HomeWork

邹翔宇 | 2410833001

第一题

1. 2×2 列联表及假设
列联表：

药物	有效	无效	总计
X 药	72	8	80
Y 药	58	12	70
总计	130	20	150

假设：
原假设 $H_0 : p_X = p_Y$（两种药物有效率相同）
备择假设 $H_1 : p_X \neq p_Y$（两种药物有效率不同）

2. 卡方检验计算
期望频数计算：
X 药有效：

$$\frac{\{80 * 130\}}{\{150\}} \approx 69.333$$

X 药无效：

$$\frac{\{80 * 20\}}{\{150\}} \approx 10.667$$

Y 药有效：

$$\frac{\{70 * 130\}}{\{150\}} \approx 60.667$$

Y 药无效：

$$\frac{\{70 * 20\}}{\{150\}} \approx 9.333$$

卡方统计量计算：

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(O - E)^2}{E} \right) = \frac{(72 - 69.333)^2}{69.333} + \frac{(8 - 10.667)^2}{10.667} + \frac{(58 - 60.667)^2}{60.667} + \frac{(12 - 9.333)^2}{9.333} \approx 1.648$$

p 值： 自由度为 1，查卡方分布表得 $p \approx 0.20$。

3. 两样本率 Z 检验的假设
假设：
原假设 $H_0 : p_X = p_Y$（两种药物有效率相同）
备择假设 $H_1 : p_X \neq p_Y$（两种药物有效率不同）

4. Z 检验计算
样本率与合并率： $p_X = \frac{72}{80} = 0.9$, $p_Y = \frac{58}{70} \approx 0.8286$ 合并率 $\mathrm{p.pool} = \frac{72+58}{80+70} \approx 0.8667$

标准误（SE）计算： $\mathrm{SE} = \sqrt{\mathrm{p.pool} * (1 - \mathrm{p.pool}) * \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{70}\right)} \approx 0.05565$

Z 统计量： $Z = \frac{p_X - p_Y}{\mathrm{SE}} = \frac{0.9 - 0.8286}{0.05565} \approx 1.283$

p 值： 双尾检验，查标准正态分布表得 $p \approx 0.20$。

5. 检验结论与 p 值比较
结论：
卡方检验：$\chi^2 \approx 1.648, p \approx 0.20$，不拒绝 H_0。
Z 检验：$Z \approx 1.283, p \approx 0.20$，不拒绝 H_0。

p 值比较： 卡方统计量与 Z 统计量满足 $\chi^2 = Z^2$，因此两种检验的 p 值相同（理论值严格相等，计算误差可忽略）。两种检验均显示无显著差异。

答案总结： 两种检验均未拒绝原假设，且 p 值一致（约 0.20），说明两种药物疗效无统计学差异。

第二题

1. 配对设计中的"一致对"和"不一致对"
- **一致对**：两种检测方法结果相同的配对。
- **甲法阳性且乙法阳性**：对应左上角格子（20 例）。
- **甲法阴性且乙法阴性**：对应右下角格子（17 例）。

不一致对：两种检测方法结果不同的配对。
- **甲法阳性但乙法阴性**：对应左下角格子（5 例）。
- **甲法阴性但乙法阳性**：对应右上角格子（8 例）。

2. McNemar 检验的假设
原假设（H_0）：两种检测方法的阳性率相同（即不一致对中两种情况的概率相等，$b = c$
备择假设（H_1）：两种检测方法的阳性率不同（即不一致对中两种情况的概率不等，$b \neq c$

3. 计算卡方统计量
公式（使用连续性校正）：

$$\chi^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}$$

$$b = 8$$

（乙法阳性但甲法阴性）

$$c = 5$$

（甲法阳性但乙法阴性）

$$\chi^2 = \frac{(|8-5|-1)^2}{13} = \frac{(3-1)^2}{13} = \frac{4}{13} \approx 0.3077$$

4. p 值及结论
自由度：1（卡方检验自由度） **p 值计算**：查卡方分布表或通过统计软件计算，$\chi^2 = 0.3077$ 对应 $p \approx 0.579$。

判断与解释： 若显著性水平设为 $\alpha = 0.0$，则 $p > 0.05$，无法拒绝原假设。
结论：两种检测方法（甲法和乙法）的阳性率无统计学显著差异。

第三题

1. 原假设和备择假设
原假设 (H_0)：年龄段与社交媒体平台的使用偏好无关（独立）。
备择假设 (H_1)：年龄段与社交媒体平台的使用偏好存在关联（不独立）。

2. 卡方统计量计算
步骤：

1. **计算行、列总和及总样本量**：行总和：18-25 岁（130）、26-35 岁（120）、36-45 岁（100）。列总和：微信（120）、微博（90）、抖音（80）、其他（60）。总样本量 $N = 350$。

2. **计算期望频数 $\boldsymbol{E}$**：

$$E_{ij} = \frac{\text{行总和}_i \times \text{列总和}_j}{N}$$

例如： 18-25 岁 & 微信：$E = \frac{130 \times 120}{350} \approx 44.571$。 36-45 岁 & 其他：$E = \frac{100 \times 60}{350} \approx 17.143$。

3. **计算卡方值**：

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

关键单元格示例：18-25 岁 & 其他：$\frac{(10-22.286)^2}{22.286} \approx 6.773$。36-45 岁 & 其他：$\frac{(30-17.143)^2}{17.143} \approx 9.648$。

4. **卡方统计量**：

$$\chi^2 \approx 25.07$$

3. p 值计算

自由度：$(3-1)(4-1) = 6$。**查卡方分布表或计算**：当 $\chi^2 = 25.07$，自由度为 6 时，$p \approx 0.0003$。

4. 结论

拒绝原假设（$p < 0.05$）。**解释**：年龄段与社交媒体平台的使用偏好存在显著关联，不同年龄段人群对平台的偏好有统计学差异。

第四题

1. 原假设和备择假设

原假设 $\boldsymbol{H_0}$：数据服从泊松分布。
备择假设 $\boldsymbol{H_1}$：数据不服从泊松分布。

2. 参数估计和理论频数

泊松分布的参数 $\boldsymbol{\lambda}$ 使用样本均值进行估计：计算总借出量为 240 本，总小时数为 120 小时，因此 $\lambda = \frac{240}{120} = 2$。

理论频数计算如下（泊松分布概率乘以总小时数 120）：

- $k = 0$：$0.1353 \times 120 \approx 16.24$
- $k = 1$：$0.2707 \times 120 \approx 32.48$
- $k = 2$：$0.2707 \times 120 \approx 32.48$
- $k = 3$：$0.1804 \times 120 \approx 21.65$
- $k \geq 4$：$0.1429 \times 120 \approx 17.15$

3. 卡方统计量和 p 值

卡方统计量计算为：

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(10-16.24)^2}{16.24} + \frac{(20-32.48)^2}{32.48} + \frac{(60-32.48)^2}{32.48} + \frac{(20-21.65)^2}{21.65} + \frac{(10-17.15)^2}{17.15} \approx 33.60$$

自由度为 $\boldsymbol{5-1-1=3}$。

p 值接近于 0，远小于显著性水平 0.05，因此拒绝原假设。

结论：拒绝原假设，数据不服从泊松分布。

第五题

1. 原假设和备择假设

原假设 $\boldsymbol{H_0}$：果蝇翅型的实际观测比例符合理论比例（正常翅 75%，残翅 25%）。
备择假设 $\boldsymbol{H_1}$：果蝇翅型的实际观测比例不符合理论比例。

2. 理论频数与卡方统计量计算

理论频数：

- 总样本量 $N = 280 + 90 = 370$
- 正常翅理论频数：$E_{正常} = 370 \times 0.75 = 277.5$
- 残翅理论频数：$E_{残翅} = 370 \times 0.25 = 92.5$

卡方统计量：

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right)$$

- 正常翅贡献：

$$\frac{(280-277.5)^2}{277.5} \approx \frac{(2.5)^2}{277.5} \approx 0.022$$

- 残翅贡献：

$$\frac{(90-92.5)^2}{92.5} \approx \frac{(-2.5)^2}{92.5} \approx 0.067$$

总卡方统计量：

$$\chi^2 \approx 0.022 + 0.067 = 0.089$$

3. p 值计算

自由度为 $2-1=1$（两类翅型）。查卡方分布表或计算 p 值：

- 对于 $\chi^2 = 0.089$ 和自由度 1，p 值约为 0.764（远大于 0.05）。

4. 结论

由于 p 值 $0.764 > 0.05$，**不拒绝原假设**。这表明实际观测数据与理论比例（正常翅 75%，残翅 25%）没有显著差异，支持理论比例的假设。可能的原因是实验数据符合遗传学理论，或者样本量较小导致统计检验力不足。