习题 6

1、在下列矩阵的空白处填上适当的数字，使矩阵 Q 成为一个转移强度矩阵。

$$Q=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

2、一连续时间 Markov 链有 0 和 1 两个状态，在状态 0 和 1 的逗留时间分别服从参数为$\lambda>0$**及**$\mu>0$**的指数分布。试求在时刻 0 从状态 0 起始，t 时刻过程处于状态 0 的概率** $\mathrm{P}_{00}(t)$ **。**

解：已知密度矩阵 $Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$，于是向前向后微分方程分别为 $P'(t)=P(t)Q, P'(t)=QP(t)$，其中向前微分方程相应的矩阵元素可写成方程组 $P'_{00}=-\lambda P_{00}(t)+\mu P_{01}(t)$，向后微分方程相应的矩阵元素可写成 $P'_{00}(t)=-\lambda P_{00}(t)+\lambda P_{10}(t)$，

将$P_{01}(t)=1-P_{00}(t)$代入，得$P'_{00}(t)=\mu-(\lambda+\mu)P_{00}(t)$

令$Q_{00}(t)=e^{(\lambda+\mu)t}P_{00}(t),$

则$Q'_{00}(t)=(\lambda+\mu)e^{(\lambda+\mu)t}P_{00}(t)+e^{(\lambda+\mu)t}P'_{00}(t),$

即$Q'_{00}(t)=\mu e^{(\lambda+\mu)t}$,通解为$Q_{00}(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t}+C$

利用初始条件$P_{00}(0)=1$，得$C=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$，所以转移矩阵$P_{00}(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t}$

3、在上题中如果 $\lambda=\mu$定义$N(t)$为过程在$[0,t]$中改变状态的次数，试 求$N(t)$的概率分布 **。**

解：这是一个齐次 Poisson 计数过程。

$$P_{ii}(\Delta t)=P(N(t+\Delta t)=i\mid N(t)=i)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P_{i,i+1}(\Delta t)=P(N(t+\Delta t)=i+1\mid N(t)=i)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t), j\neq i且j\neq i+1$$

从而得知$poisson$过程得转移强度矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

所以对任意$t>0$,过程在时间区间$[0,t]$中的转移次数满足$N(t)\sim P(\lambda t)$。

4、一质点在 1,2,3 点上作随机游动，若在时刻 t 质点位于这 3 个点中的一个上，则在$[\mathbf{t}，\mathbf{t}+\mathbf{h})$**内，它以概率**$\frac{1}{2}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{o}(\mathbf{h})$**分别转移到其他两点中的一个上。试求质点随机游动的 Kolmgorov 方程、转移概率**$\boldsymbol{P_{ij}(t)}$**及平稳分布。**

解：依题意，有$\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}=q_{ij}(i\neq j)$得，$q_{ij}=1/2(i\neq j)$，Kolmgorov 向前方程为

$$P_{ij}的导数=-p_{ij}(t)+1/2p_{i,j-1}(t)+1/2p_{i,j+1}(t),$$

由于状态空间 $\mathrm{I}=\{1,2,3\}$，故

$$P_{ij}(t)+p_{i,j-1}(t)+p_{i,j+1}(t)=1/2,$$

所以

$$P_{ij}\text{的导数} =- 2p_{ij}(t)+1/2-p_{ij}(t)=-3p_{i,j}(t)+1/2,$$

解上述一阶线性微分方程的：$P_{ij}(t)=ce^{-\frac{3}{2}t}+\frac{1}{3}$，

由初始条件$P_{ij}(t)=\begin{cases}1, & \mathrm{i}=\mathrm{j}\\ 0, & \mathrm{i}\neq \mathrm{j}\end{cases}$

确定常数 c，得$p_{ij}(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t}, & \mathrm{i}=\mathrm{j}\\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}, & \mathrm{i}\neq \mathrm{j}\end{cases}$

故其平稳分布$\pi_j=\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=\frac{1}{3}$，$\mathrm{j}=1，2，3$

5、设某车间有 M 台车床，由于各种原因车床时而工作，时而停止，假设时刻 t 一台正在工作的车床在时刻 t + h 停止工作的概率为$\mu h+o(h)$，而时刻 t 不工作的车床在时刻 t + h 开始工作的概率为$(\lambda h+o(h))$，且各车床工作情况是相互独立的。若 N(t)表示时刻 t 正在工作的车床数。求

(1)齐次马尔可夫过程$\{N(t), t\geq 0\}$的平稳分布；

(2)若$M=10, \lambda=60, \mu=30$，系统处于平稳状态时有一半以上车床在工作的概率。

解：（1）

$$p_{01}(\Delta t)=C_M^1(\lambda\Delta t+o(t))^1(1-\lambda\Delta t-o(\Delta t))^2$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{01}(\Delta t)}{\Delta t}=M\lambda=q_{01},$$

同理：$q_{12}=(M-1)\lambda$，$q_{23}=(M-2)\lambda\cdots q_{M-1,\ M}=\lambda$

$q_{M,\ M-1}=M\mu$，$\cdots q_{21}=2\mu$，$q_{10}=\mu$

可得 Q 矩阵：

$$Q=\begin{pmatrix}-M\lambda & M\lambda & 0 & & 0\\ \mu & -[\mu+(M-1)\lambda] & (M-1)\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2\mu & -[2\mu+(m-2)\lambda] & 0 & \\ & 0 & & & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & M\mu & -M\mu\end{pmatrix}$$

得$(\pi_0, \pi_1\cdots\pi_{M-1}, \pi_M)Q=0$

解得：$\pi_0=(\frac{\mu}{\lambda+\mu})^M$，$\pi_j=C_M^j(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^j(\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{M-j}$，$\mathrm{j}=1,2,\cdots,\mathrm{M}$

（2）$\pi_0=(\frac{30}{90})^{10}=\frac{1}{3^{10}}$，$\pi_j=C_{10}^j(\frac{60}{90})^j(\frac{30}{90})^{10-j}=C_{10}^j(\frac{2}{3})^j(\frac{1}{3})^{10-j}$，$\mathrm{j}=1,2,\cdots,\mathrm{M}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{t}>5)=1-(\pi_0+\sum_{j=1}^{5}C_{10}^j\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{10-j})\approx 0.7809$$

6、设$\{X(t), t\geq 0\}$是纯生过程，且有

$$\mathbf{P(X(t+h)-X(t)=1|X(t)\text{为奇数})=\alpha h+o(h)}$$
$$\mathbf{P(X(t+h)-X(t)=1|X(t)\text{为偶数})=\beta h+o(h)}$$

取初始条件 X(0)=0，求下列概率$p_1(t)=P(X(t)=\text{奇数})$，$p_2(t)=P(X(t)=\text{偶数})$

解：由纯生过程公式得 $\mathrm{P}(\mathrm{X}(\mathrm{t}+\mathrm{h})-\mathrm{X}(\mathrm{t})=1|\mathrm{X}(\mathrm{t})=\mathrm{k})=\lambda_k\mathrm{h}+\mathrm{o}(\mathrm{h})$

则$\lambda_{奇}=\alpha$。同理，$\lambda_{偶}=\beta$。

因为 Kolmgorov 方程向前、向后微分方程分别为：

$$P'(t)=P(t)Q，P'(t)=QP(t)$$

因为 X(0)=0，所以 Q 的通解为：

$$Q=\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\mu+\lambda)t}+C, C=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

所以转移概率矩阵 $P1=\frac{\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}$，$P2=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}$

7. 考虑状态 $0,1,\quad,N$ 上的纯生过程 $X(t)$，假定 $X(0)=0$ 及 $\lambda_k=(N-k)\lambda, k=0,1,\quad,n$

其中 λ_k 满足 $P(X(t+h)-X(t)=1\mid X(t)=k)=\lambda_k h+o(h)$

试求 $P_n(t)=P(X(t)=n)$。这是新生率受群体总数反馈作用的例子。

解：设 $P_k(t)=P(X(t)=k\mid X(0)=0)$，则

$$\begin{aligned}
&P_k(t+h)=P(X(t+h)=k\mid X(0)=0)\\
&=\sum_{j=0}^{N}P(X(t+h)=k,X(t)=j\mid X(0)=0)\\
&=\sum_{j=0}^{N}P(X(t+h)=k\mid X(t)=j)P_j(t)\\
&=P(X(t+h)=k\mid X(t)=k)P_k(t)+P(X(t+h)=k\mid X(t)=k-1)P_{k-1}(t)+o(h)\\
&=(1-\lambda_k h)P_k(t)+\lambda_{k-1}hP_{k-1}(t)+o(h)
\end{aligned}$$

因此可得 $P_k'(t)=-\lambda_k P_k(t)+\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)$，于是有

$$P_0'(t)=-\lambda_0 P_0(t), P_0(t)=e^{-\lambda Nt}=e^{-\lambda 0t}$$

$$P_1'(t)=-\lambda_1 P_1(t)+\lambda_0 e^{-\lambda 0t}, P_1(t)=Ne^{-\lambda 1t}(1-e^{-\lambda t})$$

可类推得 $P_k(t)=C_N^k e^{-\lambda kt}(1-e^{-\lambda t})^k, k=0,1,\quad,N$

8. 证明：Furry-Yule 过程（即 $\lambda_i=i\lambda, i=1,2,\quad$ 的纯生过程）的概率母函数 $G(t,z)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{ik}(t)z^k$ 满足 $\frac{\partial G}{\partial t}-\lambda z(z-1)\frac{\partial G}{\partial z}=0$

解： 依题意 $G(t,z)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{ik}(t)z^k$ 建立母函数的微分方程：

$$\frac{\partial G(t,z)}{\partial t}=\frac{\partial\sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}(t)z^k}{\partial t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial P_{ik}(t)z^k}{\partial t}$$

$$\frac{\partial G(t,z)}{\partial t}=-\lambda_0(t)P_{i0}(t)+\mu_1(t)P_{i1}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}[\lambda_{k-1}(t)P_{ik-1}(t)-(\lambda_k(t)+\mu_k(t))P_{ik}(t)+\mu_{k+1}(t)P_{ik+1}(t)]z^k \text{ 将*式}$$

$$\frac{\partial G(t,z)}{\partial t}=-\lambda_0(t)P_{i0}(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(t)P_{ik}(t).z^k-\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(t)P_{ik}(t).z^k+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k-1}(t)P_{ik-1}(t).z^k$$

$$+[\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k+1}(t)P_{ik+1}(t).z^k+\mu_1(t)P_{i1}(t)]*$$

化简① $-\lambda_0(t)P_{i0}(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(t)P_{ik}(t).z^k=-\sum_{k=1}^{\infty}k\lambda(t)P_{ik}(t).z^k=-z\frac{\partial\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(t)P_{ik}(t)z^k}{\partial z}$

$$=-\lambda(t)z\sum_{k=1}^{\infty}P_{ik}(t)z^k=-\lambda(t)z\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}$$

② $-\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(t)P_{ik}(t).z^k=-\sum_{k=1}^{\infty}k\mu_k(t)P_{ik}(t).z^k=-z\frac{\partial}{\partial z}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(t)P_{ik}(t).z^k$

$$=-z\mu(t)\frac{\partial}{\partial z}P_{ik}(t)z^k=-\mu(t)z\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}$$

③ $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k-1}(t)P_{ik-1}(t).z^k=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\lambda(t)P_{ik-1}(t).z^k=\sum_{m=0}^{\infty}m\lambda(t)P_{im}(t).z^{m+1}$

$$=z\sum_{m=0}^{\infty}m\lambda(t)P_{im}(t).z^m=z^2\lambda(t)\frac{\partial}{\partial z}\sum_{m=1}^{\infty}P_{im}(t).z^m=z^2\lambda(t)\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}$$

④ $\mu_1(t)P_{i1}(t)+\sum_{m=1}^{\infty}\mu_{k+1}(t)P_{ik+1}(t)z^k=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_{k+1}(t)P_{ik+1}(t)z^{k+1}=\frac{1}{z}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_m(t)P_{im}(t)z^n$

$$=\mu(t).\frac{\partial}{\partial z}\sum_{m=1}^{\infty}P_{im}(t)z^m=\mu(t)\frac{\partial}{\partial z}G(t,z)$$

1+2+3+4 得

$$\frac{\partial G(t,z)}{\partial t}=\lambda(t)z(z-1)\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}+\mu(t)(1-z)\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}$$

$$=(z-1)(z\lambda(t)+\mu(t))\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}$$

考虑齐次条件下的微分方程：

$$\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}=\lambda z(z-1)\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}\text{即}\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}-\lambda z(z-1)\frac{\partial G(t,z)}{\partial z}=0$$

9. 有无穷多个服务员的排队系统：假定顾客以参数为 λ 的 Poisson 过程到达，而服务员的数量巨大，可理想化为无穷多个。顾客一到就与别的顾客相互独立地接受服务，并在时间 h 内完成服务的概率近似为 αh 。记 $X(t)$ 为在时刻 t 正在接受服务的顾客总数，试建立此过程的转移机制的模型。

解：设 $P_n(t)=P(X(t)=n\mid X(0)=0)$ ，则

$$\begin{aligned}P_n(t+h)&=P(X(t+h)=0\mid X(0)=0)\\&=P(X(t+h)=0,X(t)=0\mid X(0)=0)+P(X(t+h)=0,X(t)=1\mid X(0)=0)\\&=(1-\lambda h-\alpha h)P_0(t)+\alpha hP_1(t)\end{aligned}$$

因此可得 $P_0'(t)=-(\lambda+\alpha)P_0(t)+\alpha P_1(t)$

同理有：

$$P_n'(t)=-(\lambda+\alpha)P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\alpha P_{n+1}(t),n\geq1$$

初始条件： $P_0(t)=1,P_n(t)=0,n\geq1$

$\{X(t),t\geq0\}$ 是生灭过程。