北京交通大学

2022年-2023学年第一学期研究生《随机过程I》试题

(注：本试卷满分100分，共六道大题)

1.（10分）

设两个泊松过程 $\{N_1(t), t \geq 0\}$和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$强度分别是 λ_1 和 λ_2 且相互独立。证明：$N_t = N_1(t) + N_2(t)$是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程。

2.(20分)

设 $\{N(t), t \geq 0\}$是强度为 λ的齐次泊松过程，$S_0 = 0$，S_n表示第n个事件发生的时刻。

(1) 求 S_n 的概率密度函数 $f_{S_n}(t)$; (1) $f_{S_n}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0)$

(2) 求 (S_1, S_2)的联合概率密度函数 $f(s_1, s_2)$;

(3) 求条件期望 $E(S_1 \mid S_2 = s_2)$.

(2) $f(s_1, s_2) = \lambda^2 e^{-\lambda s_2}$ $(0 \leq s_1 \leq s_2)$

(3) $E(S_1 \mid S_2 = s_2) = \frac{s_2}{2}$

3.(20分)

设齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间为 $E = \{1, 2\}$，其转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

初始分布为 $P(X_0 = 1) = p, P(X_0 = 2) = 1 - p(0 < p < 1)$。对任意的 $n \geq 1$,试求：(1) $P(X_{n+2} = 2 \mid X_n = 2)$; (2) $P(X_n = 1)$与$P(X_n = 2)$

(1) $P(X_{n+2} = 2 \mid X_n = 2) = \frac{3}{8}$

(2) $n \to +\infty$, $\begin{cases} P(X_n = 1) = \frac{2}{3} \\ P(X_n = 2) = \frac{1}{3} \end{cases}$

4.（20分）

设 $\{X_n\}$为齐次马氏链，证明：

(1) 对任何非负整数m,n,则有 $P_{ij}^{m+n} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$; 分解特性 (C-K方程)

(2) 若 $i \to k, k \to j$,则有 $i \to j$. (传递性)

5.(10分)

不断地掷一枚骰子，以 X_n表示前n次掷出的点数最大值，则随机序列 $\{X_n, n \geq 1\}$是一马氏链，求其一步转移概率矩阵。

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.（20分）

(1) 设马氏链 $\{X_n\}$的状态空间为E={1，2，3，4}，转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

非常返集: D={4}, ~~周期为1,即非周期~~

基本常返闭集: C={1,2,3}

链分解: E=C∪D

试分解此链，指出其非常返集和基本常返闭集，并说明常返闭集中的状态是否为正常返态。

C, 正常返, 周期为1, 即非周期, 遍历态.

(2) 设马氏链 $\{X_n\}$的状态空间为 E={1，2，3}，转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

讨论此马氏链的状态分类、周期性并求其平稳分布和极限分布。

1. 状态连通不可约，所有状态{1,2,3}均常返.

2. d=1, ∴非周期

3. 平稳分布=极限分布=$(\frac{3}{13}, \frac{6}{13}, \frac{4}{13})$ [不可约,非周期马氏链的性质]