第 5 章

1. 对 Markov 链，$X_n(n\geq 0)$，试证条件

$$\mathrm{P}\left(X_{n+1}=j|X_0=i_0，\cdots X_{n-1}=i_{i-1}，X_n=i\right)=P(X_{n+1}=j|X_n=i) \qquad (1)$$

等价于对所有时刻 n，m 及所有状态i_0，$\cdots$，i_n，j_1，$\cdots$，j_m有

$$\mathrm{P}\left(X_{n+1}=j_1\cdots，X_{n+m}=j_m|X_0=i_0，\cdots，X_n=i_n，X_n=i_n\right)=$$
$$\mathrm{P}\left(X_{n+1}=j_1\cdots，X_{n+m}=j_m|X_n=i_n\right) \qquad (2)$$

解：证明：

$(\Rightarrow)\mathrm{P}\left(X_{n+1}=j_1\cdots，X_{n+m}=j_m|X_n=i_n\right)$

$$=\frac{\mathrm{P}\left(X_0=i_0，\cdots，X_n=i_n，X_{n+1}=j_1，\cdots，X_{n+m}=j_m\right)}{P\left(X_0=i_0，\cdots，X_n=i_n\right)}$$

$$=\frac{P\left(X_{n+m}=j_m|X_{n+m-1}=j_{m-1}，\cdots，X_n=i_n，\cdots，X_0=i_0\right)P\left(X_{n+m-1}=j_{m-1}，\cdots，X_n=i_n，\cdots，X_0=i_0\right)}{P\left(X_0=i_0，\cdots，X_n=i_n\right)}$$

由(1)得到：

$$\frac{P\left(X_{n+m}=j_m|X_{n+m-1}=j_{m-1}，\cdots，X_n=i_n，\cdots，X_0=i_0\right)P\left(X_{n+m-1}=j_{m-1}，\cdots，X_n=i_n，\cdots，X_0=i_0\right)}{P\left(X_0=i_0，\cdots，X_n=i_n\right)}$$

$$=\frac{P(X_{n+m}=j_m|X_{n+m-1}=j_{m-1})\cdots\mathrm{P}(X_{n+1}=j_1|X_n=i_n)P\left(X_0=i_0，\cdots，X_n=i_n\right)}{P\left(X_0=i_0，\cdots，X_n=i_n\right)}$$

$=P(X_{n+m}=j_m|X_{n+m-1}=j_{m-1})\mathrm{P}(X_{n+m-1}=j_{m-1}|X_{n+m-2}=i_{m-2})\cdots P(X_{n+1}=j_1|X_n=i_n)$

$=P\left(X_{n+m}=j_m|X_{n+m-1}=j_{m-1}\right)\cdots\mathrm{P}\left(X_{n+2}=j_2，X_{n+1}=j_1|X_n=i_n\right)$

$=\cdots\cdots=\mathrm{P}\left(X=j_m\cdots，X_{n+1}=j_1|X_n=i_n\right)$

$(\Leftarrow)$在(2)中取 $\mathrm{m}=1$，即(1)

2. 考虑状态 0，1，2 上的一个 Markov 链$X_n(n\geq 0)$，它有转移概率矩阵 P，

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1 & 0.7\\ 0.8 & 0.2 & 0\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\end{pmatrix}$$

初始分布为 $p_0=0.4，p_1=0.4，p_2=0.2$ 。试求概率 $\mathrm{P}(X_0=0，X_1=1，X_2=2)$ 。

解：$\mathrm{P}\left(X_0=0，X_1=1，X_2=2\right)=\mathrm{P}(X_2=2\mid X_1=1)\mathrm{P}(X_1=1\mid X_0=0)\mathrm{P}(X_0=0)$

转移概率矩阵可得：$p_{01}=0.1，p_{12}=0$

所以 $\mathrm{P}\left(X_0=0，X_1=1，X_2=2\right)=0\times 0.1\times 0.4=0$

3. 从 1,2,3,4,5,6 中，等可能地取出 1 个数，取后放回，连续去下去，若在前 *n* 次所取得的最大数为 *j*，就说“质点”在第 *n* 步处于状态 *j*，该“质点”运动构成一个 Markov 链，试求一步转移概率矩阵。

解：下面记a_{ij}为矩阵中第 i 行,第 j 列元素

$i=1,j=1$表示直到第 n 步最大数是 1,第 n + 1 步也是 1

概率为 1/6,j = 2,3,⋯⋯,6 的概率也是 1

所以 $a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{16}=\frac{1}{6}$

如此类推 $a_{22}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},a_{33}=\frac{1}{2},a_{44}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},a_{55}=\frac{5}{6},a_{66}=\frac{6}{6}=1$

而当 j > i 时,$a_{ij}=\frac{1}{6}$,j 可知一步转移矩阵是上三角矩阵,对角线上元素分别为$\frac{1}{6},\frac{2}{6}, \quad ,1$，右上方元素全是$\frac{1}{6}$。

$$
\text{概率转移矩阵}\quad \mathrm{P}=\begin{pmatrix}
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\
 & & & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\
 & 0 & & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6}\\
 & & & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

4.（1）A，B 两罐总共装着 N 个球，在时刻 n 先从 N 个球中等概率地任取一球；然后从 A，B 两罐中任选一个，选中 A 的概率为 p，选中 B 的概率为 1-p；之后再将选出的球放入选好的罐中。设X_n为每次试验时 A 罐中的球数，试求次 Markov 链的转移概率矩阵。

（2）重复投掷一枚质地均匀的硬币直到连续出现两次正面为止，试引入以连续出现次数为状态空间的 Markov 链，并求出平均需要掷多少次实验才可以结束。

解：

（1）
$$p_{ii}=\frac{1}{N}\left(ip+\left(N-i\right)\left(1-p\right)\right)$$

$$p_{i,i+1}=\frac{N-i}{N}p\text{，}\quad p_{i,i-1}=\frac{i}{N}\left(1-p\right)$$

当$\left|i-j\right|>1$时，$p_{ij}=0$。

（2）用X_n表示第 n 次掷币时连续出现两次正面的次数，掷出反面的次数为 0，显然，当给定X_n时，X_{n+1}与X_{n-1}，…，X_1无关，故$\{X_n\}$为 Markov 链，且为时齐的。因为只要没有掷出两次正面，过程都与时刻 n 无关，一般转移概率阵

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$X_{n+1}=\begin{cases}X_{n+1} & \text{第 n + 1 次出现正面}\\ X_n & \text{第 n + 1 次出现反面}\end{cases}\text{，}\ \mathrm{N}=\inf\{n{:}X_n=2\}$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{N}=2\right)=\mathrm{P}\left(X_1=1\text{，}X_2=2\right)=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{N}=3\right)=\mathrm{P}\left(X_3=2\text{，}X_2=1\text{，}X_1=0\right)=\frac{1}{8}$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{N}=4\right)=\mathrm{P}\left(X_4=2\text{，}X_3=1\text{，}X_2=0\text{，}X_1=0\right)+\mathrm{P}\left(X_4=2\text{，}X_3=1\text{，}X_2=0\text{，}X_1=1\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(X_4=2\text{，}X_3=1\text{，}X_2=0\right)=\frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned}P(N=5)&=P(X_5=2，X_4=1，X_3=0，X_2=0，X_1=0)\\&\quad+P(X_5=2，X_4=1，X_3=0，X_2=0，X_1=1)\\&\quad+P(X_5=2，X_4=1，X_3=0，X_2=1，X_1=0)\\&=P(X_5=2，X_4=1，X_3=0，X_2=0)+P(X_5=2，X_4=1，X_3=0，X_2=1，X_1=0)\\&=P(X_5=2\mid X_4=1)P(X_4=1|X_3=0)P(X_3=0|X_2=0)P(X_2=0)\\&\quad+P(X_5=2|X_4=1)P(X_4=1|X_3=0)P(X_3=0|X_2=1)P(X_2=1|X_1=0)P(X_1=0)\\&=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(N=6)&=P(X_6=2，X_5=1，X_4=0，X_3=0，X_2=0，X_1=0)+P(X_6=2,X_5=1,X_4=0,X_3=0,X_2=0,X_1=1)\\&\quad+P(X_6=2，X_5=1，X_4=0，X_3=0，X_2=1，X_1=0)+P(X_6=2,X_5=1,X_4=0,X_3=1,X_2=0,X_1=0)\\&\quad+P(X_6=2，X_5=1，X_4=0，X_3=1，X_2=0，X_1=1)\\&=P(X_6=2，X_5=1，X_4=0，X_3=0，X_2=0)+P(X_6=2,X_5=1,X_4=0,X_3=0,X_2=1,X_1=0)\\&=P(X_6=2，X_5=1，X_4=0，X_3=0，X_2=0)+P(X_6=2,X_5=1,X_4=0,X_3=0,X_2=1,X_1=0)\\&\quad+P(X_6=2，X_5=1，X_4=0，X_3=1，X_2=0)\\&=\frac{1}{32}\times 2+\frac{1}{64}=\frac{5}{2^6}\end{aligned}$$

$$E(N)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{2^3}+5\times\frac{3}{2^5}$$

平均需要掷 6 次实验才可以结束

5.设 Markov 链X_n(n ≥ 0)有状态 1,2,3 和一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0.5&0.5&0\\0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\end{pmatrix}$$

已知$X_0=3$，即初始分布矩阵为$p_1=p_2=0$，$p_3=1$。试求

（1）三步转移概率矩阵。

（2）经三步转移以后处于状态 2 的概率。

解：（1）$P^{(2)}=PP=\begin{pmatrix}0.5&0.5&0\\0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5&0.5&0\\0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25&0.5&0.25\\0.25&0.25&0.5\\0.5&0.25&0.25\end{pmatrix}$

$P^{(3)}=P^{(2)}P=\begin{pmatrix}0.25&0.5&0.25\\0.25&0.25&0.5\\0.5&0.25&0.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5&0.5&0\\0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25&0.375&0.375\\0.375&0.25&0.375\\0.375&0.375&0.25\end{pmatrix}$

（2）初始分布矩阵为$p_1=p_2=0$，$p_3=1$ 时，

$$\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.25&0.375&0.375\\0.375&0.25&0.375\\0.375&0.375&0.25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.375&0.375&0.25\end{pmatrix}$$

经三步转移以后处于状态 2 的概率为 0.375

6. 记 $Z_i(i=1,2,\ \ )$ 为一串独立同分布的离散随机变量，$P\{Z_1=k\}=p_k\geq 0\ \ (k=0,1,2,)$,$\sum_{i=0}^{\infty}p_k=1$

(1) 令$X_n=\sum_{i=1}^{n} z_i,(n=1,2,\ )$，并约定$X_0=0$试证$X_n$为$Markov$链，并求其一步转移概率矩阵。

(2) 令$X_n=Z_n,(n=1,2,\ )$，试证X_n为$Markov$链,并求其一步转移概率矩阵。 ，

(3) 令$X_n=\max\{Z_1,\ ,Z_n\}\ \ (n=1,2,\ )$并使$X_0=0$，试证$X_n$为$Markov$链，并求其一步转移概率矩阵。

解：（1）由题意$X_{n+1}=X_n+Z_{n+1},n=0,1,2,$ ，且Z_{n+1}与X_0， ，$X_{n\text{-}1}$，X_n独立，则有

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=j\mid X_0=i_0,\quad ,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=P(X_n+Z_{n+1}=j\mid X_0=i_0,\quad ,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)\\
&=P(i+Z_{n+1}=j\mid X_0=i_0,\quad ,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=P(Z_{n+1}=j-i)=P(i+Z_{n+1}=j\mid X_n=i)\\
&=P(X_n+Z_{n+1}=j\mid X_n=i)=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)
\end{aligned}
$$

即X_n为 Markov 链其转移概率矩阵为 $P=(p_{ij})$

$$
p_{ij}=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)=P(Z_{n+1}=j-i)=\begin{cases} p_{j-i}, j\ge i\\ 0, j<i\end{cases}，\ \forall i,j=0,1,2,
$$

（2）$\mathrm{P}(X_n=k|X_{n-1}=i)=P(Z_n=k|Z_{n-1}=i)=\frac{P(Z_n=\mathrm{k}，Z_{n-1}=\mathrm{i})}{P(Z_{n-1}=\mathrm{i})}$

因为Z_i独立同分布，上式$=\frac{P(Z_n=\mathrm{k})\mathrm{P}(Z_{n-1}=\mathrm{i})}{P(Z_{n-1}=\mathrm{i})}=P(Z_n=k)=p_k$

即$p_{ik}=p_k$，i，k = 0，1，2⋯

（3）同(1)(2)易证X_n为 Markov 链。

$$
\mathrm{P}(X_{n+1}=j|X_n=0)=\begin{cases}1，\mathrm{j}=0\\ 0，\mathrm{j}>0\end{cases}
$$

$$
\mathrm{P}(X_{n+1}=j|X_n=1)=\begin{cases}p_0，\mathrm{j}=0\\ 1-p_0\ ，\mathrm{j}=1\\ 0，\mathrm{j}>1\end{cases}
$$

$$
\mathrm{P}(X_{n+1}=j|X_n=i)=\begin{cases}p_0，\mathrm{j}=0\\ p_1，\mathrm{j}=1\\ p_{i-1}，\mathrm{j}=\mathrm{i}-1，\mathrm{i}=1，2\\ 1-\sum_{k=0}^{i-1}p_i，\mathrm{j}=\mathrm{i}\\ 0，\mathrm{j}>\mathrm{i}\end{cases}
$$

$$
\mathrm{P}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
p_0 & 1-p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
p_0 & p_1 & 1-p_0-p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\\
p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & 1-\sum_{k=0}^{i-1}p_k & \cdots\\
\vdots & \vdots & & & & & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{pmatrix}
$$

7.Markov 链的转移概率矩阵为

$$p=\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \quad (p_i+q_i=1 \quad ,i=1,2,3)$$

试求 $f_{11}{}^{(n)}, f_{12}{}^{(n)} \quad (n=1,2,3)$ 并说明状态是否具有周期性。

解：$\mathrm{f}_{11}^{(1)}=p_1$

$$=p_{11}{}^{(2)}-\sum_{m=1}^{1}\mathrm{f}_{11}^{(\mathrm{m})}p_{11}{}^{2-m}=p_1p_1-\mathrm{f}_{11}^{(1)}p_{11}=0$$

$$\mathrm{f}_{11}^{(3)}=p_{11}{}^{(3)}-\sum_{m=1}^{2}\mathrm{f}_{11}^{(\mathrm{m})}p_{11}{}^{3-m}=p_{11}{}^{(3)}-\mathrm{f}_{11}^{(1)}p_{11}{}^{(2)}-\mathrm{f}_{11}^{(2)}p_{11}{}^{(1)}=q_1q_2q_3$$

$$\mathrm{f}_{12}^{(1)}=q_1$$

$$\mathrm{f}_{12}^{(2)}=p_{12}{}^{(2)}-\sum_{m=1}^{1}\mathrm{f}_{12}^{(\mathrm{m})}p_{12}{}^{2-m}=p_1q_1+q_1p_2-\mathrm{f}_{12}^{(1)}p_{22}=p_1q_1$$

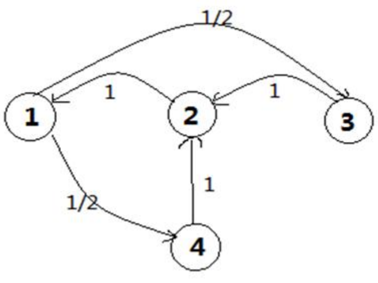
$$\mathrm{f}_{12}^{(3)}=p_{12}{}^{(3)}-\sum_{m=1}^{2}\mathrm{f}_{12}^{(\mathrm{m})}p_{12}{}^{3-m}=p_{12}{}^{(3)}-\mathrm{f}_{22}^{(1)}p_{22}{}^{(2)}-\mathrm{f}_{22}^{(2)}p_{22}{}^{(1)}=p_1{}^2q_1$$

可得出 $d(i)=1, i=1,2,3$，即状态 1,2,3 均为非周期性的。

8.讨论下面给出的转移概率矩阵对应的 Markov 链的状态分类，周期性及平稳发布

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解：



1）依题意可得状态间的传递图为上述所示：

因为：状态 1→状态 2→状态 3→状态 4

类似的，此键的每一状态都可以达到另一状态，即 4 个状态互通。

所以，只需要考虑 1 是否常返。

$\mathrm{f}_{11}^{(1)}=0$

$\mathrm{f}_{11}^{(2)}=P\{X_2=1,X_1\neq 1|X_0=1\}$

$=\mathrm{P}\{X_2=1,,X_1=2|X_0=1\}+\mathrm{P}\{X_2=1,,X_1=3|X_0=1\}+P\{X_2=1,,X_1=4|X_0=1\}$

$=0$

$\mathrm{f}_{11}^{(3)}=\frac{1}{2}\times 1\times 1+\frac{1}{2}\times 1\times 1=1$

$\mathrm{f}_{11}^{(4)}$ =0

所以：$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{f}_{11}^{(\mathrm{n})}=0+0+1+0=1$

则，状态 1 为常返状态。

又因为，$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{nf}_{11}^{(\mathrm{n})}=1\times\mathrm{f}_{11}^{(1)}+2\times\mathrm{f}_{11}^{(2)}+3\times\mathrm{f}_{11}^{(3)}+4\times\mathrm{f}_{11}^{(4)}$

$=0+0+3\times 1+0=3<\infty$

所以状态 1 为正常返状态。

依据定理可得，Markov 链的为正常返状态。

2）周期性：$1 \to 3 \to 2 \to 1$

$1 \to 4 \to 2 \to 1$

由此可见，1 为正常返状态，并且周期为 3，含 1 的基本常返闭集为

$C_1 = \{k{:}1 \to k\} = \{1,2,3,4\}$

⇒依据定理，状态 2,3,4 的周期也为 3。

3）依题意可得方程组

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_2 = \pi_3 + \pi_4 \\ \pi_3 = \pi_1 \times \dfrac{1}{2} \\ \pi_4 = \pi_1 \times \dfrac{1}{2} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + 1 \end{cases}$$

解方程组得 $\pi_1 = \pi_2 = \dfrac{1}{3}$，$\pi_3 = \pi_4 = \dfrac{1}{6}$

9.(1)设马氏链{ X_n }的状态空间 E={1,2,3,4}转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

试分解此链，指出其非常返集和基本常返闭集，并说明常返闭集中的状态是否为正常返态。

(2)设马氏链{ X_n }的状态空间 E={0，1，2)，转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

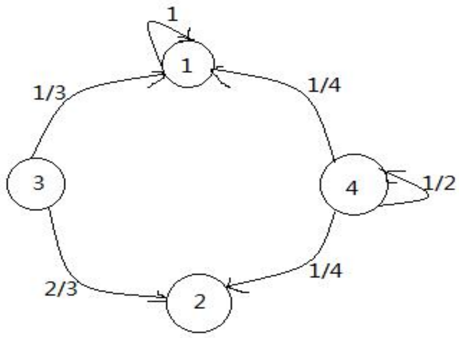
初始分布 $p_0 = p_1 = p_2 = \dfrac{1}{3}$，其中 $p_i = P(X_0 = i)\ (i = 0,1,2)$ 。

试求 $P(X_0 = 0，X_1 = 1，X_2 = 2)$ 和 $P(X_0 = 1，X_1 = 1，X_3 = 1)$ 。

解：

(1) （1）转移概率图如下所示：

解：



由上图可知：$f_{11}^{(1)} = 1$；$f_{11}^{(n)} = 0, n \neq 1$

所以$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{n} = 1 \times 1 = 1 < \infty$

可见 1 为正常返状态。含 1 的基本常返闭集为

$$C_1 = \{k{:}1 \to k\} = \{1\}$$

N = {3，4}，$C_1 = \{1\}$，$C_2 = \{2\}$，状态“1,2”为吸收态，是正常返态，非周期。

所以，E=N+C_1+C_2={3，4}+{1} + {2}

（2）

$$P(X_0 = 0，X_1 = 1，X_2 = 2) = P(X_2 = 2|X_1 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_0 = 0)$$

由转移概率矩阵可得：$p_{01} = \dfrac{1}{4}$，$p_{12} = \dfrac{1}{4}$

所以 $P(X_0 = 0，X_1 = 1，X_2 = 2) = 1/3 \times 1/4 \times 1/4 = 1/48$

$P(X_0 = 0，X_1 = 1，X_2 = 1) = P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_0 = 0)$由转移概率矩阵可得：

$p_{01} = \dfrac{1}{4}$，$p_{11} = \dfrac{1}{2}$

所以$P(X_0 = 1，X_1 = 1，X_2 = 1) = 1/3 \times 1/2 \times 1/2 = 1/12$

10.设三个 Markov 链的转移概率矩阵分别为：

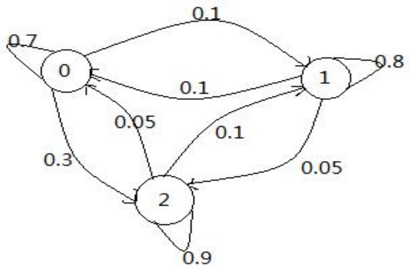
$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.005 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(1)分别判别以上三个 Markov 链是否具有平稳分布(写出理由);

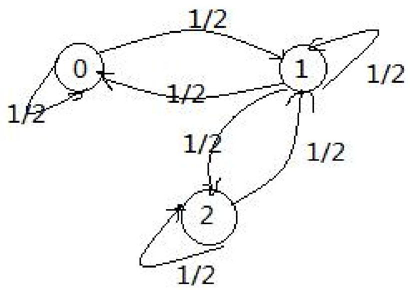
(2)若具有平稳分布，求 Markov 链的平稳分布及各状态的平均返回时间

解：

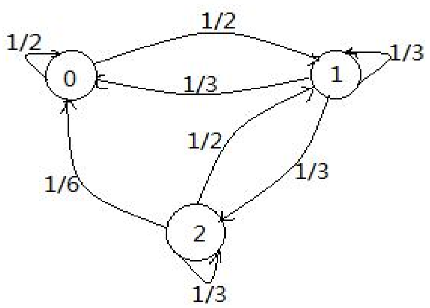


（1）

1) 由矩阵可得状态转换图（上图）：
   状态 0→状态 1→状态 2；且状态 2→状态 1→状态 0
   类似的，此键的每一状态都可以达到另一状态，即 3 个状态均互通。
   又因为，由于 S 的任意状态 i(i=0,1,2)不能达到 S 以外的任何状态
   所以，S 为一个闭集，并且 S 中无其他的闭集。
   ⇒ 马氏链是不可约的
   从转移概率矩阵传递图中，该链为不可约，非周期的有限马氏链
   ⇒ 存在平稳分布
2) 同上可证：该链也是不可约，非周期的有限马氏链
   ⇒ 存在平稳分布（下图是该矩阵的状态转移传递图）



3) 同上可证：该链也是不可约，非周期的有限马氏链
   ⇒ 存在平稳分布（下图是该矩阵的状态转移传递图）



（2）

1）得方程组如下：

$0.7\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.05\pi_3 = \pi_1$

$0.1\pi_1 + 0.8\pi_2 + 0.05\pi_3 = \pi_2$

$0.2\pi_1+0.1\pi_2+0.9\pi_3=\pi_3$

$\pi_1+\pi_2+\pi_3=\pi_1$

解得： $\pi_1=0.1765$　　$\pi_2=0.2353$ $\pi_3=0.5882$

$$\therefore(\pi_1，\ \pi_2，\ \pi_3)=(0.1765，0.2353，0.5882)$$

状态 1,2,3,4 的平均返回时间分别为：5.6657，4.2499，1.7001

2）得方程组如下：

$\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2=\pi_1$

$\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_3=\pi_2$

$\frac{1}{2}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3=\pi_3$

$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$

解得：$\pi_1=\pi_2=\pi_3=\frac{1}{3}$

$$\therefore(\pi_1，\ \pi_2，\ \pi_3)=(\frac{1}{3}，\ \frac{1}{3}，\ \frac{1}{3})$$

状态 1,2,3,4 的平均返回时间分别为：3，3，3

3）得方程组如下：

$\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{6}\pi_3=\pi_1$

$\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_3=\pi_2$

$\frac{1}{3}\pi_2+\frac{1}{3}\pi_3=\pi_3$

$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$

解得：$\pi_1=\frac{5}{14}$　　$\pi_2=\frac{6}{14}$ $\pi_3=\frac{3}{14}$

$$\therefore(\pi_1，\ \pi_2，\ \pi_3)=(\frac{5}{14}，\ \frac{6}{14}，\ \frac{3}{14})$$

状态 1,2,3,4 的平均返回时间分别为：$\frac{14}{5}$，$\frac{14}{6}$，$\frac{14}{3}$

11.设 Markov 链 Xn(n>=0)有状态 1，2 和一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

初始分布为 $p1=p,p2=1-p\quad(0<p<1)$，对任意 n>=1，试求：

（1） $P(X_{n+2}=2\,|\,X_n=1)$；

（2） $P(X_n=1)$；

（3） 该链是否具有遍历性？为什么？

（4） 极限分布

解：（1）由二步转移概率矩阵 $p^{(2)}=pp=\begin{pmatrix}\frac{11}{18} & \frac{7}{18}\\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12}\end{pmatrix}$

故有：$P(X_{n+2}=2\mid X_n=1)=p_{12}{}^{(2)}=\dfrac{7}{18}$

(2) $P(X_n=1)=\dfrac{3}{5}+（-\dfrac{1}{6})^n(p-\dfrac{3}{5})$

(3)由题有 $p^{(2)}=\begin{pmatrix}\dfrac{11}{18} & \dfrac{7}{18}\\ \dfrac{7}{12} & \dfrac{5}{12}\end{pmatrix}$

故该链具有遍历性

(4)求解方程组：$\begin{cases}\dfrac{2}{3}\pi_1+\dfrac{1}{2}\pi_2=\pi_1\\ \dfrac{1}{3}\pi_1+\dfrac{1}{2}\pi_2=\pi_2\\ \pi_1+\pi_2=1\end{cases}$ 得 $\pi_1=\dfrac{3}{5}$，$\pi_2=\dfrac{2}{5}$

故极限分布为：（$\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5}$）

12.某人有 r 把伞用于上下班，如果有一天的开始（结束）他是在家（办公室）中而且天下雨，只要有伞可取到，他就拿一把到办公室（家）中，如果天不下雨，那么他绝不带伞。假设一天的开始（结束）下雨的概率为 p，且与过去的情况独立。

（1）定义一个有 r+1 个状态的 Markov 链以研究此人被淋湿的机会

（2）求极限分布

（3）此人被淋湿的机会

解：

（1）设{Xn}为此人在第 n 天身边拥有的雨伞数，则 I={0，1，2，…，r}，注意到下雨才用伞，而每天的开始下不下雨与之前独立，即知{Xn，n>=0}为 Markov 链，该链的下一步转移概率为 pi,r-i+1=p（因每天开始时下雨的概率即带伞的概率），pi,r-i=1-p,i=1,2,…,r；p0,r=1（在这种情况下，下雨不下雨都可能），于是

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1-p & p\\ 0 & 0 & \dots & 1-p & p & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1-p & p & \dots & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

（2）计算极限分布的状态方程

$$\pi 0=(1-p)\pi r$$

$$\pi j=(1-p)\pi r-j+p\pi r-j+1, j=1,2,\dots,r-1$$

$$\pi r=\pi 0+p\pi 1$$

$$\pi 0+\pi 1+\pi 2+\dots+\pi r=1$$

记 q=1-p，解之得

$$\pi_i=\begin{cases}\dfrac{q}{r+q}, & 若 i=0\\ \dfrac{1}{r+q}, & 若 i=1, 2, ..., r\end{cases}$$

显然处于π_0的极限状态下才可能被淋湿，但每天的开始（结束）下雨的概率为p，所以此人被雨淋湿的平均次数所占比率即被淋湿的概率为$p_{\pi_0}=\dfrac{pq}{r+q}=\dfrac{p(1-p)}{r+1-p}$

13.试证二维对称随机游动是常返链，而三维对称随机游动是非常返链

解：证明：

1）设质点的位置是平面上的整数格点,每个格点有 4 个相邻的位置,质点分别以 1/4 的概率转移到这 4 个相邻位置中的每一个整数格点上。任意两个整数格点都是互通的，从而二维对称随机游动为不可约马氏链。其周期为 2。考查各整数格点的常返性，只需考查原点的常返性即可。

记质点从原点出发经过 2n 步回到原点的概率为 . 此时质点必须在 x 轴上向右移动 i 步,向左移动 i 步;在 y 轴上向上移动 j 步,向下也移动 j 步,并且 i+j=n 。所以有

$$P_{00}(2\text{n})=\sum_{i=0}^{n}C_{2n}^{i}(\frac{1}{4})^{i}C_{2n-i}^{i}(\frac{1}{4})^{i}C_{2n-2i}^{n-i}(\frac{1}{4})^{n-i}C_{n-i}^{n-i}(\frac{1}{4})^{n-i}$$

$$=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{i=0}^{n}\frac{(2\text{n})!}{[\text{i}!(\text{n}-\text{i})!]^2}=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{i=0}^{n}\frac{(2\text{n})!}{n!\,n!}.\frac{n!\,n!}{[\text{i}!(\text{n}-\text{i})!]^2}$$

$$=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{i=0}^{n}C_{2n}^{n}.(C_n^i)^2=\frac{C_{2n}^{n}}{4^{2n}}\sum_{i=0}^{n}(C_n^i)^2=\frac{[C_{2n}^{n}]^2}{4^{2n}}$$

由string公式，当n充分大时, $n!\approx\dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$

从而当n充分大时，$\text{P}_{00}(2\text{n})=\dfrac{[C_{2n}^{n}]^2}{4^{2n}}\approx\dfrac{1}{4^{2n}}\left[\dfrac{\dfrac{(2\text{n})^{2n}\sqrt{4\pi n}}{e^{2n}}}{\dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}.\dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}}\right]^2=\dfrac{1}{n\pi}$

级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\text{n}\pi\to+\infty$,从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_{00}(\text{n})\to+\infty$

即原点为常返态，即二维对称随机游动是常返链

（2）讨论三维空间上的对称随机游动的常返性。质点的位置是空间上的整格点，每个位置有 6 个相邻的位置，质点分别以 1/6 的概率转移到这 6 个相邻位置中的每一个整格上.

同上，三维空间上的对称随机游动也是不可约马氏链，其周期为 2。记质点从原点出发经过 2n 步回到原点的概率为 . 此时质点必须在 x 轴上向右移动 i 步,向左移动 i 步;在 y 轴上向上移动 j 步,向下也移动 j 步, 在 z 轴上向上移动 k 步,向下也移动 k 步并且 i+j+k=n 。所以有

$$P_{00}(2\mathrm{n})=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}C_{2n}^{i}(\frac{1}{6})^{i}C_{2n-i}^{i}(\frac{1}{6})^{i}C_{2n-2j}^{j}(\frac{1}{6})^{j}C_{2n-2i-j}^{j}(\frac{1}{6})^{j}C_{2n-2i-2j}^{n-i-j}(\frac{1}{6})^{n-i-j}C_{n-i-j}^{n-i-j}(\frac{1}{6})^{n-i-j}$$

$$=(\frac{1}{6})^{2n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{2n!}{i!(2\mathrm{n-i})!}.\frac{(2\mathrm{n-i})!}{i!(2\mathrm{n-2i})!}.\frac{(2\mathrm{n-2i})!}{j!(2\mathrm{n}-2i-j)!}.\frac{(2\mathrm{n}-2i-j)!}{j!(2\mathrm{n}-2i-j)!}.\frac{(2\mathrm{n}-2i-j)!}{(\mathrm{n-i-j})!(\mathrm{n-i-j})!}$$

$$=(\frac{1}{6})^{2\mathrm{n}}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{2n!}{[\mathrm{i!j!(n-i-j)!}]^{2}}=(\frac{1}{6})^{2\mathrm{n}}C_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}[\frac{n!}{i!\,j!(\mathrm{n-i-j})!}]^{2}$$

$$=(\frac{1}{6})^{2\mathrm{n}}C_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}[\mathrm{C}_{n}^{i}\mathrm{C}_{n-i}^{j}]^{2}=(\frac{1}{6})^{2\mathrm{n}}C_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{n}[\mathrm{C}_{n}^{i}]^{2}\sum_{j=0}^{n=i}[\mathrm{C}_{n-i}^{j}]^{2}$$

$$=(\frac{1}{6})^{2\mathrm{n}}C_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{n}[\mathrm{C}_{n}^{i}]^{2}C_{2(\mathrm{n-i})}^{n-i}$$

$[\mathrm{C}_{n}^{i}]^{2}C_{2(\mathrm{n-i})}^{n-i}\le[\frac{C_{n}^{i}+C_{n}^{i}+C_{2(\mathrm{n-i})}^{n-i}}{3}]^{3}$,等号当且仅当$C_{n}^{i}=C_{n}^{i}=C_{2(\mathrm{n-i})}^{n-i}$即$n=2i$时成立。

故$[\mathrm{C}_{n}^{i}]^{2}C_{2(\mathrm{n-i})}^{n-i}\le[\mathrm{C}_{n}^{\frac{n}{2}}]^{3}$

从而$P_{00}(2\mathrm{n})=(\frac{1}{6})^{2n}C_{2n}^{n}\sum_{i=0}^{n}[\mathrm{C}_{n}^{i}]^{2}C_{2(\mathrm{n-i})}^{n-i}\le(\frac{1}{6})^{2n}C_{2n}^{n}[\mathrm{C}_{n}^{\frac{\mathrm{n}}{2}}]^{3}(\mathrm{n+1})$

当n充分大时,$(\frac{1}{6})^{2n}C_{2n}^{n}[\mathrm{C}_{n}^{\frac{\mathrm{n}}{2}}]^{3}(\mathrm{n+1})\approx(\frac{1}{6})^{2n}\frac{\frac{(2\mathrm{n})^{2n}\sqrt{4\pi n}}{e^{2n}}}{\frac{n^{n}\sqrt{2\pi n}}{e^{n}}.\frac{n^{n}\sqrt{2\pi n}}{e^{n}}}[\frac{\frac{n^{n}\sqrt{2\pi n}}{e^{n}}}{\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi n}}{e^{\frac{n}{2}}}.\frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi n}}{e^{\frac{n}{2}}}}]^{3}(\mathrm{n+1})$

$$\approx(\frac{8}{9})^{n}\frac{2\sqrt{2}}{\pi^{2}n}$$

级数$\sum_{\mathrm{n=1}}^{+\infty}(\frac{8}{9})^{n}\frac{2\sqrt{2}}{\pi^{2}n}$收敛，故$\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}P_{00}(\mathrm{n})$收敛。即原点为非常返状态。

所以三维空间上的对称随机游动是非常返的。

14.设 Markov 链的状态空间为 E={0,1,2,…},对于 k=0，1，2，…，链有转移概率

$$p_{k0}=\frac{k+1}{k+2},p_{k,k+1}=\frac{1}{k+2}$$

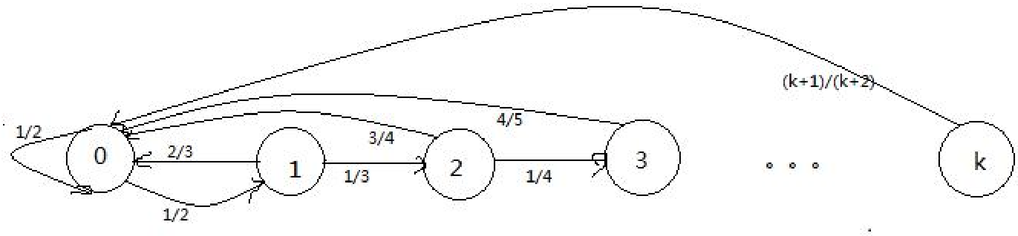
求 Markov 链的转移概率矩阵，并讨论其可约性、周期性、常返性。判断其是否存在平稳分布，若存在，则求之。

解：

由题意：$p_{k0}=\frac{k+1}{k+2},p_{k,k+1}=\frac{1}{k+2}$，得：

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&\dots\\\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\dots\\\frac{3}{4}&0&0&\frac{1}{4}&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{bmatrix}$$

概率转移图如下：



该链不可约，非周期，正常返。

存在极限分布。

$$\frac{1}{2}\pi_1+\frac{2}{3}\pi_2+\cdots+\frac{k+1}{k+2}\pi_k+\frac{k+2}{k+3}\pi_{k+1}=\pi_1$$

$$\frac{1}{2}\pi_1=\pi_2$$

$$\frac{1}{3}\pi_2=\pi_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{k+1}\pi_k=\pi_{k+1}$$

$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\cdots+\pi_k+\pi_{k+1}=1\cdots\cdots(1)$

由上易知：

$$\pi_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}\pi_1(\,k=0,1,2\cdots)$$

由(1)得到：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi_1}{(k+1)!}=\pi_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\right)=\pi_1\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)=1$$

又因为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=e-1$$

综上：$\pi_1=\frac{1}{\mathrm{e}-1}$

$$\pi_{k+1}=\frac{1}{(\mathrm{e}-1)(k+1)!}(\,k=0,1,2\cdots)$$

其平稳分布为：$\left\{\dfrac{1}{(e-1)(k+1)!},k\geq 0\right\}$