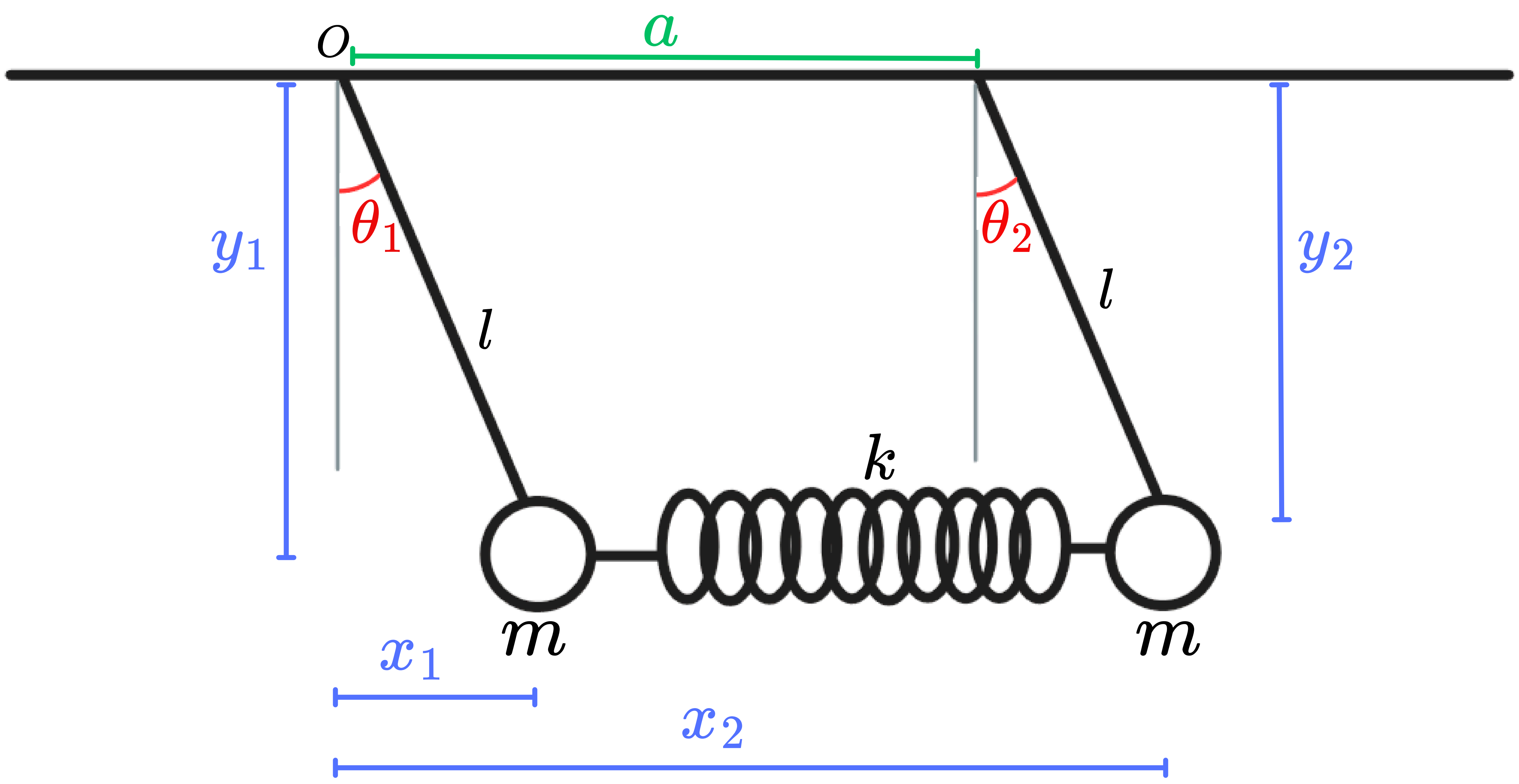
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Mecánica Clásica 2024-2

PÉNDULOS DOBLES ACOPLADOS

Alexandra Serrano Mendoza
Juan Felipe León Pulgarín

NUESTRO SISTEMA

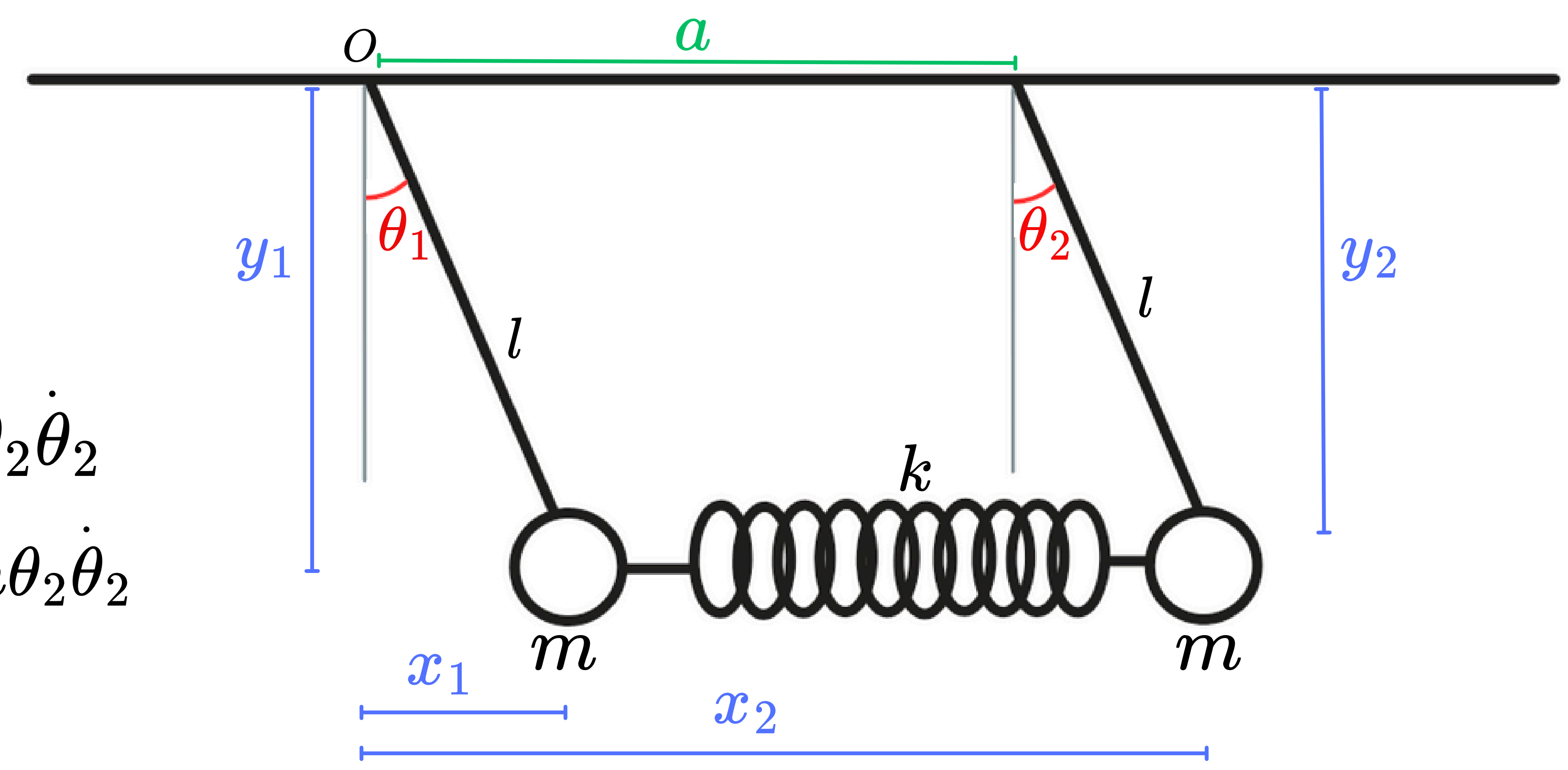


Consideramos para un sistema general las ligaduras:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = l_1{}^2 \qquad x_2{}^2 + y_2{}^2 = l_2{}^2 \qquad z = 0$$

SISTEMA INICIAL

Y SUS POSIBLES VARIACIONES



Planteando las posiciones y velocidades, tenemos:

$$x_1 = l sen\theta_1 \qquad x_2 = a + l sen\theta_2 \qquad \dot{x}_1 = l cos\theta_1\dot{\theta}_1 \qquad \dot{x}_2 = l cos\theta_2\dot{\theta}_2$$

$$y_1 = l cos\theta_1 \qquad y_2 = l cos\theta_2 \qquad \dot{y}_1 = -l sen\theta_1\dot{\theta}_1 \qquad \dot{y}_2 = -l sen\theta_2\dot{\theta}_2$$

El lagrangiano (L=T-U) del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2\right) + mgl\left(cos\theta_1 + cos\theta_2\right) + \frac{1}{2}kl^2(sen\theta_2 - sen\theta_1)^2 + + \frac{1}{2}kl^2(cos\theta_2 - cos\theta_1)^2$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2\right) + mgl\left(cos\theta_1 + cos\theta_2\right) + kl^2 cos\left(\theta_2 - \theta_1\right)$$

Ahora, las ecuaciones de movimiento para este sistema son:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl sen\theta_1 + kl^2 sen\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl sen\theta_2 + kl^2 sen\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

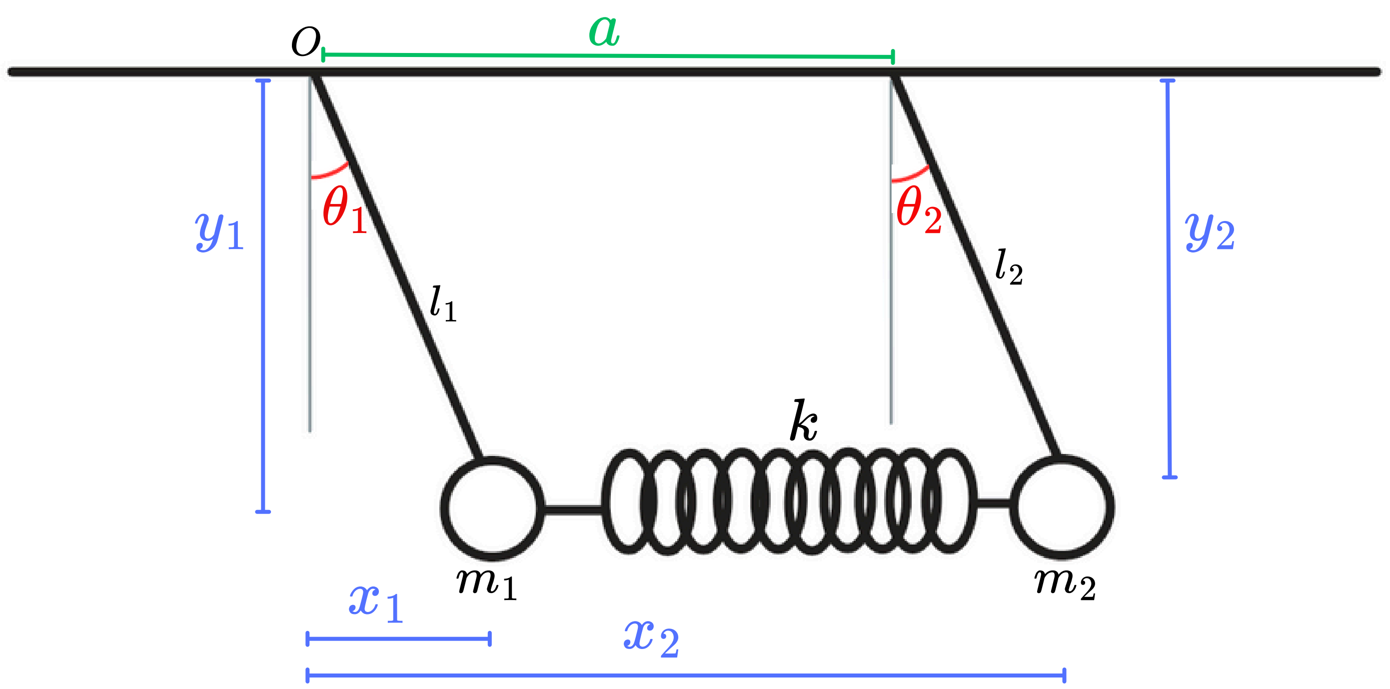
Energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Energía potencial:

$$U = -m_1y_1 - m_2y_2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta y)^2$$

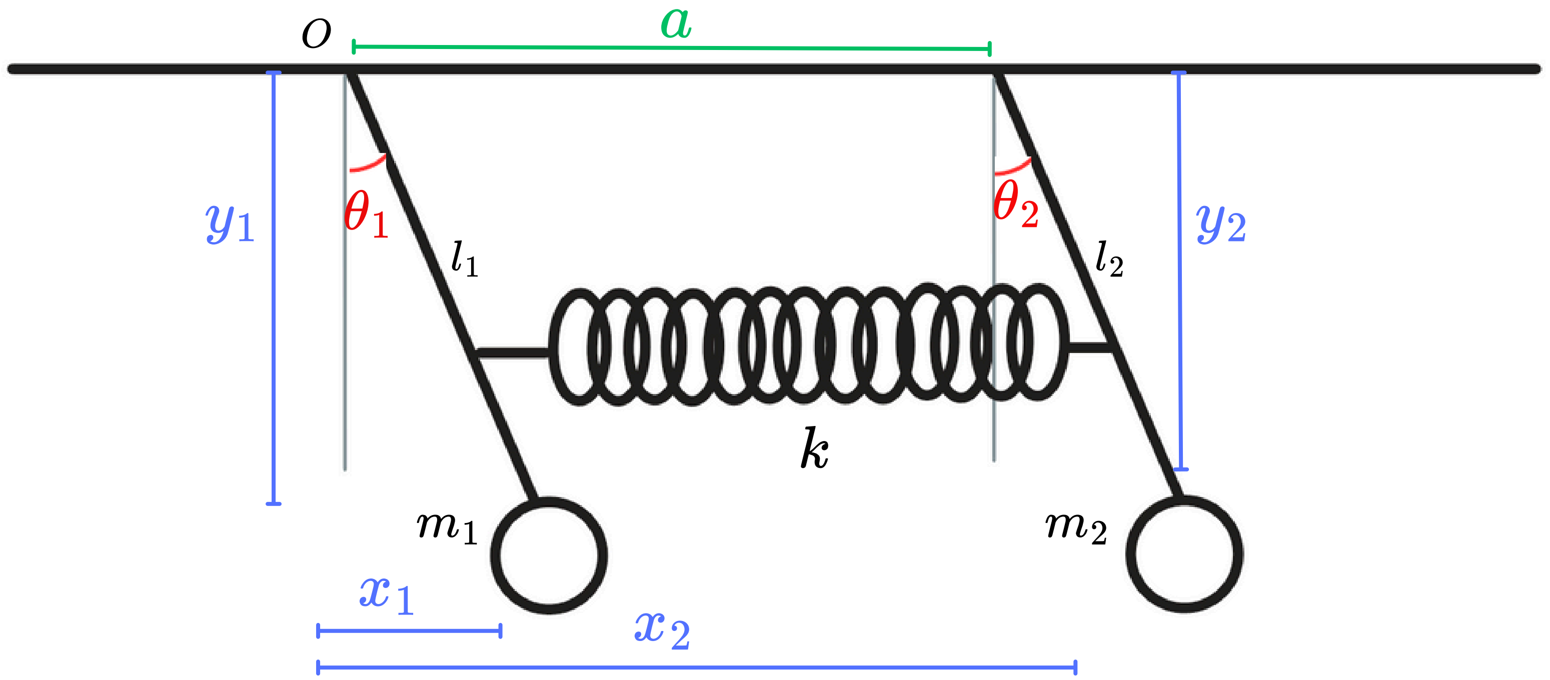
Esas ecuaciones resultan útiles para un caso donde ambas masas y ambas varillas son iguales. Por lo tanto, podemos hallar las ecuaciones de movimiento para un sistema mas general, con masas y varillas diferentes, usando el mismo método.



$$m_1 {l_1}^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g sen\theta_1 - k l_1 l_2 sen\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 g sen\theta_2 - k l_1 l_2 sen\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

Adicionalmente, podemos tener un sistema donde el resorte se encuentre acoplado, no a las masas, sino a las varillas a media altura de estas.



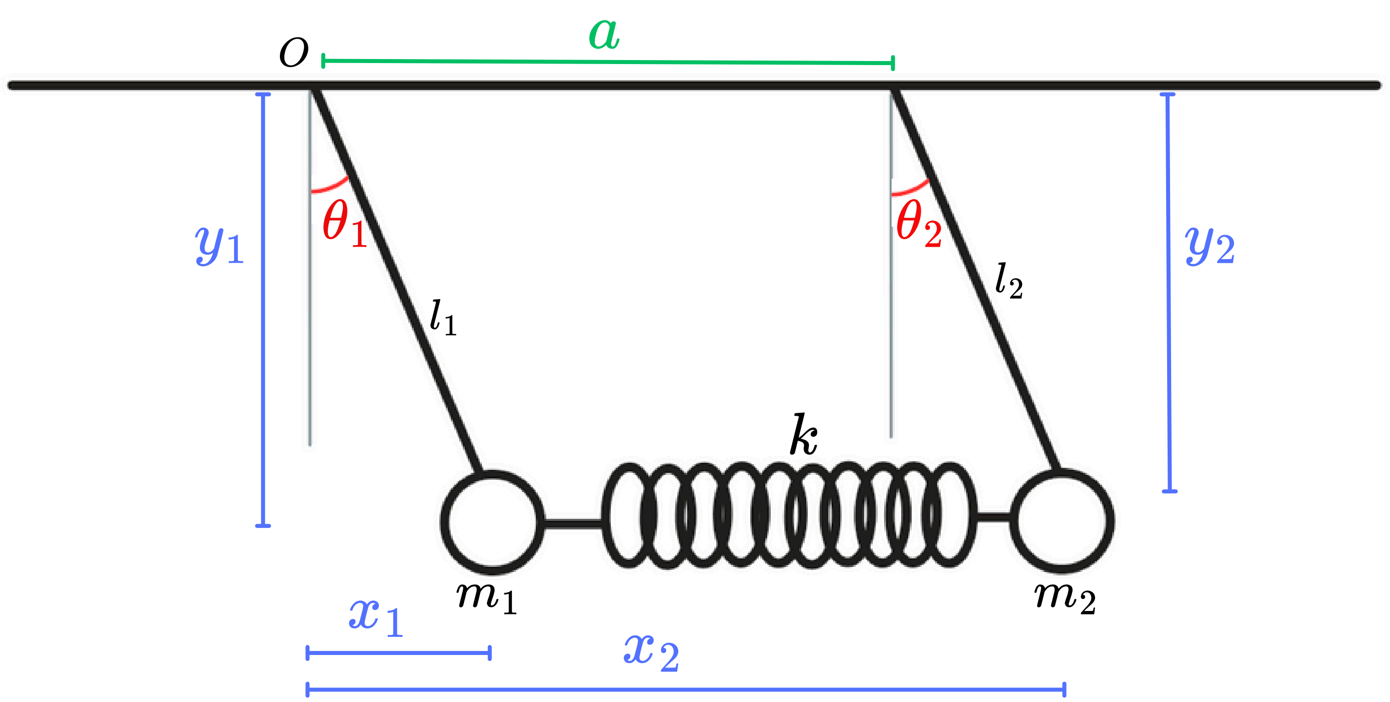
$$m_1 {l_1}^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g sen\theta_1 - \frac{k l_2 l_1}{4} sen\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

$$m_2 {l_2}^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 g sen\theta_2 - \frac{k l_2 l_1}{4} sen\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

También, para analizar el sistema como un sistema con pequeñas oscilaciones, consideramos las aproximaciones: $\theta_i \ll 1, {\theta_i}^2 \sim 0, sen\theta_i \sim \theta_{i,} cos\theta_i \sim 1$

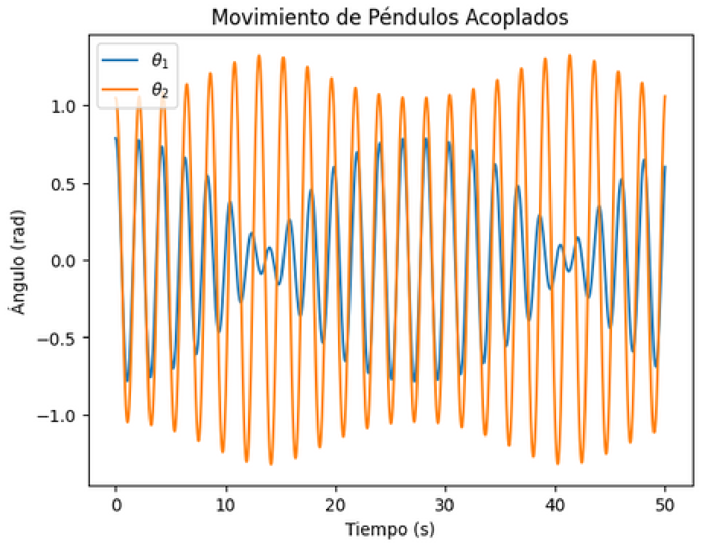
Haciendo el mismo análisis previo, y considerando el sistema general donde $m_1 \neq m_2$ y $l_1 \neq l_2$ se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m_1 {l_1}^2 \ddot{\theta}_1 + k l_1 l_2 = 0$$
$$m_2 {l_2}^2 \ddot{\theta}_2 + k l_1 l_2 = 0$$

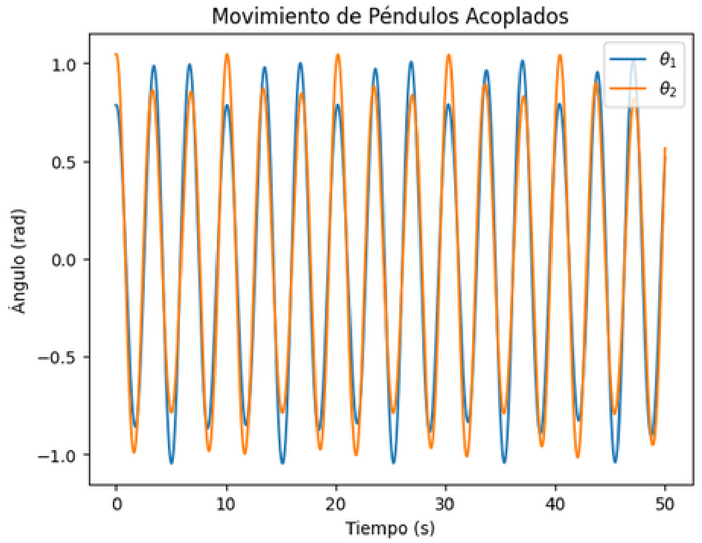


GRAFICAS: GRANDES OSCILACIONES

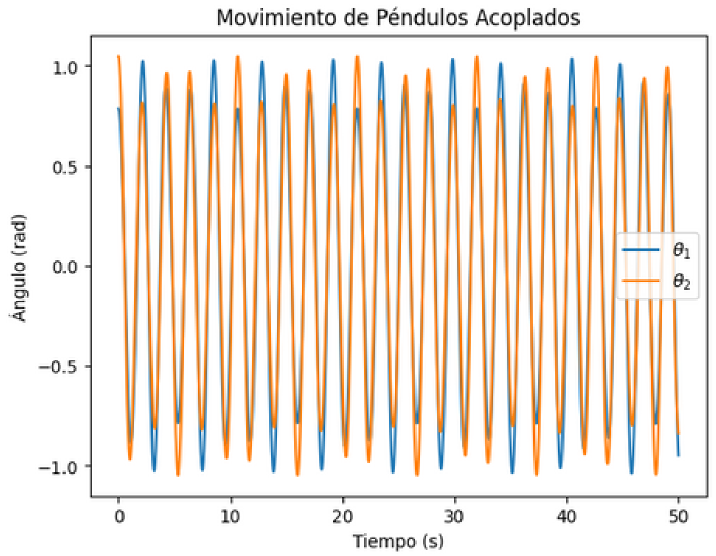
$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}\, rad;\ \theta_2 = \frac{\pi}{3}\, rad,$$
$$\omega_1 = 0\, rad/s;\ \omega_2 = 0\, rad/s.$$



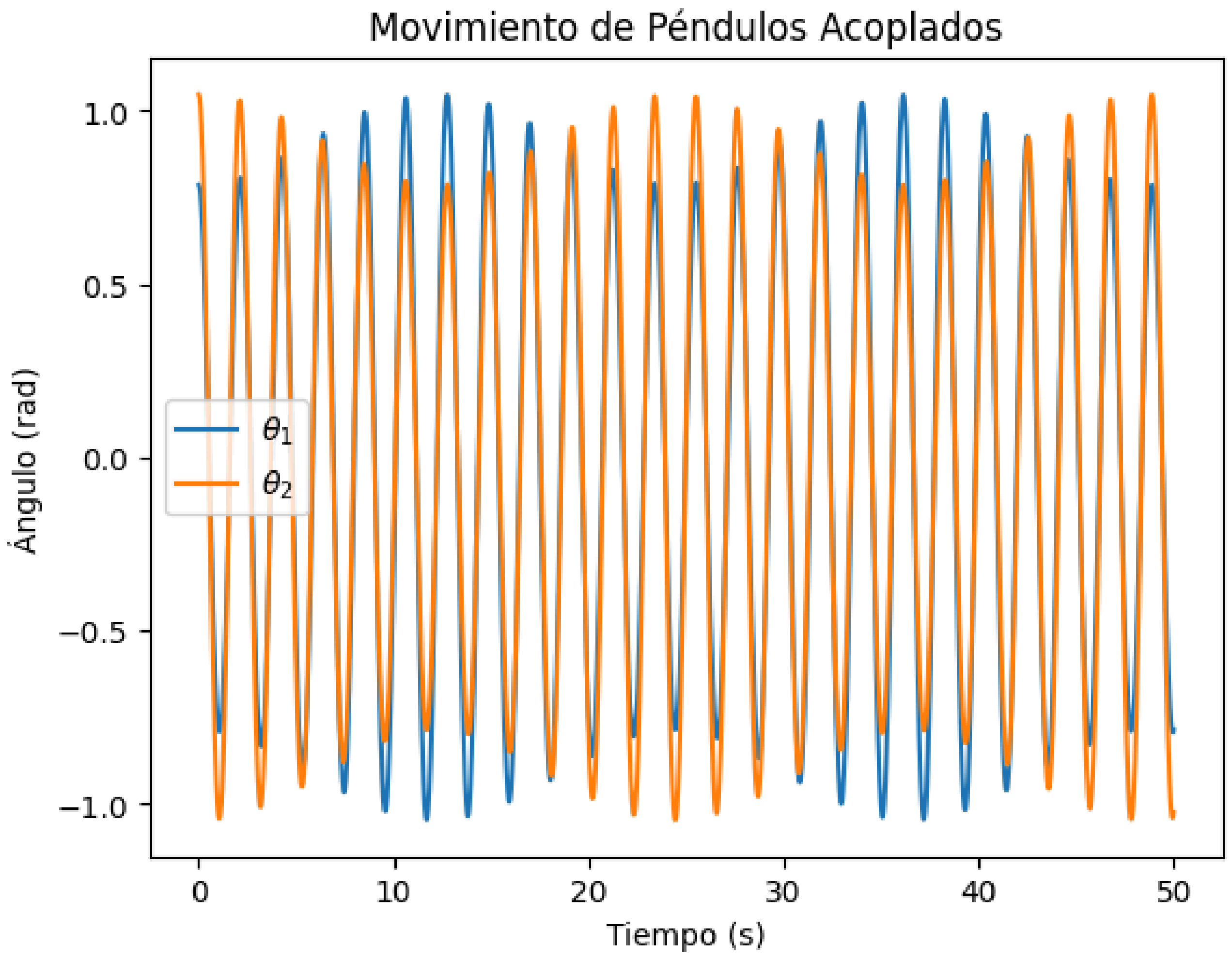
$$g = 9.8\, m/s;\ l = 2.5\, m/s;\ m = 1\, kg;\ k = 10\ N/m.$$



$$g = 9.8\, m/s;\ l = 1\, m/s;\ m = 4\, kg;\ k = 10\ N/m.$$



$$g = 9.8\, m/s;\ l = 1\, m/s;\ m = 1\, kg;\ k = 30\ N/m.$$

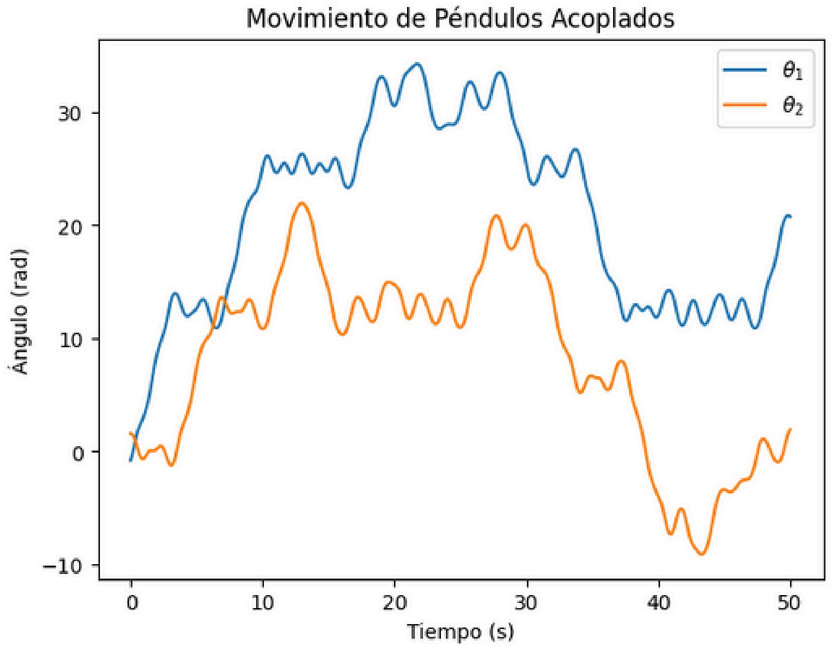


$$g = 9.8\, m/s;\ l = 1\, m/s;\ m = 1\, kg;\ k = 10\ N/m.$$

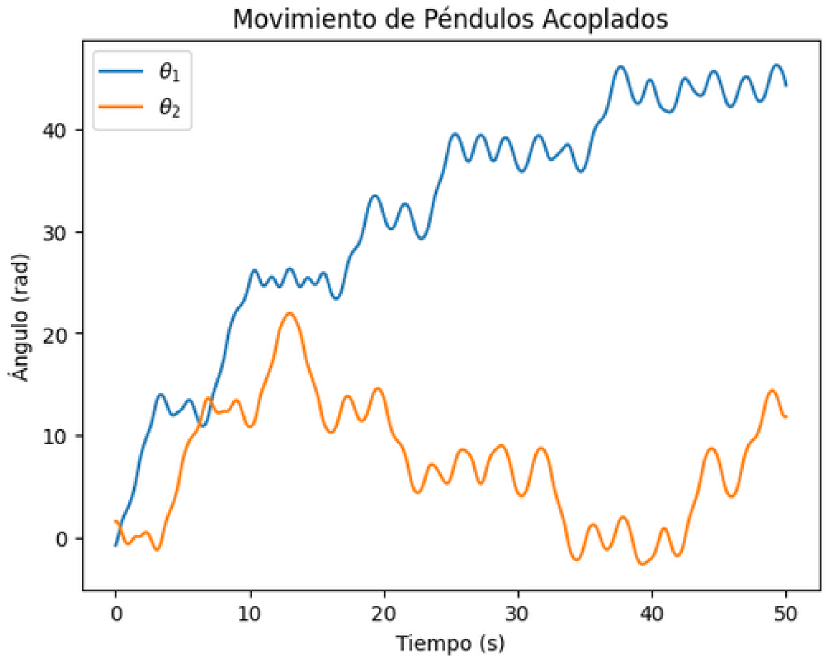
Para la integración de las ecuaciones diferenciales se utilizó el método Runge-Kutta de cuarto orden. Posteriormente, se variaron los parámetros y condiciones iniciales para ver cómo evolucionan las variables del sistema.

GRAFICAS: CAOS

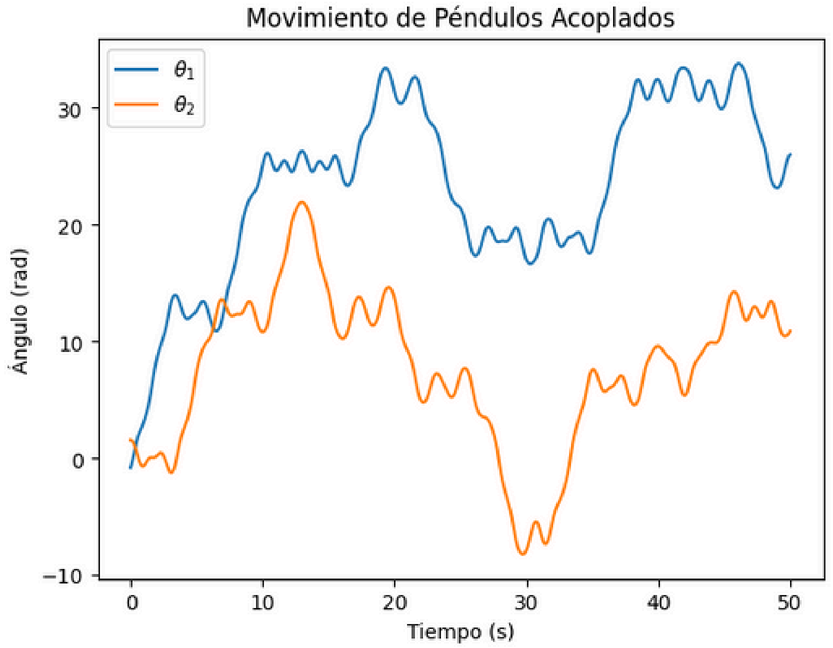
$$g = 9.8\, m/s;\ l = 1\, m/s;\ m = 1\, kg;\ k = 30\ N/m.$$



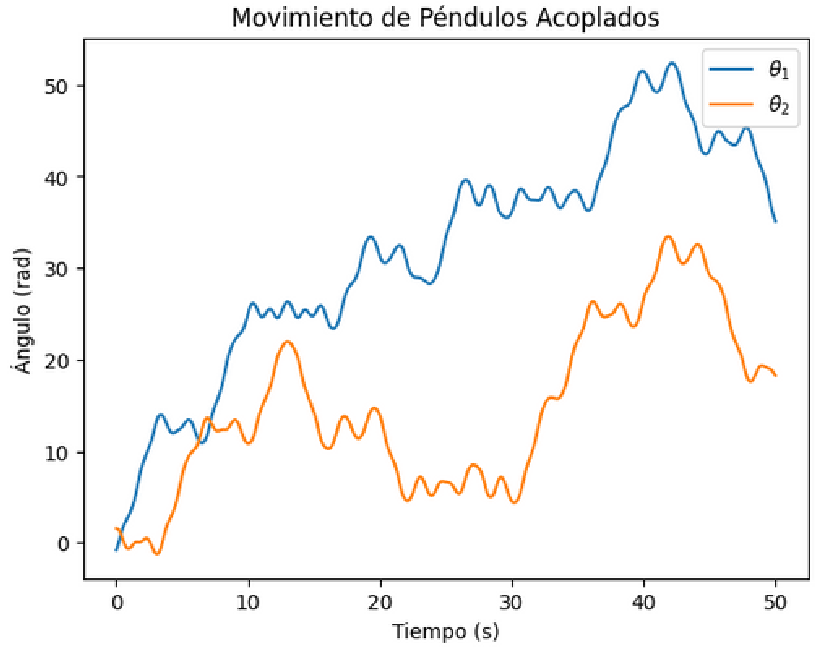
$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} + 0.0000001\, rad;\ \theta_2 = \frac{\pi}{2}\, rad,$$
$$\omega_1 = \pi\, rad/s;\ \omega_2 = 0\, rad/s.$$



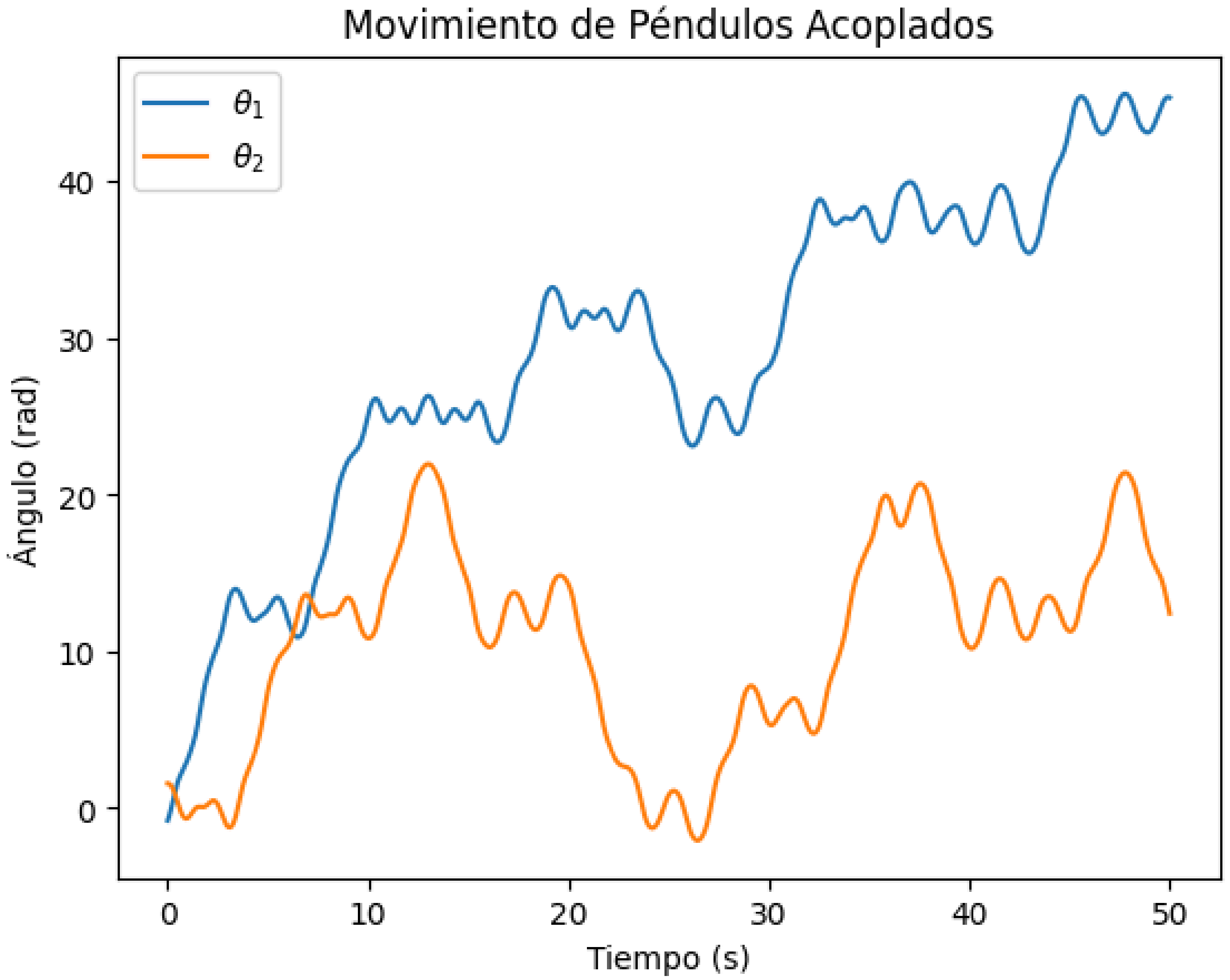
$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}\, rad;\ \theta_2 = \frac{\pi}{2} + 0.0000001\, rad,$$
$$\omega_1 = \pi\, rad/s;\ \omega_2 = 0\, rad/s.$$



$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}\, rad;\ \theta_2 = \frac{\pi}{2}\, rad,$$
$$\omega_1 = \pi + 0.0000001\, rad/s;\ \omega_2 = 0\, rad/s.$$



$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}\, rad;\ \theta_2 = \frac{\pi}{2}\, rad,$$
$$\omega_1 = \pi\, rad/s;\ \omega_2 = 0 + 0.0000001\, rad/s.$$



$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4}\, rad;\ \theta_2 = \frac{\pi}{2}\, rad,$$
$$\omega_1 = \pi\, rad/s;\ \omega_2 = 0\, rad/s.$$

¡GRACIAS!

¿DUDAS? ¿COMENTARIOS? ¿INQUIETUDES?

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad \dot{\omega}_1 = -\omega_0^2 \sin\theta_1 - \kappa(\sin\theta_1 \cos\theta_1 - \sin\theta_2 \cos\theta_1)$$

$$\kappa = \frac{k}{4m} \qquad \dot{\omega}_2 = -\omega_0^2 \sin\theta_2 - \kappa(\sin\theta_2 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cos\theta_2)$$