

HomeWork

邹翔宇 | 2410833001

第一题

1. 原假设和备择假设:

- 原假设 H_0 : 零件的平均长度等于标称值 10 cm, 即 $H_0: \mu = 10$ cm。
- 备择假设 H_1 : 零件的平均长度不等于标称值 10 cm, 即 $H_1: \mu \neq 10$ cm。

2. 计算 Z 统计量: 使用公式 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$:

计算得:

$$Z = \frac{10.2 - 10}{\frac{0.5}{\sqrt{50}}} = \frac{0.2}{0.0707} \approx 2.83$$

3. 计算 p 值: 由于是双侧检验, p 值为标准正态分布中 Z 统计量绝对值两侧的概率之和。Z 统计量约为 2.83, 对应的单侧概率为 0.0023, 因此双侧 p 值为:

$$p = 2 \times 0.0023 = 0.0046$$

4. 判断是否拒绝原假设: p 值约为 0.0046, 小于常用的显著性水平 (如 0.05 或 0.01), 因此拒绝原假设 H_0 。样本数据提供了足够的证据表明零件的平均长度与标称值 10 cm 存在显著差异。

第二题

1. 原假设和备择假设:

- 原假设 H_0 : 今年的吸烟率等于去年的 25%, 即 $H_0: p = 0.25$ 。
- 备择假设 H_1 : 今年的吸烟率不等于去年的 25%, 即 $H_1: p \neq 0.25$ 。

2. 计算 Z 统计量: 使用公式 $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$:

- 样本比例 $\hat{p} = \frac{40}{200} = 0.2$
- 原假设比例 $p_0 = 0.25$
- 样本量 $n = 200$
- 标准误 $\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{200}} \approx 0.03062$

计算得:

$$Z = \frac{0.2 - 0.25}{0.03062} \approx -1.632$$

3. 计算 p 值:

- 由于是双侧检验, p 值为标准正态分布中 $|Z| = 1.632$ 两侧的概率之和。
- 单侧概率约为 0.0516, 双侧 p 值为:

$$p\text{值} = 2 \times 0.0516 \approx 0.103$$

4. 判断是否拒绝原假设: p 值约为 0.103, 大于常用的显著性水平 (如 0.05), 因此不拒绝原假设 H_0 。样本数据没有提供足够证据表明今年的吸烟率与去年的 25% 存在显著差异。

第三题

1. 原假设和备择假设:

- 原假设 H_0 : 两种肥料对作物产量的均值无显著差异, 即 $\mu_A = \mu_B$ 。
- 备择假设 H_1 : 两种肥料对作物产量的均值存在显著差异, 即 $\mu_A \neq \mu_B$ 。

2. 计算 t 统计量: 使用合并方差公式 $t = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)}}$, 其中合并方差 $s_p^2 = \frac{(n_A-1)s_A^2 + (n_B-1)s_B^2}{n_A + n_B - 2}$:

- $\bar{X}_A = 50$, $\bar{X}_B = 55$, $s_A = 5$, $s_B = 6$, $n_A = 15$, $n_B = 12$
- 合并方差:

$$s_p^2 = \frac{(15-1) \cdot 5^2 + (12-1) \cdot 6^2}{15 + 12 - 2} = \frac{14 \cdot 25 + 11 \cdot 36}{25} = \frac{746}{25} = 29.84$$

- 标准误:

$$\sqrt{29.84 \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{12}\right)} = \sqrt{29.84 \cdot 0.15} \approx 2.116$$

· t 统计量:

$$t = \frac{50 - 55}{2.116} \approx -2.363$$

3. 计算 p 值: 自由度为 $n_A + n_B - 2 = 25$, 双侧检验中, t 统计量绝对值 $|t| = 2.363$ 对应的 p 值约为 0.0258。

4. 判断是否拒绝原假设: p 值约 0.026, 小于显著性水平 $\alpha = 0.05$, 因此拒绝原假设 H_0 。数据表明两种肥料对作物产量的影响存在显著差异, B 组平均产量显著高于 A 组。

第四题

1. 原假设和备择假设:

- 原假设 H_0 : 两种药物的治愈率无显著差异, 即 $p_A = p_B$ 。
- 备择假设 H_1 : 两种药物的治愈率存在显著差异, 即 $p_A \neq p_B$ 。

2. 计算 t 统计量: 使用独立样本 t 检验公式 (假设方差齐性):

- A 组治愈率 $p_A = 0.6$, 样本量 $n_A = 30$
- B 组治愈率 $p_B = 0.5$, 样本量 $n_B = 25$
- 合并方差 $s_p^2 = \frac{(n_A-1)s_A^2 + (n_B-1)s_B^2}{n_A + n_B - 2}$
- $s_A^2 = p_A(1-p_A) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$
- $s_B^2 = p_B(1-p_B) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$
- 合并方差:

$$s_p^2 = \frac{(29 \cdot 0.24) + (24 \cdot 0.25)}{53} = \frac{6.96 + 6}{53} \approx 0.2445$$

· 标准误:

$$\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)} = \sqrt{0.2445 \cdot \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{25}\right)} \approx 0.1338$$

· t 统计量:

$$t = \frac{p_A - p_B}{\text{标准误}} = \frac{0.6 - 0.5}{0.1338} \approx 0.747$$

3. 计算 p 值: 自由度为 $n_A + n_B - 2 = 53$, 得到双侧 p 值约为 **0.458**。

4. 判断是否拒绝原假设: p 值远大于常用显著性水平 (如 0.05), 因此不拒绝原假设 H_0 。数据未提供足够证据表明两种药物的治愈率存在显著差异。

第五题

1. 原假设和备择假设:

- 原假设 H_0 : 降压药对血压无显著影响, 即服药前后的血压均值差为 0, 即 $\mu_d = 0$ 。
- 备择假设 H_1 : 降压药对血压有显著影响, 即服药前后的血压均值差不为 0, 即 $\mu_d \neq 0$ 。

2. 计算 t 统计量: 配对 t 检验公式:

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

· 差值计算 (服药前 - 服药后):

$$d = [10, 5, 8, 13, 2, 18, 12, 13, 10, 6]$$

- 均值 $\bar{d} = \frac{10+5+\dots+6}{10} = 9.7$ mmHg
- 标准差 $s_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} \approx 4.644$ mmHg
- 标准误 $SE = \frac{s_d}{\sqrt{n}} \approx 1.468$
- t 统计量:

$$t = \frac{9.7}{1.468} \approx 6.606$$

3. **计算 p 值：**自由度为 $n - 1 = 9$ ，查 t 分布表或使用统计软件，双侧检验中 $t = 6.606$ 对应的 p 值 < 0.001 （精确值约为 8.6×10^{-5} ）。
4. **判断是否拒绝原假设：**p 值远小于显著性水平（如 0.05），因此拒绝原假设 H_0 。数据表明降压药显著降低了患者的血压，差异具有统计学意义。

第六题

1. 第一类错误 (Type I Error)

- **定义：**当原假设 H_0 为真时（新药实际无效），错误地拒绝了 H_0 ，即错误地认为新药有效。
- **实际意义：**可能导致无效药物被批准上市，浪费医疗资源，甚至让患者承担不必要的副作用风险。

2. 第二类错误 (Type II Error)

- **定义：**当备择假设 H_1 为真时（新药实际有效），未能拒绝 H_0 ，即未能检测到新药的有效性。
- **实际意义：**可能使有效药物被错误地放弃，延误患者治疗机会，影响公共卫生效益。

3. 检验效能 (Power of the Test)

- **定义：**检验效能是正确拒绝原假设 H_0 的概率，即 $1 - \beta$ （其中 β 是第二类错误的概率）。
- **重要性：**高效能意味着研究有足够灵敏度检测真实存在的效应。若效能不足，即使药物有效，实验也可能无法发现，导致科学资源的浪费。

4. 平衡第一类错误和第二类错误

- **调整显著性水平 α ：**降低 α （如从 0.05 调整为 0.01）可减少第一类错误，但会降低检验效能，增加第二类错误风险。
- **增加样本量 n ：**增大样本量可提高检验效能，同时降低两类错误的概率。样本量越大，估计越精确，更易区分真实效应与随机波动。
- **权衡策略：**在资源允许下，优先增加样本量以平衡两类错误；若成本受限，需根据研究目标选择 α 。例如，药物审批中严格控 α （降低假阳性），同时通过足够样本量维持效能。