HomeWork

邹翔宇 | 2410833001

第一题

1. 点估计和区间估计的区别及应用场景

区别:

- **点估计**是用单个数值（如样本均值、样本比例）直接估计总体参数（如总体均值、总体比例）。
- **区间估计**是给出一个区间范围及对应的置信度（如 95% 置信区间），表示该区间以一定概率包含总体参数。

应用场景:

- **点估计**：例如，工厂质检中估计某批次零件的平均长度为 10.2 毫米。
- **区间估计**: 例如, 在药物临床试验中, 估计某药的平均疗效提升为 5% 15%（置信度 95%）, 既给出范围又体现可信度。

2. 标准误的定义及正态分布、泊松分布的均数标准误

定义：标准误（Standard Error, SE）是统计量（如样本均值）的标准差，反映抽样误差的大小。 公式:

- **正态分布**：均数的标准误为 $\text{SE} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，其中$\sigma$是总体标准差，$n$为样本量。
- **泊松分布**：均数的标准误为 $\text{SE} = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}$，其中$\lambda$是总体均值（泊松分布的均值等于方差）。

3. 标准误的影响因素及样本量增加 4 倍时的变化

影响因素:

- 总体标准差（σ或$\sqrt{\lambda}$）：总体变异越大，标准误越大。
- 样本量（n）：样本量越大，标准误越小。

样本量增加 4 倍时的变化： 对于率的标准误（如二项分布），公式为 $\text{SE} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$。当样本量$n$增加 4 倍，标准误变为原来的$\frac{1}{2}$（因$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$）。

4. 区间估计中使用 t 分布的情况

当同时满足以下条件时需使用 **t 分布**:

1. 总体标准差未知，需用样本标准差s代替。
2. 样本量较小（通常$n < 30$）或总体不严格服从正态分布。

示例：研究 10 名学生的平均体重时，若总体方差未知，应使用 t 分布计算置信区间（而非正态分布）。

第二题

1. 总体均数的点估计值

点估计是用样本统计量直接估计总体参数。此处样本均值为 5.2 mmol/L，而样本均数是总体均数的无偏估计量。因此，总体均数的点估计值为 **5.2 mmol/L**。

2. 已知总体标准差（σ=0.8）时，构建总体均数的 95% 置信区间

当总体标准差σ已知时，使用正态分布（Z 分布）构建置信区间:

$$\text{置信区间} = \bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

其中:

- $\bar{X} = 5.2$
- $\sigma = 0.8$
- $n = 25$
- $Z_{0.025} = 1.96$（对应 95% 置信水平）

代入计算:

$$5.2 \pm 1.96 \cdot \frac{0.8}{\sqrt{25}} = 5.2 \pm 1.96 \cdot 0.16 = 5.2 \pm 0.3136$$

区间范围：$4.8864 \sim 5.5136$ mmol/L

3. 已知样本标准差（s=0.8）时，构建总体均数的 95% 置信区间

当总体标准差未知且样本量较小（$n = 25 < 30$）时，需使用 t 分布:

$$\text{置信区间} = \bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2},\,\mathrm{df}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

其中：
- $\bar{X} = 5.2$
- $s = 0.8$
- $n = 25$
- 自由度 $\mathrm{df} = n - 1 = 24$
- $t_{0.025,24} \approx 2.064$（查 t 分布表）

代入计算：

$$5.2 \pm 2.064 \cdot \frac{0.8}{\sqrt{25}} = 5.2 \pm 2.064 \cdot 0.16 = 5.2 \pm 0.3302$$

区间范围：$4.8698 \sim 5.5302$ mmol/L
依据：小样本且总体方差未知时需用 t 分布。

4. 置信区间比较及 t 分布与正态分布的区别与联系
(1) 比较两个置信区间大小
- **正态分布置信区间**：$4.8864 \sim 5.5136$（宽度约 0.6272）
- **t 分布置信区间**：$4.8698 \sim 5.5302$（宽度约 0.6604）

结论：t 分布的置信区间更宽，说明在小样本且总体方差未知时，t 分布考虑了额外的不确定性。

(2) t 分布与正态分布的区别与联系 区别：
1. **尾部厚度**：t 分布尾部更厚，对极端值更敏感，适用于小样本。
2. **自由度影响**：t 分布形状由自由度决定，自由度越大越接近正态分布；而正态分布形态固定。
3. **应用条件**：
   - 正态分布：总体方差已知或大样本（$n \geq 30$）。
   - t 分布：总体方差未知且小样本。

联系：
1. **对称性**：两者均为对称分布，以均值为中心。
2. **趋近性**：当自由度 $\mathrm{df} \to \infty$ 时，t 分布收敛于标准正态分布。
3. **参数估计**：两者均可用于总体均数的区间估计，但适用条件不同。

总结：t 分布是小样本统计推断的核心工具，其灵活性弥补了正态分布在小样本场景中的不足。

第三题

1. 高血压患病率的点估计值

$$\hat{p} = \frac{48}{400} = 0.12$$

解释：点估计值为样本患病率，即 $\frac{48}{400} = 0.12$。

2. 正态近似条件验证
条件：$n\hat{p} \geq 5$ 且 $n(1-\hat{p}) \geq 5$。 计算：

$$n\hat{p} = 400 \times 0.12 = 48 \geq 5, \quad n(1-\hat{p}) = 400 \times 0.88 = 352 \geq 5$$

结论：正态近似条件成立。

3. 患病率的 95% 置信区间
公式：

$$\hat{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

计算步骤：
- 标准误（SE）：

$$\sqrt{\frac{0.12 \times 0.88}{400}} = \sqrt{0.000264} \approx 0.01625$$

- 95% 置信水平的 Z 值：$Z_{0.975} = 1.96$
- 误差范围：

$$1.96 \times 0.01625 \approx 0.0318$$

- 置信区间：

$$0.12 \pm 0.0318 \quad \Rightarrow \quad [0.088, 0.152]$$

答案：95% 置信区间为 **（0.088，0.152）**。

4. 样本量增至 1600 人时置信区间的宽度变化
结论：置信区间的宽度会 **缩小为原来的一半**。

原因：
- 标准误公式为 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，当样本量 n 增至 4 倍时，标准误变为原来的 $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$。
- 置信区间宽度为 $2 \times Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \text{SE}$，因此宽度也会缩小为原来的 **1/2**。

第四题

1. 总体均数之差的点估计

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = 120 - 115 = 5$$

2. 两样本标准差均为 15 时的 95% 置信区间
条件：假设总体方差相等，使用合并方差计算。 公式：

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2},\,\text{df}} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

计算步骤：
1. 合并方差：

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{14 \times 225 + 9 \times 225}{23} = 225 \quad \Rightarrow \quad s_p = 15$$

2. 标准误（SE）：

$$s_p \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{10}} = 15 \times \sqrt{\frac{1}{6}} \approx 6.124$$

3. 自由度（df）：$n_1 + n_2 - 2 = 23$，查 t 表得 $t_{0.975,23} = 2.069$
4. 误差范围：

$$2.069 \times 6.124 \approx 12.67$$

5. 置信区间：

$$5 \pm 12.67 \quad \Rightarrow \quad [-7.67, 17.67]$$

答案：95% 置信区间为 **（-7.67, 17.67）**。

3. 样本方差不同（s_1=15，s_2=12）时的 95% 置信区间
条件：总体方差不等，使用 Welch-Satterthwaite 方法。 公式：

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2},\,\text{df}} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

计算步骤：
1. 标准误（SE）：

$$\sqrt{\frac{15}{15} + \frac{12}{10}} = \sqrt{1 + 1.2} \approx 1.483$$

2. 自由度近似（Welch 公式）：

$$\text{df} \approx \frac{\left(\frac{15^2}{15} + \frac{12^2}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{15^2}{15}\right)^2}{14} + \frac{\left(\frac{12^2}{10}\right)^2}{9}} \approx 22$$

3. 查 t 表得 $t_{0.975,22} = 2.074$
4. 置信区间：

$$5 \pm 2.074 \times \sqrt{\frac{115^2}{15} + \frac{12^2}{12}} \quad \Rightarrow \quad [-6.24, 16.24]$$

答案：95% 置信区间为 **[−6.24, 16.24]**。

4. 总体方差已知（σ_1=15，σ_2=12）时的 95% 置信区间
条件：总体方差已知，使用正态分布（Z 分布）。 公式：

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

计算步骤：
1. 标准误（SE）：

$$\sqrt{\frac{15}{15} + \frac{12}{10}} = \sqrt{1 + 1.2} \approx 1.483$$

2. 95% 置信水平的 Z 值：$Z_{0.975} = 1.96$
3. 置信区间：

$$5 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{115^2}{15} + \frac{12^2}{12}} \quad \Rightarrow \quad [-5.6273, 15.6273]$$

答案：95% 置信区间为 **（-5.6273, 15.6273）**。

第五题

1. 疫苗 A 和疫苗 B 未感染率的点估计值
- 疫苗 A：$\hat{p}_A = \frac{240}{300} = 0.80$
- 疫苗 B：$\hat{p}_B = \frac{180}{300} = 0.60$

疫苗 A 未感染率点估计值为 **0.80**，疫苗 B 为 **0.60**。

2. 两独立样本率之差的标准误公式及计算
公式：

$$\text{SE}(\hat{p}_A - \hat{p}_B) = \sqrt{\frac{\hat{p}_{A(1-\hat{p}_A)}}{n_A} + \frac{\hat{p}_{B(1-\hat{p}_B)}}{n_B}}$$

- 疫苗 A：$\frac{0.80 \times 0.20}{300} = 0.000533$
- 疫苗 B：$\frac{0.60 \times 0.40}{300} = 0.000800$
- 标准误：$\sqrt{0.000533 + 0.000800} = \sqrt{0.001333} \approx 0.0365$

3. 两疫苗未感染率之差的 95% 置信区间及结论
公式：

$$(\hat{p}_A - \hat{p}_B) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \text{SE}$$

计算过程：
1. 率之差：$0.80 - 0.60 = 0.20$
2. 标准误：0.0365
3. 95% 置信水平的 Z 值：$Z_{0.975} = 1.96$
4. 误差范围：$1.96 \times 0.0365 \approx 0.0715$
5. 置信区间：

$$0.20 \pm 0.0715 \quad \Rightarrow \quad [0.1285, 0.2715]$$

结论： 由于置信区间 [0.13, 0.27] 不包含 0，可以认为两种疫苗的有效性存在 **显著差异**（$p < 0.05$）。

4. 样本量扩大至每组 1000 人时置信区间的宽度变化

原因：

- 标准误公式中，样本量 n 位于分母，且与标准误成反比。
- 当样本量从 300 增至 1000（扩大约 3.33 倍），标准误变为原来的 $\frac{1}{\sqrt{3.33}} \approx 0.55$ 倍。
- 置信区间宽度与标准误成正比，因此宽度会 **缩小至原来的约 55%**。

置信区间宽度会 **显著变窄**，具体缩小至原宽度的约 55%。