偏微分方程课后习题答案

2021 级

Xavier Zheng

Prepared for MONTH DAY-NUMBER, YEAR

目录

1 波动方程 **2**

1.1 2

1.2 2

1.3 2

1.4 2

1.5 2

1.6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性 3

1 波动方程

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

1. 对受摩擦力作用且具固定端点的有界弦振动，满足方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - cu_t,$$

其中常数 $c>0$，证明其能量是减少的，并由此证明方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - cu_t + f$$

的初边值问题解的唯一性以及关于初始条件及自由项的稳定性.

证明：

(一) 能量衰减的证明

已知总能量为:

$$E(t) = \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2)\,dx$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{\partial E(t)}{\partial t} &= \int_0^l (2u_t u_{tt} + 2a^2 u_x u_{xx})\,dx \\ &= 2\int_0^l u_t u_{tt}\,dx + 2a^2\int_0^l u_x\,du_t \\ &= 2\int_0^l u_t u_{tt}\,dx + 2a^2[u_x u_t\Big|_0^l - \int_0^l u_t u_{xt}\,dx] \\ &= 2\int_0^l u_t(u_{tt} - a^2 u_{xx})\,dx + 2a^2 u_x u_t\Big|_0^l\end{aligned}$$

由于两端固定，存在边界条件 $u\big|_{x=0} = 0$，$u\big|_{x=l} = 0$，因此得到 $u_t\big|_{x=0} = 0$，$u_t\big|_{x=l} = 0$。

所以，

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = 2\int_0^l u_t(-cu_t)\,dx = -2c\int_0^l u_t^2\,dx \le 0 \quad (c>0)$$

因此，$E(t)$ 随着 t 的增加而衰减。

（二）证明初边值问题解的唯一性

考虑

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - c u_t + f \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{I}$$

不妨设 u_1, u_2 是以上问题的解，令 $\omega = u_1 - u_2$，则 ω 满足

$$\begin{cases} \omega_{tt} = a^2 \omega_{xx} - c \omega_t \\ \omega\big|_{x=0} = 0, \quad \omega\big|_{x=l} = 0 \\ \omega\big|_{t=0} = 0, \quad \omega_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{II}$$

又总能量 $E(t) = \int_0^l (\omega_t^2 + a^2 \omega_x^2)\, dx$；

由 $\omega\big|_{t=0} = 0$，可得 $\omega_x\big|_{t=0} = 0$；

又 $\omega_t\big|_{t=0} = 0$，所以 $E(0) = 0$；

由（一）的证明可以得到，$E(t)$ 随着 t 的增加而减少故 $t > 0$，$E(t) < E(0)$；

又 $E(t) \geq 0$，所以 $E(t) \equiv 0$；

因此有 $\omega_t \equiv 0, \omega_x \equiv 0$，所以 $\omega \equiv$ 常量；

又 $\omega\big|_{t=0} = 0$，所以 $\omega \equiv 0$；

因此 $u_1 = u_2$，解的唯一性证毕。

（三）证明初边值问题的解关于初始条件及自由项的稳定性

考虑初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - cu_t + f_i \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 & \quad i = 1, 2 \\ u\big|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi_i(x) \end{cases} \tag{III}$$

不妨设 u_1, u_2 是上面问题的解，令 $v = u_1 - u_2$，则 v 满足

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} - cv_t + (f_1 - f_2) \\ v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=l} = 0 \\ v\big|_{t=0} = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \quad v_t\big|_{t=0} = \psi_1(x) - \psi_2(x) \end{cases} \tag{IV}$$

(1) 证明 $E(t) \le e^t[E(0) + \int_0^t \int_0^i e^{-\tau}(f_1 - f_2)^2 \, dx \, d\tau]$

已知总能量为:

$$E(t) = \int_0^l (v_t^2 + a^2 v_x^2) \, dx$$

所以，

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(t)}{\partial t} &= \int_0^l (2v_t v_{tt} + 2a^2 v_x v_{xx}) \, dx \\ &= 2\int_0^l v_t v_{tt} \, dx + 2a^2 \int_0^l v_x \, dv_t \\ &= 2\int_0^l v_t v_{tt} \, dx + 2a^2 [v_x v_t \Big|_0^l - \int_0^l v_t v_{xx} \, dx] \\ &= 2\int_0^l v_t (v_{tt} - a^2 v_{xx}) \, dx + 2a^2 v_x v_t \Big|_0^l \\ &= 2\int_0^l v_t (v_{tt} - a^2 v_{xx}) \, dx \\ &= 2\int_0^l v_t (f_1 - f_2 - cv_t) \, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^l v_t(f_1-f_2) - \int_0^l c{v_t}^2\,dx \\
&\le 2\int_0^l v_t(f_1-f_2) \\
&\le \int_0^l {v_t}^2\,dx + \int_0^l (f_1-f_2)^2\,dx \\
&\le E(t) + \int_0^l (f_1-f_2)^2\,dx
\end{aligned}
$$

由 $Granowall$ 不等式有：$E(t) \le e^t[E(0) + \int_0^t\int_0^i e^{-\tau}(f_1-f_2)^2\,dx\,d\tau]$

(2) 证明 $E_0(t) \le e^t[E_0(t) + E(0) + \int_0^t\int_0^i e^{-\tau}(f_1-f_2)^2\,dx\,d\tau]$

已知 $E_0(t) = \int_0^l v^2\,dx$

所以

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_0(t)}{\partial t} &= 2\int_0^l v v_t\,dx \\
&\le \int_0^l v^2\,dx + \int_0^l v_t^2\,dx \\
&\le E_0(t) + E(t)
\end{aligned}
$$

由 $Granowall$ 不等式有：$E_0(t) \le e^t[E_0(t) + E(0) + \int_0^t\int_0^i e^{-\tau}(f_1-f_2)^2\,dx\,d\tau]$

(3) 证明 $E(t) + E_0(t) \le C[E_0(t) + E(0) + \int_0^t\int_0^i (f_1-f_2)^2\,dx\,d\tau]$

由 (1) 和 (2) 有：

$$
E(t) + E_0(t) \le C[E(0) + E_0(0) + \int_0^T\int_0^t (f_1-f_2)^2\,dx\,d\tau] \qquad \forall\, 0 \le t \le T
$$

(4) 证明初边值问题的解关于初始条件及自由项的稳定性

考虑 (III) 式满足当 η 充分小时，

$$
\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2} \le \eta, \qquad \|\psi_1-\psi_2\|_{L^2} \le \eta, \qquad \|f_1-f_2\|_{L^2(0,T;L^2)} \le \eta
$$

由 (3) 有 $E_0(t)+E(t)\le C[E_0(t)+E(0)+\int_0^t\int_0^i(f_1-f_2)^2\,dx\,d\tau]$

即

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l(v^2+v_t^2-a^2v_x^2)\,dx\\
&\le\int_0^l\left[(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))^2+(\psi_1-\psi_2(x))^2+a^2(\varphi_{1x}(x)-\varphi_{2x}(x))^2\right]\,dx\\
&\quad+\int_0^T\int_0^l(f_1-f_2)^2\,dx\,dt\\
&\le\eta^2+\eta^2+a^2\eta^2+\eta^2\\
&\le C\eta^2
\end{aligned}
$$

所以 $\forall\epsilon>0$，取 $\eta=\frac{\epsilon}{\sqrt{c}}$，则 $E_0(t)+E(t)\le\epsilon^2$，即

$$
\begin{aligned}
\|u_1-u_2\|&\le\epsilon\\
\|u_{1x}-u_{2x}\|&\le\frac{\epsilon}{a}\\
\|u_{1t}-u_{2t}\|&\le\epsilon
\end{aligned}
$$

证毕。