第八章

1.设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是相互独立的随机变量序列， $E(X_n)=1$ ，令 $Z_n=\prod_{i=1}^{n} X_i$ ，证明 $\{Z_n, n\geq 1\}$ 是鞅。

解： 证明：

$\{X_n, n\geq 1\}$是相互独立的随机变量序列，且$E(X_n)=1, Z_n=\prod_{i=1}^{n} X_i$

$\therefore E(Z_n)<\infty, E(Z_{n+1}\mid X_1, X_2, \ldots X_n)=Z_n$

Z_n是$X_1, X_2, \ldots X_n$的函数

综上,$\{Z_n\}$关于$\{X_n\}$为鞅，

简称$\{Z_n\}$为鞅

2.设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是二阶矩存在的鞅，令 $F(n)=E(X_n^2)$ ，证明

$$E(|X_{n_1}-X_{n_2}|^2)=F(n_1)-F(n_2)(n_1\geq n_2)$$

解：证明：$F(n_1)-F(n_2)$

$=E(x_{n1}^2)-E(x_{n2}^2)$

$=E(x_{n1}^2-x_{n2}^2)$

$=E((x_{n1}-x_{n2})^2+2x_{n1}x_{n2}-2x_{n2}^2)$

$=E(|x_{n1}-x_{n2}|^2+2x_{n1}x_{n2}-2x_{n2}^2)$

$=E(|x_{n1}-x_{n2}|^2)+2E(x_{n1}x_{n2}-x_{n2}^2)$

由于{Xn，n ≥1}是二阶矩存在的鞅

所以$E(X_{n+1}\mid X_0, X_1, \quad, X_n)=X_n$

又n1 ≥ n2

$E(x_{n1})=x_{n2}$

所以$E(x_{n1}x_{n2}-x_{n2}^2)=0$

所以$F(n_1)-F(n_2)=E(|x_{n1}-x_{n2}|^2)$

证明了$E(|x_{n1}-x_{n2}|^2)=F(n_1)-F(n_2)$

3.设$\{X_n$,n≥0}是鞅， $E(X_n^2)<\infty$

（1）证明：鞅差{$Y_n=X_n-X_n-1$,n≥1}($Y_0=X_0$)正交，即E(Y_iY_j)=0(i≠j)

（2）证明：对于任意正整数k≤l≤m，差X_m-X_i与X_k不相关，即 E[(X_m-X_i)* X_k]=0

解： 证：（1）

$E(Y_iY_j)=E((X_i-X_{i-1})(X_j-X_{j-1}))$

$=E(X_iX_j-X_iX_{j-1}-X_{i-1}X_j+X_{i-1}X_{j-1})$

$=E(X_iX_j)-E(X_iX_{j-1})$

$-E(X_{i-1}X_j)+E(X_{i-1}X_{j-1})$

$=E(X_iX_j)-E(X_iX_j)$

$-E(X_iX_j)+E(X_iX_j)=0$

$\therefore$鞅差$\{Y_n=X_n-X_{n-1}, n-1\}(Y_0=X_0)$正交

（2）

$E[(X_m-X_l)X_k]=E(X_mX_k-X_lX_k)$

$=E(X_mX_k)-E(X_lX_k)$

由第一问知,$E(X_iX_j)=0$,

$\therefore E(X_mX_k)=E(X_lX_k)=0$

$\therefore$对于任意正整数$k\leq l\leq m$,

差X_m-X_l与X_k不相关

4.对鞅$\{X_n$，$n\geq 1\}$ ，令$Y_i=X_i-X_i-1(X_0=0)$。证明： $\mathrm{var}(X_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(Y_i)$

解： $\mathrm{Var}(Y_i)=\mathrm{Var}(X_i-X_{i-1})$

$=E(X_i-X_{i-1})^2$

$-(E(X_i-X_{i-1}))^2$

又因为 $E(X_{n+1})=E(X_n)$

所以 $E(X_i)=E(X_{i-1})$

所以 $\mathrm{Var}(Y_i)=E(X_i-X_{i-1})^2$

$=EX_i^2-2EX_iEX_{i-1}+(EX_{i-1})^2$

$=EX_i^2-(EX_i)^2-(EX_{i-1})^2+EX_{i-1}^2$

$=EX_i^2-(EX_i)^2-[(EX_{i-1})^2-EX_{i-1}^2]$

$=\mathrm{Var}(X_i)-\mathrm{Var}(X_{i-1})$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} Var(Y_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)-\mathrm{Var}(X_{i-1})$$

$=\mathrm{Var}(X_1)-\mathrm{Var}(X_0)$

$+\mathrm{Var}(X_2)-\mathrm{Var}(X_1)$

$+\cdots+\mathrm{Var}(X_{n-1})-\mathrm{Var}(X_{n-2})$

$+\mathrm{Var}(X_n)-\mathrm{Var}(X_{n-1})$

$=\mathrm{Var}(X_n)$

5.设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是独立增量随机过程，$E|X_n|^2<\infty(n\geq 0)$, 试举出自 $\{X_n, n\geq 0\}$ 构造的鞅、上鞅和下鞅。

解： 由题意知 $\{X_n, n\geq 0\}$是独立增量随机过程，且 $E|X_n|^2<\infty$，则 $E|X_n|<E|X_n|^2<\infty$ 又$\forall n>0$, 若 $E[Y_{n+1}|X_1,\ldots,X_n]=Y_n$, 则 Y_n 是 X_n 的鞅则可举出 $\{Y_n=X_n-E(X_n), n\geq 0\}$ 是$\{X_n, n\geq 0\}$构成的鞅同理，由 $E|X_n|^2<\infty$，则 $E|X_n|<E|X_n|^2<\infty$

又 上鞅需满足：

$E[Y_{n+1}|X_1,\ldots,X_n]\leq Y_n$,

下鞅需满足：

$E[Y_{n+1}|X_1,\ldots,X_n]\geq Y_n$,

则可举出：

$\{Z_n=[X_n-E(X_n)]^2, n\geq 0\}$

是$\{X_n, n\geq 0\}$构成的上鞅

$\{T_n=-[X_n-E(X_n)]^2, n\geq 0\}$

是$\{X_n, n\geq 0\}$构成的下鞅

则 $\{Y_n=X_n-E(X_n), n\geq 0\}$

是$\{X_n, n\geq 0\}$构成的鞅

$\{Z_n=[X_n-E(X_n)]^2, n\geq 0\}$

是$\{X_n, n\geq 0\}$构成的上鞅

$\{T_n=-[X_n-E(X_n)]^2, n\geq 0\}$

是$\{X_n, n\geq 0\}$构成的下鞅

6.设$\{X_t, t\geq 0\}$是独立增量过程，且对每一个 t ≥ 0, $E(X_t)$ =0，$X_0=0$，又设 $E(X_t-X_s)^2=F(t)-F(s)(0\leq s\leq t), F(t)$ 是 t 的非减函数。证明：$\{X_t^2-F(t), t\geq 0\}$ 是关于 $F_t=\sigma(X_s, 0\leq s\leq t)$ 的鞅。

解： 证明：由

$E(X_t-X_s)^2=F(t)-F(s), 0\leq s\leq t$

即得：

$E(X_t-X_s)^2$

$=E((X_t^2-X_s^2)-2E[(X_t-X_s)(X_s-X_0)]$

$=E((X_t^2-X_s^2)-2E[(X_t-X_s)]EX_s$

$=E((X_t^2-X_s^2)$

$=F(t)-F(s)$

从而对任意的 $0\leq s\leq t$，

$E[X_t^2-F(t)\mid F(\mathrm{s})]$

$=E[(X_t-X_s)^2+2X_sX_t-X_s^2\mid F(\mathrm{s})]-F(t)$

$=E(X_t-X_s)^2+2X_sE[X_t-X_s\mid F(\mathrm{t})]$

$+X_t^2-F(t)$

$=X_s^2-F(s)$

7. 设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为随机序列，每个均值都存在，且满足 $E(X_{n+1}\mid X_0, X_1, \quad X_n)=\alpha X_n+\beta X_{n-1}, n\geq 0$ ，其中 α >0, β >0, $\alpha+\beta=1$,求 c 使得 $Y_n=cX_n+X_{n-1}(n\geq 1, Y_0=X_0)$ 是关于 $F_n=\sigma(X_k, 0\leq k\leq n)$，$n\geq 0$ 的鞅。

解： 鞅为满足如下条件的随机过

程：在已知过程在时刻 S 之前的变化规律的条件下，过程在将来某一时刻 t 的期望值等于过程在时刻 x 的值。因为

$E(X_{n+1}|X_0,X_1\dots X_n)=\alpha X_n+\beta X_{n-1}$，

则：$\alpha X_n+\beta X_{n-1}=X_n$

要使 $F_n=\sigma$ 的鞅，所以

$EY_n=E(cX_n+X_{n-1})$，所以 $c=\frac{1}{\beta}$

8.设X_t,Y_t是鞅，证明X_t+Y_t是鞅，$\min_{\{X_t,Y_t\}}$是下鞅

解：证明：

（1）因为X_t,Y_t是鞅，所以由 E|X|和 E|Y|小于无穷

$E|X_t+Y_t|<\infty$

又 $E[X_{n+1}|X_1\ X_2\dots X_n]=X_n$;

$E[Y_{n+1}|Y_1\ Y_2\dots Y_n]=Y_n$

$$\begin{aligned}&E[X_t+Y_t|X_s+Y_s]\\&=E[X_t|X_s+Y_s]+E[Y_t|X_s+Y_s]\\&=E[X_t|X_s]+E[Y_t|Y_s]\\&=X_t+Y_t\end{aligned}$$

所以X_t+Y_t是鞅

（2）因为X_t,Y_t是鞅，所以由 E|X|和 E|Y|小于无穷

所以对于任意 t，E（X+）小于无穷，其中 $x^+=\max\{x,0\}$

同时

$$\begin{aligned}&E[\min(X_t,Y_s)|X_s+Y_s]\\&=\min(E[X_t|X_s+Y_s]+E[Y_t|X_s+Y_s])\\&\ge\min(X_t,Y_t)\end{aligned}$$

所以 $\min\{X_t,Y_t\}$是下鞅

9.$\{X_n,n\ge0\}$是鞅，而$\{\xi_n,n\ge0\}$由下式部分和确定，$X_n=\Sigma_{i=0}^n\xi_n$，试证：对于任意 $j\ne i$,$E(\xi_i\xi_j)=0$。

解：证明：

由题意可知$\{\xi_n\}$为关于$\{X_n,n\ge0\}$的鞅差序列

而由鞅的定义可知

$E[\xi_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n]=0$

又因为 $E[\xi_{n+1}]=E[E[\xi_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n]]=0$

因而可知序列$\{\xi_n\}$具有不相关性，所以当 $j\ne i$ 时 $E(\xi_i\xi_j)=E(\xi_i)E(\xi_j)=0$

10.设$\{X_n,n\ge1\}$是下鞅，令

$$U_1=0,U_n=\sum_{i=2}^n\{E[X_i|X_1,\dots,X_{i-1}]-X_i\}$$

其中 n=2。试证：$\{U_n,n\ge1\}$是单调增过程，即$U_n\ge U_{n+1}$

解： 即证明：$u_n-u_{n+1}\ge0$

根据下鞅的性质 $E(x_{n+j}|F_n)\ge x_n$ 可知：

$E[X_i|X_1,\dots,X_{i-1}]=E(X_{n-1})+X_n-X_n>0$

所以不等式成立，即 $U_n\ge U_{n+1}$

11.设 $S_n=\sum_{k=1}^nX_k$ 关于 $F_n=\sigma(X_k,1\le k\le n)$ 是鞅，且 $E(X_k^2)\le p<\infty,k\ge1$，证明对于任意的$\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}S_n\right|\ge\varepsilon\right)=0$$

解：由于 S_n 关于 F_n 是鞅

$E(S_{n+1}|F_n)=E(S_{n+1}|X_1X_2\dots X_n)=S_n$

又由条件期望的性质可知

$$E(S_n)=E(E(S_{n+1}|F_n))=E(S_{n+1})$$

由此可知

$E(S_{n+1})-E(S_n)=E(X_n)=0$

又 $E(X_k^2)\le p<\infty,k\ge1$，由大数定理可知

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nX_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^nE(X_k)\right|<\varepsilon\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}S_n\right|<\varepsilon\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}S_n\right|\ge\varepsilon\right)=0$$

12.设 Markov 链$\{X_n,n\ge0\}$的状态空间为$\{0,1,2,\cdots,N\}$,转移概率为：

（1）$P_{ij}=\binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(1-\frac{i}{N}\right)^{N-j}$,$i,j=0,1,2,\cdots,N$.记$F_n=\sigma(x_k,0\le k\le n)$，证明：$\{X_n,n\ge0\}$和$\left\{Y_n=\frac{X_n(N-X_n)}{(1-N^{-1})^n},n\ge0\right\}$关于$\{F_n,n\ge0\}$是鞅

（2）$P_{ij}=\frac{\binom{2i}{j}\binom{2N-2i}{N-j}}{\binom{2N}{N}}$,$i,j=0,1,2,\cdots,N$.试确定$\lambda$使得$\left\{Y_n=\frac{X_n(N-X_n)}{(1-N^{-1})^n},n\ge0\right\}$关于$\{F_n,n\ge0\}$是鞅

（3）如果$\{X_n,n\ge0\}$关于$\{Y_n,n\ge0\}$是鞅，则状态 0 与 N 是吸收态

解：1）

$$\begin{aligned}&E(X_{n+1}|X_1X_{2\dots}X_n)\\&=E(X_{n+1}|X_n)\\&=\sum_{j=1}^NP(X_{n+1}=j|X_n)\\&=\sum_{j=1}^Np_{X_nj}X_n=X_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&E(Y_{n+1}|X_1X_{2\dots}X_n)\\&=E\left(\frac{X_{n+1}(N-X_{n+1})}{(1-N^{-1})^{n+1}}|X_n\right)\\&=\sum_{j=1}^NP\left(Y_{n+1}=\frac{j(N-j)}{(1-N^{-1})^{n+1}}|X_n\right)\frac{j(N-j)}{(1-N^{-1})^{n+1}}\\&=\sum_{j=1}^NP(X_{n+1}=j|X_n)\frac{j(N-j)}{(1-N^{-1})^{n+1}}\\&=\sum_{j=1}^NC_N^j\left(\frac{X_n}{N}\right)^j\left(1-\frac{X_n}{N}\right)^{N-j}\frac{j(N-j)}{(1-N^{-1})^{n+1}}\\&=\frac{X_n(N-X_n)}{(1-N^{-1})^n}=Y_n\end{aligned}$$

2）

$$\begin{aligned}&E(Y_{n+1}|Y_1Y_{2\dots}Y_n)\\&=E\left(\frac{X_{n+1}(N-X_{n+1})}{\lambda^{n+1}}|X_n\right)\\&=\sum_{j=1}^NP\left(Y_{n+1}=\frac{j(N-j)}{\lambda^{n+1}}|X_n\right)\frac{j(N-j)}{\lambda^{n+1}}\\&=\sum_{j=1}^NP(X_{n+1}=j|X_n)\frac{j(N-j)}{\lambda^{n+1}}\\&=\sum_{j=1}^N\frac{C_N^jC_{2N-2i}^{N-j}}{C_{2N}^N}\frac{j(N-j)}{\lambda^{n+1}}\\&=\frac{X_n(N-X_n)}{\lambda^{n+1}}\left(\frac{2N-1}{2(N-1)}\right)\end{aligned}$$

要使 $E(Y_{n+1}|Y_1Y_{2\dots}Y_n)=Y_n$

即 $\lambda=\frac{2(N-1)}{2N-1}$

（3） 有第（1）小题可知，当

$$p_{ij}=\binom{N}{j}\left(\frac{i}{j}\right)^j\left(1-\frac{i}{N}\right)^{N-j}$$

X_t是鞅，并且当 i=0 或 N 时，p_{ij}=1，则状态 0 和 N 是吸收态

13.设$X_0 \sim U(0.1)$，$X_{n+1} \sim U(1-x_n,1)$，$n \ge 1$，$F_n = \sigma(X_k, 0 \le k \le n)$

又设$Y_0 = X_0$，$Y_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1-x_k}{x_k-1}$，$n \ge 1$，证明：$\{Y_{n,n\ge0}\}$关于$\{F_n, n \ge 0\}$是鞅

证明：由于$X_{n+1} \sim U(1-x_n,1)$，

则$1-X_{n+1} \sim U(x_n,0)$

$X_{n+1}-1 \sim U(-x_n,0)$

$E(Y_n) \le 2^n < +\infty$，$\forall n \ge 1$ 且

$\forall n \ge 0$ 且$Y_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1-x_k}{x_k-1}$

则可知 $E(Y_{n+1}|F_n) = Y_{n+1}$

且 $E(Y_{n+1}|x_0,x_1,\dots,X_n) = 0$

所以有：$\{Y_{n,n\ge0}\}$关于$\{F_n, n \ge 0\}$是鞅

14.设$\{X_n, n \ge 0\}$与$\{Y_n, n \ge 0\}$是鞅，且$Y_0 = X_0$。$E(X_n^2) < \infty$,$E(Yn^2) < \infty$,$n \ge 1$,证明：

$$E(X_nY_n) = \sum_{k=1}^{n} E[(X_k - X_{k-1})(Y_n - Y_{k-1})]$$

$$E(X_n^2) = \sum_{k=1}^{n} E[(X_k - X_{k-1})^2]$$

解：证明：利用条件期望的投射性

$$E(X - E[X|F])^2 = \min_{Z \in L^2(F)} E(X-Z)^2$$

$$\begin{aligned}
&原式 = E[(X_1 - X_0)(Y_n - Y_0)] \\
&+E[(X_2 - X_1)(Y_n - Y_1)] + \dots \\
&+E[(X_n - X_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})] \\
&= E[X_1Y_n - X_1Y_0 - X_0Y_n + X_0Y_0] + \dots \\
&+E[X_nY_n - X_nY_{n-1} - X_{n-1}Y_{n-1} + X_{n-1}Y_{n-1}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} E[(X_k - X_{k-1})(Y_n - Y_{k-1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E[(X_1 - X_0)^2] + E[(X_2 - X_1)^2] + \dots \\
&+E[(X_n - X_{n-1})^2] \\
&= E[X_1^2 - 2X_1X_2 + X_0^2] \\
&+E[X_2^2 - 2X_2X_3 + X_1^2] \\
&+\dots + E[X_n^2 - 2X_nX_{n+1} + X_{n-1}^2] \\
&= \sum_{k=1}^{n} E[(X_k - X_{k-1})^2]
\end{aligned}$$

15、设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 是非负上鞅。证明：对于 $\lambda > 0$，

$$\lambda P\left(\max_{0\le k\le n} X_k \ge \lambda\right) \le E(X_0)$$

解：证明：

设$\{X_n, n \ge 0\}$是上鞅，T是马时，则对于所有$n \ge 1$，有$E(X_0) \ge E(X_{T\wedge n}) \ge E(X_n)$

令 $T = \min\{k : k \ge 0, X_k > \lambda\}$，则

$$E(X_0) \ge E(X_{T\wedge n}) \ge E\left(X_{T\wedge n} I_{\left(\max_{0\le k\le n} X_k > \lambda\right)}\right)$$

注意当$\left\{\max_{0\le k\le n} X_k > \lambda\right\}$事件发生时，$T \le n$，于是有 $T \wedge n = T$，故

$$E(X_0) \ge E\left(X_T I_{\left(\max_{0\le k\le n} X_k > \lambda\right)}\right) \ge$$

$$\lambda E\left(I_{\left(\max_{0\le k\le n} X_k > \lambda\right)}\right) = \lambda P\left(\max_{0\le k\le n} X_k \ge \lambda\right)$$

16、设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 是下鞅，证明：对于 $\lambda > 0$，

$$\lambda P\left(\max_{0\le k\le n} X_k < -\lambda\right) \le E(X_n^+) - E(X_0)$$

解：证明：

设$\{X_n, n \ge 0\}$是下鞅，T是马时，则对于所有$n \ge 1$，有$E(X_0) \le E(X_{T\wedge n}) \le E(X_n)$

令 $T = \min\{k : k \le 0, X_k < -\lambda\}$，则

$$E\left(X_{T\wedge n} I_{\left(\max_{0\le k\le n} X_k < -\lambda\right)}\right) \le E(X_{T\wedge n}) \le E(X_n)$$

注意当$\left\{\max_{0\le k\le n} X_k < -\lambda\right\}$事件发生时，$T \le n$，于是有 $T \wedge n = T$，

故

$$\lambda E\left(I_{\left(\max_{0\le k\le n} X_k < -\lambda\right)}\right) = \lambda P\left(\max_{0\le k\le n} X_k < -\lambda\right) \le$$

$$E\left(X_T I_{\left(\max_{0\le k\le n} X_k < -\lambda\right)}\right) \le E(X_n^+) - E(X_0)$$

17、设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 是鞅，且 $E(X_n) = 0, E(X_n^2) < \infty$。证明：对于 $\lambda > 0$，

$$\lambda P\left(\max_{0\le k\le n} X_k > \lambda\right) \le \frac{E(X_n^2)}{E(X_n^2) + \lambda}$$

解：证明：

利用下鞅的性质：若 X_n 为下鞅，$\forall n \ge 0, X_n \ge 0, \lambda > 0$，有 $\lambda\ P\left(\max_{0\le k\le n} X_k > \lambda\right) \le E(X_n)$

$\{X_n, n \ge 0\}$ 是鞅，

$\therefore \left\{(X_n + c)^2, n \ge 0\right\}$ 是下鞅，应用上述性质有

$$(x+c)^2\ P\left\{\max_{0\le k\le n}(X_k + c)^2 > (x+c)^2\right\} \le E\left[(X_n + c)^2\right]$$

$$\therefore P\left\{\max_{0\le k\le n}(X_k + c)^2 > (x+c)^2\right\} \le \frac{E\left[(X_n + c)^2\right]}{(x+c)^2}$$

又

$$P\left\{\max_{0\le k\le n} X_k > x\right\} = P\left\{\max_{0\le k\le n}(X_k + c) > (x+c)\right\} \le P\left\{\max_{0\le k\le n}(X_k + c)^2 > (x+c)^2\right\}$$

$$\therefore P\left\{\max_{0\le k\le n} X_k > x\right\} \le \frac{E\left[(X_n + c)^2\right]}{(x+c)^2}$$

由于 c 的任意性，令 $c = \frac{E\left[X_n^2\right]}{x}$，代入上式

得证 $P\left(\max_{0\le k\le n} X_k > x\right) \le \frac{E(X_n^2)}{E(X_n^2) + x^2}$，

即 $\lambda P\left(\max_{0\le k\le n} X_k > \lambda\right) \le \frac{E(X_n^2)}{E(X_n^2) + \lambda}$

18、设 $\{X_n, n \ge 0\}$ 关于 $\{Y_n, n \ge 0\}$ 是鞅，C 为任意常数。

（1）若 $E(|X_n \vee C|) < +\infty$，则 $\{|X_n \vee C|, n \ge 0\}$ 是下鞅。

（2）若 $E(X_n^+) < +\infty$，则 $\{X_n^+, n \ge 0\}$ 是下鞅。

解：证明：（1）因为$\{X_n, n \ge 0\}$关于$\{Y_n, n \ge 0\}$是鞅，那么X_n是$Y_0, Y_1, \ ,Y_n$的函数，于是$X_n \vee C$也可以看作$Y_0, Y_1, \ ,Y_n$的函数，满足下鞅定义的条件 3，又已知$E(|X_n \vee C|) < +\infty$，那么$E\left((|X_n \vee C|)^+\right) < +\infty$，满足下鞅条

件 1，又因为 $X_{n+1}\vee C\geq X_{n+1}$，且 $\{X_n,n\geq 0\}$ 是鞅，

故 $E(X_{n+1}\vee C|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\geq E(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=X_n$，

同样的有 $X_{n+1}\vee C\geq C$，

故 $E(X_{n+1}\vee C|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\geq C$，

因此 $E(X_{n+1}\vee C|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\geq X_n\vee C$，

满足下鞅定义的条件 2，

所以 $\{|X_n\vee C|,n\geq 0\}$ 是下鞅。

（2）$X_n^+=X_n\vee 0,E(X_n^+)<+\infty$，

由（1）可知，取 $C=0$，则 $\{X_n^+,n\geq 0\}$ 是下鞅。

19、设 $\{X_n,n\geq 0\}$ 关于 $\{Y_n,n\geq 0\}$ 是上鞅。

（1）若 $E(|X_n\wedge C|)<+\infty$，则 $\{|X_n\wedge C|,n\geq 0\}$ 是上鞅。

（2）若 $E(X_n^-)>-\infty$，则 $\{X_n^-,n\geq 0\}$ 是上鞅。

解：证明：(1)因为 $\{X_n,n\geq 0\}$ 关于 $\{Y_n,n\geq 0\}$ 是上鞅，那么 X_n 是 $Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$ 的函数，于是 $X_n\wedge C$ 也可以看作 $Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$ 的函数，满足上鞅定义的条件 3，又已知 $E(|X_n\wedge C|)>-\infty$，那么 $E((|X_n\vee C|)^-)>-\infty$，满足下鞅条件 1，又因为 $X_{n+1}\wedge C\leq X_{n+1}$，且 $\{X_n,n\geq 0\}$ 是鞅，故 $E(X_{n+1}\wedge C|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\leq E(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=X_n$，

（1） 同样的有 $X_{n+1}\wedge C\leq C$，

故 $E(X_{n+1}\wedge C|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\leq C$，

因此 $E(X_{n+1}\wedge C|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\leq X_n\wedge C$，

满足下鞅定义的条件 2，所以 $\{|X_n\wedge C|,n\geq 0\}$ 是上鞅。

（2）$X_n^-=X_n\wedge 0,E(X_n^-)>-\infty$，由（1）可知，取 $C=0$，则 $\{X_n^-,n\geq 0\}$ 是上鞅。

20、设 $\{X_n,n\geq 0\}$ 是（上）鞅，τ 是马时，则对于所有 $n\geq k$，有

$$E\left[X_nI_{\{\tau=k\}}\right]=(\leq)E\left[X_kI_{\{\tau=k\}}\right]$$

解：证明：因为 τ 是关于 $\{Y_n,n\geq 0\}$ 的马时，所以 $I_{\{\tau=k\}}$ 是关于 $Y_0,Y_1,\cdots,Y_k$ 的函数，因此

$$\begin{aligned}&E\left(X_nI_{\{\tau=k\}}\right)(\leq)\\&=E\left(E\left(X_nI_{\{\tau=k\}}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_k\right)\right)\\&=E\left(I_{\{\tau=k\}}E\left(X_n|Y_0,Y_1,\cdots,Y_k\right)\right)\\&\overset{\text{鞅的性质}}{(\leq)}=E\left(X_kI_{\{\tau=k\}}\right)\end{aligned}$$

21、设 $\{X_n,n\geq 0\}$ 是（上）鞅，τ 是马时，则对于所有 $n\geq 1$，有

$$E(X_0)=(\geq)E(X_{\tau\wedge n})=(\geq)E(X_n)$$

解：证明：

由于 $I_{\{\tau<n\}}+I_{\{\tau\geq n\}}=1$，利用上题结论得

$$\begin{aligned}E(X_{\tau\wedge n})&=E\left[X_{\tau\wedge n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}I_{\{\tau=k\}}+I_{\{\tau\geq n\}}\right)\right]\\&=E\left(X_{\tau\wedge n}\sum_{k=0}^{n-1}I_{\{\tau=k\}}\right)+E\left(X_{\tau\wedge n}I_{\{\tau\geq n\}}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(X_{\tau\wedge n}I_{\{\tau=k\}}\right)+E\left(X_{\tau\wedge n}I_{\{\tau\geq n\}}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(X_kI_{\{\tau=k\}}\right)+E\left(X_nI_{\{\tau\geq n\}}\right)\\&\overset{\text{上题结论}}{(\geq)}=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(X_nI_{\{\tau=k\}}\right)+E\left(X_nI_{\{\tau\geq n\}}\right)=E(X_n)\end{aligned}$$

对于鞅，因为 $E(X_n)=E(X_0)$，所以 $E(X_{\tau\wedge n})=E(X_0)$

对于上鞅，以下证明 $E(X_{\tau\wedge n})\leq E(X_0)$

设 $\{Y_n,n\geq 0\}$ 为一随机序列，$Z_i=g_i(Y_0,Y_1,\cdots,Y_i)$，$g_i$ 为一般函数；函数 f 满足 $E(|f(Z_k)|)<\infty$，$a_k(y_0,\cdots,y_{k-1}),k\geq 0$ 为 k 元有界实函数，即

$|a_k(y_0,\cdots,y_{k-1})|\leq A_k,\forall y_0,\cdots,y_{k-1}$，

且约定

$a_0(Y_{-1})=a_0,E\left[f(Z_0)|Y_{-1}\right]=E\left[f(Z_0)\right]$

令

$$X_n=\sum_{k=0}^{n}\left[f(Z_k)-E\left[f(Z_k)\right]|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{k-1}\right]a_k(Y_0,Y_1,\cdots,Y_{k-1})$$

，则 $\{X_n,n\geq 0\}$ 关于 $\{Y_n,n\geq 0\}$ 是鞅。设

$$\tilde{X}_0=0,\tilde{X}_n=\sum_{k=1}^{n}\left[X_k-E\left(X_k|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{k-1}\right)\right],n\geq 1,$$

则 $\{\tilde{X}_n,n\geq 0\}$ 是 $\{Y_n,n\geq 0\}$ 的鞅，

由鞅的性质可知

$E(\tilde{X}_n)=E(\tilde{X}_{\tau\wedge n})=E(\tilde{X}_0)=0$，

因此有

$$\begin{aligned}0&=E\left(\tilde{X}_{\tau\wedge n}\right)=E\left[\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\left(X_k-E\left(X_k|Y_0,Y_1,\cdots,Y_{k-1}\right)\right)\right]\\&\overset{\text{上鞅定义}}{\geq}E\left[\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\left(X_k-X_{k-1}\right)\right]\\&=E(X_{\tau\wedge n}-X_0)=E(X_{\tau\wedge n})-E(X_0)\end{aligned}$$

即 $E(X_{\tau\wedge n})\leq E(X_0)$。