习题 4

1.对泊松过程$\{N_t,t\geq 0\}$

（1）证明：当 $s<t$ 时

$$p\{N_s=k|N_t=n\}=\binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

$$k=0,1,\ldots,n$$

（2）当$\lambda=2$时，试求：$p(N_1\leq 2)$ $p(N_1=1,N_2=3)$ $p(N_1\geq 2|N_1\geq 1)$

（3）设顾客到达某商店时泊松事件，平均每小时以 30 人的速度到达，求下列事件的概率：相继到达的两顾客的事件间隔为大于 2 分钟、小于 2 分钟、在 1 分钟到 3 分钟之间

答：（1）$p\{N_s=k|N_t=n\}=\frac{P(N_s=k,N_t=n)}{P(N_t=n)}$

$$=\frac{P(N_s=k,N_{t-s}=n-k)}{P(N_t=n)}$$

$$=\frac{P(N_s=k)P(N_{t-s}=n-k)}{P(N_t=n)}$$

$$=\frac{\left\{\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda(t-s)}\right\}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}$$

$$=\frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{k})!}\frac{\mathrm{s}^{\mathrm{k}}(\mathrm{t}-\mathrm{s})^{\mathrm{n}-\mathrm{k}}}{\mathrm{t}^{\mathrm{n}}}$$

$$=C_n^k\left(\frac{S}{t}\right)\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}k=0,1,\ldots,n$$

（2）$p(N_1\leq 2)=\sum_{k=0}^{2}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=5e^{-2}$

$p(N_1=1,N_2=3)=P(N_1=1,N_{2-1}=2)$

$=P(N_1=1)P(N_{2-1}=2)=4e^{-4}$

（3）$\lambda=\frac{30}{60}=0.5$

$p(X_n>2)=e^{-1}$

$p(X_n<2)=1-e^{-1}$

$p(1<X_n<3)=1-e^{-1.5}-(1-e^{-0.5})$

$=e^{-0.5}-e^{-1.5}$

2.$\{N_t,t\geq 0\}$是强度为λ的泊松过程

（1）对 $s>0$，计算 $E(N_tN_{t+s})$

（2）对任意的 $0\leq s\leq t$，有 $P(N_s\leq N_t)=1$

（3）对任意的 $0\leq s\leq t$，$\varepsilon>0$，有 $\lim_{t\to s}P(N_t-N_s>\varepsilon)=0$

（4）令 M（T）$=\frac{1}{T}\int_0^T N_t dt$

试求 $E(M(T))$及$V_{ar}(M(T))$

答：（1）$E(N_tN_{t+s})=\lambda\min(t,t+s)+\lambda^2t(t+s)=\lambda t+\lambda^2t(t+s)$

(2)$P(N_s\leq N_t)=P(N_s-N_t\geq\varepsilon)$

$=P(N_{t-s}\geq 0)$

$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}=1$

(3)$\varepsilon>0$ 则有 $P(N_t-N_s\geq\varepsilon)\geq P(N_{t-s}\geq\varepsilon)\geq 0$，则$\forall\varepsilon$，$\exists M$ 使得 $M>\varepsilon$

$P(N_{t-s}\geq\varepsilon)\leq P(N_{t-s}\geq k)=$

$\lim_{t\to s}P(N_t-N_s>\varepsilon)=\sum_{k=0}^{M}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$

因为 M 是一个有限数而当 $t\to s$ 时，$t-s$ 为无穷小的两

$$\lim_{t\to s}\sum_{k=0}^{M}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}=0$$

$$0\leq\lim_{t\to s}P(N_{t-s}\geq\varepsilon)$$

$$\leq\lim_{t\to s}\sum_{k=0}^{M}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}=0$$

所以此极限为 0

$(4)E(M(T))=\frac{1}{T}\int_0^T E(N_t)dt$

$=\frac{1}{T}\int_0^T\lambda t dt=\frac{\lambda T}{2}$

不妨令 $t\leq s$

$$E(M^2(T))=E(\frac{1}{\mathrm{T}^2}\int_0^T\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{N_tN_sdtds})=$$

$\frac{\lambda T}{2}+\frac{\lambda^2T^2}{4}$

$V_{ar}(M(T))=E(M^2(T))-[E^2(M(T))]=\frac{\lambda T}{2}$

3.设$N_1(t),t\geq 0$ 与$N_2(t),t\geq 0$ 是两个相互独立的泊松过程，切强度分别λ_1,λ_2证明：

（1）$\{N_1(t)+N_2(t),t\geq 0\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程

（2）$\{N_1(t)-N_2(t),t\geq 0\}$不是泊松过程

答：（1）$\mathrm{N_1(t)}$和 $\mathrm{N_2(t)}$的特征函数为：

$\varphi_{N1}(u)=e^{\lambda_1t(e^{iu}-1)}$和$\varphi_{N2}(u)=e^{\lambda_2t(e^{iu}-1)}$

因为$N_1(t)$和$N_2(t)$相互独立，所以对于 $N_1(t)+N_2(t)=E(\varphi_{N1}(u)+\varphi_{N2}(u))=e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(e^{iu}-1)}$

所以由特征函数的唯一性可知，其强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程

（2）根据上面的步骤可以求得$N_1(t)-N_2(t)=e^{\lambda_1te^{iu}+\lambda_2te^{-iu}-t(\lambda_1+\lambda_2)}$所以不是泊松过程

4.计算前三个时间到来的时刻 S1,S2,S3 的联合概率密度

答：

$f(S_1,S_2,S_3)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{P(S_1\leq s_1+h,S_2\leq s_2+h,S_3\leq s_3+h)-P}{h^3}$

$=$

$\lim_{h\to 0}\frac{P(s_1\leq S_1\leq s_1+h,s_2\leq S_2\leq s_2+h,s_3\leq S_3\leq}{h^3}$

其中 $P(s_1\leq S_1\leq s_1+h,s_2\leq S_2\leq s_2+h,s_3\leq S_3\leq s_3+h)=P(N_{0,s_1}=0,N_{s_1,s_1+h}=1,N_{s1+h,s2}=0,N_{s_2,s_2+h}=1,N_{s2+h,s3}=0,N_{s_3,s+3h}=1)=e^{-\lambda_{s_1}}\cdot\lambda he^{-\lambda h}\cdot e^{-\lambda(S_1-S_2-h)}\cdot\lambda he^{-\lambda h}\cdot e^{-\lambda(S_3-S_2-h)}\cdot\lambda he^{-\lambda h}=(\lambda h)^3e^{-\lambda h}e^{-\lambda S_3}$

所以原式变为

$$f(S_1,S_2,S_3)=\lim_{h\to 0}\frac{(\lambda h)^3e^{-\lambda h}e^{-\lambda S_3}}{h^3}=\lambda^3e^{-\lambda S_3}$$

其中 $0<s_1<s_2<s_3$

5.一部 500 页的书总计有 150 个印刷错误，试用泊松过程近似求出连续 4 页无错的概率

答：$\lambda=\frac{150}{500}=0.3$

$P(N_{t+4}-N_t=0)=P(N_4=0)=e^{-4\lambda}=e^{-1.2}$

6.令$N_i(t),t\geq 0$(i=1,…,n)为独立同强度λ的泊松过程，记 T 为在全部 n 个过程中至少发生了一次事件的时刻，求 T 的概率分布

答：$P(T\leq t)=1-P(T>t)$

由于 T 为 n 个过程中至少发生一次事件的时刻，故当 $T>t$，即在$[0,t]$时刻内没有事件发生

$P(T\leq t)=P(N_1(t)=0,\ldots\ldots,N_n(t)=0)=\prod_{k=1}^{n}P(N_k(t)=0)=(e^{-\lambda t})^n$，所以

$$P(T\leq t)=1-(e^{-\lambda t})^n$$

7. 假设汽车按强度为λ的泊松过程进入一条单向行驶的无限长的高速公路，进入的第 i 辆车以速度 Vi 行驶。假定诸 Vi 是独立的正随机变量，有共同分布 F。试计算在时刻 t 位于区间（a，b）内的汽车数的均值，假定一辆车超过另一辆车时，不占用任何时间。

解：设起始时间为 s，则速度

$\mathrm{V}_a=\frac{a}{t-s},\mathrm{V}_b=\frac{b}{t-s}$

那么分布函数分别为$\mathrm{F}(\frac{a}{t-s}),\mathrm{F}(\frac{b}{t-s})$

均值：E(P(b)-P(a))=λt(pb-pa)

$=\lambda\int_0^t(F(\frac{b}{t-s})-\mathrm{F}(\frac{a}{t-s}))ds$

8. 一书亭用邮寄订阅销售杂志，订阅的顾客是强度为 6 的一个泊松过程，每位顾客订阅 1 年、2 年、3 年的概率分别为 1/2、1/3、1/6，彼此如何订阅是相互独立的，每订阅一年，店主即获利 5 元。设 Y_t 是[0,t]内店主从订阅中所获得的总收入，计算

（1）E(Y_t)（即[0,t]内的总的平均收入）；

（2）Var（Y_t）。

解：

（1）λ=6，设 ξ_i 为每个顾客支付的费用，则总收入为 $Y_t=\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i$，它是一个复合 Poisson 过程，由复合 Poisson 过程的期望公式可知 $E(Y_t)=\lambda tE(\xi)=50t$

（2）由复合 poisson 过程的期望公式可知 $\mathrm{var}(Y_t)=\lambda tE(\xi_i^2)=500t$

9.试说明更新过程的一切概率性质均由其更新间距的分布函数所决定。

解：更新过程的均值函数由 F 决定：N_t 由 $X_1,X_2,\ldots$ 为具有同分布 F 的更新间距组成

$m(t)=E(N_t),\quad t\ge 0$

更新过程 N_t 的概率分布由 F 决定：

$P(N_t=n)=F_n(t)-F_{n+1}(t)$

更新方程由 F 决定：

$$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-x)dF(x)$$

因此更新过程的一切概率性质由其更新间距的分布所决定。

10.设{N_t，t≥0}是一个更新过程，Xn 是其更新间距，$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i(n\ge 1)$。再设 $E(N_t)=m(t)=\lambda t,t\ge 0$，λ为正实数。试求 $\Phi(x)=E(e^{-xX_n})(x\ge 0)$。

解：由于更新过程$\{N(t),t\ge 0\}$的更新过程函数

$m_N(t)=\lambda t,t\ge 0$及

更新函数$m_N(t)$与更新间距的分布函数

F(t)相互唯一确定，

因此$\{N(t),t\ge 0\}$是$poisson$过程，

且更新间距X_n相互独立同服从

参数为λ的指数分布

$\Phi(x)=E(e^{-xX_n})=\int_0^{+\infty}e^{-tx}\lambda x^{-\lambda x}dx$

$=\dfrac{\lambda}{\lambda+x}(x\ge 0)$

11.设{X_n，n≥1}独立同分布，X_n 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\rho e^{-\rho(x-\delta)},当x>\delta\\ 0,当x\le\delta\end{cases}$$ 其中δ>0 给定。

求更新过程中的概率 P（N_t≥k）。

解：

设 $T_1,T_2,\ldots,T_n$ 是更新间距，

则其概率密度函数均为

$f(x)=\begin{cases}\rho e^{-\rho(x-\delta)},x>\delta\\0,x\le\delta\end{cases}$

由于 $\tau_n=T_1+T_2+\ldots+T_n$，因而

$f_{\tau_1}(t)=f(t)=\begin{cases}\rho e^{-\rho(x-\delta)},x>\delta\\0,x\le\delta\end{cases}$

又 $f_{\tau_2}=f_{T_1}(t)*f_{T_2}(t)=$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{T_1}(x)f_{T_2}(t-x)dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{T_1}(x)f_{T_2}(t-x)dx$

故当 $t\le 2\delta$ 时，$f_{\tau_2}(t)=0$;

当 $t>2\delta$ 时，

$f_{\tau_2}(t)=\int_{\delta}^{t-\delta}\rho e^{-\rho(x-\delta)}\rho e^{-\rho(t-x-\delta)}dx$

$=\rho^2e^{2\delta\rho}(t-2\delta)e^{-\rho t}$

即

$f_{\tau_2}(t)=\begin{cases}\rho^2e^{2\delta\rho}(t-2\delta)e^{-\rho t},t>2\delta\\0,t\le 2\delta\end{cases}$

$f_{\tau_3}=f_{T_1}(t)*f_{T_2}(t)*f_{T_3}(t)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{T_3}(x)f_{\tau_2}(t-x)dx$

当 $t\le 3\delta$ 时，$f_{\tau_3}(t)=0$，当 $t>3\delta$ 时，

$f_{\tau_3}(t)=$

$\int_{\delta}^{t-2\delta}\rho e^{-\rho(x-\delta)}\rho^2e^{2\rho\delta}(t-x-2\delta)e^{-\rho(t-x)}dx$

$=\dfrac{1}{2}\rho^3e^{3\rho\delta}(t-3\delta)^2e^{-\rho t}$

$f_{\tau_3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2!}\rho^3e^{3\rho\delta}(t-3\delta)^2e^{-\rho t},t>3\delta\\0,,t\le 3\delta\end{cases}$

一般地，有

$f_{\tau_k}(t)=\begin{cases}\frac{1}{(k-1)!}\rho^ke^{k\rho\delta}(t-k\delta)^{k-1}e^{-\rho t},t>k\delta\\0,,t\le k\delta\end{cases}$

从而 $P(N(t)\ge k)=P(\tau_k\le t)$

$=\begin{cases}\int_{k\delta}^{t}f_{\tau_k}(s)ds,t>k\delta\\0,t\le k\delta\end{cases}=\begin{cases}\int_0^{t-k\delta}\frac{1}{(k-1)!}\mu^ks^{k-1}e^{-s}ds,当t>k\delta\\0,当t\le k\delta\end{cases}$

12. 求 Poisson 过程中，总寿命 B(t)=A(t)+Y(t)的分布。

解：

若{N_t，t⩾0}是强度为λ的齐次 Poisson 过程：

$$P(Y(t)>x)=1-F(x-t)+\int_0^t P(Y(t-u)>x)d$$

$$P(A(t)\le x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & 0\le x<t\\ 1 & x\ge t\end{cases}$$

$$\therefore\int B(t)dx=\int P(A(t)\le x)dx+\int P(Y(t)>x)dx$$

13、设$\{N_t^{(1)},t\ge 0\}$和$\{N_t^{(2)},t\ge 0\}$为两个独立普通过程，它们的更新间距分别有密度 f 和 g。若$\{N_t,t\ge 0\}$是由这两过程叠加而得的过程，证明 N_t 为更新过程的充要条件为$\{N_t^i,t\ge 0\}$(i=1,2)皆为齐次 Poisson 过程。

解：充分条件：更新过程的定义为设{N(t)，t>0}是一个计数过程，x_n表示第 n-1 次事件和第 n 次事件的时间间隔，如果{x_1，x_2…}为非负独立同分布的随机变量序列，则为更新过程。由于$\{N_t^{(1)},t\ge 0\}$和$\{N_t^{(2)},t\ge 0\}$为两个独立泊松过程，则$\{N_t,t\ge 0\}$也是泊松过程，由于泊松过程为非负独立同分布过程，所以为更新过程。

必要条件：已知 N_t 为更新过程，则{N(t)≥ n}={$S_n\le$ t}，因为$\{N_t,t\ge 0\}$是由这两过程叠加而得的过程，所以两过程都为 Poisson 过程，因为更新间距固定，则为齐次 Poisson 过程。

14. 考虑一更新过程，如果 P(X_n=1)=1/3,P(X_n=2)=2/3，计算 P(N_1=k)，P(N_2=k)，P(N_3=k)。

解：P(N_1=k)=F_k(1)- F_{k+1}(1)=P{$N_1\ge 1$}-P{$N_1\ge 2$}=1/3

P(N_2=k)= F_k(2)- F_{k+1}(2)= P{$N_2\ge 1$}-P{$N_2\ge 2$}=1/3

P(N_2=k)= F_k(3)- F_{k+1}(3)= P{$N_3\ge 1$}-P{$N_3\ge 2$}=1/3

15、设$\{N_t,t\ge 0\}$是强度为λ的齐次 Poisson 过程，S_0=0，S_n表示第 n 个事件发生的时刻，求：

（1）(S_2,S_5)的联合概率密度函数；

（2）E[S_1|$N_t\ge 1$]

（3）E[S_k|N_t = n]，k≤ n

（4）S_k(k<n)在N_t=n 下的条件概率密度函数

（5）(S_1,S_2)在N_t=1 下的条件概率密度函数

（6）P($S_1\le$x,N_t=n), P($S_2\le$x,N_t=n)，其中 x∈R，t>0.

16、设X_n的概率密度 f(x)=$\lambda^2xe^{-\lambda x}$(x≥ 0)求相应的更新函数 m(t)。

m(t)=E{N(t)}= $\sum_{n=1}^{\infty}n$ P{N(t)=n}= $\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\ge n\}$

因为X_n的分布函数为 F(x)= λx+1，所以更新函数 m(t)=$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda x+1$

17、设{N(t),t≥ 0}为一更新过程，更新间距{X_n,n=1,2,3…}相互独立，且均服从统一正态分布 N(0,σ^2)，试求 N(t)的概率分布与均值函数。

解：更新时刻τ_n为更新间距T_k之和，由于T_k，k≥ 1 独立同分布于 N(0，σ^2)，

所以 P(N(t)=k)= $\Phi(t/\sqrt{k}\sigma)$- $\Phi(t/\sqrt{k+1}\sigma)$

m(t)=E{N(t)}= $\sum_{n=1}^{\infty}n$ P{N(t)=n}= $\sum_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\ge n\}=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(t/\sqrt{k}\sigma)$