

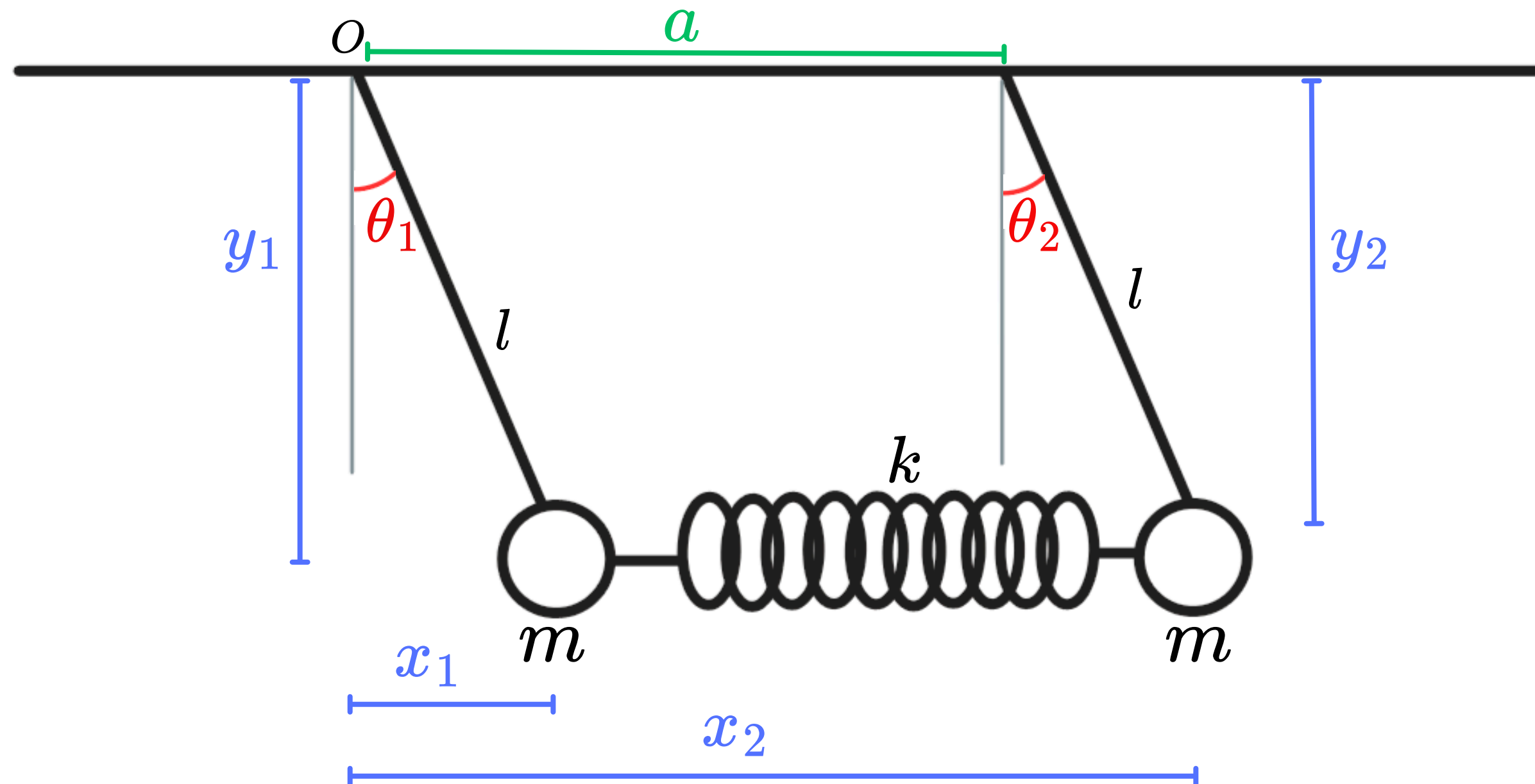


Mecánica Clásica 2024-2

PÉNDULOS DOBLES ACOPLADOS

Alexandra Serrano Mendoza
Juan Felipe León Pulgarín

NUESTRO SISTEMA



Consideramos para un sistema general las ligaduras:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

$$x_2^2 + y_2^2 = l_2^2$$

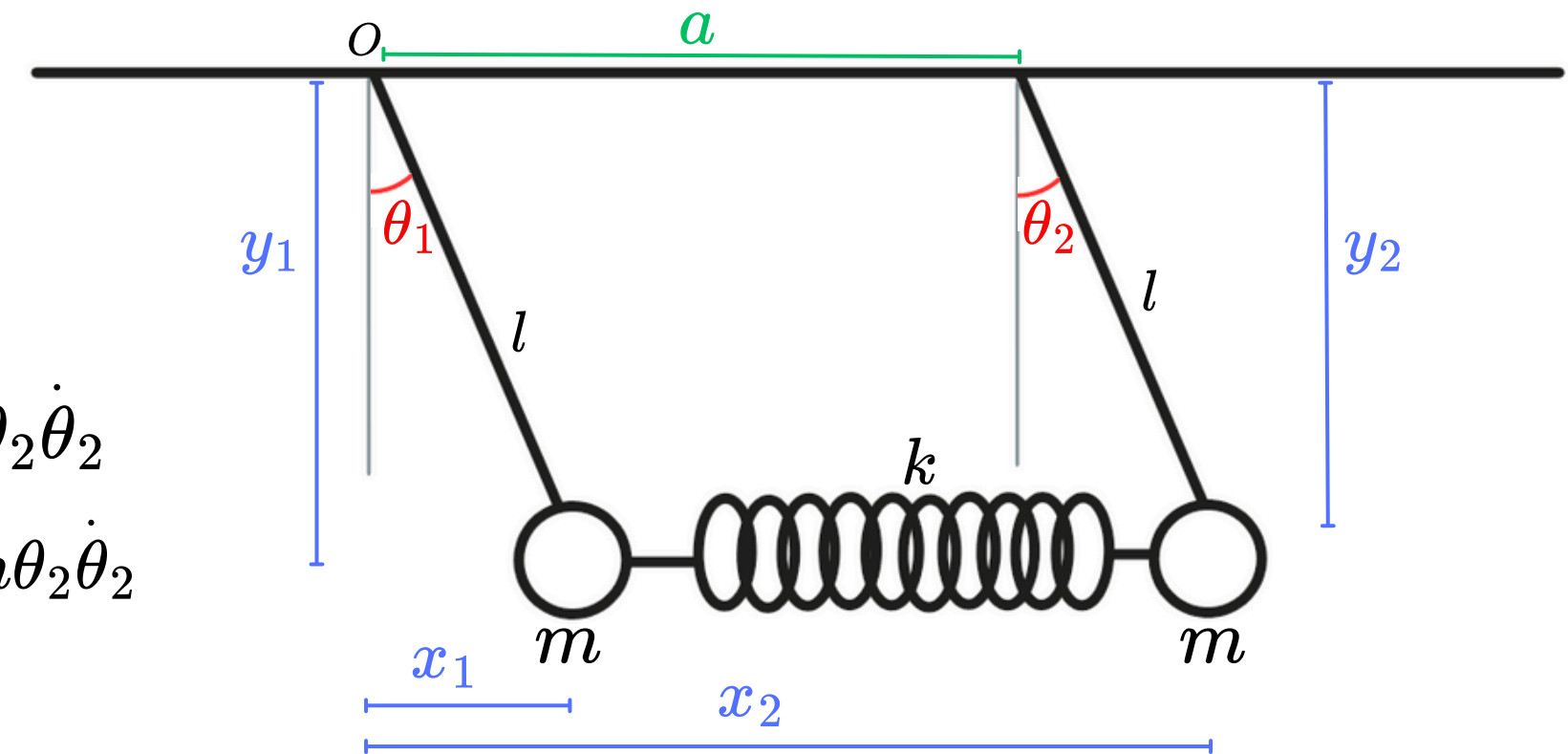
$$z = 0$$

SISTEMA INICIAL

Y SUS POSIBLES VARIACIONES

Planteando las posiciones y velocidades, tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta_1 & x_2 &= a + l \sin \theta_2 & \dot{x}_1 &= l \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 & \dot{x}_2 &= l \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ y_1 &= l \cos \theta_1 & y_2 &= l \cos \theta_2 & \dot{y}_1 &= -l \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & \dot{y}_2 &= -l \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$



El lagrangiano ($L=T-U$) del sistema es:

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) + m g l (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + \frac{1}{2} k l^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k l^2 (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \right) + m g l (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + k l^2 \cos (\theta_2 - \theta_1)$$

Ahora, las ecuaciones de movimiento para este sistema son:

$$m l^2 \ddot{\theta}_1 + m g l \sin \theta_1 + k l^2 \sin (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$$m l^2 \ddot{\theta}_2 + m g l \sin \theta_2 + k l^2 \sin (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

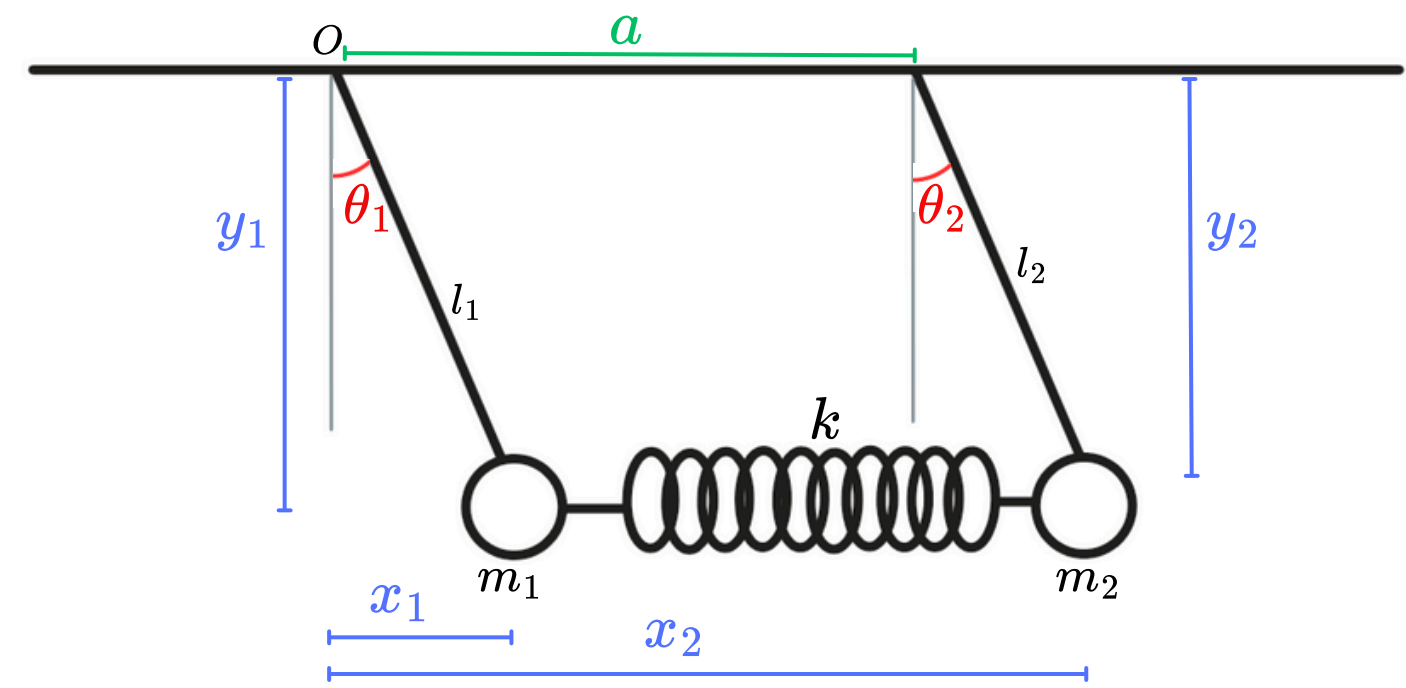
Energía potencial:

$$U = -m_1 y_1 - m_2 y_2 + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 + \frac{1}{2} k (\Delta y)^2$$

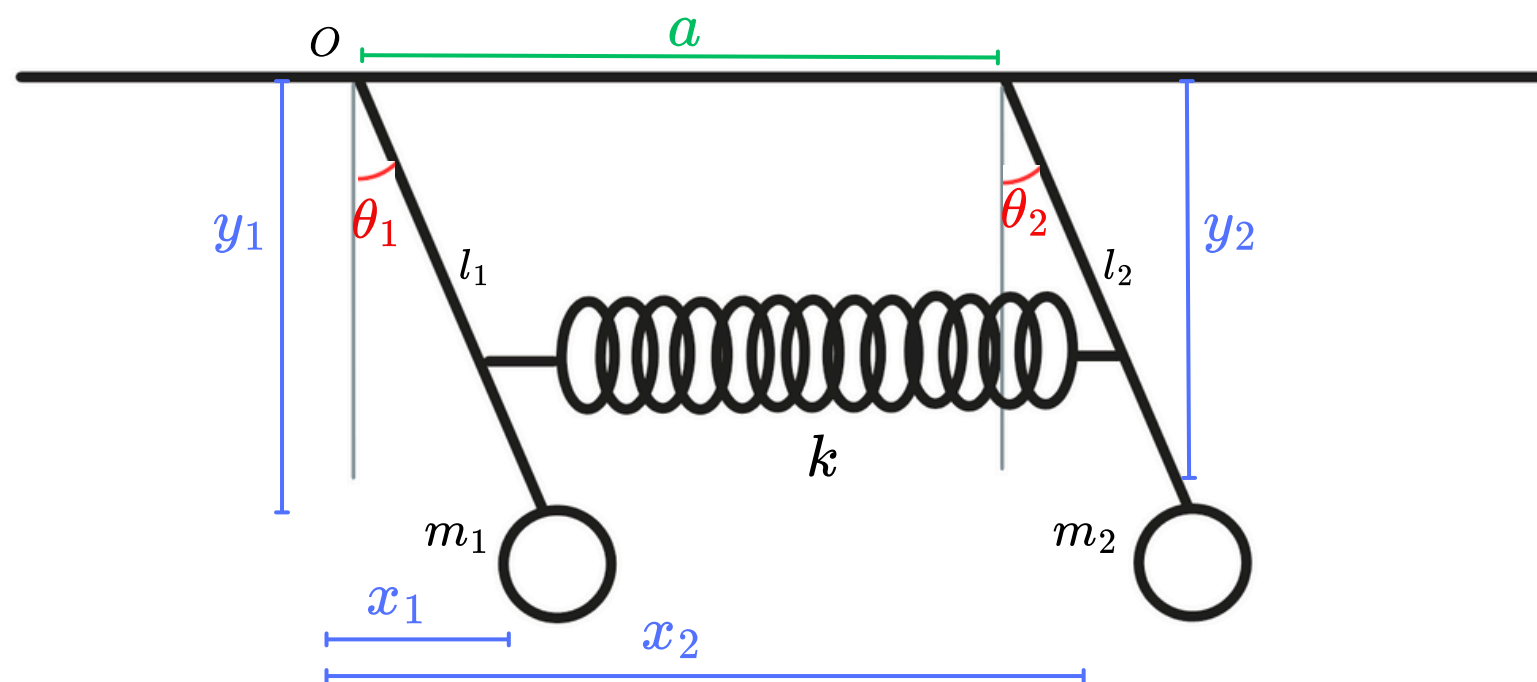
Esas ecuaciones resultan útiles para un caso donde ambas masas y ambas varillas son iguales. Por lo tanto, podemos hallar las ecuaciones de movimiento para un sistema mas general, con masas y varillas diferentes, usando el mismo método.

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g \sin \theta_1 - k l_1 l_2 \sin (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 g \sin \theta_2 - k l_1 l_2 \sin (\theta_2 - \theta_1) = 0$$



Adicionalmente, podemos tener un sistema donde el resorte se encuentre acoplado, no a las masas, sino a las varillas a media altura de estas.



$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g \sin \theta_1 - \frac{k l_2 l_1}{4} \sin (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

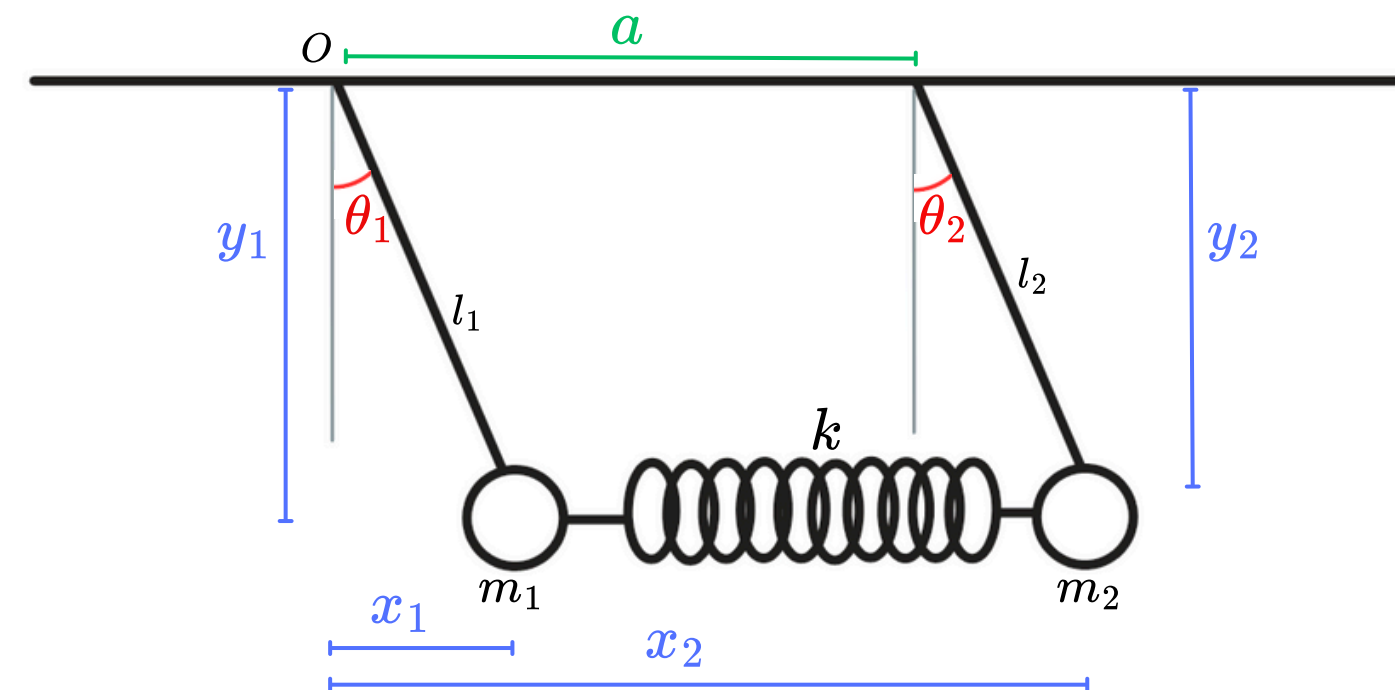
$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 g \sin \theta_2 - \frac{k l_2 l_1}{4} \sin (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

También, para analizar el sistema como un sistema con pequeñas oscilaciones, consideramos las aproximaciones: $\theta_i \ll 1, \theta_i^2 \sim 0, \text{sen}\theta_i \sim \theta_i, \text{cos}\theta_i \sim 1$

Haciendo el mismo análisis previo, y considerando el sistema general donde $m_1 \neq m_2$ y $l_1 \neq l_2$ se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + k l_1 l_2 = 0$$

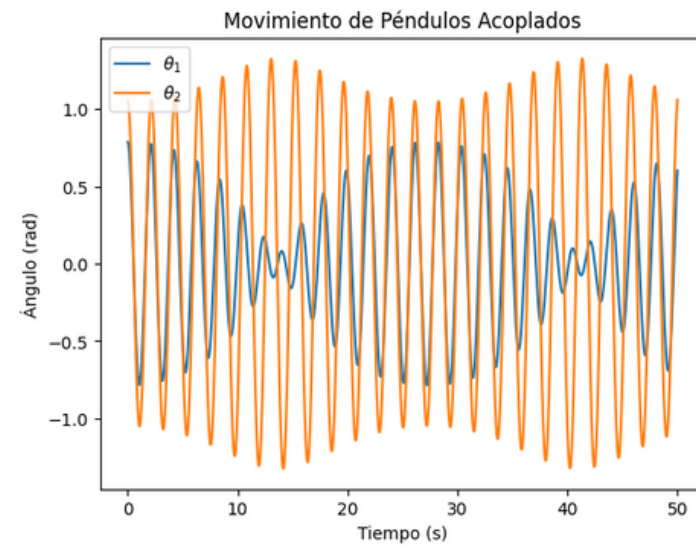
$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + k l_1 l_2 = 0$$



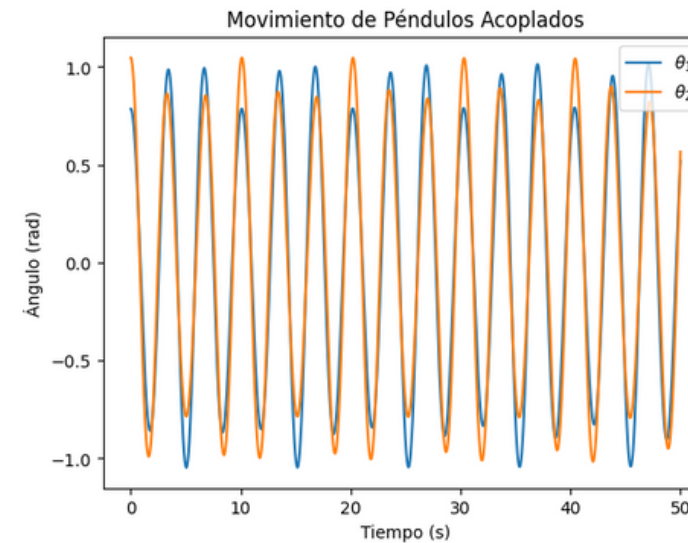
GRAFICAS: GRANDES OSCILACIONES

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}; \theta_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad},$$

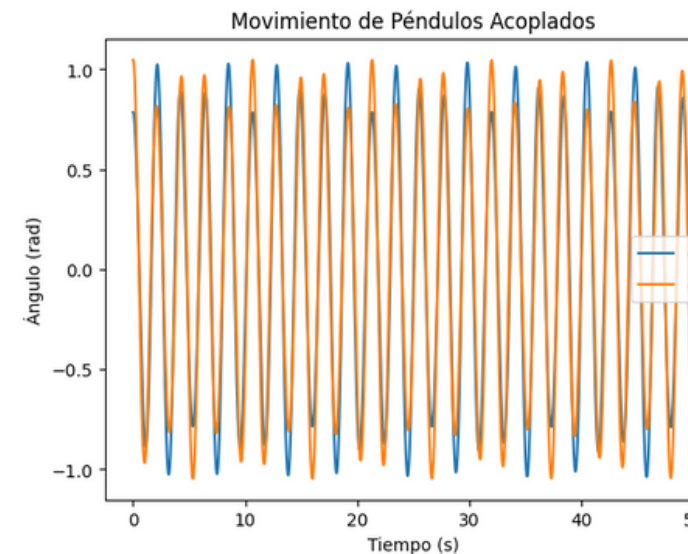
$$\omega_1 = 0 \text{ rad/s}; \omega_2 = 0 \text{ rad/s}.$$



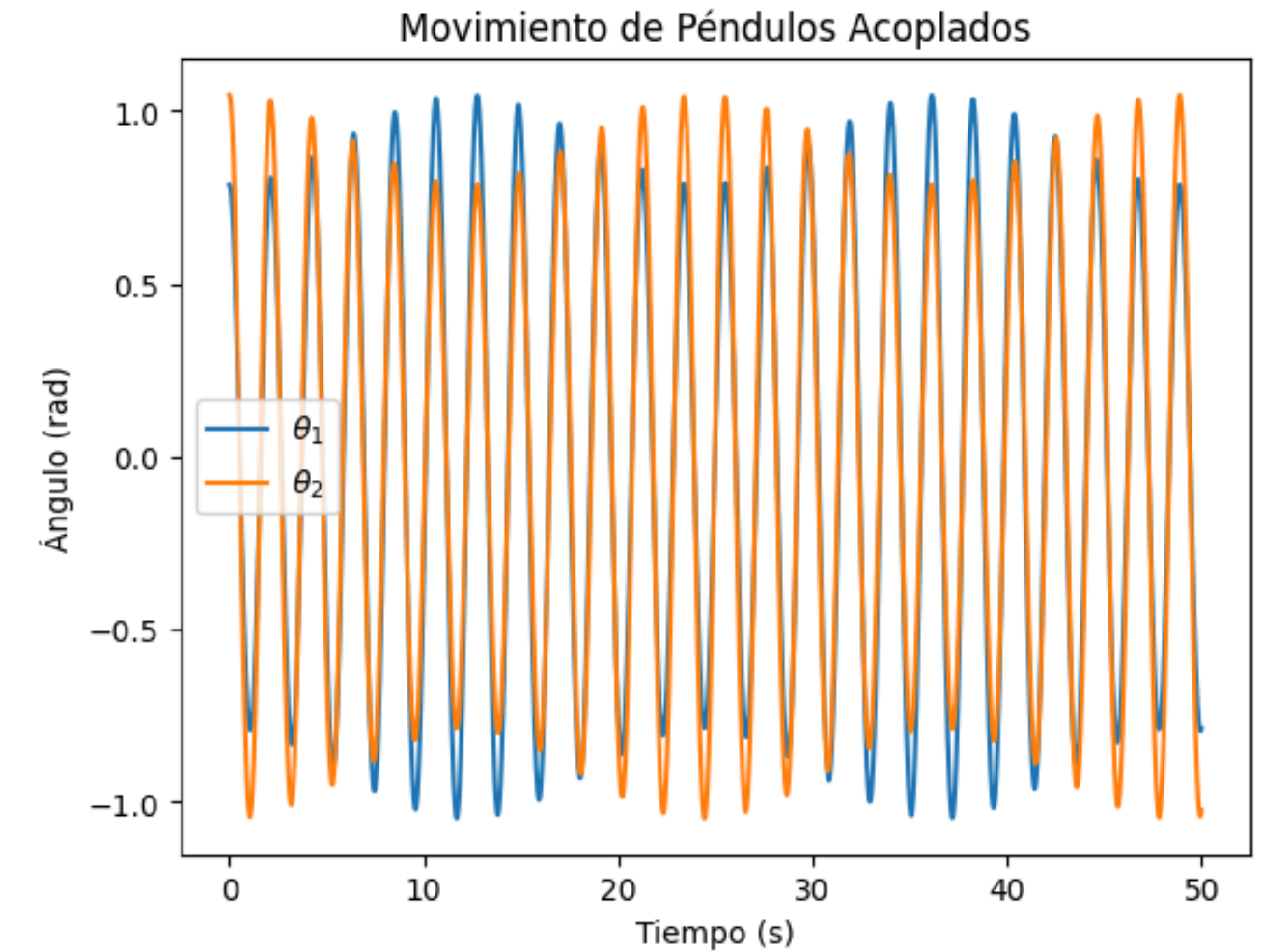
$$g = 9.8 \text{ m/s}^2; l = 2.5 \text{ m/s}; m = 1 \text{ kg}; k = 10 \text{ N/m}.$$



$$g = 9.8 \text{ m/s}^2; l = 1 \text{ m/s}; m = 4 \text{ kg}; k = 10 \text{ N/m}.$$



$$g = 9.8 \text{ m/s}^2; l = 1 \text{ m/s}; m = 1 \text{ kg}; k = 30 \text{ N/m}.$$

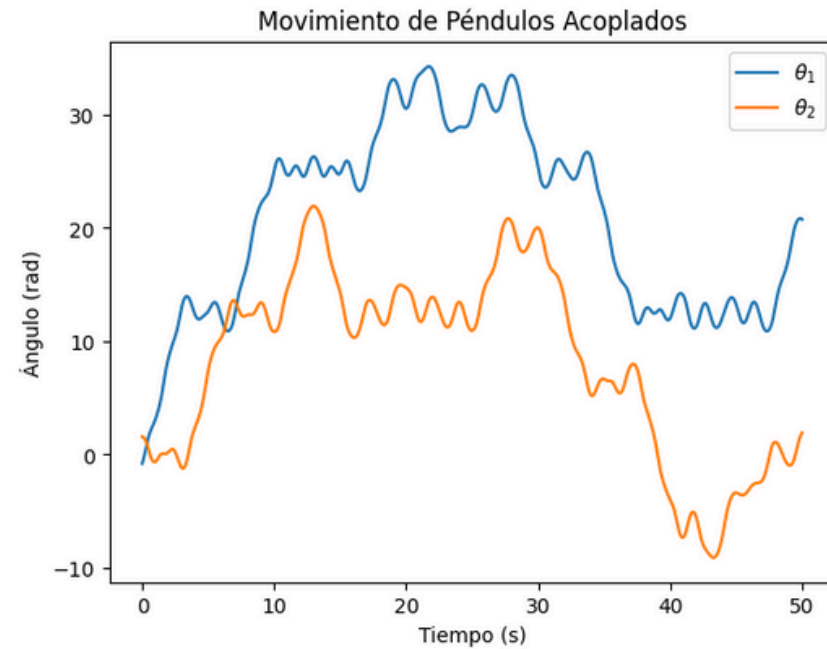


$$g = 9.8 \text{ m/s}^2; l = 1 \text{ m/s}; m = 1 \text{ kg}; k = 10 \text{ N/m}.$$

Para la integración de las ecuaciones diferenciales se utilizó el método Runge-Kutta de cuarto orden. Posteriormente, se variaron los parámetros y condiciones iniciales para ver cómo evolucionan las variables del sistema.

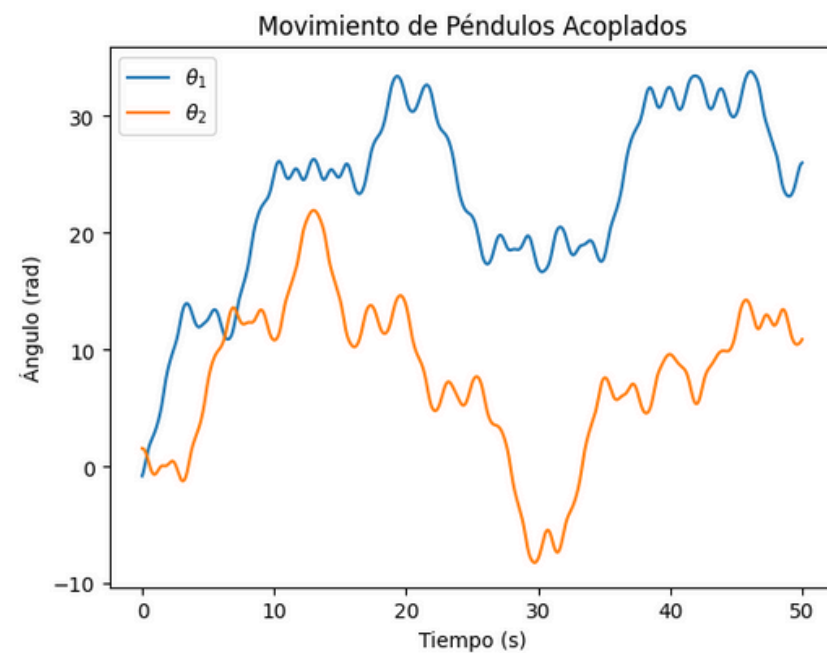
GRAFICAS: CAOS

$$g = 9.8 \text{ m/s}; l = 1 \text{ m/s}; m = 1 \text{ kg}; k = 30 \text{ N/m}.$$



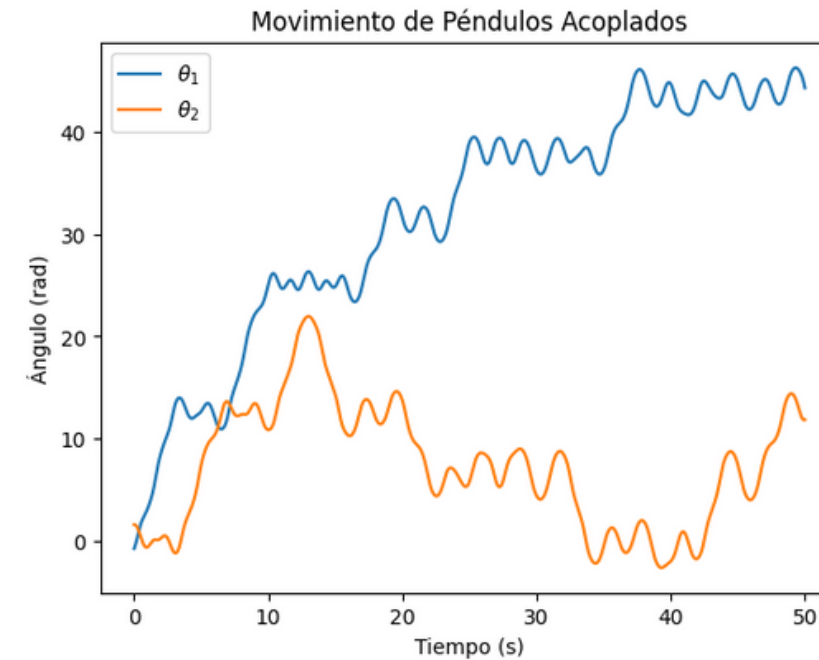
$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} + 0.0000001 \text{ rad}; \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$\omega_1 = \pi \text{ rad/s}; \omega_2 = 0 \text{ rad/s}.$$



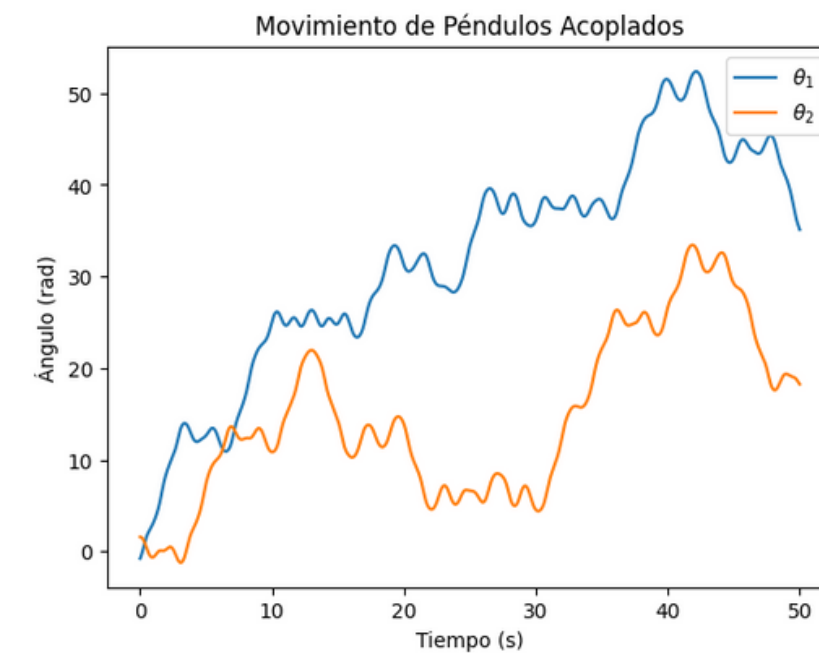
$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}; \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$\omega_1 = \pi + 0.0000001 \text{ rad/s}; \omega_2 = 0 \text{ rad/s}.$$



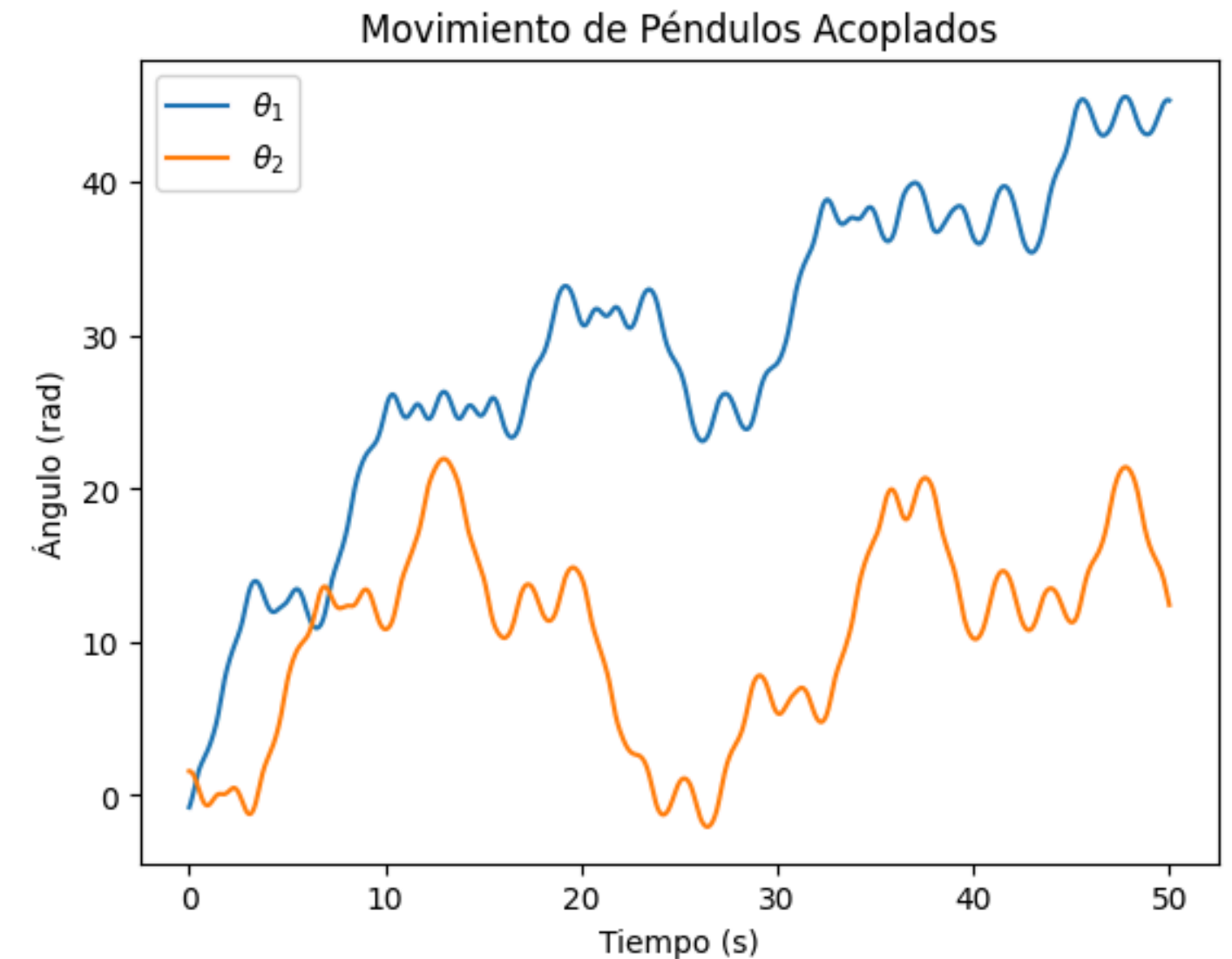
$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}; \theta_2 = \frac{\pi}{2} + 0.0000001 \text{ rad},$$

$$\omega_1 = \pi \text{ rad/s}; \omega_2 = 0 \text{ rad/s}.$$



$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}; \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$\omega_1 = \pi + 0.0000001 \text{ rad/s}; \omega_2 = 0 \text{ rad/s}.$$



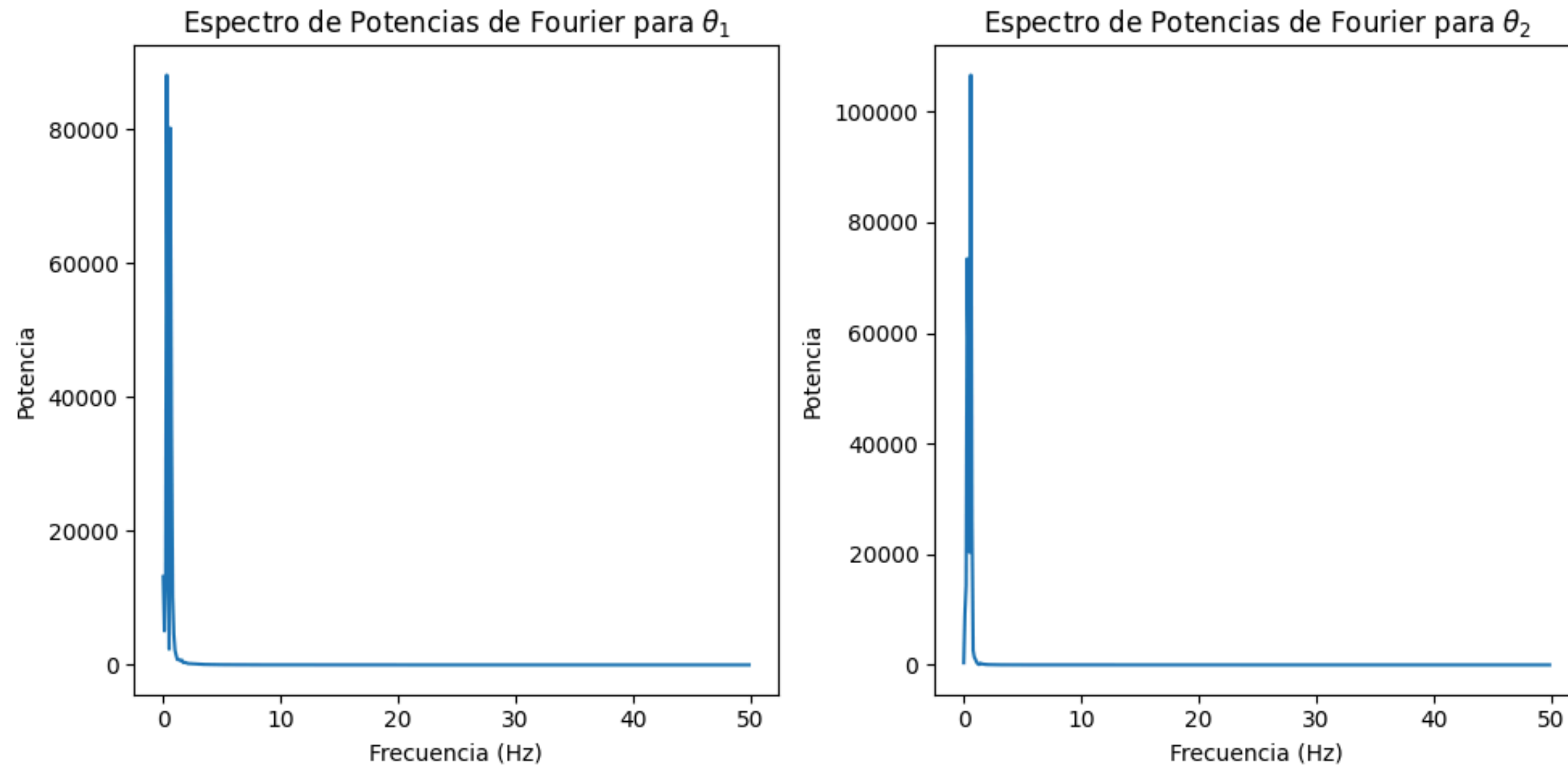
$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}; \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$\omega_1 = \pi \text{ rad/s}; \omega_2 = 0 \text{ rad/s}.$$

¡GRACIAS!

¿DUDAS? ¿COMENTARIOS? ¿INQUIETUDES?

GRAFICAS: ESPECTRO DE POTENCIAS



$$g = 9.8 \text{ m/s}; l = 1 \text{ m/s}; m = 1 \text{ kg}; k = 30 \text{ N/m}.$$

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}; \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad},$$

$$\omega_1 = \pi \text{ rad/s}; \omega_2 = 0 \text{ rad/s}.$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\kappa = \frac{k}{4m}$$

$$\dot{\omega}_1 = -\omega_0^2 \sin \theta_1 - \kappa(\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_1)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\omega_0^2 \sin \theta_2 - \kappa(\sin \theta_2 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2)$$