第 7 章作业

1.设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 为 Brown 运动过程，令 Y(t)=tX(1/t)

(1) Y(t)的分布是什么

(2) 计算 Cov(Y(t) ,Y(s))

(3) 试证 $\{Y(t),t\ge 0\}$ 也是布朗运动

(4) 令 $T=\inf\{t>0: X(t)=0\}$，利用(3)给出 $P(T=0)=1$ 的证明

解(1) $F_{Y(t)}(y)=P(Y(t)\le y)=P\left(tX\left(\frac{1}{t}\right)\le y\right)$

$$=\mathrm{P}\left(X\left(\frac{1}{t}\right)\le \frac{y}{t}\right)=F_{X\left(\frac{1}{t}\right)}\left(\frac{y}{t}\right)$$

又$\because$ $\mathrm{X}(\frac{1}{t})\sim \mathrm{N}(0,\frac{c^2}{t})$ 其概率密度

$$f_{X\left(\frac{1}{t}\right)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{c^2}{t}}}e^{-\frac{x^2}{2\frac{c^2}{t}}}$$

则 Y(t) 的概率密度 $f_{Y(t)}(y)=F'_{Y(t)}\left(\frac{y}{t}\right)=\frac{1}{t}f_{X\left(\frac{1}{t}\right)}\left(\frac{y}{t}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi c^2 t}}e^{-\frac{x^2}{2c^2t}}$

$\therefore$ Y(t)的分布均值为 0，方差为 c^2t 的正态分布。

(2)

$$\begin{aligned}&Cov(Y(t),Y(s))\\&=E[Y(t)Y(s)]-E[Y(t)]E[Y(s)]\\&=E[Y(t)Y(s)]\end{aligned}$$

当 t<s 时

$$\begin{aligned}&E[Y(t)Y(s)]\\&=E[Y(t)[Y(s)-Y(t)]+Y^2(t)]\\&=E\{[Y(s)-Y(t)][Y(t)-Y(0)]\}\\&+E[Y^2(t)]=c^2t\end{aligned}$$

当 t<s 时

$$\begin{aligned}&E[Y(t)Y(s)]\\&=E[Y(s)[Y(t)-Y(s)]+Y^2(s)]\\&=E\{[Y(t)-Y(s)][Y(s)-Y(0)]\}\\&+E[Y^2(s)]=c^2s\end{aligned}$$

由上可知

$$Cov(Y(t),Y(s))=c^2\min\{t,s\}$$

(3) 条件 1.Y(0)=0

条件 2.由 X(t)为 Brown 运动

$$X(1/t)\sim N\left(0,\frac{c^2}{t}\right)$$
$$Y(t)=tX(1/t)\sim N(0,c^2t)$$

条件 3.因为 X(t)平稳独立增量，

所以 $Y(t)-Y(s)\sim N(0,t-s)$

所以 Y(t)为布朗运动

(4)令 $S=\sup\{t>0:\mathrm{Y}(t)=0\}$，

易知 Y(t)在任意 t 时刻都可能为 0，则 S 为无穷大，即

$$tX(1/t)=0$$
$$X(1/t)=0$$

由此可知求 Y(t)=0 的上界就是求 X(t)=0 的下界

$$\lim_{t->+\infty}X(1/t)=X(0)=0$$

则下界 T 必为 0，即 $P(T=0)=1$

2. 设 X(t) 同上，令 $W(t)=\frac{X(a^2t)}{a}(a>0)$，验证 $\{W(t),t\ge 0\}$ 也是布朗运动

条件 1.W(0)=0

条件 2.由 X(t)为 Brown 运动，对于任意 t 大于等于 0

$$X(t)\sim N(0,c^2t)$$
$$X(a^2t)\sim N(0,c^2a^4t)$$
$$W(t)=\frac{X(a^2t)}{a}\sim N(0,c^2a^2t)$$

条件 3.因为 X(t)平稳独立增量，

所以

$$W(t)-W(s)\sim N\left(0,(ca)^2(t-s)\right)$$

所以 W(t)为布朗运动

3. 设 X(t) 同上，计算给定 $X(t_1)=A,X(t_2)=B$时$X(s)$ 的条件分布，其中 $t_1<s<t_2$

解: $f_{s|t_1,t_2}(x|A,B)=\frac{f_{s,t_1,t_2}(x,A,B)}{f_{t_1,t_2}(A,B)}=$

$$\frac{f_{t_1}(A)f_{s-t_1}(x-A)f_{t_2-s}(B-x)}{f_{t_1}(A)f_{t_2-t_1}(B-A)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t_1)}}e^{-\frac{(x-A)^2}{2(s-t_1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-s)}}e^{-\frac{(B-x)^2}{2(t_2-s)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}e^{-\frac{(B-A)^2}{2(t_2-t_1)}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(t_2-t_1)}{2\pi(s-t_1)(t_2-s)}}e^{-\frac{(B-A)^2}{2(t_2-t_1)}}\exp\left\{-\frac{(x-A)^2}{2(s-t_1)}-\frac{(B-x)^2}{2(t_2-s)}\right\}$$

$$=K_1\exp\left\{-\frac{(x-A)^2}{2(s-t_1)}-\frac{(B-x)^2}{2(t_2-s)}\right\}$$

($\sqrt{\frac{(t_2-t_1)}{2\pi(s-t_1)(t_2-s)}}e^{-\frac{(B-A)^2}{2(t_2-t_1)}}$ 将其看作常数项K_1)

$$=\boldsymbol{K_2\exp\left\{-\frac{(t_2-t_1)[x-A-(B-A)\frac{s-t_1}{t_2-t_1}]^2}{2(s-t_1)(t_2-s)}\right\}}$$

*

$[K_1e^{(B-A)(s-t_1)[\frac{s-t_1}{t_2-t_1}-(B-A)]}$ 将其看作常数项K_2]

其中K_1,K_2为化简后的常系数。

从上述*可以看出条件分布满足正态分布

从*式也可看出

$\mathrm{E}=A+(B-A)\frac{s-t_1}{t_2-t_1}$

$$\sigma^2=\frac{(t_2-t_1)}{(s-t_1)(t_2-s)}$$

即： $\mathrm{E}[\mathrm{X(s)}|\mathrm{X}(t_1)=\mathrm{A},\mathrm{X}(t_2)=\mathrm{B}]=A+(B-A)\frac{s-t_1}{t_2-t_1}$

$\mathrm{Var}[\mathrm{X(s)}|\mathrm{X}(t_1)=\mathrm{A},\mathrm{X}(t_2)=\mathrm{B}]=\frac{(t_2-t_1)}{(s-t_1)(t_2-s)}$

4.设 $\{B(t),t\ge 0\}$ 是标准 Brown 运动，求下列过程的协方差函数：

(1)B(t)+Xt,X 与 B(t)相互独立，且 X~N(0,1)

(2) $aB\left(\frac{t}{a^2}\right)$,(a>0 为常数)

$$\begin{aligned}&(1)Cov\left(\left(B(t)+Xt\right),\left(B(s)+Xs\right)\right)\\&=E\left[\left(B(t)+Xs\right)\left(B(s)+Xs\right)\right]\\&-E\left[\left(B(t)+Xt\right)\right]E\left[\left(B(s)+Xs\right)\right]\\&=E\left[\left(B(t)+Xs\right)\left(B(s)+Xs\right)\right]\\&=E\left[B(t)B(s)\right]+E\left[X^2st\right]\\&=E\left[B(t)B(s)\right]+stE\left[X^2\right]\\&=\min\{t,s\}+st\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2)B(t)\sim N(0,t)\\&B\left(\frac{t}{a^2}\right)\sim N\left(0,\frac{t}{a^2}\right)\\&aB\left(\frac{t}{a^2}\right)\sim N(0,t)\\&\text{令}Y(t)=aB\left(\frac{t}{a^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Cov\left(Y(t),Y(s)\right)\\&=E\left[Y(t)Y(s)\right]-E\left[Y(t)\right]E\left[Y(s)\right]\\&=E\left[Y(t)Y(s)\right]\end{aligned}$$

当 t<s 时

$$\begin{aligned}&E\left[Y(t)Y(s)\right]\\&=E\left[Y(t)\left[Y(s)-Y(t)\right]+Y^2(t)\right]\\&=E\left\{\left[Y(s)-Y(t)\right]\left[Y(t)-Y(0)\right]\right\}\\&+E\left[Y^2(t)\right]=t\end{aligned}$$

当 t<s 时

$$\begin{aligned}&E\left[Y(t)Y(s)\right]\\&=E\left[Y(s)\left[Y(t)-Y(s)\right]+Y^2(s)\right]\\&=E\left\{\left[Y(t)-Y(s)\right]\left[Y(s)-Y(0)\right]\right\}\\&+E\left[Y^2(s)\right]=s\end{aligned}$$

由上可知

$$Cov\left(Y(t),Y(s)\right)=\min\{t,s\}$$

5、设 $\{X(t),0\le t\le 1\}$ 为 Brown 桥过程。证明：若 $W(t)=(t+1)X\left(\frac{t}{t+1}\right)$，则 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是 Brown 运动。

证明：

令 $\{B(t),t\ge 0\}$ 为标准 Brown 运动，

则 $B(0)=0,B(t)\quad N(0,t)$

$\{B(t),t\ge 0\}$ 有平稳独立增量。

$\{X(t),0\le t\le 1\}$ 为 Brown 桥过程，

$\therefore X(t)=B(t)-tB(1),0\le t\le 1$

$\{X(t),0\le t\le 1\}$ 有平稳独立增量。

其中

$$\begin{aligned}&X(0)=B(0)-0B(1)=0,\\&X(1)=B(1)-1B(1)=0\\&E\left(X(t)\right)=E\left(B(t)-tB(1)\right)=0\\&Var\left(X(t)\right)=E\left(X^2(t)\right)=t(1-t)\end{aligned}$$

① $W(0)=(0+1)X(0)=X(0)=0$

② $\{X(t),0\le t\le 1\}$ 有平稳独立增量，

$\therefore\left\{X\left(\frac{t}{t+1}\right),0\le\frac{t}{t+1}\le 1\right\}$ 有平稳独立增量。

$\therefore\left\{(t+1)X\left(\frac{t}{t+1}\right),0\le\frac{t}{t+1}\le 1\right\}$

即 $\{W(t),t\ge 0\}$ 有平稳独立增量。

③ $$\begin{aligned}&E\left(W(t)\right)=E\left((t+1)X\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)\\&=(t+1)E\left(X\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Var\left(W(t)\right)=Var\left((t+1)X\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)\\&=(t+1)^2Var\left(X\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)\\&=(t+1)^2\left(\frac{t}{t+1}\right)\left(1-\frac{t}{t+1}\right)=t\end{aligned}$$

综上①②③：

$\{W(t),t\ge 0\}$ 是 Brown 运动。

6. 验证 $\left\{X(t)=(1-t)B\left(\frac{t}{1-t}\right),0\le t\le 1\right\}$ 是 Brown 桥，其中 $\{B(t),0\le t\le 1\}$ 是标准 Brown 运动。

证明：

$\{B(t),0\le t\le 1\}$ 为标准 Brown 运动，

则 $B(0)=0,B(t)\quad N(0,t)$

$\{B(t),0\le t\le 1\}$ 有平稳独立增量。

① $X(0)=(1-0)B(0)=B(0)=0$ ，

$X(1)=(1-1)B\left(\frac{t}{1-t}\right)=0$

② $\{B(t),0\le t\le 1\}$ 有平稳独立增量，$\therefore\left\{B\left(\frac{t}{1-t}\right),0\le\frac{t}{1-t}\le 1\right\}$ 有平稳独立增量，

$\therefore\left\{X(t)=(1-t)B\left(\frac{t}{1-t}\right),0\le t\le 1\right\}$

有平稳独立增量。

③ $$\begin{aligned}&E\left(X(t)\right)=E\left((1-t)B\left(\frac{t}{1-t}\right)\right)\\&=(1-t)E\left(B\left(\frac{t}{1-t}\right)\right)=0\end{aligned}$$

$$Var\left(X(t)\right)=Var\left((1-t)B\left(\frac{t}{1-t}\right)\right)$$
$$=(1-t)^2\,Var\left(B\left(\frac{t}{1-t}\right)\right)=(1-t)^2\left(\frac{t}{1-t}\right)$$
$$=t(1-t)$$

$$\operatorname{cov}\left(X(s),X(t)\right)$$
$$=E\left(X(s)X(t)\right)-E\left(X(s)\right)E\left(X(t)\right)$$
$$=s(1-t),0\le s\le t\le 1$$

$\{B(t),0\le t\le 1\}$ 为标准 Brown 运动，$\therefore\{X(t),0\le t\le 1\}$ 的分布为正态分布。

$B(0)=0$ 时，

$$E\left(B(t)\middle|B(1)=0\right)=0,0\le t\le 1$$

$$E\left(B^2(t)\middle|B(1)=0\right)$$
$$=(1-t)(t-0)(1-t)^{-1}=t(1-t)$$，

令 $s\le t$，

$$\operatorname{cov}\left(B(s),B(t)\middle|B(1)=0\right)$$
$$=E\left(B(s)B(t)\middle|B(1)=0\right)$$
$$-E\left(B(s)\middle|B(1)=0\right)$$
$$E\left(B(t)\middle|B(1)=0\right)$$
$$=E\left(E\left(B(s)B(t)\middle|B(t),B(1)=0\right|B(1)=0$$
$$=E\left(B(t)E\left(B(s)\middle|B(t),B(1)=0\right|B(1)=0$$
$$=E\left(B(t)\left(0+\frac{B(t)(s-0)}{t-0}\right)\middle|B(1)=0\right)$$
$$=E\left(B^2(t)\frac{s}{t}\middle|B(1)=0\right)$$
$$=\frac{s}{t}E\left(B^2(t)\middle|B(1)=0\right)$$
$$=\frac{s}{t}\frac{(1-t)(t-0)}{1-0}=s(1-t)$$

$X(t)$ 与 $\{B(t),0\le t\le 1\}$ 一阶矩，二阶矩和协方差均相同，

$\therefore X(t)$ 与 $\{B(t),0\le t\le 1\}$ 在 $B(1)=0$ 的条件分布相同，

$\therefore X(t)$ 在 $X(0)=X(1)=0$ 的条件下，它的概率分布服从 Brown 运动，

$\therefore\left\{X(t)=(1-t)B\left(\frac{t}{1-t}\right),0\le t\le 1\right\}$ 是 Brown 桥。

7、（1）证明 Gauss 过程为严平稳的充要条件是 $Cov\left(X(s),X(t)\right)$ 只依赖于 $t-s$ $(s\le t)$ 及 $E\left(X(t)\right)=c$。

（2）设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 为 Brown 运动，定义 $V(t)=e^{-at/2}X\left(e^{at}\right)$。证明：$\{V(t),t\ge 0\}$ 是平稳 Gauss 过程，它成为 Ornstein-Uhlenbeck 过程。

证明：（1）$\Rightarrow$：因 Gauss 过程是二阶矩过程，由严平稳过程性质，显然成立。

由已知：$\mu_X(t)=\mu_X,R_X(t,t+\tau)$ 只与 τ 有关。由严平稳过程定义，对任意的正整数 n 及任意 $t_1,t_2,\quad,t_n\in T$，$t_1+h,t_2+h,\quad,t_n+h\in T$，

要证：$\left(X(t_1),X(t_2),\quad,X(t_n)\right)$ 与 $\left(X(t_1+h),X(t_2+h),\quad,X(t_n+h)\right)$ 同分布。而正态过程的分布由 μ_X 及 $C_X(s,t)$ 决定，μ_X 为常数。

$$R_X\left(t_i,t_j\right)$$
$$=R_X\left(t_i+h,t_j+h\right)C_X\left(t_i+h,t_j+h\right)$$
$$=R_X\left(t_i+h,t_j+h\right)-\mu_X\left(t_i\right)\mu_X\left(t_j\right)$$
$$=R_X\left(t_i,t_j\right)-\mu_X^2=C_X\left(t_i,t_j\right)$$

即 $\left(X(t_1),X(t_2),\quad,X(t_n)\right)$ 与 $\left(X(t_1+h),X(t_2+h),\quad,X(t_n+h)\right)$ 同分布。

（2） $\{X(t),t\ge 0\}$ 为 Brown 运动，

$\therefore X(0)=0;\{X(t),t\ge 0\}$ 有平稳独立增量；且对于每一个 $t>0$，有 $X(t)\quad N\left(0,c^2t\right)$。

$$E\left(V(t)\right)=E\left(e^{-at/2}X\left(e^{at}\right)\right)=e^{-at/2}E\left(X\left(e^{at}\right)\right)=0$$
$$R(t,t+\tau)=E\left(V_tV_{t+\tau}\right)$$
$$=E\left(e^{-at/2}X\left(e^{at}\right)e^{-a(t+\tau)/2}X\left(e^{a(t+\tau)}\right)\right)$$
$$=e^{-at/2-a(t+\tau)/2}E\left(X\left(e^{at}\right)X\left(e^{a(t+\tau)}\right)\right)$$
$$=e^{-at/2-a(t+\tau)/2}E\left(X\left(e^{at}\right)\left(X\left(e^{a(t+\tau)}\right)-X\left(e^{at}\right)\right)+\left(X\left(e^{at}\right)\right)^2\right)$$
$$=e^{-at/2-a(t+\tau)/2}$$
$$\left[E\left(X\left(e^{at}\right)-X(0)\right)E\left(X\left(e^{a(t+\tau)}\right)-X\left(e^{at}\right)\right)+E\left(\left(X\left(e^{at}\right)\right)^2\right)\right]$$
$$=e^{-at/2-a(t+\tau)/2}c^2e^{at}=c^2e^{-a\tau/2}$$

$$E\left(V^2(t)\right)=E\left(\left(e^{-at/2}X\left(e^{at}\right)\right)^2\right)=e^{-at}E\left(\left(X\left(e^{at}\right)\right)^2\right)$$
$$=e^{-at}\left\{Var\left(X\left(e^{at}\right)\right)+\left[E\left(X\left(e^{at}\right)\right)\right]^2\right\}=e^{-at}Var\left(X\left(e^{at}\right)\right)=e^{-at}c^2t<$$

则 $\{V(t),t\ge 0\}$ 是平稳 Gauss 过程，

$\{X(t),t\ge 0\}$ 为 Brown 运动，α 和 β 为正常数，$V(t)$ 是与 $\{X(t),t\ge 0\}$ 独立的随机变量，则

$dV(t)=\alpha dX(t)-\beta V(t)dt,V(0)=X(1)$，有唯一解

$$V(t)=e^{-\beta t}X(1)+\alpha\int_0^t e^{-\beta(t-u)}dX(u)$$
$\{V(t),t\ge 0\}$

是 Ornstein-Uhlenbeck 过程。

8、设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 为一个生灭过程，它允许取负值，有常数生灭率 $\lambda_n\equiv\lambda$，$\mu_n\equiv\mu(n=0,\pm1,\pm2,\quad)$。定义 μ 与 c 的关于 λ 的函数，使得 $\lambda\to\infty$ 时 $\{cX(t),t\ge 0\}$ 收敛于 Brown 运动。

答：由生灭过程得其转移概率 p_{ij} 满足：

$$P_{i,i+1}(\Delta t)=P\left(X(t+\Delta t)=i+1\middle|X(t)=i\right)$$
$$=i\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P_{i,i-1}(\Delta t)=P\left(X(t+\Delta t)=i-1\middle|X(t)=i\right)$$
$$=i\mu\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P_{ii}(\Delta t)=P\left(X(t+\Delta t)=i\middle|X(t)=i\right)$$
$$=1-i(\lambda+\mu)\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P_{ij}(\Delta t)=P\left(X(t+\Delta t)=j\middle|X(t)=i\right)=o(\Delta t)$$

特征值 $q_{ij}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}(i\neq j)$

由生灭定义，有 $\begin{cases} q_{i,i+1}=\lambda_i \\ q_{i,i-1}=\mu_i \end{cases}$，于是

$q_{ii}=\lambda_i+\mu_i$

Q 阵为

$$\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & -(\lambda_4+\mu_4) \end{bmatrix}$$

$\pi Q=0,\pi=(\pi_0,\pi_1,\quad,\pi_n,\quad)$

递推的初始条件：$\pi_0\lambda_0=\pi_1\mu_1$

递推的规律：

$\lambda_0\pi_0+\mu_2\pi_2=\lambda_1\pi_1+\mu_1\pi_1$

$\lambda_{j-1}\pi_{j-1}+\mu_{j+1}\pi_{j+1}=(\lambda_j+\mu_j)\pi_j$

归纳可得：

$\pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$

$\pi_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$

$\pi_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\quad\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\quad\mu_j}\pi_0, j=1,2,$

$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$

$\pi_0=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j},\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j<\infty,\left(a_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\quad\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\quad\mu_j},a_0\right.$

μ 是关于 λ 的函数，当 $\lambda\to\infty$ 时，$\{cX(t),t\geq 0\}$ 收敛于 Brown 运动，

$\therefore \mu=\lambda,\sigma^2_{cX(t)}=Var(cX(t))=c^2\sigma t$

（σ 为正常数）

$\therefore c=\sqrt{\frac{1}{2}\lambda}$

9. 设 $\{X(t),t\geq 0\}$ 为 Brown 运动，求下列变量的分布：

（1）$|X(t)|$

（2）$|\min\limits_{0\leq s\leq t}X(s)|$

（3）$\max\limits_{0\leq s\leq t}\{X(s)-X(t)\}$

解：

(1) 因为 X(t)是服从正态分布的，且对每个 t>0，X(t)服从正态分布 N(0,σ^2)。

所以概率密度函数为 f(x)=$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$，所以|X(t)|的概率密度函数则为 $|\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}|=\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}$

所以 |X(t)| 的分布函数为

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|/\sqrt{t}}^{\infty}e^{-y^2/2dy}$$

(2) $|\min\limits_{0\leq x\leq t}X(s)|$的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{x}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}$$

所以可得$|\min\limits_{0\leq x\leq t}X(s)|$的分布函数

为 $p\{Tx\leq t\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|/\sqrt{t}}^{\infty}e^{-y^2/2dy}$

(3) $\max\limits_{0\leq s\leq t}\{X(s)-X(t)\}$ =P{M(t)≥x}=p{Tx≤t}=2p{B(t)≥x}= $\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|/\sqrt{t}}^{\infty}e^{-y^2/2dy}$

10. 以T_x记 Brown 运动首次击中 x 的时间。计算：

$$P(T_1<T_{-1}<T_2)$$

解：Z(t)=B(t),t<T_x;Z(t)=x,t≥T_x

因为离散部分 p{Z(t)=x}=p{ T_x ≤t}= $\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2t}}d_y$

下面求连续部分的分布：

p{Z(t)≤y}=p{B(t)≤y, $\max\limits_{0\leq s\leq t}\{X(s)-X(t)\}$ }=p{B(t)≤y}-p{B(t)≤y, $\max\limits_{0\leq s小\leq t}B(s)>x$ }

所以

$$P(T_1<T_{-1}<T_2)$$

=P(T_1 > T_{-1})+P(T_2 > T_1)=$\frac{1}{6}$

11. 设{B(t),t ≥ 0}为 Brown 运动，α，β > 0，证明：对任意 t ≥ 0

$$P(B(t)\leq\alpha t+\beta|B(0)=x)=1-e^{-2\alpha(\beta-x)}$$

解：

p(B(t)≤αt+β|B(0)=x)=

$\frac{p(B(t)\quad\alpha t+\beta,B(0)=x)}{p(B(0)=x)}$)

当在 B(t1)=x1 的条件下，B(t2)的条件密度函数为

$$f_{B(t2)|B(t1)}(x2|x1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t2-t1)}}e^{-\frac{(x2-x1)^2}{2(t2-t1)}}=f_{t2-t1}(x2-x1)$$

因为

p(B(t2)≤x2|B(t1)=x1)

=p(B(t2)-B(t1)≤x2-x1)

$=\int_{-\infty}^{x2-x1}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t2-t1)}}e^{-\frac{y^2}{2(t2-t1)}dy}$

所以

p(B(t)≤αt+β|B(0)=x)

$=1-e^{-2\alpha(\beta-x)}$