习题一

1、设人民币存款利率为5%，每年计息一次，那么大约要多少年时间才能使存款额变为原来的4倍？如果利率变为4%，又要多少年？

解：设初始投入资金为Q元，大约需要n年，其中的利率为r。依题意，可得：

公式计算法：$Q*5\%*n=Q_1-Q$

1) 当r=5%的时候：$Q*5\%*n=4Q-Q$

所以：$n=\frac{3}{5\%}=60$

2) 当r=4%的时候：$Q*5\%*n=4Q-Q$

所以：$n=\frac{3}{4\%}=75$

答：当利率为 5％的复利终值系数表可知最快于60年可以达到4倍。

利率为4％的复利终值系数表可知最快于75年可以达到4倍。

2、如果利率为年复合利率r，请给出一个公式，用它来估计要多少年才能使存款额变为原来的3倍。

解：依据公式和P3的(1—4)，可以得到：

$Q(1+r)^n=3Q$且$(1+r)^n=e^{nr}$

=>$(1+r)^n=3$且$(1+r)^n=e^{nr}$

且当n充分大时=>$(1+r)^n\approx e^{nr}$，则由题意得到$Q(1+r)^n=3Q$

=>$(1+r)^n=3$且$(1+r)^n\approx e^{nr}$，

近似$e^{nr}\approx 3$

$$n\approx\frac{ln3}{r}=\frac{ln3}{r}$$

3、考虑期权定价C问题，设利率为r，在t=0时刻，某股票价格为100元，在t=1时刻，该股票的价格为200或50，即

$$100(t=0)\begin{matrix}\nearrow 200\\ \searrow\ 50\end{matrix}\quad(t=1)$$

试证明：若$C\neq\frac{100-50(1+r)^{-1}}{3}$，则存在一个购买组合，使得在任何情况下都能带来正的利润现值，即套利发生。

解：依题意，可知：t=0时，S=100；t=1时，S_u=200，S_d=50

$C_u=max\{200-150,0\}=max\{50,0\}=50;$

$C_d=max\{50-150,0\}=max\{-100,0\}$

$=0;$

=>$\Delta=\frac{C_u-C_d}{S_u-S_d}=\frac{50-0}{200-50}=\frac{1}{3}$ ；

$B=\frac{C_d-S_d*\Delta}{1+r}=\frac{0-50*\frac{1}{3}}{1+r}=-\frac{50}{3*(1+r)}$

$C=S*\Delta+B=100*\frac{1}{3}+\left(-\frac{50}{3*(1+r)}\right)=\frac{100*(1+r)-50}{3*(1+r)}=\frac{100-50*(1+r)^{-1}}{3}$

答：所以在$C\neq\frac{100-50(1+r)^{-1}}{3}$的情况下，则存在一个购买组合，使得在任何情况下都能带来正的利润现值，即套利发生。

4、令C是一个买入期权的价格，S是该证券现在的价格，证明$C\le S$。

解:【知识小整理】买入期权价格也叫作看涨期权的价格。即赋予其持有者在到期日或到期日之前按一定的价格买入某种资产的权力。

权利金=内涵价值+时间价值

【内涵价值由标的物价格和执行价格决定，时间价格由剩余时间、利率、波动率等因素决定】

证明：如果$C\ge S$，则若看涨期权到期作废，其买方的损失将超过直接购买的物的损失，这便失去了期权投资的意义。投资者便不如直接购买标的物，损失更小而成本更低。所以权利金不应该高于标的物的市场价格。即通过期权方式取得标的物存在的潜在损失不应该高于市场上购买标的物所产生的最大损失。

期权未到期时是含有时间价值的，所以期权权利金的下限一定出现在到期日 T，此时没有时间价值如果在到期日T，标的物价格S≤执行价格 X，那么以执行价格行使看涨期权没有价值，即 C=0；如果在到期日 T，标的物价格S≥执行价格X，那么以执行价格行使看涨期权价值就等于标的物与期权执行价格的差，即 C=S-X 。

综上：$C\le S$。证明完毕。

5、设C是一个欧式卖入期权的价格，其敲定价格为K。再设P是一个欧式卖出期权的价格，其敲定价格也为K。期权的满期为T。设S是股票在0时刻的价格，利率为r，试说明，若下式

$$S+P-C=Ke^{-rT}$$

不成立，则一定存在套利机会。

解：证明：期权评价公式即$S+P=Ke^{-rT}+C$，如上所示。

假设：$S+P-C>Ke^{-rT}$为例，那么通过在0时刻购买一份股票，同时买入一个看涨的期权，并卖出一个看涨的期权，这个初始的投入$S+P-C$。

在T时刻卖出，如果$S(T)\le K$，那么买入的看涨期权无价值，则可以执行看跌期权，以价格K卖出。

如果$S(T)\ge K$，那么卖出的看跌期权无价值，则执行看涨期权，迫使以 K 卖出，由于$S<(S+P-C)e^{rT}$，我们都有正利润，即等式不成立，则一定存在套利的机会。

6、令C是一个买入期权的价格，这个期权可以在t时刻以价格K买入一个证券。S是证券现在的价格，r是利率。试写出一个包含C,S, Ke^{-rT}的不等式，并给出证明。

解：证明：$S-C<Ke^{-rT}$，在0时刻购买一个证券，同时购买一个看涨期权，这个初始的投入是$S-C$，是从银行存款并将在t时刻偿还。

在 t 时刻时，$s(t)>K$，看涨期权就将被执行，$K-(S-C)^n>0$，

所以$S-C<Ke^{-rT}$。