随机过程 习题 2

1、设 X 为取非负整数值的随机变量，证明 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\ge k)$ 。

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kp(x=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k(p(X\ge k)-p(x\ge k+1))$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}kp(x\ge k)-\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)p(x\ge k+1)+\sum_{k=1}^{\infty}p(x\ge k+1)$$
$$=p(k=1)+\sum_{k=1}^{\infty}p(x\ge k+1)=\sum_{k=1}^{\infty}p(x\ge k)$$

2、设随机变量 X 的概率密度为

$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\ 0\ , x\le 0\end{cases}$ **求 $Y=e^{aX}(a<0)$ 的数学期望。** 答：

$$E(Y)=E(e^{ax})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ax}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}e^{ax}e^{-x}dx$$
$$=\int_{0}^{+\infty}e^{x(a-1)}dx$$
$$=\frac{1}{a-1}\int_{0}^{+\infty}de^{(a-1)x}(a<0)$$
$$=\frac{1}{1-a}$$

3、设二维随机变量（X,Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy^2, 0<x<1, 0<y<1\\ 0, \qquad 其他\end{cases}$$

求（X, Y）的协方差矩阵。

答：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 6xy^2dy=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0,其他\end{cases}$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1 6xy^2dx=\begin{cases}2y^2, 0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$$

因为 $f(x,y)=f(x)f(y)$ ，所以 X,Y 独立，

故 cov(X, Y)=cov(Y, X)=0

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$$
$$E(X^2)=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=\int_0^1 3y^3dy=\frac{3}{4}$$
$$E(Y^2)=\int_1^0 3y^4dy=\frac{3}{5}$$
$$\mathrm{cov}(X,X)=E(x^2)-(E(X))^2=\frac{1}{18}$$
$$\mathrm{cov}(Y,Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{3}{80}$$

故（X, Y）的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix}\mathrm{cov}(X,X) & \mathrm{cov}(X,Y)\\ \mathrm{cov}(Y,X) & \mathrm{cov}(Y,Y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{18} & 0\\ 0 & \frac{3}{80}\end{bmatrix}$$

4、已知二维随机变量（X, Y）服从联合正态分布，且 E(X)=E(Y)=0，D(X)=1，D(Y)=4， ρ **(X，Y)=** $\frac{1}{2}$ **.**

(1) 写出(X，Y)的联合密度函数.

(2) 已知 Z=aX+Y 与 Y 独立，求 a.

答：

(1) $\mu_1=\mu_2=0,\ \sigma_1^2=1,\sigma_2^2=4,\rho=\frac{1}{2}$

将各参数代入二维正态分布密度函数，最终得：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{3}\pi}\exp\left\{-\frac{2}{3}\left[x^2-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}y^2\right]\right\}$$

(2) $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(x)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow cov(X，Y)=1$

$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$\therefore E(XY)=1$

当Z与X独立时，有 $E(ZY)=E(Z)E(Y)$

$E(Z)=aE(X)+E(Y)=0, E(Y)=0, E(ZY)$

$=E\left[a(XY)+Y^2\right]=aE(XY)+E(Y^2)$

$\therefore aE(XY)+E(Y^2)=a+4=0$

$a=-4$

5.设 X 服从正态分布 N(μ,σ^2 **),Y=** e^X **,求 Y 的概率密度函数。**

$F(Y)=p\{Y\le y\}=p\{X\le \ln y\}=F_X(\ln y)$

当y>0时，$f_Y(y)=F'(y)=\frac{1}{y}f_X(y)=\frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln y-u)^2}{2\sigma^2}}$

当 $y\le 0$ 时，$f_Y(y)=0$

6.设 X 和 Y 是相互独立的 Poisson 随机变量，其参数分别是 $\lambda 1$ 和 $\lambda 2$ 。试求当给定 X+Y=n 时，X=k(k ≤ n)的条件概率.

答：$P(X+Y=n)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k,Y=n-k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda 1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}$$
$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n$$
$$P(X=k\mid X+Y=n)=\frac{P(X=k\mid Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$$
$$=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n}=C_n^k(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k}$$

7. 已知二维随机变量(X, Y)的联合分布密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0<x<y\\ 0,\ \ 其他\end{cases}$

求条件密度 f(x|y)及 f(y|x).

解：公式：

$$f(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}和f(y\mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

先求边缘概率密度：(0<x<y)

$$\boldsymbol{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y}dy=}$$
$$\boldsymbol{e^{-y}|_x^{+\infty}=0+e^{-x}=e^{-x}}$$
$$\boldsymbol{f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^y e^{-y}dy=x$

$$f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$f(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}=\frac{1}{y}$ $\qquad f(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{e^{-y}}{e^{-x}}=e^{x-y}$

$$\therefore f(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{y} & 0<x<y\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f(y|x)=\begin{cases}e^{x-y} & 0<x<y\\ 0 & 其他\end{cases}$$

8. 随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，求 X 的矩母函数，并根据其矩母函数计算 X 的数学期望和方差.

解：依题意，可得：X 的矩母函数：$\psi_X(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}dF_X(x)$

∵X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布：

$\therefore f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\qquad (x>0)$

X 的特征函数：$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}dF_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)dx\qquad=\int_0^{+\infty}e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^{+\infty}e^{(t-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{t-\lambda}\int_0^{+\infty}e^{(t-\lambda)x}d_{(t-\lambda)x}=\frac{\lambda}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\lambda}{t-\lambda}(0-1)$

$=\frac{\lambda}{\lambda-t}$

$E(x)=\varphi_X'(t)|_{t=0}=[\lambda(\lambda-t)^{-1}]'|_{t=0}=\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}|_{t=0}=\frac{1}{\lambda}$

$E(x^2)=\varphi_X(t)''|_{t=0}=[\lambda(\lambda-t)^{-1}]''|_{t=0}=\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}|_{t=0}=\frac{2}{\lambda^2}$

$D(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$

9. 如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分的指数变量，参数为 λ ，证明 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 具有参数为(n, λ)的 Γ 分布，亦证明 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的密度函数为

$$f(t)=\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\ ,\ \ t\ge 0$$

解：证明：令 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$

则 $\varphi_Y(u)=\varphi_{X1}(u)\varphi_{x2}(u)\ldots\varphi_{Xn}(u)$

$\varphi_{Xi}(u)=\int_0^{+\infty}e^{iux}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-iu}=(1-\frac{iu}{\lambda})^{-1}$

$\boldsymbol{\varphi_Y(u)=(1-\frac{iu}{\lambda})^{-n}}$

令 T 为参数为(n, λ)的 分布，则

$\varphi_T(u)=\int_0^{+\infty}e^{iux}\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}dt=\int_0^{+\infty}e^{iux}\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda t)^{n-1}}{\Gamma(n)}dt$

$=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda(1-\frac{iu}{\lambda})t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{\Gamma(n)}dt=(1-\frac{iu}{\lambda})^{-n}\int_0^{+\infty}\frac{[\lambda\left(1-\frac{iu}{\lambda}\right)]^{n-1}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda(1-\frac{iu}{\lambda})t}dt\quad(1)$

$$\boldsymbol{\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-t}\,dt}$$

$=\int_0^{+\infty}[\lambda(1-\frac{iu}{\lambda})]^{n-1}t^{n-1}e^{-\lambda\left(1-\frac{iu}{\lambda}\right)t}d\lambda\left(1-\frac{iu}{\lambda}\right)t$

(2)

由(1)(2)所得：

$\varphi_T(u)=\left(1-\frac{iu}{\lambda}\right)^{-n}$

由此可证，$\varphi_T(u)=\varphi_Y(u)$ 。证明完毕

10. 试证明连续型随机变量 X 的特征函数 $\varphi_X(u)$为实函数的充要条件是：它的密度函数 f(x)是对称的，即 $f(x)=f(-x)$.

解：证明：$\varphi_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iux}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos ux+i\sin ux]f(x)dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\cos(ux)f(x)dx}+\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{i\sin(ux)f(x)dx}$

(a) 先证明充分性：当 $f(x)=f(-x)$时，

$\Rightarrow$$-\sin[u(-x)]f(x)=\sin(ux)f(x)$

$\Rightarrow$$\sin(ux)f(x)$为奇函数

$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ux)f(x)dx=0$，即$\varphi_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(ux)f(x)dx$

∴连续型随机变量 X 的特征函数$\varphi_X(u)$为实函数。

(b) 再证明必要性：$\varphi_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(ux)f(x)dx$为实函数，

由(a)得，$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ux)f(x)dx=0$，

即$\int_{-\infty}^{0}\sin(ux)f(x)dx+\int_0^{+\infty}\boldsymbol{\sin(ux)f(x)dx=0}$

$\Rightarrow\int_{-\infty}^{0}\sin[u(-x)]f(x)dx+\int_0^{+\infty}\boldsymbol{\sin(ux)f(x)dx=0}$

令其中一式中的 $x=-t$;

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\sin[ut]f(-t)d(-t)+\int_0^{+\infty}\sin(ux)f(x)dx=0$

$\Rightarrow-\int_0^{+\infty}\sin(ut)f(-t)dt+\int_0^{+\infty}\sin(ux)f(x)dx=0$

$\Rightarrow-\int_0^{+\infty}\sin(ux)f(-x)dx+\int_0^{+\infty}\sin(ux)f(x)dx=0$

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\sin(ux)[-f(-x)dx+f(x)]dx=0$

∴f(x)-f(-x)=0, 即 $f(x)=f(-x)$

证明完毕。

11. 考虑离散时间股票价格过程 $S(n)(n=1,2,\cdots)$，$S(0)$是初始价格，$S(n)$是股票 n 周后的价格，假设价格过程 $S(n)/S(n-1)(n\ge1)$是独立同分布的对数正态随机变量，设参数μ=0.0165，σ=0.0730，求以下事件的概率：

（1）此后两周股票价格连续上升；

（2）两周后的股票价格高于今天的价格；

解：(1) 依题意，可得公式 =

$\ln\frac{S_n}{S(n-1)}\sim N(0.0165,0.0730^2)$

∵两周价格连续上升，$\therefore P\{S(2)>S(1)>S(0)\}$

计算：$P\{S(2)>S(1)>S(0)\}=P\left\{\frac{S(2)}{S(1)}>1,\frac{S(1)}{S(0)}>1\right\}$

$=P\left\{\frac{S(2)}{S(1)}>1\right\}\times P\left\{\frac{S(1)}{S(0)}>1\right\}=P\left\{\ln\frac{S(2)}{S(1)}>0\right\}\times P\left\{\ln\frac{S(1)}{S(0)}>0\right\}$

$=\Phi(0.2)^2\approx0.3474$

(2) ∵两周后的价格高于如今，

$\therefore P\{S(2)>S(0)\}$

计算：$P\{S(2)>S(0)\}=P\left\{\frac{S(2)}{S(0)}>1\right\}=P\left\{\ln\frac{S(2)}{S(0)}>0\right\}=P\left\{\ln\left(\frac{S(2)}{S(1)}\times\frac{S(1)}{S(0)}\right)>0\right\}$

$=P\left\{\left(\ln\frac{S(2)}{S(1)}+\ln\frac{S(1)}{S(0)}\right)>0\right\}=P\left\{\ln\frac{S(2)}{S(1)}>\ln\frac{S(1)}{S(0)}\right\}=P\left\{\Phi(0.1)>-\frac{\sqrt{2}}{5}\right\}$

$\approx\Phi(0.2828)\approx0.6254$

12. 考虑股价波动二项式模型。若现在某股票的股价为 S，则过一个单位时间，它会以概率 p 变为 uS 或以概率 1-p 变为 dS，设每个时间段的价格变化是独立的，试估计 1000 个单位时间后股价至少上升 30% 的概率，其中 u=1.012， d=0.990，p=0.52。

解：设 $S(0)=S>0$， $S(n)$ 表示经过 n 个单位时间后的股价，则：

$$S(n)=\begin{cases}uS(n-1),P\\dS(n-1),1-P\end{cases},\ n=1,2,\ldots$$

令$X_n=\frac{S(n)}{S(n-1)}$，$n=1,2,\ldots$

则$X_n=\begin{cases}u,P\\d,1-P\end{cases}$，于是

$$S(n)=S(0)\cdot\frac{S(1)}{S(0)}\cdot\frac{S(2)}{S(1)}\cdot\frac{S(n)}{S(n-1)}$$

$$=S(0)X_1X_2\ X_n=S(0)\prod_{k-1}^{n}X_k$$

$$\ln\frac{S(n)}{S(0)}=\ln(\prod_{k-1}^{n}X_k)=\sum_{k-1}^{n}X_k$$

所求的概率为

$$P\{\frac{S(1000)}{S(0)}\ge30\%\}=P\{\prod_{n-1}^{1000}X_n\ge30\%\}$$

$$=P\{\prod_{n-1}^{1000}X_n>\ln0.3\}$$

又因为

$$E(\ln X_n)=p\ln u+(1-p)\ln d=6\times10^{-4}$$

$$E(\ln X_n)^2=p(\ln u)^2+(1-p)(\ln d)^2=3.998\times10^{-4}$$

$$D(\ln X_n)=E(\ln X_n)^2-[E(\ln X_n)]^2=3.995\times10^{-4}$$

由题意知X_n，$n=1,2,\ldots$独立同分布，

于是$\ln X_n$，$n=1,2,\ldots$独立同分布，

所以 $E(\sum_{n-1}^{1000}\ln X_n)=1000E(\ln X_n)=0.6D(\sum_{n-1}^{1000}\ln X_n)$

$=1000D(\ln X_n)=0.3995$

根据中心极限定理可知$\sum_{n-1}^{1000}\ln X_n$近似服从正态分布

故$P\{\frac{S(1000)}{S(0)}\ge30\%\}\approx1-\Phi(\frac{\ln0.3-0.6}{\sqrt{0.3995}})$

$=\Phi(2.854)=0.9978$

13. 设随机变量 X 的特征函数为

$$\Phi_X(u)=\frac{1}{1-iu}$$

试求 X 的数学期望 E(X)与方差 Var(X)。

答：由特征函数与矩母函数关系知：

$$\varphi_X(u)=\frac{1}{1-u}$$

$$\therefore E(X)=\varphi_X'(u)|_{u=0}=1$$

$$E(X^2)=\varphi_X''(u)|_{u=0}=2$$

$$Var(X)=1$$

14. 设随机变量 X_k，k=1, . . . , n 相互独立，且均服从相同的两点分布，其概率分布为

$$\mathbf{P(X_k=0)=(1-p),P(X_k=1)=p,k=1,\ldots,n,0<p<1}$$

试利用其特征函数与分布函数的性，证明

Y=$\sum_{k=1}^{n}X_k$ 服从二项分布 B(n, p)。

证明：因为$X_1,\ldots,X_n$均相互独立

$\therefore\varphi_X(u)=\varphi_{X1}(u)\ldots\varphi_{Xn}(u)$，其中$X=\sum_{k=1}^{n}X_k$

又因为$X_1,\ldots,X_n$均同分布于两点分布

$\therefore\varphi_{X1}(u)=\varphi_{X2}(u)=\ldots=\varphi_{Xn}(u)$

$=e^{iu*0}(1-p)+e^{iu*1}p=1-p+pe^{iu}$

$\therefore\varphi_X(u)=(1-p+pe^{iu})$与二项分布特征函数一致

由于特征函数具有唯一性，故题设成立。

15. 设 n 个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 X_k(k=1, . . . , n)是具有参数λ_k的指数分布。（1）求 X_k的特征函数；

(2) 设 Z=X_1+. . . +X_n，试求 Z 的特征函数。

答：(1) 根据特征函数与矩母函数关系，

再由第 8 题结论知：$\phi_{X_k}(u)=\frac{\lambda_k}{\lambda_k-iu}$

(1) ∵X_1，. . . ，X_n相互独立

$$\therefore\phi_Z(u)=\prod_{1\le k\le n}\phi_{X_k}(u)=\prod_{1\le k\le n}\frac{\lambda_k}{\lambda_k-iu}$$

16. 若 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的特征函数为 $\phi(\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_n})$，则 Y=$\sum_{k=1}^{n}a_kX_k+b$ 的特征函数为 $\Phi_Y(u)=e^{iub}\Phi(a_1u,\ldots,a_nu)$

其中，a_1，. . . ，a_n，b 为常数。

答：

$$\phi_Y(u)=E[e^{iu(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k+b)}]=e^{iub}E[e^{iu\sum_{k=1}^{n}a_kx_k}]$$

(1)由条件知：$(X_1,\ldots,X_n)$的特征函数为 $\phi(u_1,\ldots,u_n)$，即

$$\phi(u_1,\ldots u_n)=E(e^{i(\overline{X},\overline{u})})=E(e^{i(a_1X_1u+\ldots+a_nX_nu)})$$

令$u_k=a_ku$则，原式变为

$$\phi(a_1u,\ldots,a_nu)=E(e^{i(a_1X_1u+\ldots+a_nX_nu)})$$

代入（1）式，即得：

$$\phi_Y(u)=e^{iub}\phi(a_1u,\ldots,a_nu)$$