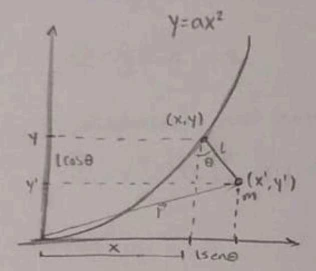
Mecánica Clásica - Taller de los viernes

08 de Noviembre 2024

1.

PROBLEMAS VIERNES $\boxed{241108}$

1. Tal como se muestra en la figura, el punto de suspensión de un péndulo está obligado a moverse a lo largo de la parabola $y = ax^2$. Hallar el Hamiltoniano.



$$x' - x = l\,\text{sen}\theta \longrightarrow$$

$$y - y' = l\cos\theta$$

$$\vec{r} = (x + l\,\text{sen}\theta)\hat{x} + (y - l\cos\theta)\hat{y}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{x} + \cos\theta\,\dot{\theta})\hat{x} + (2ax\dot{x} + l\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta})\hat{y}$$

$$V^2 = (\dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta})^2 + (2ax\dot{x} + l\,\text{sen}\theta\dot{\theta})^2$$

$$= \dot{x}^2 + l^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\,l\cos\theta\,\dot{\theta} + 4a^2x^2\dot{x}^2 + l^2\text{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 4ax\dot{x}\,l\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta}$$

$$= \dot{x}^2(1 + 4a^2x^2) + l^2\dot{\theta}^2(\cancel{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}) + 2l\dot{x}\dot{\theta}\,[\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta]$$

$$V^2 = \dot{x}^2(1 + 4a^2x^2) + l^2\dot{\theta}^2 + (2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 4alx\,\text{sen}\theta\,\dot{x}\dot{\theta})$$

Ahora, para la E. Cinetica, tenemos:

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(1 + 4a^2x^2) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,2\dot{x}\dot{\theta}l\,[\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta] \quad (1)$$

Ahora, para la E. Potencial tenemos:

$$U = mgh, \quad h = y - l\cos\theta = ax^2 - l\cos\theta$$

$$U = mg(ax^2 - l\cos\theta) = mgax^2 - mgl\cos\theta \quad (2)$$

Ahora, el lagrangiano del sistema es de la forma

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}(1 + 4a^2x^2) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m2\dot{x}\dot{\theta}\,l(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta) - mgax^2 + mgl\cos\theta$$

De forma matricial:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\dot{x}, \dot{\theta}]\begin{bmatrix} m(1 + 4a^2x^2) & ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta) \\ ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta) & ml \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - mg(ax^2 - l\cos\theta)$$

Ahora, para el Hamiltoniano tenemos

$$P_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + m\dot{x}l(\cos\theta + 2ax)$$

$$P_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}(1 + 4a^2x^2) + ml\dot{\theta}(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta)$$

De forma matricial

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} m(1 + 4a^2x^2) & ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta) \\ ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta) & ml^2 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Podemos escribir el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}P^T A^{-1} + V_0 \quad , \quad \text{donde: } P_i = \begin{pmatrix} P_x \\ P_\theta \end{pmatrix} \text{ y } P_i^T = (P_x \;\; P_\theta)$$

Y considerando mas propiedades como

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{(m(1 + 4a^2x^2))(ml^2) - (ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta))(ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta))}\begin{bmatrix} ml^2 & -ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta) \\ -ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta) & m(1 + 4a^2x^2) \end{bmatrix}$$

Ahora, el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\,[m^2l^2(1 + 4a^2x^2) - m^2l^2(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta)^2]}\begin{bmatrix} ml^2 & -ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta) \\ -ml(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta) & m(1 + 4a^2x^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_x \\ P_\theta \end{bmatrix}[P_x \, , \, P_\theta]$$

$$+ mg(ax^2 - l\cos\theta)$$

Simplificando:

$$\mathcal{H} = \frac{ml}{2[m^2l^2(1 + 4a^2x^2) - m^2l^2(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta)^2]}\left[P_x^2 - 2(\cos\theta + 2ax\,\text{sen}\theta)P_xP_\theta + P_\theta^2(1 + 4a^2x^2)\right] + mg(ax^2 - l\cos\theta)$$

2.

2. Sea el Hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - A\left(\frac{p}{m}\cos\gamma t + \gamma q \operatorname{sen}\gamma t\right) + \frac{1}{2}kq^2$, donde A, γ y k son constantes.

a) Hallar el Lagrangeano

Para el Lagrangiano, usamos la expresión

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{H}$$

donde

$$p = m\left(\dot{q} + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right) \quad y \quad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} - \frac{A}{m}\cos\gamma t$$

Sustituyendo, se tiene:

$$\mathcal{L} = \dot{q}\left(m\left(\dot{q} + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right)\right) - \frac{\left(m\left(\dot{q} + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right)\right)^2}{2m} + A\left[\frac{m\left(\dot{q} + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right)}{m}\cos\gamma t + \gamma q \operatorname{sen}\gamma t\right]$$

$$+ \frac{1}{2}kq^2$$

Al simplificar la expresión:

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{A^2}{2m}\cos^2\gamma t + A\dot{q}\cos\gamma t + A\gamma q \operatorname{sen}\gamma t - \frac{1}{2}kq^2$$

b) Encontrar un Lagrangiano equivalente, $\mathcal{L}'$, que no dependa de t.

Podemos escribir el Lagrangiano como

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \frac{\partial f}{\partial t} = \underbrace{\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{1}{2}kq^2}_{\mathcal{L}_0} + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{A^2}{4m}\operatorname{sen}(2\gamma t) + Aq\cos(\gamma t)\right)}_{F(q,t)}$$

c) Calcular la forma del nuevo ~~Lagrangiano~~ Hamiltoniano asociado a $\mathcal{L}'$ ¿Cuál es la relación entre los 2 Hamiltonianos?

$$\mathcal{L}_0 = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{1}{2}kq^2 \qquad \mathcal{H}_0 = P_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q}m \longrightarrow \dot{q} = P_q/m$$

Sustituyendo

$$\mathcal{H}_0 = \frac{P_q^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

Relación entre Hamiltonianos

Si $P = \dot{q}$ y $Q = q$, el Hamiltoniano inicial es de la forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - A\left(\frac{p}{m}\cos\gamma t + \gamma q \operatorname{sen}\gamma t\right)$$

reemplazando

$$p = m\left(\dot{q} + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right) = m\left(P + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right)$$

entonces

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - A\left[\frac{m\left(P + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right)}{m}\cos\gamma t + \gamma Q \operatorname{sen}\gamma t\right]$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - A\left[\left(P + \frac{A}{m}\cos\gamma t\right)\cos\gamma t + \gamma Q \operatorname{sen}\gamma t\right]$$

3.

3. El Hamiltoniano de un cierto sistema físico es $\mathcal{H} = q + te^p$. Muestre que la transformación $Q = q + e^p$, $P = p$ es una transformación canónica. Adicionalmente, encuentre la función generatriz de la transformación. Determine también el nuevo hamiltoniano y resuelva las ecs. de movimiento.

$$\mathcal{H} = q + te^p \quad , \quad Q = q + e^p \quad , \quad P = p$$

Transformando respecto a $P = p$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial P} dP + \frac{\partial F}{\partial Q} dQ \qquad \text{con } q = -\frac{\partial F}{\partial P} \ \text{ y } \ P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$

$$dF = -q\,dP - P\,dQ = -(Q - te^P)\,dP - P\,dQ = d\left[P(te^P - Q)\right]$$

$$\rightarrow K(Q,P,t) = \mathcal{H}\big(q(Q,P), P(Q,P), t\big) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\rightarrow F = P(te^P - Q)$$

$$K = Q - te^P + te^P + \frac{\partial}{\partial t} P(te^P - Q)$$

$K = Q + Pe^P$ Nuevo Hamiltoniano!

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = e^P(1+P) \ (*) \quad \text{y} \quad \dot{P} = \frac{\partial K}{\partial Q} = 1 \longrightarrow \frac{dP}{dt} = 1 \longrightarrow \boxed{P = t + c} \ (**)$$

Inyectando $(**)$ en $(*)$

$$\frac{dQ}{dt} = e^{t+c}(1+t+c) \qquad \text{suponiendo } c=0$$

Integrando

$$\int dQ = \int e^t(1+t)\,dt = \int e^t dt + \int te^t\,dt = e^t + \int te^t dt = e^t + (t-1)e^t$$

$$\boxed{Q = te^t}$$

$Q = q + te^P$ Pero considerando $P = p = t$, y $Q = te^t$, entonces

$$te^t = q + te^t$$

entonces el Hamiltoniano $\mathcal{H} = q + te^P \longrightarrow \underline{\mathcal{H} = te^t}$ si $q = 0$