北京交通大学

2017-2018 学年第一学期研究生随机过程I试题

姓名: ____________ 学院: __________ 任课教师: ____________

专业: ____________ 班级: __________ 学号: ______________

(注：本试卷满分100 分, 共五道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (20分) 设在 $[0,t]$ 内事件 A 已经发生 n 次, 求第 $k(k<n)$ 次事件 A 发生的时间 S_k 的条件概率密度函数.（其中等待时间 S_n 服从参数为 n,λ 的 Γ 分布, 即分布密度为$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t\geq 0$.）

2. (20分) A, B 两罐总共装着 N 个球, 在时刻 n 先从 N 个球中等概率地任取一球. 然后从 A, B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p, 选中 B 的概率为 $1-p$. 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试详细求此 Markov 链的转移概率矩阵.

3. (20分) 设 Markov 链 $X_n,\ n\geq 0$ 的状态空间$E=\{1,2,3\}$和一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

初始分布为 $P(X_0=1)=P(X_0=2)=P(X_0=3)=1/3$. 对任意 $n\geq 1$, 试求: (1) $P(X_{n+2}=2|X_n=1)$; (2) $P(X_3=1)$(写出计算步骤); (3) 该链是否具有平稳分布? 为什么? (4) 是否具有极限分布? 若有则求出.

4. (20分)

(I) 设马尔科夫链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E=\{0,1,2,3\}$, 一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集; (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

(II) 设 Markov 链的状态空间 $E=\{1,2,3\}$, 其转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(1) 判别以上 Markov 链是否具有平稳分布(写出理由); (2) 若具有平稳分布, 求平稳分布及 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$.

5. (20分) 设 $Y_t=\sum\limits_{n=1}^{N_t}\xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t\geq 0$.

(1) 若 $\varphi_\xi(u)\triangleq Ee^{iu\xi}$(其中 $i=\sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.

(2) 若 $E(\xi^2)<\infty$, 试求 $E(Y_t)$, $\mathrm{Var}(Y_t)$.

(注：$\mathrm{Var}(Y_t)=E[\mathrm{Var}(Y_t|N_t)]+\mathrm{Var}[E(Y_t|N_t)]$.)

北京交通大学

2015-2016 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: __________任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: __________ 学号: ________________

(注：本试卷满分100 分, 共五道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (20分) 设 $\{N_t, t \geq 0\}$ 是参数 λ 的齐次 Poisson 过程, 设 $X_1(t)$ 为第一个事件来到的时刻. 证明条件随机变量 $(X_1|N_t = 1) \sim U(0, t)$, 即服从区间 $(0, t)$ 上的均匀分布.

2. (20分) 对于任意的整数 $n, m \geq 0$ 及 $i, j \in E$ (E 为状态空间). (1) 证明: 转移概率具有

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)};$$

(2) 并叙述上式直观意义.

3. (20分) 设随机过程 $\{X_n\}$ 满足:
(1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n)(n \geq 1)$, 其中 $f : E \times E \to E$, 且 ξ_n 取值在 E 上;
(2) $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 也相互独立.
证明： $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 而且其一步转移概率为, 对于任意 $i, j \in E$,

$$p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j).$$

4. (20分)

(I) 设马尔科夫链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3,4\}$, 一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集; (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

(II) 设 Markov 链的状态空间 $E=\{1,2,3\}$, 其转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(1) 判别以上 Markov 链是否具有平稳分布(写出理由); (2) 若具有平稳分布, 求平稳分布及 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$.

5. (20分) 设 $X, Y_1, Y_2, \cdots$ 是一列相互独立的随机变量, 其中X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的 Poisson 分布, 而 $Y_1, Y_2, \cdots$ 服从 $[0,1]$ 上均匀分布. 定义

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{X} I_{[0,t]}(Y_k), \quad t\in[0,1]$$

其中$I_{[0,t]}(\cdot)$ 为示性函数(即: $I_{[0,t]}(y)=1$, 若 $y\in[0,t]$; $I_{[0,t]}(y)=0$, 若 $y\notin[0,t]$). (1) 求 $\xi_{t,k}=I_{[0,t]}(Y_k)$ 的特征函数; (2) 求 $Z(t)$ 的特征函数; (3) 证明: $Z(t)$ 是参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的 Poisson 过程. (提示：可采用特征函数证明)

北京交通大学

2014-2015 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: __________ 任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: __________ 学号: _______________

(注：本试卷满分100 分, 共五道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (20分) 设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布. (1) 写出 X 的概率密度函数; (2) 求出指数分布的矩母函数(写出计算过程); (3) 利用其矩母函数求出 X 的期望和方差(写出计算过程).

2. (20分) 设在 $[0,t]$ 内事件 A 已经发生 n 次, 求第 $k(k<n)$ 次事件 A 发生的时间 S_k 的条件概率密度函数.

3. (20分) 设 Markov 链 $X_n,\ n\geq 0$ 有状态 $1,2$ 和一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

初始分布为 $P(X_0=1)=p$, $P(X_0=2)=1-p$, $0<p<1$. 对任意 $n\geq 1$, 试求: (1) $P(X_{n+2}=2|X_n=1)$; (2) $P(X_3=1)$(写出计算步骤); (3) 该链是否具有平稳分布? 为什么? (4) 是否具有极限分布? 若有则求出.

4. (20分)

(I) 设 Markov 链 $X_n,\ n \geq 0$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$ 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性；周期.
(2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(II) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;
(2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

5. (20分) 设 $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t \geq 0$.

(1) 若 $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$(其中 $i = \sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.
(2) 若 $E(\xi^2) < \infty$, 试求 $E(Y_t)$, $\mathrm{Var}(Y_t)$.
(注：$\mathrm{Var}(Y_t) = E[\mathrm{Var}(Y_t|N_t)] + \mathrm{Var}[E(Y_t|N_t)]$.)

北京交通大学

2013-2014 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: __________任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: __________ 学号: _______________

(注：本试卷满分100 分, 共五道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (20分) 对于任意的整数 $n, m \geq 0$ 及 $i, j \in E$ (E 为状态空间). (1) 证明: 转移概率具有

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)};$$

(2) 并叙述上式直观意义.

2. (20分) 证明在 $N_t = n$ 的条件下, n 个事件来到的时刻 $S_1, \cdots, S_n$ 的联合密度与 n 个独立的 $[0, t]$ 上均匀分布随机变量的顺序统计量的联合密度相同. 即条件随机向量$(S_1, \cdots, S_n | N_t = n)$具有联合密度

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \qquad 0 < t_1 < \cdots < t_n < t.$$

3. (20分) 设随机过程 $\{X_n\}$ 满足:
(1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n)(n \geq 1)$, 其中 $f: E \times E \to E$, 且 ξ_n 取值在 E 上;
(2) $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 也相互独立.
证明： $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 而且其一步转移概率为, 对于任意 $i, j \in E$,

$$p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j).$$

4. (20分)

(I) 设马尔科夫链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E=\{0,1,2,3\}$, 一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix},$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集; (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

(II) 设 Markov 链的状态空间 $E=\{0,1,2\}$, 其转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(1) 判别以上 Markov 链是否具有平稳分布(写出理由); (2) 若具有平稳分布, 求平稳分布及 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$.

5. (20分) 设 $X, Y_1, Y_2, \cdots$ 是一列相互独立的随机变量, 其中X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的 Poisson 分布, 而 $Y_1, Y_2, \cdots$ 服从 $[0,1]$ 上均匀分布. 定义

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{X} I_{[0,t]}(Y_k), \quad t\in[0,1]$$

其中$I_{[0,t]}(\cdot)$ 为示性函数(即: $I_{[0,t]}(y)=1$, 若 $y\in[0,t]$; $I_{[0,t]}(y)=0$, 若 $y\notin[0,t]$). (1) 求 $\xi_{t,k}=I_{[0,t]}(Y_k)$ 的特征函数; (2) 求 $Z(t)$ 的特征函数; (3) 证明: $Z(t)$ 是参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的 Poisson 过程. (提示：可采用特征函数证明)

北京交通大学

2012-2013 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: __________ 任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: __________ 学号: ________________

(注：本试卷满分100 分, 共五道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (15分) 设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的指数分布. (1) 写出 X 的概率密度函数; (2) 求出指数分布的矩母函数(写出计算过程); (3) 利用其矩母函数求出 X 的期望和方差(写出计算过程).

2. (15分) 考虑强度为 λ 的齐次 Poisson 过程 $\{N_t, t \geq 0\}$, 计算前三个事件到来的时刻 S_1, S_2, S_3 的联合密度.

3. (20分) 设 $Y_t = \sum\limits_{n=1}^{N_t} \xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t \geq 0$.

(1) 若 $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$(其中 $i = \sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.

(2) 若 $E(\xi^2) < \infty$, 试求 $E(Y_t)$, $\mathrm{Var}(Y_t)$.

(注：$\mathrm{Var}(Y_t) = E[\mathrm{Var}(Y_t|N_t)] + \mathrm{Var}[E(Y_t|N_t)]$.)

4. (20分) 记 $Z_i, i = 1, 2, \cdots$ 为一串独立同分布的离散随机变量. $P\{Z_1 = k\} = p_k \geq 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots, \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$

(1) 令 $X_n=\sum_{i=1}^{n}Z_i,\ n=1,2,\cdots$, 并约定 $X_0=0$. 试证 X_n 为 Markov 链, 并求其一步转移概率矩阵. (请将转移概率矩阵完整写出)
(2) 令 $X_n=\max\{Z_1,\cdots,Z_n\},\ n=1,2,\cdots$, 并约定 $X_0=0$. 试证 X_n 为 Markov 链, 并求其一步转移概率矩阵. (请将转移概率矩阵完整写出)

5. (30分)

(I) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E=\{0,1,2\}$, 转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

初始分布 $p_0=p_1=p_2=\frac{1}{3}$, 其中 $p_i=P(X_0=i),\ i=0,1,2$. 试求 $P(X_0=0,X_1=1,X_2=2)$ 和 $P(X_0=1,X_1=1,X_3=1)$.

(II) 设 Markov 链 $X_n,\ n\geq 0$ 的状态空间 $E=\{0,1,2,3\}$ 和一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性；周期.
(2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(III) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E=\{0,1,2,3,4\}$, 转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;
(2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

北京交通大学

2011-2012 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ____________ 学院: __________ 任课教师: ____________

专业: ____________ 班级: __________ 学号: ______________

(注：本试卷满分100 分, 共六道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (15分) 设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的 Poisson 分布. (1) 写出 X 的概率分布; (2) 求出 Poisson 分布的特征函数(写出计算过程); (3) 利用其特征函数求出 X 的期望和方差(写出计算过程).

2. (15分) 对于任意的整数 $n \geq 0$ 及 $i, j \in E$ (E 为状态空间). (1) 证明: 转移概率具有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)};$$

(2) 并叙述上式直观意义.

3. (15分) 一书亭用邮寄订阅销售杂志, 订阅的顾客是强度为 6 的一个泊松过程, 每位顾客订阅 1 年, 2 年, 3 年的概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, 彼此如何订阅是相互独立的, 每订阅一年, 店主即获利 5 元. 设 Y_t 是 $[0, t]$ 内, 店主从订阅中所获得的总收入, 计算：(1) $E(Y_t)$ (即 $[0, t]$ 内的总的平均收入); (2) $\mathrm{Var}(Y_t)$.

4. (15分) A, B 两罐总共装着 N 个球, 在时刻 n 先从 N 个球中等概率地任取一球. 然后从 A, B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p, 选中 B 的概率为 $1-p$. 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 链的转移概率矩阵.

5. (20分)

(I) 设 Markov 链 $X_n,\ n \geq 0$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$ 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性；周期.
(2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(II) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;
(2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

6. (20分) 设 $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t \geq 0$.

(1) 若 $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$(其中 $i = \sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.
(2) 若 $E(\xi^2) < \infty$, 试求 $E(Y_t)$, $\mathrm{Var}(Y_t)$.
(注：$\mathrm{Var}(Y_t) = E[\mathrm{Var}(Y_t|N_t)] + \mathrm{Var}[E(Y_t|N_t)]$.)

北京交通大学

2010-2011 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: __________ 任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: __________ 学号: ________________

(注：本试卷满分100 分, 共六道大题. 请在<u>答卷纸</u>上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (15分) (Chapman-Kolmogorov (切普曼-柯尔莫哥洛夫)方程)　对任何整数 $m, n \geq 0$ 证明

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.$$

2. (15分) 设在 $[0, t]$ 内事件 A 已经发生 n 次, 求第 $k(k < n)$ 次事件 A 发生的时间 S_k 的条件概率密度函数.

3. (15分) 设随机过程 $\{X_n\}$ 满足:

(1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n)(n \geq 1)$, 其中 $f : E \times E \to E$, 且 ξ_n 取值在 E 上;

(2) $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 也相互独立.

证明 $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 而且其一步转移概率为, 对于任意 $i, j \in E$,

$$p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j).$$

4. (20分) 证明在 $N_t = n$ 的条件下, n 个事件来到的时刻 $S_1, \cdots, S_n$ 的联合密度与 n 个独立的 $[0, t]$ 上均匀分布随机变量的顺序统计量的联合密度相同. 即条件随机向量$((S_1, \cdots, S_n | N_t = n))$具有联合密度

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \qquad 0 < t_1 < \cdots < t_n < t.$$

5. (10分) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;
(2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

6. (25分) 设 $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t \geq 0$.
(1) 若 $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$(其中 $i = \sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.
(2) 若 $E(\xi^2) < \infty$, 试求 $E(Y_t)$, $\mathrm{Var}(Y_t)$.
(注：$\mathrm{Var}(Y_t) = E[\mathrm{Var}(Y_t | N_t)] + \mathrm{Var}[E(Y_t | N_t)]$.)

北京交通大学

2009-2010 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: __________任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: __________ 学号: _______________

(注：本试卷满分100 分, 共六道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (20分) (1)设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的指数分布, 试写出其分布函数; (2) 证明强度为 λ 的齐次 Poisson 过程 $\{N_t, t \geq 0\}$ 的到达时间间隔序列 $\{X_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且是具有相同均值 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布.

2. (15分) 设在 $[0, t]$ 内事件 A 已经发生 n 次, 求第 $k(k < n)$ 次事件 A 发生的时间 S_k 的条件概率密度函数. （其中等待时间 S_n 服从参数为 n, λ 的 Γ 分布, 即分布密度为$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0.$）

3. (15分) 考虑质点在整数点上的一维无限制随机游动, 设质点以概率 $p\ (0 < p < 1)$ 向右移动一个单位, 以概率 q 向左移动一个单位, 且 $p + q = 1$. 试判别各状态的周期和常返性. (注：斯特灵公式 $n! \simeq n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$)

4. (15分) A, B 两罐总共装着 N 个球, 在时刻 n 先从 N 个球中等概率地任取一球. 然后从 A, B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p, 选中 B 的概率为 $1 - p$. 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 链的转移概率矩阵.

5. (20分)

(I) 设 Markov 链 $X_n,\ n \geq 0$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$ 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性；周期.
(2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(II) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;
(2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

6. (15分) 证明Chapman-Kolmogorov 方程: 对任何整数 $m, n \geq 0$ 有

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \quad \text{or} \quad P^{(m+n)} = P^{(m)} \times P^{(n)}.$$

北京交通大学

2008-2009 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: ___________ 任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: ___________ 学号: _______________

(注：本试卷满分100 分, 共六道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (15分) 设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的指数分布. (1) 写出 X 的概率分布; (2) 求出指数分布的特征函数和矩母函数(写出计算过程); (3) 利用其特征函数求出 X 的期望和方差(写出计算过程).

2. (15分) 设在 $[0, t]$ 内事件 A 已经发生 n 次, 求第 $k(k < n)$ 次事件 A 发生的时间 S_k 的条件概率密度函数.

3. (15分) 设随机过程 $\{X_n\}$ 满足:
(1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n)(n \geq 1)$, 其中 $f : E \times E \to E$, 且 ξ_n 取值在 E 上;
(2) $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 也相互独立.

证明： $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 而且其一步转移概率为, 对于任意 $i, j \in E$,

$$p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j).$$

4. (15分) 一书亭用邮寄订阅销售杂志, 订阅的顾客是强度为 6 的一个泊松过程, 每位顾客订阅 1 年, 2 年, 3 年的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, 彼此如何订阅是相互独立的, 每订阅一年, 店主即获利 5 元. 设 Y_t 是 $[0, t]$ 内, 店主从订阅中所获得的总收入, 计算：(1) $E(Y_t)$ (即 $[0, t]$ 内的总的平均收入); (2) $\mathrm{Var}(Y_t)$.

5. (20分)

(I) 设 Markov 链 $X_n,\ n \geq 0$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$ 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性；周期.
(2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(II) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;
(2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

6. (20分) 设 $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t \geq 0$.

(1) 若 $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$(其中 $i = \sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.
(2) 若 ξ_n 服从参数为 λ 指数分布, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.

北京交通大学

2007-2008 学年第一学期期末研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: __________任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: __________ 学号: ________________

(注：本试卷满分100 分, 共七道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (10分) 设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的 Poisson 分布. (1) 写出 X 的概率分布; (2) 求出 Poisson 分布的特征函数(写出计算过程); (3) 利用其特征函数求出 X 的期望和方差(写出计算过程).

2. (15分) 设 $\{N_t, t \geq 0\}$ 是参数 λ 的齐次 Poisson 过程, 设 $X_1(t)$ 为第一个事件来到的时刻. 证明条件随机变量 $(X_1|N_t = 1) \sim U(0, t)$, 即服从区间 $(0, t)$ 上的均匀分布.

3. (15分) 对于任意的整数 $n \geq 0$ 及 $i, j \in E$ (E 为状态空间). (1) 证明: 转移概率具有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)};$$

(2) 并叙述上式直观意义.

4. (15分) 一书亭用邮寄订阅销售杂志, 订阅的顾客是强度为 6 的一个泊松过程, 每位顾客订阅 1 年, 2 年, 3 年的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, 彼此如何订阅是相互独立的, 每订阅一年, 店主即获利 5 元. 设 Y_t 是 $[0, t]$ 内, 店主从订阅中所获得的总收入, 计算：(1) $E(Y_t)$ (即 $[0, t]$ 内的总的平均收入); (2) $\mathrm{Var}(Y_t)$.

5. (15分) 设 Markov 链 $X_n,\ n \geq 0$ 有状态 $1, 2$ 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

初始分布为 $P(X_0 = 1) = p$, $P(X_0 = 2) = 1 - p$, $0 < p < 1$. 对任意 $n \geq 1$, 试求: (1) $P(X_{n+2} = 2 | X_n = 1)$; (2) $P(X_3 = 1)$(写出计算步骤); (3) 该链是否具有遍历性? 为什么? (4) 极限分布和平稳分布.

6. (15分) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集; (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

7. (15分) 对于任意的状态 $i, j \in E$ (E 为状态空间), $f_{ij} > 0$ 的充要条件是 $i \to j$.