习题 3

1、设 A,B 是相互独立且同服从 $N\left(0,\sigma^2\right)$ 的随机变量，求随机过程的 $\left\{X_t = At + B, t \in \ \right\}$ 均值函数、自相关函数、协方差函数。

解：均值函数：

$$\mu_{X_t} = E\left(X_t\right) = E\left(At+B\right) = tE\left(A\right) + E\left(B\right) = 0$$

自相关函数：

$$R\left(t_1,t_2\right) = E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left[\left(At_1+B\right)\left(At_2+B\right)\right]$$
$$= E\left[t_1t_2A^2 + \left(t_1+t_2\right)AB + B^2\right]$$
$$= t_1t_2E\left(A^2\right) + E\left(B^2\right) + \left(t_1+t_2\right)E\left(AB\right)$$

A,B 相互独立，

$$\therefore E\left(AB\right) = E\left(A\right)E\left(B\right) = 0$$
$$E\left(A^2\right) = E\left(B^2\right) = \sigma^2,$$
$$\therefore R\left(t_1,t_2\right) = \left(t_1t_2+1\right)\sigma^2$$

协方差函数：

$$c_X\left(t_1,t_2\right) = R\left(t_1,t_2\right) - E\left(X_{t_1}\right)E\left(X_{t_2}\right)$$
$$E\left(X_t\right) = 0 \quad ,$$
$$\therefore c_X\left(t_1,t_2\right) = R\left(t_1,t_2\right) = \left(t_1t_2+1\right)\sigma^2$$

2、设随机过程 $\left\{X_t, t\in T\right\}$ 的均值函数为 μx_t，协方差函数为 $c_X\left(t_1,t_2\right)$。记随机过程 $Y_t = X_t + \varphi(t), t\in T$，其中，$\varphi(t)$ 是普通函数。

(1)求 Y_t 的均值函数和协方差函数；

(2)如果 $\varphi(t) = -\mu_{X_t}$，证明

$$R_Y\left(t_1,t_2\right) = c_Y\left(t_1,t_2\right) = c_X\left(t_1,t_2\right)$$

解：$\mu_{Y_t} = E\left(X_t + \varphi(t)\right)$

$$= E\left(X_t\right) + \varphi(t) = \mu_{X_t} + \varphi(t)$$
$$R_Y\left(t_1,t_2\right) = E\left[\left(X_{t_1} + \varphi\left(t_1\right)\right)\left(X_{t_2} + \varphi\left(t_2\right)\right)\right]$$
$$= E\left[X_{t_1}X_{t_2} + X_{t_1}\varphi\left(t_2\right) + X_{t_2}\varphi\left(t_1\right) + \varphi\left(t_1\right)\varphi\left(t_2\right)\right]$$
$$= R_X\left(t_1,t_2\right) + \varphi\left(t_2\right)\mu_{X_{t_1}}$$
$$+\varphi\left(t_1\right)\mu_{X_{t_2}} + \varphi\left(t_1\right)\varphi\left(t_2\right)$$
$$c_Y\left(t_1,t_2\right) = R_Y\left(t_1,t_2\right) - E\left(Y_{t_1}\right)E\left(Y_{t_2}\right)$$
$$= R_Y\left(t_1,t_2\right) - \left[\mu_{X_{t_1}} + \varphi\left(t_1\right)\right]\left[\mu_{X_{t_2}} + \varphi\left(t_2\right)\right]$$

(2) $\varphi\left(t\right) = -\mu_{X_t} \ \therefore \varphi\left(t_1\right) = -\mu_{X_{t_1}}, \varphi\left(t_2\right) = -\mu_{X_{t_2}}$

$$R_Y\left(t_1,t_2\right) = R_X\left(t_1,t_2\right) + \varphi\left(t_2\right)\mu_{X_{t_1}}$$
$$+\varphi\left(t_1\right)\mu_{X_{t_2}} + \varphi\left(t_1\right)\varphi\left(t_2\right)$$
$$= R_X\left(t_1,t_2\right) - \mu_{X_{t_1}}\mu_{X_{t_2}} = c_X\left(t_1,t_2\right)$$
$$c_Y\left(t_1,t_2\right) = R_Y\left(t_1,t_2\right)$$
$$-\left[\mu_{X_{t_1}} + \varphi\left(t_1\right)\right]\left[\mu_{X_{t_2}} + \varphi\left(t_2\right)\right]$$
$$= R_X\left(t_1,t_2\right) - \mu_{X_{t_1}}\mu_{X_{t_2}} = c_X\left(t_1,t_2\right)$$
$$\therefore R_Y\left(t_1,t_2\right) = c_Y\left(t_1,t_2\right) = c_X\left(t_1,t_2\right)$$

3、已知随机过程 $\left\{X_t, t\in T\right\}$，对任意实数 x 定义随机过程 $Y_t = \begin{cases}1, X_t \le x\\ 0, X_t > x\end{cases}$，证明：$Y_t$ 的均值函数和自相关函数分别是 X_t 的一维和二维分布函数。

证明：设随机过程 $\left\{X_t, t\in T\right\}$ 的一维分布函数为 $F_1\left(x;t\right)$，二维分布函数为 $F_2\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)$，固定 t 时，Y_t 是服从 0-1 分布的随机变量，其分布律为

Y_t	0	1
P_k	$P\left\{X_t > x\right\}$	$P\left\{X_t \le x\right\}$

于是 Y_t 的均值函数为

$$\mu_{Y_t} = E\left(Y_t\right) = 0\times P\left\{X_t > x\right\} + 1\times P\left\{X_t \le x\right\}$$
$$= P\left\{X_t \le x\right\} = F_1\left(x;t\right)$$

又随机变量 Y_{t_1} 和 Y_{t_2} 的联合分布律为

Y_{t_2} / Y_{t_1}	0	1
0	$P\left\{\begin{matrix}X_{t_1} > x,\\ X_{t_2} > x\end{matrix}\right\}$	$P\left\{\begin{matrix}X_{t_1} \le x,\\ X_{t_2} > x\end{matrix}\right\}$
1	$P\left\{\begin{matrix}X_{t_1} > x,\\ X_{t_2} \le x\end{matrix}\right\}$	$P\left\{\begin{matrix}X_{t_1} \le x,\\ X_{t_2} \le x\end{matrix}\right\}$

$$R_Y\left(t_1,t_2\right) = E\left(Y_{t_1}Y_{t_2}\right) = 0\times 0\times P\left\{X_{t_1} > x, X_{t_2} > x\right\}$$
$$+0\times 1\times P\left\{X_{t_1} > x, X_{t_2} \le x\right\}$$
$$+1\times 0\times P\left\{X_{t_1} \le x, X_{t_2} > x\right\}$$
$$+1\times 1\times P\left\{X_{t_1} \le x, X_{t_2} \le x\right\}$$
$$= P\left\{X_{t_1} \le x, X_{t_2} \le x\right\}$$
$$= F_2\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)$$

4、设 $\left\{X_t, t\ge a\right\}$ 是齐次独立增量过程，且 $X_a = 0$，方差函数为 $\sigma^2_{X_t}$，记随机过程 $Y_t = kX_t + c, k, c$ 是常数$, k\ne 0$。

（1）证明 Y_t 是齐次独立增量随机过程；

（2）求的方差函数与协方差函数。

答：(1)证明：$Y_t = kX_t + c, k, c$ 是常数$, k\ne 0$

$$\mathrm{Y}_{t+\tau} - Y_t = (\mathrm{kX}_{t+\tau} + \mathrm{c}) - (\mathrm{kX}_t + \mathrm{c})$$
$$= \mathrm{k}(\mathrm{X}_{t+\tau} - \mathrm{X}_t)$$

$\left\{X_t, t\ge a\right\}$ 是齐次独立增量过程，

$\therefore$ 增量$X_{t+\tau} - X_t$ 的概率分布只依赖于而与 t 无关

$\therefore$ 增量$Y_{t+\tau} - Y_t$ 的概率分布也只依赖于 τ 而与 t 无关

$\therefore Y_t$ 是齐次独立增量随机过程。

（2）由题意知：X_t 的方差函数为 $\sigma^2_{X_t}$，即 $D\left(X_t\right) = \sigma^2_{X_t}$

$$D\left(Y_t\right) = D\left(kX_t + c\right) = k^2D\left(X_t\right) = k^2\sigma^2_{X_t}$$

则 Y_t 的方差函数为 $k^2\sigma^2_{X_t}$。

$$c_Y\left(t_1,t_2\right) = \mathrm{cov}\left(Y_{t_1}, Y_{t_2}\right) = \mathrm{cov}\left(kX_{t_1} + c, kX_{t_2} + c\right)$$
$$= k^2\,\mathrm{cov}\left(X_{t_1}, X_{t_2}\right) = k^2c_X\left(t_1,t_2\right)$$

X_t 是齐次独立增量过程，当 $X_a = 0$ 时有

$$c_X\left(t_1,t_2\right) = D_X\left(\min\left(t_1,t_2\right)\right) = \sigma^2_{X_{\min(t_1,t_2)}}$$
$$\therefore c_Y\left(t_1,t_2\right) = k^2c_X\left(t_1,t_2\right) = k^2\sigma^2_{X_{\min(t_1,t_2)}}$$

则 Y_t 的协方差函数为 $k^2\sigma^2_{X_{\min(t_1,t_2)}}$。

5、（1）设通过某路口的车辆数符合强度为 λ 的泊松过程，已知 1 分钟内无车辆通过的概率为 0.2，试求 2 分钟内有多于 1 辆车通过的概率。

（2）设乘客到达某汽车站的乘客数为一泊松过程，平均每 10 分钟到达 5 位乘客，试求在 20 分钟内到达汽车站至少有 10 位乘客的概率。

解(1) $P\left(N_t = k\right) = \dfrac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

$$P\left(N_1 = 0\right) = e^{-\lambda} = 0.2 \Rightarrow \lambda = \ln 5$$
$$P\left(N_2 > 1\right) = 1 - P\left(N_2 \le 1\right) = 1 - P\left(N_2 = 0\right) - P\left(N_2 = 1\right)$$
$$= 1 - e^{-2\lambda} - 2\lambda e^{-2\lambda} = 0.96 - 0.08\ln 5 = 0.83$$

(2) $E\left(N_t\right) = \lambda t$，由题设知，

平均每10分钟到达5位乘客。

$$\therefore \lambda = \frac{5}{10}$$
$$P\left(N_t \ge 10\right) = 1 - P\left(N_t \le 9\right) = 1 - \sum_{k=0}^{9}\frac{10^k}{k!}e^{-10} = 0.54205$$

或$P\left(N_{20} \ge 10\right) = \displaystyle\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{\left(0.5\times 20\right)^k e^{-0.5\times 20}}{k!} = 0.54205$

6、设 U 是随机变量，随机过程X_t=U，$-\infty <$ t $<+\infty$

(1)X_t是严平稳随机过程吗？为什么？

(2)如果 E(U)=μ，Var(U)=σ^2，证明：X_t的自相关函数是常数。

解：（1）X_t是严平稳随机过程。

$\mu X_t = E(X_t) = \mathrm{E(U)}$且$\mathrm{E(U)}$是常数

$\mathrm{R}_x(\mathrm{t}, \mathrm{t}+\tau) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_t\mathrm{X}_{t+\tau}) = E(\mathrm{U}^2)$，结果与t无关

$\therefore \mathrm{X}_t$ 是平稳随机过程

（2）根据自相关函数的定义

$$\mathrm{R}_x(\mathrm{t}, \mathrm{t}+\tau) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_t\mathrm{X}_{t+\tau}) = E(\mathrm{U}^2)$$
$$= Var(\mathrm{U}) + (\mathrm{E(U)})^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

所以 X_t 的自相关函数是常数

7.设随机过程X_t=Ucost+Vsint，$-\infty <$ t $<+\infty$，其中，U 与 V 相互独立，且都服从 N(0,1)

(1)X_t是平稳过程吗？为什么？

(2)X_t是严平稳过程吗？为什么？

解：（1）是平稳过程。证明

EX_t=E(Ucost+Vsint)=E(Ucost)+E(Vsint)

=costE(U)+sintE(V)

因为 U 与 V 相互独立且都服从 N(0,1)，所以

E(U)=E(V)=0，则 EX_t=0

$$
\begin{aligned}
&R_x(t,t+\tau)=E(x_t x_{t+\tau})=E[(U\cos t+V\sin t)(U\cos\\
&=\cos t\cos(t+\tau)E(U^2)+\sin t\sin(t+\tau)E(V^2)+(\mathrm{si}\\
&=\cos(-\tau)
\end{aligned}
$$

所以X_t是一个平稳过程。

(2)因为X_t是正态过程，所以X_t是严平稳过程。

8.设随机过程$Y_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$，Y_0=0，其中X_j(j=1,…n)是相互独立的随机变量且P(X_j=1)=p，P($X_j=0$)=1-p，求{Y_n,n=1,2,…}的均值函数和协方差函数。

$$
\begin{aligned}
&\text{解：}E(Y_n)=E(\sum_{j=1}^{n}X_j)=\sum_{j=1}^{n}E(X_j)=np\\
&Var(Y_n)=\sum_{j=1}^{n}Var(X_J)\\
&\quad E(X_j)=p,E(X_j{}^2)=p\\
&\therefore Var(Y_n)=n(p-p^2)
\end{aligned}
$$

当 m<n 时，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(Y_m,Y_n)=E[Y_m-E(Y_m)][Y_n-E(Y_n)]\\
&=E(Y_mY_n)-mnp^2\\
&\quad E(Y_mY_n)=E[Y_m(Y_n-Y_m)+Y_m{}^2]\\
&=E(Y_m)E(Y_n-Y_m)+E(Y_m{}^2)\\
&mp(np-mp)+mp(1-p)+m^2p^2\\
&=mnp^2+mp-mp^2\\
&\therefore \mathrm{Cov}(Y_m,Y_n)=mnp^2+mp-mp^2-mnp^2\\
&=mp(1-p)
\end{aligned}
$$

同理，当 m>n 时，$\mathrm{Cov}(Y_m,Y_n)=np(1-p)$

综上所述，

$\mathrm{Cov}(Y_m,Y_n)=p(1-p)\min\{m,n\}$

所以均值函数为 np，协方差函数为 ip(1-p)

9.设随机过程X_t的协方差函数C_X(t1,t2)，方差函数σ_{Xt}^2，试证：

$$|C_X(t1,t2)|\le\sigma_{Xt1}\sigma_{Xt2},$$

$$|C_X(t1,t2)|\le 1/2(\sigma_{Xt1}^2+\sigma_{Xt2}^2)$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&C_x(t_1,t_2)=\mathrm{Cov}(X_{t_1},X_{t_2})\\
&=E[(X_{t_1}-E(X_{t_1}))(X_{t_2}-E(X_{t_2})]
\end{aligned}
$$

由柯西—许瓦兹不等式知

$$
\begin{aligned}
&(C_x(t_1,t_2))^2=\{E[(X_{t_1}-E(X_{t_1}))(X_{t_2}-E(X_{t_2}))]\}^2\\
&\le E[(X_{t_1}-E(X_{t_1}))^2]E](X_{t_2}-E(X_{t_2}))^2]\le\sigma_{t_1}{}^2\sigma_{t_2}{}^2\\
&\therefore|C_X(t_1,t_2)|\le\sigma_{X_{t1}}\sigma_{X_{t2}}\\
&\frac{1}{2}(\sigma_{X_{t1}}{}^2+\sigma_{X_{t2}}{}^2)-\sigma_{X_{t1}}{}^2+\sigma_{X_{t2}}{}^2=\\
&\frac{1}{2}(\sigma_{X_{t1}}-2\sigma_{X_{t1}}\sigma_{X_{t2}}+\sigma_{X_{t2}}{}^2)=\frac{1}{2}(\sigma_{X_{t1}}-\sigma_{X_{t2}})^2\ge 0\\
&\therefore\frac{1}{2}(\sigma_{X_{t1}}{}^2+\sigma_{X_{t2}}{}^2)\ge\sigma_{X_{t1}}\sigma_{X_{t2}}\ge|C_X(t_1,t_2)|
\end{aligned}
$$

10.设随机过程X_t和Y_t的协方差函数C_{XY}(t1,t2)，试证：

$$|C_{XY}(t1,t2)|\le\sigma_{Xt1}\sigma_{Xt2}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{证}\quad C_{xy}(t_1,t_2)=E\{[X_{t_1}-E(X_{t_1})][Y_{t_1}-E(Y_{t_1})]\}\\
&\therefore[C_{xy}(t_1,t_2)]^2=\{E\{[X_{t_1}-E(X_{t_1})][Y_{t_1}-E(Y_{t_1})]\}\}\\
&\le E[X_{t_1}-E(X_{t_1})]^2E[Y_{t_1}-E(Y_{t_1})]^2\le\sigma_{X_{t_1}}{}^2\sigma_{Y_{t_2}}{}^2\\
&\therefore|C_{xy}(t_1,t_2)|\le\sigma_{X_{t_1}}\sigma_{Y_{t_2}}
\end{aligned}
$$

11. 设随机过程$X_t=X+Yt+Zt^2$，其中是 X，Y，Z 是相互独立的随机变量，且具有均值为 0，方差为 1，求随机过程X_t的协方差函数。

答：因为：$E(X)=E(Y)=E(z)=0$，且 $D(X)=D(Y)=D(Z)=1$

所以 $E(X^2)=E(Y^2)=E(Z^2)=1$

$$
\begin{aligned}
&c_X(t_1,t_2)=Cov\left(X_{t_1},X_{t_2}\right)=E\left[\left(X_{t_1}-E\left(X_{t_1}\right)\right)\left(X\right.\right.\\
&=E\left(X^2+t_1t_2Y^2+t_1^2t_2^2z^2\right)=1+t_1t_2+t_1^2t_2^2
\end{aligned}
$$

12. 设随机过程$X_t=Asin(\omega t+\Theta)$，其中 A，ω为常数，Θ是在(−π，π)上的均匀分布的随机变量，令$Y_t=X_t^2$，求$R_Y(t，t+\tau)$和$R_{XY}(t，t+\tau)$。

答：$f(\Theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi},-\pi<\Theta<\pi\\ \quad 0,\text{其他}\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
&R_Y(t,t+\tau)=E\left(Y(t)Y(t+\tau)\right)=\\
&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}A^2\sin^2(wt+\Theta)A^2\sin^2\left(w(t+\tau)+\Theta\right)\mathrm{d}\Theta\\
&=\frac{A^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos w\tau-\cos(2wt+w\tau+2\Theta)\right]^2\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\Theta\\
&=\frac{A^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}\cos 2wt\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{XY}(t,t+\tau)=E\left(X(t)Y(t+\tau)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}A\sin\left(wt\right.\\
&=\frac{A^3}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(wt+\Theta)(1-\cos s\left(2wt+2w\tau+2\Theta\right)a\\
&=\frac{A^3}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\sin(w_t+\Theta)-\sin(wt+2w\tau+\Theta)-\sin(
\end{aligned}
$$

13. 设随机变量 Y 具有概率密度 f(y)，令，

$$X_t=e^{-Yt},\ t>0,\ Y>0$$

求随机过程X_t的一维概率密度函数以及E(X_t)，$R_X(t_1，t_2)$。

解：

$$
\begin{aligned}
&F_x(t)=P\{x_t\le x\}=P\{e^{-Yt}\le x\}=P\{-Yt\le\ln(x)\}\\
&=P\{Y\ge-\tfrac{\ln(x)}{t}\}\\
&f_t(x)=F_x(t)'=[\int_{-\frac{\ln(x)}{t}}^{+\infty}f(y)\,dy]'=-f(-\tfrac{\ln(x)}{t})(-\tfrac{\ln(x)}{t})'\\
&=f(-\tfrac{\ln(x)}{t})\frac{1}{|tx|},t>0\\
&E[X(t)]=E(e^{-Yt})=\int_0^{+\infty}f(y)e^{-yt}dy\\
&R_x(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[e^{-Yt_1}e^{-Yt_2}]\\
&=\int_0^{+\infty}f(y)e^{-y(t_1+t_2)}dy
\end{aligned}
$$

14. 设 f(t)是一个周期为 T 的周期函数，随机变量 Y 在(0，T)上均匀分布，令$X_t=f(t-Y)$，求证随机过程X_t满足下等式：

$$E(X_tX_{t+\tau})=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)f(t+\tau)dt$$

答：$E(X_t)$

$$=\int_0^T\frac{1}{T}f(t-Y)dY\xrightarrow{t-Y=u}\frac{1}{T}\int_{t-T}^{T}f(u)d(-u)$$

$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

$$E(x_tx_{t+\tau})=\int_0^T\frac{1}{T}f(t-Y)f(t+\tau-Y)dY$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)f(t+\tau)dt$$

15. 设$\{N_t，t\ge 0\}$为具有参数λ的齐次 Poisson 过程，求 Poisson 过程的特征函数。

解：

$$\varphi_{N_t^{(t)}}=E\left(e^{(i\mu N_t)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{i\mu k}$$

$$=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda te^{i\mu k}\right)^k}{k!}=e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda te^{i\mu}}=e^{\lambda t\left(e^{i\mu}-1\right)}\ \backslash$$