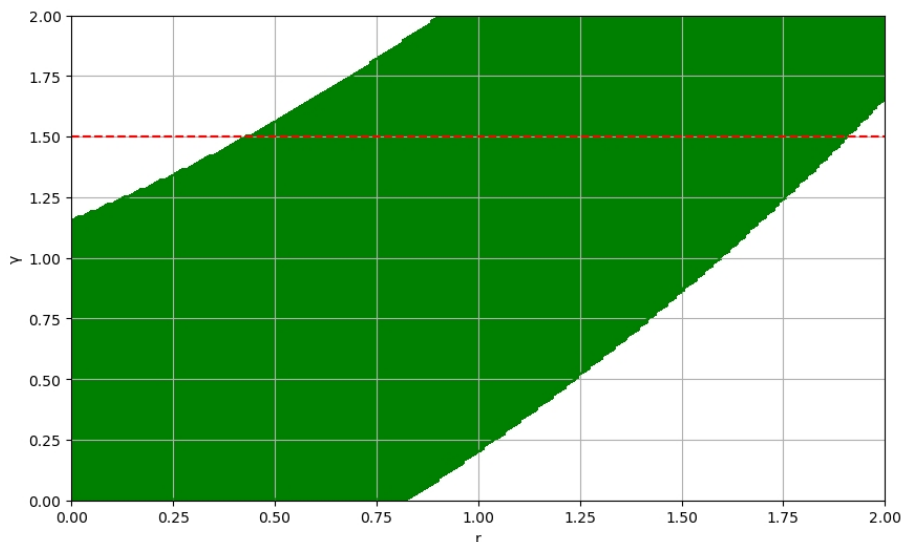


图 4.14: A_1 关于 a^2 能产生随机共振时 $\gamma - r$ 的参数组合 ($\nu = 1$, $\omega = 1$, $H = 0.54$)

根据迭代的结果可以绘制出共振条件在不同参数坐标下(本例为 $\gamma - r$)的相图 4.14。图中浅色区域对应的参数组合无法产生随机共振行为,而绿色区域对应的参数组合则能诱导共振现象。在图中有一条红色虚线,与绿色区域轮廓线分别交于 $(0.44, 1.50)$ 和 $(1.90, 1.50)$,说明在给定 $\nu = 1$, $\omega = 1$, $H = 0.54$, $\gamma = 1.5$ 时, r 的取值只能在 $[0.44, 1.90]$ 之间才能产生随机共振。下面通过仿真模拟验证这个结论。

一阶矩稳定条件(3.20)中的 $0 < a^2 < a_1^2$ 在如此参数组合下为 $0 < a^2 < 2.5$, 当 $r = 0.4$ (图 4.15) 和 $r = 2.0$ (图 4.18) 即 $r \notin [0.44, 1.90]$ 时, 对应的稳态响应振幅曲线 $A_1 - a^2$ 在 $(0, 2.5)$ 区间内分别呈严格单减和严格单增, 此时不能产生随机共振; 当 $r = 1.0$ (图 4.16) 和 $r = 1.5$ (图 4.17) 即 $r \in [0.44, 1.90]$ 时, 对应的稳态响应振幅曲线 $A_1 - a^2$ 在 $(0, 2.5)$ 区间内呈单增后单减的非单调趋势, 即产生了随机共振行为。

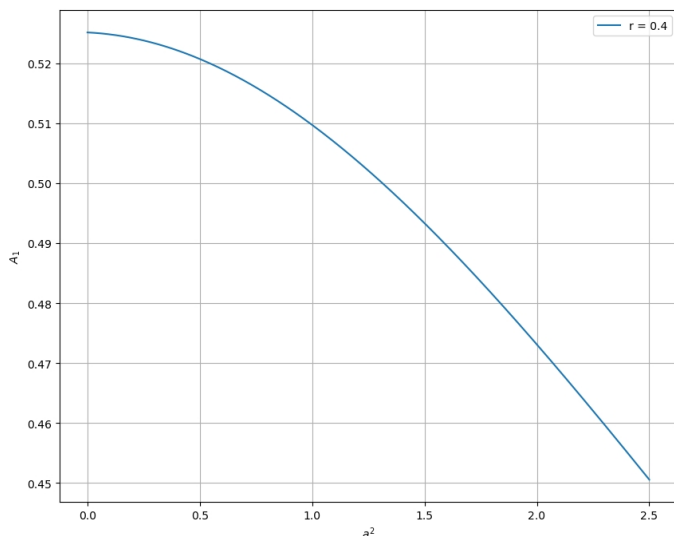


图 4.15: $r = 0.4$ 时, $A_1 - a^2$ 的图像 ($A = 1$, $\nu = 1$, $\omega = 1$, $H = 0.54$, $\gamma = 1.5$)

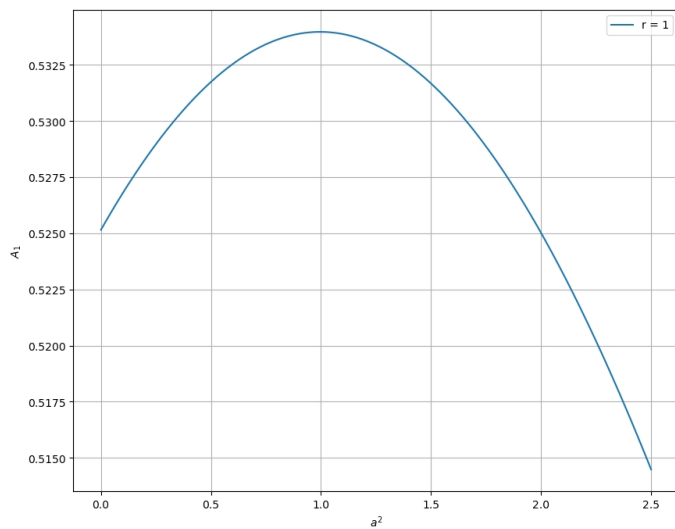


图 4.16: $r = 1.0$ 时, $A_1 - a^2$ 的图像 ($A = 1, \nu = 1, \omega = 1, H = 0.54, \gamma = 1.5$)

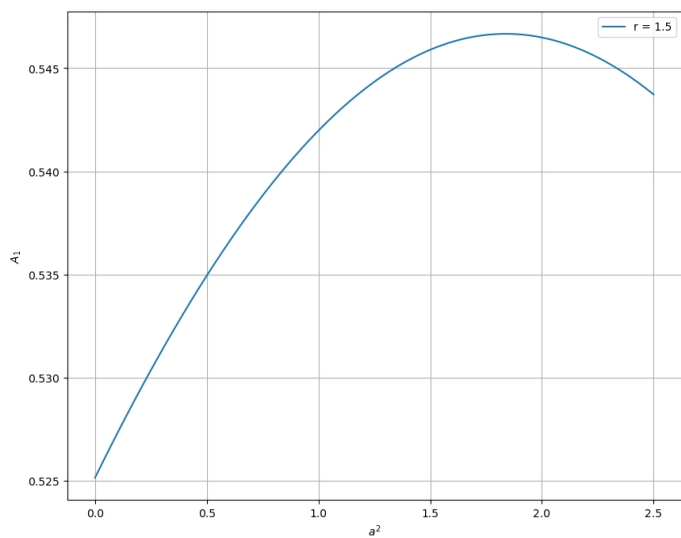


图 4.17: $r = 1.5$ 时, $A_1 - a^2$ 的图像 ($A = 1, \nu = 1, \omega = 1, H = 0.54, \gamma = 1.5$)

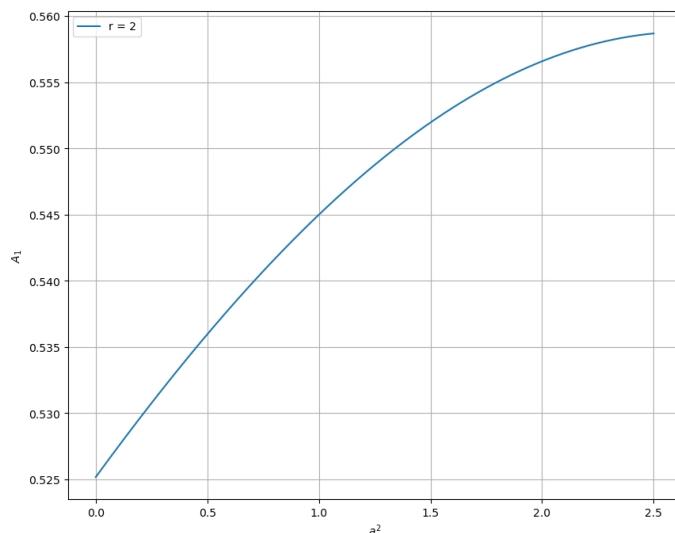


图 4.18: $r = 2.0$ 时, $A_1 - a^2$ 的图像 ($A = 1, \nu = 1, \omega = 1, H = 0.54, \gamma = 1.5$)

例 4.2. 进一步, 选取参数组合 $\nu - H$ 进行随机共振产生条件的探究。同样地, 先利用例 4.1 中的算法 4.1 进行参数组合的数值迭代, 利用迭代结果绘制出如下相图:

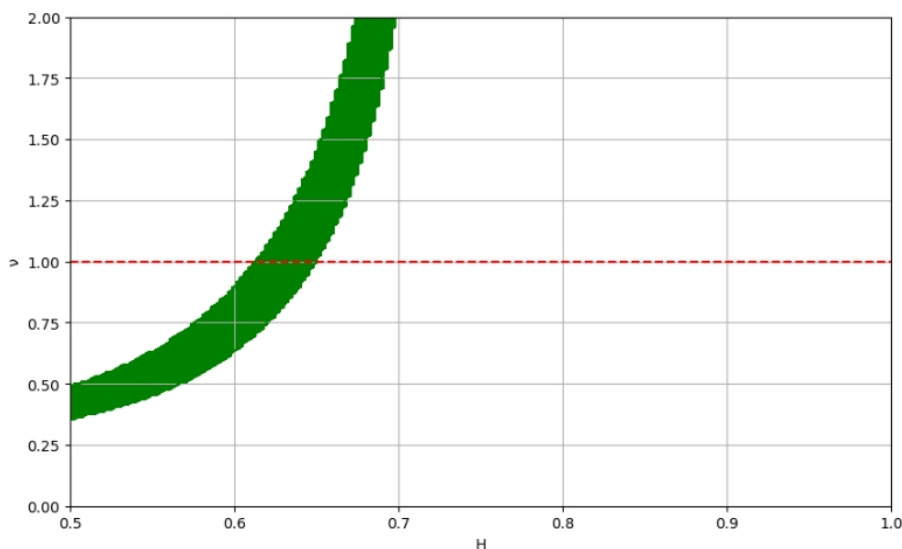


图 4.19: A_1 关于 a^2 能产生随机共振时 $\nu - H$ 的参数组合 ($\omega = 1, r = 1, \gamma = 0.5$)

当 $\nu = 1.0$ 时, H 的取值需落在 $[0.61, 0.65]$ 中, 参数组合才能满足产生随机共振的条件。下面将通过给定 $\nu = 1, \omega = 1, \gamma = 5, r = 1, A = 1$, 分别绘制出 $H = 0.54, H = 0.63, H = 0.8$ 时 $A_1 - a^2$ 的图像, 来验证参数组合相图 4.19 的准确性。此时的稳定条件为 $0 < a^2 < 6$ 。

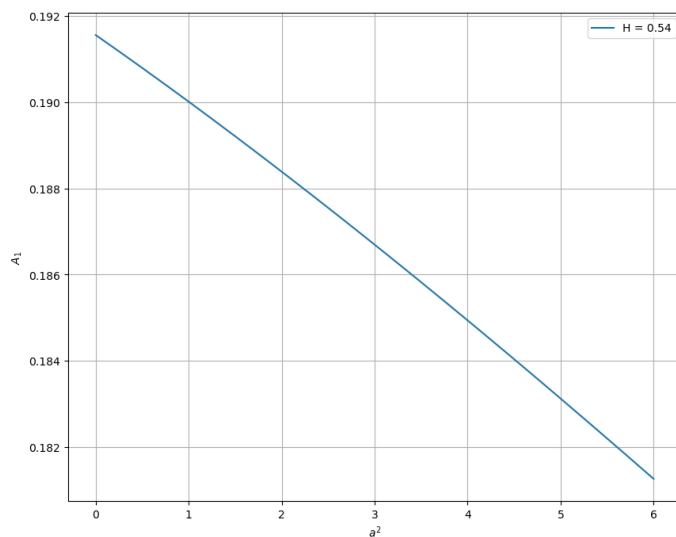


图 4.20: $H = 0.54$ 时, $A_1 - a^2$ 的图像 ($A = 1, \nu = 1, \omega = 1, \gamma = 5$)

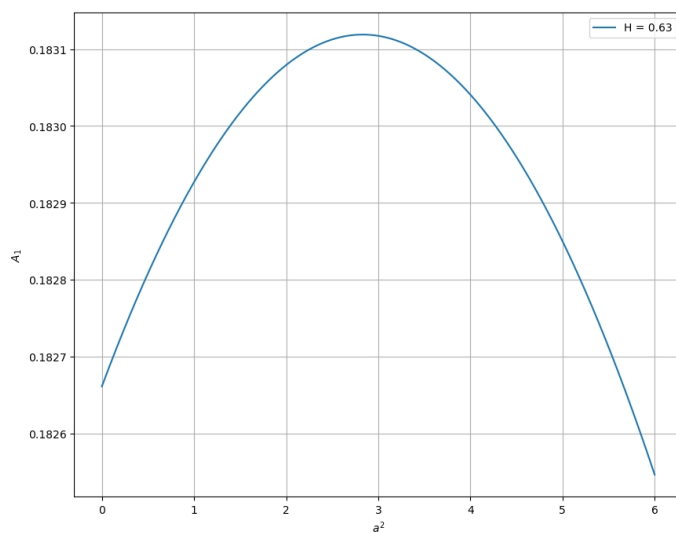


图 4.21: $H = 0.63$ 时, $A_1 - a^2$ 的图像 ($A = 1, \nu = 1, \omega = 1, \gamma = 5$)

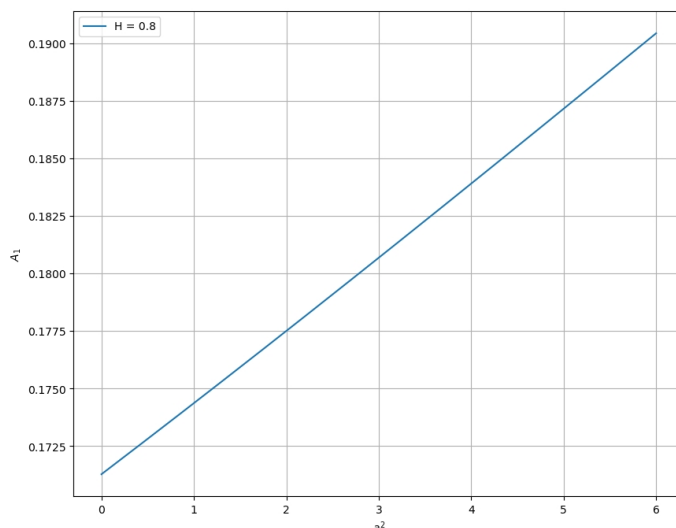


图 4.22: $H = 0.8$ 时, $A_1 - a^2$ 的图像 ($A = 1, \nu = 1, \omega = 1, \gamma = 5$)

不难发现, 图 4.20 和图 4.22 对应的参数 H 并未落在区间 $[0.61, 0.65]$ 中, 因此图像呈严格单调, 并未产生随机共振。而当 $H = 0.63 \in [0.61, 0.65]$ 时, 系统出现了随机共振的现象。这个结果印证了本例中参数相图的可靠性。

本节中给出了两组参数组合诱导产生随机共振时所需要满足的取值范围。先给出了数值迭代的算法伪代码, 再利用迭代结果绘制出相图, 之后又通过几个有代表的样本进行数值仿真, 验证了迭代结果的准确性。

5 结论

本文通过将广义 Langevin 方程的内、外噪声建模为 Hermite 噪声和双态噪声得到了一个由非高斯噪声驱动的、受外部周期信号激励的线性分数阶广义 Langevin 方程，利用关于 Hermite 过程的 Wiener 积分的相关性质，通过涨落耗散定理推导出阻尼项的表达式，发现阻尼项与振子位移的分数阶导数有关。通过分析系统响应的稳态矩的解析表达式发现系统稳态响应振幅会随着噪声的振幅、频率、相关率等参数的改变，呈现出非单调的变化，表明系统在适当参数下出现了广义随机共振现象。利用一、二矩稳定的条件设计数值迭代算法，计算出稳态响应振幅随着噪声强度的改变发生经典随机共振所需要的参数的取值范围。证明了方程解的存在唯一性，并对方程进行了数值求解和完成了对数值解强收敛性的证明。

参考文献

- [1] B J X A , C W Z , B J J A .An electromagnetic torsion active vibration absorber based on the FxLMS algorithm[J]. 2022.
- [2] Benzi R , Sutera A .Stochastic perturbations of generalized Landau expansion[J].Il Nuovo Cimento B, 1986, 92(1):78-90.DOI:10.1007/BF02729698.
- [3] Gitterman M .Classical harmonic oscillator with multiplicative noise[J].Physica A Statistical Mechanics Its Applications, 2005, 352(2-4):309-334.DOI:10.1016/j.physa.2005.01.008.
- [4] Yuandong J , Lu Z , Maokang L .Generalized stochastic resonance of power function type single-well system[J]. 物理学报, 2014, 63(16).
- [5] Mori H .A Continued-Fraction Representation of the Time-Correlation Functions[J].Progress of Theoretical Physics, 1965.DOI:10.1143/ptp.34.399.
- [6] Didier G , Nguyen H .Asymptotic Analysis of the Mean Squared Displacement under Fractional Memory Kernels[J].SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2020(4).DOI:10.1137/19M1238113.
- [7] Zhuang P , Liu F , Anh V ,et al.Numerical Treatment for the Fractional Fokker–Planck Equation[J].Anziam Journal, 2007, 48.DOI:http://eprints.qut.edu.au/43101/.
- [8] Oldham K B , Spanier J .The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order[M]. 2006.
- [9] Huang F , Liu F .The time fractional diffusion equation and the advection-dispersion equation[J].Anziam Journal, 2005, 46(3):317-330.DOI:10.1017/S1446181100008282.
- [10] Oechsler D .Levy Langevin Monte Carlo[J].Statistics and computing, 2024(1):34.
- [11] Medino, Ary V., et al. Generalized Langevin equation driven by Lévy processes: A probabilistic, numerical and time series based approach[J].Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2012: 572-581.
- [12] Srokowski T .Multiplicative Levy noise in bistable systems[J].Physics of Condensed Matter, 2012, 85(2):3419-3422.DOI:10.1140/epjb/e2012-30003-9.
- [13] Tabar M R R .Reconstruction of Stochastic Dynamical Equations: Exemplary Diffusion, Jump-Diffusion Processes and Lévy Noise-Driven Langevin Dynamics[J]. 2019.DOI:10.1007/978-3-030-18472-8-21.

- [14] Tudor C .Non-Gaussian Selfsimilar Stochastic Processes[J].SpringerBriefs in Probability and Mathematical Statistics, 2023.DOI:10.1007/978-3-031-33772-7.
- [15] Chaurasia A , Sehgal V K .Performance of Gaussian and Non-Gaussian Synthetic Traffic on Networks-on-Chip[J].International Journal of Multimedia Data Engineering Management, 2017, 8(2):33-42.DOI:10.4018/IJMDEM.2017040104.
- [16] Stoyanov S , Rachev S , Mittnik S ,et al.PRICING DERIVATIVES IN HERMITE MARKETS[J].International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2016.DOI:10.1142/s0219024919500316.
- [17] Fauth A , Tudor C A .Multifractal random walk driven by a Hermite process[J].John Wiley Sons, Inc. 2016.DOI:10.1002/9781118593486.ch8.
- [18] DAVIDNUALART.THE MALLIAVIN CALCULUS AND RELATED TOPICS =[M]. 世界图书出版公司,2013.
- [19] Kou S C , Xie X S .Generalized Langevin Equation with Fractional Gaussian Noise: Subdiffusion within a Single Protein Molecule[J].Physical Review Letters, 2004, 93(18):180603.DOI:10.1103/PhysRevLett.93.180603.
- [20] Guo P , Zeng C , Li C ,et al.Numerics for the fractional Langevin equation driven by the fractional Brownian motion[J].Fractional Calculus Applied Analysis, 2013, 16(1):123-141.DOI:10.2478/s13540-013-0009-8.
- [21] Tudor C A .The overdamped generalized Langevin equation with Hermite noise[J].Fractional Calculus and Applied Analysis, 2023, 26(3):1082-1103.DOI:10.1007/s13540-023-00153-4.
- [22] 霞刘.The Existence and Uniqueness of Solution for Memory-Dependent Differential Equations[J].Advances in Applied Mathematics, 2020, 09(2):187-194.DOI:10.12677/AAM.2020.92022.
- [23] Yuanyuan J , Zhi L I , Liping X U .The Averaging Principle for Stochastic Fractional Partial Differential Equations with Fractional Noises[J]. 偏微分方程: 英文版, 2021, 34(1):16.
- [24] Zhongkai G , Hongbo F U , Wenya W .An Averaging Principle for Caputo Fractional Stochastic Differential Equations with Compensated Poisson Random Measure[J]. 偏微分方程: 英文版, 2022, 35(1):10.
- [25] Higham, D. J .Stochastic ordinary differential equations in applied and computational mathematics[J].[2024-05-17].

- [26] Guo Q , Mao X , Yue R .The Truncated Euler-Maruyama Method for Stochastic Differential Delay Equations[J].Journal of Computational Applied Mathematics, 2017, 290(C):370-384.DOI:10.1016/j.cam.2015.06.002.
- [27] Zhang L , Lai L , Peng H ,et al.Stochastic and superharmonic stochastic resonances of a confined overdamped harmonic oscillator[J].PHYSICAL REVIEW E, 2018, 97(1):012147.DOI:10.1103/PhysRevE.97.012147.
- [28] E,Ahmed,and,et al.On fractional order differential equations model for nonlocal epidemics[J].Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2007, 379(2):607-614.DOI:10.1016/j.physa.2007.01.010.
- [29] Assaad O , Nualart D , Tudor C A ,et al.Quantitative normal approximations for the stochastic fractional heat equation[J]. 2020.DOI:10.1007/s40072-021-00198-7.
- [30] Zhang J , Huang J , Tang Y ,et al.A modified EM method and its fast implementation for multi-term Riemann-Liouville stochastic fractional differential equations[J]. 2022.DOI:10.48550/arXiv.2205.03607.