北京交通大学

2022年-2023学年第一学期研究生《随机过程I》试题

（注：本试卷满分100分，共六道大题）

1. （10分）

设两个泊松过程 $\{N_1(t), t \geq 0\}$和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$强度分别是 λ_1和 λ_2且相互独立。证明： $N_t = N_1(t) + N_2(t)$是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$的泊松过程。

2.(20分)

设 $\{N(t), t \geq 0\}$是强度为 λ的齐次泊松过程， $S_0 = 0$， S_n表示第n个事件发生的时刻。

（1）求 S_n的概率密度函数 $f_{S_n}(t)$;

（2）求 (S_1, S_2)的联合概率密度函数 $f(s_1, s_2)$;

（3）求条件期望 $E(S_1 \mid S_2 = s_2)$.

3.(20分)

设齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间为 $E = \{1, 2\}$，其转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

初始分布为 $P(X_0 = 1) = p, P(X_0 = 2) = 1 - p(0 < p < 1)$。对任意的 $n \geq 1$,试求：（1） $P(X_{n+2} = 2 \mid X_n = 2)$；(2) $P(X_n = 1)$与$P(X_n = 2)$

4. （20分）

设 $\{X_n\}$为齐次马氏链，证明：

（1）对任何非负整数m,n,则有 $P_{ij}^{m+n} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$;

（2）若 $i \to k, k \to j$,则有 $i \to j$.

5.(10分)

不断地掷一枚骰子，以 X_n表示前n次掷出的点数最大值，则随机序列 $\{X_n, n \geq 1\}$是一马氏链，求其一步转移概率矩阵。

6. （20分）

（1）设马氏链 $\{X_n\}$的状态空间为E={1，2，3，4}，转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

试分解此链，指出其非常返集和基本常返闭集，并说明常返闭集中的状态是否为正常返态。

（2）设马氏链 $\{X_n\}$的状态空间为 E={1，2，3}，转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

讨论此马氏链的状态分类、周期性并求其平稳分布和极限分布。