2021-2022 学年第一学期期末研究生随机过程试题回忆

1.课后题第 6 题总共 3 问

6. 记 $Z_i\,(i=1,2,\cdots)$ 为一串独立同分布的离散随机变量，$P\{Z_1=k\}=p_k\geqslant 0\,(k=0,1,2,\cdots)$，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k=1$.

$Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$

(1) 令 $X_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i\,(n=1,2,\cdots)$，并约定 $\boxed{X_0=0}$. 试证 X_n 为 Markov 链，并求其一步转移概率矩阵.

(2) 令 $X_n=Z_n\,(n=1,2,\cdots)$，试证 X_n 为 Markov 链，并求其一步转移概率矩阵.

(3) 令 $X_n=\max\{Z_1,\cdots,Z_n\}\,(n=1,2,\cdots)$，$\boxed{\text{并约定 } X_0=0}$，试证 X_n 为 Markov 链，并求其一步转移概率矩阵.

2.证明题

3. (15分) 设随机过程 $\{X_n\}$ 满足:

(1) $X_n=f(X_{n-1},\xi_n)\,(n\geq 1)$, 其中 $f:E\times E\to E$, 且 ξ_n 取值在 E 上;

(2) $\{\xi_n,n\geq 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n,n\geq 1\}$ 也相互独立.

证明: $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 而且其一步转移概率为, 对于任意 $i,j\in E$,

$$p_{ij}=P(f(i,\xi_1)=j).$$

3.证明题

1. (20分) 设 $\{N_t,t\geq 0\}$ 是参数 λ 的齐次 Poisson 过程, 设 $X_1(t)$ 为第一个事件来到的时刻. 证明条件随机变量 $(X_1|N_t=1)\sim U(0,t)$, 即服从区间 $(0,t)$ 上的均匀分布.

4.此题中的概率矩阵中的数值与试卷不同，不过题型一模一样

4. (20分)

(I) 设马尔科夫链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E=\{0,1,2,3\}$, 一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0\\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0\end{pmatrix},$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集; (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

(II) 设 Markov 链的状态空间 $E=\{0,1,2\}$, 其转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/3 & 1/6\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/6 & 1/2\end{pmatrix}.$$

(1) 判别以上 Markov 链是否具有平稳分布(写出理由); (2) 若具有平稳分布, 求平稳分布及 $\lim\limits_{n\to\infty}P^{(n)}$.

5.总共 3 小问

3. (20分) 设 $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t \geq 0$.

(1) 若 $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$(其中 $i = \sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.

(2) 若 $E(\xi^2) < \infty$, 试求 $E(Y_t)$, $\mathrm{Var}(Y_t)$.

(注: $\mathrm{Var}(Y_t) = E[\mathrm{Var}(Y_t|N_t)] + \mathrm{Var}[E(Y_t|N_t)]$.)

(3) 若ε 在 (a,b) 上服从均匀分布，即 ε~U(a,b)，则求 Yt 的数学期望 E(Yt)，方差 Var(Yt)，以及特征函数。