

Asignación 1 - Mecánica Clásica

Juan Felipe León Pulgarin
Alexandra Serrano Mendoza
Universidad Industrial de Santander

30 Agosto 2024

Índice

1. Introducción	2
2. Metodología	2
2.1. Hallando las ecuaciones de movimiento	3
2.2. La solución numérica	6
2.3. Algunas variaciones en el sistema	6
2.3.1. Caso general donde $m_1 \neq m_2$	6
2.3.2. Caso donde el resorte está en otra posición	9
2.4. Comportamiento caótico del sistema	10
2.5. Pequeñas oscilaciones	10
3. Resultados y análisis	11
3.1. Las ecuaciones de movimiento para diferentes formas del sistema	11
3.1.1. Masas y varillas iguales	12
3.1.2. Masas y varillas diferentes	12
3.1.3. Resorte acoplado a las varillas	12
3.1.4. Oscilaciones pequeñas	12
3.2. Solución numérica	12
3.2.1. Primer caso	13
3.2.2. Segundo caso	13
3.2.3. Tercer caso	14
3.2.4. Cuarto caso	14
3.2.5. Quinto Caso	15
3.2.6. Sexto caso	16
3.2.7. Séptimo Caso	16
3.3. Comportamiento caótico	17
3.4. Espectro de potencia de Fourier	19
4. Conclusiones y Recomendaciones	19

5. Referencias

20

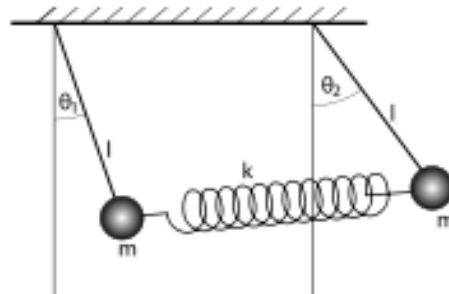
Resumen

En este trabajo, se estudia la dinámica de un sistema de dos péndulos acoplados por un resorte, abordando las ecuaciones de movimiento en diferentes escenarios. Se consideran variaciones en la masa y longitud de las varillas de los péndulos, así como modificaciones en la posición del resorte y la aproximación para pequeñas oscilaciones. Los resultados muestran cómo estas variaciones afectan las frecuencias naturales, modos normales y la posibilidad de comportamiento caótico en el sistema. Nuestro análisis subraya la influencia crítica de la no linealidad y el acoplamiento en la complejidad dinámica, destacando la transición hacia el caos bajo ciertas condiciones.

1. Introducción

El estudio de las ecuaciones de movimiento es fundamental en la mecánica clásica, ya que permite describir cómo los sistemas físicos evolucionan en el tiempo bajo la influencia de diversas fuerzas. Estas ecuaciones, derivadas de los principios de Newton o de formulaciones más avanzadas como la mecánica lagrangiana, son esenciales para predecir el comportamiento de sistemas dinámicos, desde partículas individuales hasta sistemas complejos de múltiples componentes.

En esta asignación, se realizó el análisis de un sistema de dos péndulos de igual masa m que cuelgan, respectivamente de dos varillas sin masa y de longitud l , unidos por un resorte de constante elástica k .



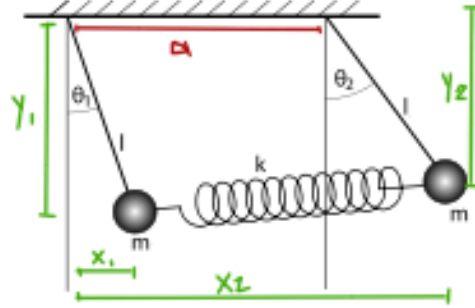
En este trabajo, se desarrollarán las ecuaciones de movimiento para este sistema utilizando los métodos de la mecánica clásica y se analizarán las soluciones obtenidas, enfocándose en los aspectos que caracterizan el movimiento de sistemas acoplados.

2. Metodología

Para estudiar a profundidad este sistema, primero debemos encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema, para luego buscar una solución al sistema de ecuaciones y poder identificar los parámetros que condicionan el sistema.

2.1. Hallando las ecuaciones de movimiento

Para hallar las ecuaciones de movimiento del sistema debemos identificar unos detalles fundamentales caracterizar el sistema:



- El movimiento de cada péndulo no es independiente, debido a que están acoplados por el resorte.
- $x_1^2 + y_1^2 = l^2$ y también, $x_2^2 + y_2^2 = l^2$
- $z=0$

Ahora, podemos decir que las posiciones de cada péndulo son:

$$x_1 = l \sin(\theta_1) \quad (1)$$

$$y_1 = l \cos(\theta_1) \quad (2)$$

$$x_2 = a + l \sin(\theta_2) \quad (3)$$

$$y_2 = l \cos(\theta_2) \quad (4)$$

donde x_1 y y_1 corresponden a las coordenadas del péndulo 1, mientras que x_2 y y_2 corresponden a las coordenadas del péndulo 2.

Ahora, podemos derivar (1), (2), (3) y (4) para obtener las velocidades en cada componente:

$$\dot{x}_1 = l \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 \quad (5)$$

$$\dot{y}_1 = -l \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 \quad (6)$$

$$\dot{x}_2 = l \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (7)$$

$$\dot{y}_2 = -l \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (8)$$

Con esto, podemos conocer la energía cinética de ambos péndulos, tal que:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (9)$$

Donde:

$$v_1^2 = v_{x1}^2 + v_{y1}^2 = l^2\dot{\theta}_1^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) = l^2\dot{\theta}_1^2 \quad (10)$$

$$v_2^2 = v_{x2}^2 + v_{y2}^2 = l^2\dot{\theta}_2^2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2) = l^2\dot{\theta}_2^2 \quad (11)$$

Por lo tanto, la energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (12)$$

Ahora, para la energía potencial tenemos:

$$U = -mgy_1 - mgy_2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 \quad (13)$$

donde Δx y Δy son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \Delta x &= a - (x_2 - x_1) = a - (a + l\sin\theta_2 - l\sin\theta_1) \\ \Delta x &= -l(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= l\cos\theta_2 - l\cos\theta_1 \\ \Delta y &= -l(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \end{aligned} \quad (15)$$

Reemplazando (14) y (15) en (13), la energía potencial queda de la forma:

$$\begin{aligned} U &= -mgy_1 - mgy_2 + \frac{1}{2}k(-l(\sin\theta_2 - \sin\theta_1))^2 + \frac{1}{2}k(-l(\cos\theta_2 - \cos\theta_1))^2 \\ U &= -mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \frac{1}{2}kl^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + \frac{1}{2}kl^2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} U &= -mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \frac{1}{2}kl^2(\sin^2\theta_2 - 2\sin\theta_2\sin\theta_1 + \sin^2\theta_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}kl^2(\cos^2\theta_2 - 2\cos\theta_2\cos\theta_1 + \cos^2\theta_1) \end{aligned}$$

$$U = -mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \frac{1}{2}kl^2(-2\sin\theta_2\sin\theta_1 - 2\cos\theta_2\cos\theta_1) \quad (17)$$

$$U = -mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) - kl^2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (18)$$

Con la energía cinética y la energía potencial podemos calcular el lagrangiano del sistema, tal que:

$$L = T - U \quad (19)$$

Reemplazando (12) y (18) en (19):

$$L = [\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)] - [-mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) - kl^2\cos(\theta_2 - \theta_1)] \quad (20)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + kl^2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (21)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \frac{1}{2}kl^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + \frac{1}{2}kl^2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2 \quad (22)$$

Para las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos la ecuación:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (23)$$

Para θ_1 y $\dot{\theta}_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -mgl\sin\theta_1 - kl^2(\cos\theta_2\cos\theta_1)\sin\theta_1 + kl^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -mgl\sin\theta_1 - kl^2\cos\theta_2\sin\theta_1 + kl^2\sin\theta_2\cos\theta_1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = ml^2\ddot{\theta}_1 \quad (25)$$

Para θ_2 y $\dot{\theta}_2$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -mgl\sin\theta_2 - kl^2\cos\theta_2\sin\theta_1 + kl^2\sin\theta_2\cos\theta_1 \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = ml^2\ddot{\theta}_2 \quad (27)$$

Ahora, sustituyendo (24), (25), (26) y (27) en (23) para ambos casos, obtenemos la ecuaciones de movimiento del sistema:

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\sin\theta_1 + kl^2\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (28)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl\sin\theta_2 + kl^2\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (29)$$

2.2. La solución numérica

Para resolver este problema, se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Se parte considerando las ecuaciones de movimiento obtenidas en el punto anterior, junto con unas condiciones iniciales y parámetros que sean coherentes en términos de escala, para observar cómo evolucionan las coordenadas en el tiempo.

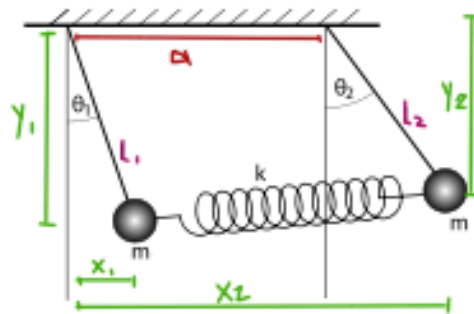
Se utilizaron los siguientes valores: la aceleración de la gravedad es $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, la longitud de las varillas es $l = 1 \text{ m}$, la masa es $m = 1 \text{ kg}$, y la constante elástica, que variará dependiendo del caso. Aunque este valor podría no ser muy realista en comparación con los utilizados en los laboratorios, se elige con el propósito de explorar cómo se comporta el sistema al variar este parámetro.

Se consideraron diferentes condiciones iniciales, como velocidades angulares y ángulos, para analizar cómo afecta al comportamiento del sistema. Es importante señalar que se utilizó ChatGPT como herramienta de apoyo para la elaboración del código, y no se exploraron todos los casos posibles, sino algunos ejemplos que permiten obtener una idea general del comportamiento del sistema.

2.3. Algunas variaciones en el sistema

2.3.1. Caso general donde $m_1 \neq m_2$

Analizando un caso general donde las masas son m_1 y m_2 , longitudes de las cuerdas son l_1 y l_2 respectivamente, como se ilustra en la imagen:



Ahora los detalles fundamentales considerados acá para nuestro sistema son:

- $x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$ y también, $x_2^2 + y_2^2 = l_2^2$
- $z=0$

Ahora, podemos decir que las posiciones de cada péndulo son:

$$x_1 = l_1 \text{sen}(\theta_1) \quad (30)$$

$$y_1 = l_1 \text{cos}(\theta_1) \quad (31)$$

$$x_2 = a + l_2 \text{sen}(\theta_2) \quad (32)$$

$$y_2 = l_2 \text{cos}(\theta_2) \quad (33)$$

donde x_1 y y_1 corresponden a las coordenadas del péndulo 1, mientras que x_2 y y_2 corresponden a las coordenadas del péndulo 2.

Ahora, podemos derivar (30), (31), (32) y (33) para obtener las velocidades en cada componente:

$$\dot{x}_1 = l_1 \text{cos}(\theta_1) \dot{\theta}_1 \quad (34)$$

$$\dot{y}_1 = -l_1 \text{sen}(\theta_1) \dot{\theta}_1 \quad (35)$$

$$\dot{x}_2 = l_2 \text{cos}(\theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (36)$$

$$\dot{y}_2 = -l_2 \text{sen}(\theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (37)$$

Con esto, podemos conocer la energía cinética de ambos péndulos, tal que:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (38)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (39)$$

Ahora, para la energía potencial tenemos:

$$U = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 + \frac{1}{2} k (\Delta y)^2 \quad (40)$$

donde Δx y Δy son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \Delta x &= a - (x_2 - x_1) = a - (a + l_2 \text{sen} \theta_2 - l_1 \text{sen} \theta_1) \\ \Delta x &= -l_2 \text{sen} \theta_2 + l_1 \text{sen} \theta_1 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\Delta y = l_2 \text{cos} \theta_2 - l_1 \text{cos} \theta_1 \quad (42)$$

Reemplazando (41) y (42) en (40), la energía potencial queda de la forma:

$$U = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k (-l_2 \text{sen} \theta_2 + l_1 \text{sen} \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k (-l_2 \text{cos} \theta_2 - l_1 \text{cos} \theta_1)^2 \quad (43)$$

Con la energía cinética y la energía potencial podemos calcular el lagrangiano del sistema. Reemplazando (39) y (43) en (19):

$$L = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2) - [-g(m_1 y_1 + m_2 y_2) + \frac{1}{2}k(l_2^2 \sin^2 \theta_2 - 2l_1 l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 + l_2^2 \sin \theta_1) + \frac{1}{2}k(l_2^2 \cos^2 \theta_2 - 2l_1 l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 + l_2^2 \cos \theta_2)] \quad (44)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2) + g(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2) - \frac{1}{2}k(l_2^2 \sin^2 \theta_2 - 2l_1 l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 + l_2^2 \sin \theta_1 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 + l_2^2 \cos \theta_2) \quad (45)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2) + g(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2) - \frac{1}{2}k(l_2^2 - 2l_1 l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1) \quad (46)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2) + g(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2) - l_1 l_2 k \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (47)$$

Para las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos la ecuación (23). Ahora, para cada caso

Para θ_1 y $\dot{\theta}_1$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = k l_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g l_1 m_1 \sin \theta_1 \quad (48)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \quad (49)$$

Para θ_2 y $\dot{\theta}_2$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = k l_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) - g l_2 m_2 \sin \theta_2 \quad (50)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \quad (51)$$

Ahora, sustituyendo (48), (49), (50) y (51) en (23) para ambos casos, obtenemos la ecuaciones de movimiento del sistema:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - k l_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_1 l_1 g \sin \theta_1 = 0 \quad (52)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - k l_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_2 g \sin \theta_2 = 0 \quad (53)$$

2.3.2. Caso donde el resorte está en otra posición

Para este caso, vamos a considerar que el resorte acoplado a las dos masas, ahora se encuentra atado a media altura de las varillas l_1 y l_2 . De este modo, podemos tener en cuenta que:

- Tomaremos el caso general donde $m_1 \neq m_2$ para generalizar el problema.
- La posición de los péndulos se puede tomar igual que en las ecuaciones (30), (31), (32) y (33).
- El lagrangiano tendrá una variación por el lado de la energía potencial solamente.

Para plantear el lagrangiano de este sistema tenemos que:

$$L = T - U \quad (54)$$

Por lo tanto, la energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (55)$$

Ahora, para la energía potencial tenemos:

$$U = -mgy_1 - mgy_2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 \quad (56)$$

donde Δx y Δy son, respectivamente:

$$\Delta x = a - (x_2 - x_1) = a - \left(a + \frac{l_2}{2}\sin\theta_2 - \frac{l_1}{2}\sin\theta_1\right) \quad (57)$$

$$\Delta x = -\frac{l_2}{2}\sin\theta_2 + \frac{l_1}{2}\sin\theta_1$$

$$\Delta y = \frac{l_2}{2}\cos\theta_2 - \frac{l_1}{2}\cos\theta_1 \quad (58)$$

Reemplazando (57) y (58) en (56), la energía potencial queda de la forma:

$$U = -m_1gy_1 - m_2gy_2 + \frac{1}{2}k\left(-\frac{l_2}{2}\sin\theta_2 + \frac{l_1}{2}\sin\theta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(-\frac{l_2}{2}\cos\theta_2 - \frac{l_1}{2}\cos\theta_1\right)^2 \quad (59)$$

Con la energía cinética y la energía potencial podemos calcular el lagrangiano del sistema. Reemplazando (39) y (59) en (19):

$$L = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_1gy_1 + m_2gy_2 - \frac{1}{2}k\left(-\frac{l_2}{2}\sin\theta_2 + \frac{l_1}{2}\sin\theta_1\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(-\frac{l_2}{2}\cos\theta_2 - \frac{l_1}{2}\cos\theta_1\right)^2 \quad (60)$$

$$L = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_1gy_1 + m_2gy_2 - \frac{k}{8}(-l_2\sin\theta_2 + l_1\sin\theta_1)^2 - \frac{k}{8}(-l_2\cos\theta_2 + l_1\cos\theta_1)^2 \quad (61)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2) + g(m_1 l_1 \cos\theta_1 + m_2 l_2 \cos\theta_2) - \frac{l_1 l_2 k}{4} \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (62)$$

Para las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos la ecuación (23). Ahora, para cada caso

Para θ_1 y $\dot{\theta}_1$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{kl_2 l_1}{4} \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) - gl_1 m_1 \text{sen} \theta_1 \quad (63)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \quad (64)$$

Para θ_2 y $\dot{\theta}_2$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{kl_2 l_1}{4} \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) - gl_2 m_2 \text{sen} \theta_2 \quad (65)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \quad (66)$$

Ahora, sustituyendo (63), (64), (65) y (66) en (23) para ambos casos, obtenemos la ecuaciones de movimiento del sistema:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - \frac{kl_2 l_1}{4} \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) + m_1 l_1 g \text{sen} \theta_1 = 0 \quad (67)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - \frac{kl_2 l_1}{4} \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_2 g \text{sen} \theta_2 = 0 \quad (68)$$

2.4. Comportamiento caótico del sistema

El comportamiento caótico del sistema se analizó utilizando el código que resolvió numéricamente las ecuaciones de movimiento de los péndulos acoplados. En esta ocasión, se eligieron condiciones iniciales específicas y se estableció un valor de $k = 200N/m$ para la constante del resorte. Este ajuste en la constante se realizó con la intención de inducir el caos en uno de los péndulos y asegurar que el otro péndulo también exhibiera un comportamiento caótico debido al fuerte acoplamiento entre ellos.

Para corroborar la existencia de caos, se evaluó la sensibilidad a las condiciones iniciales. Pequeñas perturbaciones en los estados iniciales se analizaron para observar cómo estas variaciones influían en las trayectorias resultantes. La divergencia rápida de trayectorias cercanas es una característica típica de sistemas caóticos y fue una de las principales evidencias buscadas en el análisis.

2.5. Pequeñas oscilaciones

En esta sección vamos a considerar nuestro sistema, pero con oscilaciones pequeñas, es decir que debemos considerar $\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$ y $\theta_1^2 \sim \theta_2^2 \sim 0$, $\text{sen} \theta_1 \sim \theta_1$, $\text{sen} \theta_2 \sim \theta_2$, $\cos \theta_1 \sim 1$ y $\cos \theta_2 \sim 1$.

Podemos considerar el problema desde el lagrangiano del problema general donde tenemos $m_1 \neq m_2$ y $l_1 \neq l_2$ para evaluar el sistema de forma general. Entonces:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{l}_1^2 + m_2 \dot{l}_2^2) + g(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2) - \frac{1}{2}k(l_2^2 - 2l_1 l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 + l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1) \quad (69)$$

Simplificando la expresión con las aproximaciones, tenemos que:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{l}_1^2 + m_2 \dot{l}_2^2) + g(m_1 l_1 + m_2 l_2) - l_2 l_1 k \theta_2 \theta_1 \quad (70)$$

Y aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange se tiene:

Para θ_1 y $\dot{\theta}_1$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\theta_1 k l_2 l_1 \quad (71)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \quad (72)$$

Para θ_2 y $\dot{\theta}_2$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\theta_2 k l_2 l_1 \quad (73)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \quad (74)$$

Por lo que las ecuaciones de movimiento del sistema con oscilaciones pequeñas son:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + k l_1 l_2 \theta_1 = 0 \quad (75)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + k l_1 l_2 \theta_2 = 0 \quad (76)$$

3. Resultados y análisis

3.1. Las ecuaciones de movimiento para diferentes formas del sistema

En este trabajo consideramos diferentes casos donde se cambiaban ciertos parámetros del sistema, obteniendo para cada uno de ellos las ecuaciones de movimiento correspondientes.

3.1.1. Masas y varillas iguales

Este es el caso general, donde las masas de los péndulos son m , y la longitud de las varillas es l .

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + mgl\sin\theta_1 + kl^2\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (77)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl\sin\theta_2 + kl^2\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (78)$$

3.1.2. Masas y varillas diferentes

Para este caso, se consideraron dos masas diferentes en el sistema (m_1 y m_2) y diferentes longitudes de las varillas (l_1 y l_2).

$$m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 - kl_2l_1\sin(\theta_2 - \theta_1) + m_1l_1g\sin\theta_1 = 0 \quad (79)$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - kl_2l_1\sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2l_2g\sin\theta_2 = 0 \quad (80)$$

Podemos notar que si $m_1 = m_2$ y $l_1 = l_2$, las ecuaciones de movimiento se igualan a las presentadas en el caso anterior.

3.1.3. Resorte acoplado a las varillas

Para este caso, se consideraron las masas m_1 y m_2 y las longitudes l_1 y l_2 para apreciar de forma generalizada el problema para cualquier valor de m_i y l_i . En este caso, el resorte se encuentra atado a media altura de las varillas de longitud l_1 y l_2 .

$$m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 - \frac{kl_2l_1}{4}\sin(\theta_2 - \theta_1) + m_1l_1g\sin\theta_1 = 0 \quad (81)$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - \frac{kl_2l_1}{4}\sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2l_2g\sin\theta_2 = 0 \quad (82)$$

3.1.4. Oscilaciones pequeñas

Para este caso, también se consideraron las masas m_1 y m_2 y las longitudes l_1 y l_2 para apreciar de forma generalizada el problema para cualquier valor de m_i y l_i . En este caso, se realizaron las aproximaciones sugeridas para las oscilaciones pequeñas.

$$m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + kl_1l_2\theta_1 = 0 \quad (83)$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + kl_1l_2\theta_2 = 0 \quad (84)$$

3.2. Solución numérica

En esta sección, se analizan los datos obtenidos en la solución numérica del sistema inicial donde las masas de los péndulos son iguales y las longitudes son iguales. Se contemplan diferentes casos sujetos a los valores que pueden tomar θ_1 y θ_2 .

3.2.1. Primer caso

Si se parte de los ángulos $\theta_1 = -\pi/18 \text{ rad}$ y $\theta_2 = \pi/18 \text{ rad}$, velocidades angulares $\omega_1 = 0 \text{ rad/seg}$ y $\omega_2 = 0 \text{ rad/seg}$ y el parámetro $k = 200 \text{ N/m}$:

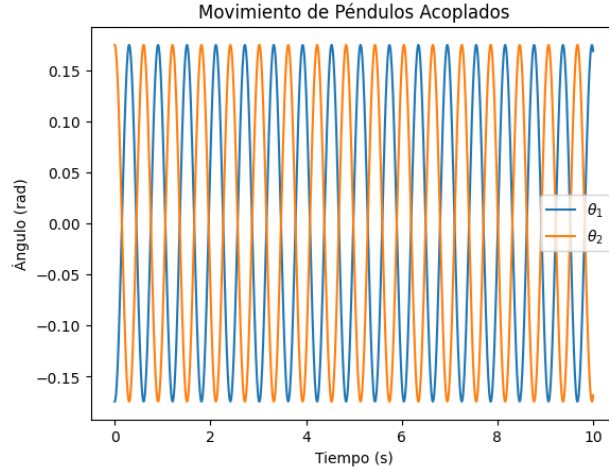


Figura 1: Evolución temporal de las coordenadas caso 1

En la anterior gráfica se observa que el sistema se comporta con amplitudes iguales pero de signo contrario para los dos diferentes ángulos, esto ocurre de manera periódica. Los valores seleccionados nos permite ver además cómo se comporta para valores de θ_1 y θ_2 pequeños. Se puede obtener adicionalmente que la amplitud máxima para los dos es de $0,15 \text{ rad}$ y un mínimo de $-0,15 \text{ rad}$.

3.2.2. Segundo caso

Los ángulos del caso dos son $\theta_1 = -\pi/3 \text{ rad}$ y $\theta_2 = \pi/3 \text{ rad}$, velocidades angulares $\omega_1 = 0 \text{ rad/seg}$ y $\omega_2 = 0 \text{ rad/seg}$ y el parámetro $k = 200 \text{ N/m}$:

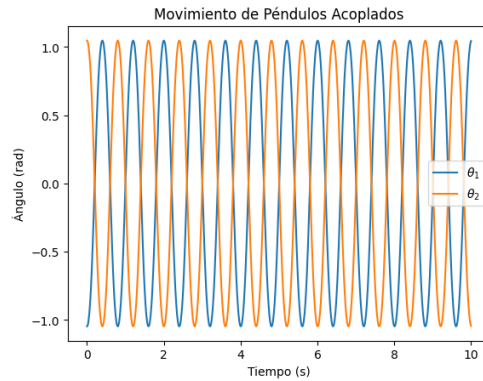


Figura 2: Evolución temporal de las coordenadas caso 2

Se puede observar que ocurre algo similar para ángulos menores, solo que ha disminuido la frecuencia pero aumentó la amplitud que toman las dos coordenadas a $1,0 \text{ rad}$.

3.2.3. Tercer caso

Dado $\theta_1 = \pi/3 \text{ rad}$ y $\theta_2 = \pi/3 \text{ rad}$, velocidades angulares $\omega_1 = 0 \text{ rad/seg}$ y $\omega_2 = 0 \text{ rad/seg}$ y el parámetro $k = 200 \text{ N/m}$:

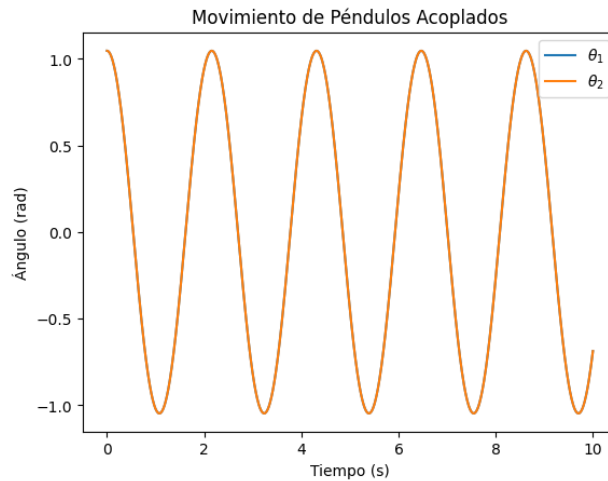


Figura 3: Evolución temporal de las coordenadas caso 3

Este es un caso interesante de analizar porque tiene la misma amplitud máxima y mínima que el caso 2 pero no va a existir un desfase entre las amplitudes de las coordenadas. Entonces es posible afirmar que todo el sistema se va a comportar similar a un péndulo simple. Los anteriores casos iban a ser parecidos a dos péndulos simples pero cada uno con un desfase.

3.2.4. Cuarto caso

Dado $\theta_1 = \pi/3 \text{ rad}$ y $\theta_2 = \pi/3 \text{ rad}$, velocidades angulares $\omega_1 = 0 \text{ rad/seg}$ y $\omega_2 = 0 \text{ rad/seg}$ y el parámetro $k = 10 \text{ N/m}$:

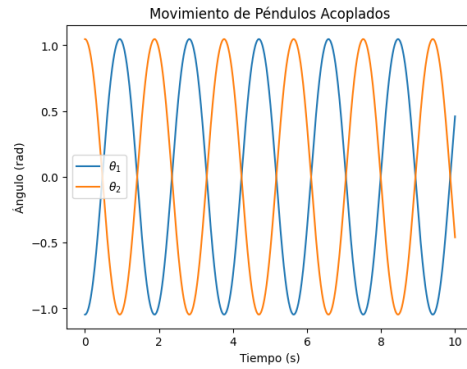


Figura 4: Evolución temporal de las coordenadas caso 4

se tiene algo similar que el caso 2, pero con la única excepción de que se presenta una menor frecuencia, entonces podemos decir que para casos de este estilo, la constante elástica se relaciona con ella. No hubo cambio de amplitudes con respecto a los últimos dos casos.

3.2.5. Quinto Caso

Dado $\theta_1 = -\pi/3$ **rad** y $\theta_2 = \pi/3$ **rad**, velocidades angulares $\omega_1 = \pi$ **rad/seg** y $\omega_2 = 0$ **rad/seg** y el parámetro $k = 10$ **N/m**:

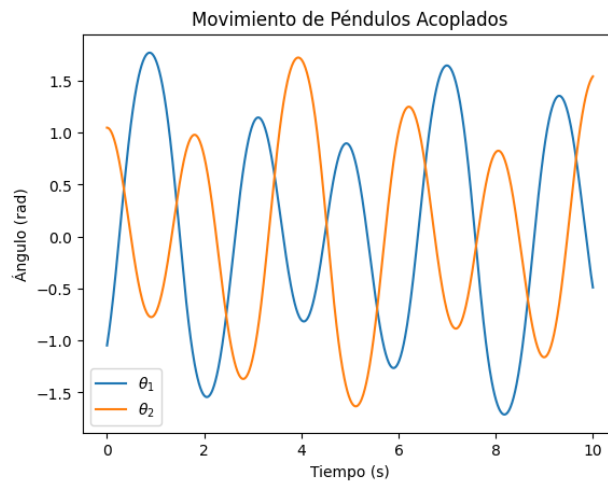


Figura 5: Evolución temporal de las coordenadas caso 5

Se puede observar que aunque sigue determinado patrón periódico, las amplitudes varían, pero los dos ángulos tienen una amplitud máxima de aproximadamente 1,8 **rad** y una mínima alrededor de -1,8 **rad**.

3.2.6. Sexto caso

Dado $\theta_1 = -\pi/3$ **rad** y $\theta_2 = \pi/3$ **rad**, velocidades angulares $\omega_1 = \pi$ *rad/seg* y $\omega_2 = \pi$ *rad/seg* y el parámetro $k = 10$ *N/m*:

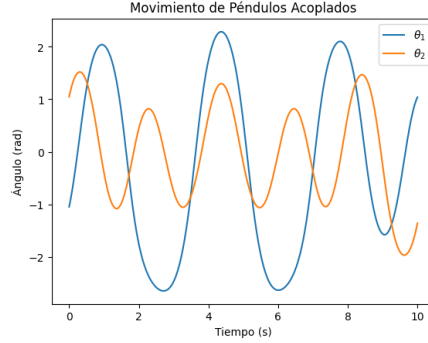


Figura 6: Evolución temporal de las coordenadas caso 6

Se hace evidente que las amplitudes relacionada con θ_1 alcanzan valores incluso mayores o cercanos a 2 **rad**, mientras que θ_2 puede llegar a tener valores no mayores a 1,5 **rad** aproximadamente.

3.2.7. Séptimo Caso

Dado $\theta_1 = \pi/3$ **rad** y $\theta_2 = \pi/6$ **rad**, velocidades angulares $\omega_1 = 0$ *rad/seg* y $\omega_2 = 0$ *rad/seg* y el parámetro $k = 10$ *N/m*:

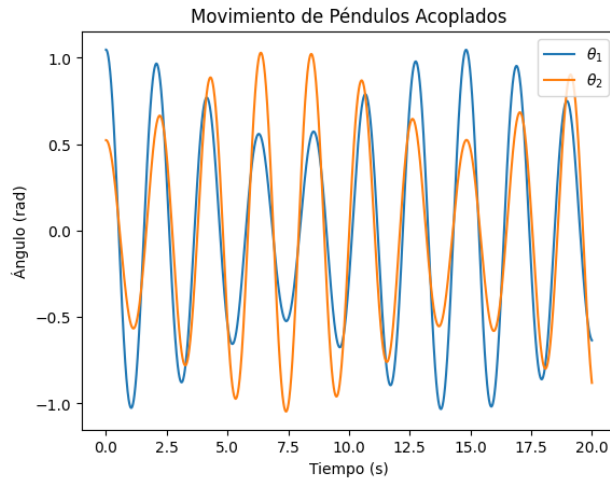


Figura 7: Evolución temporal de las coordenadas caso 7

Para este caso es interesante observar que mientras la amplitud de un ángulo aumenta, el otro disminuirá. Aún así, los dos logran una amplitud máxima de aproximadamente 1,0 **rad**

3.3. Comportamiento caótico

Si se considera que el sistema tiene la constante de elasticidad ya mencionada y los parámetros usados anteriormente para este problema. Las condiciones iniciales siendo $\theta_1 = \pi/6$ **rad** y $\theta_2 = \pi/6$ **rad**, velocidades angulares $\omega_1 = 3$ *rad/seg* y $\omega_2 = 0$ *rad/seg* podemos llegar a obtener la siguiente gráfica:

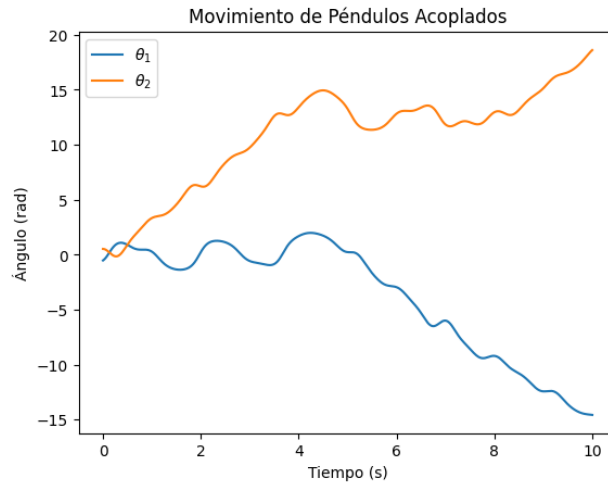


Figura 8: evolución temporal sin pequeña variación

podemos ver que no son cíclicos los valores que nos dan y aparentemente son poco predictibles, además de eso se puede observar que los péndulos llegan a dar giros. Si hacemos una pequeña variación tal que $\omega_1 = \omega_1(0) + 0,00001$:

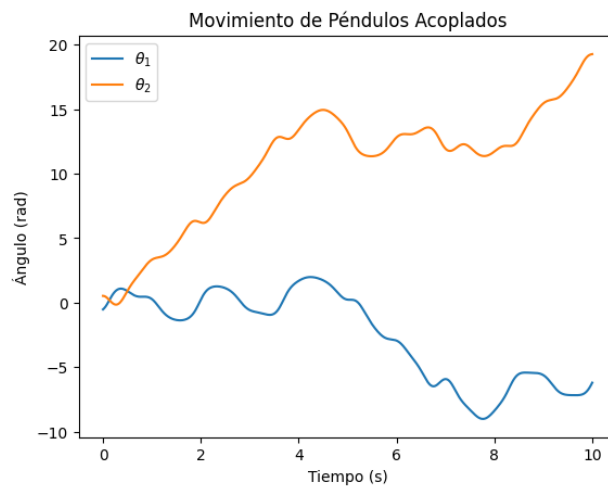


Figura 9: evolución temporal del sistema con pequeña variación en ω_1

se puede observar una evolución del sistema considerablemente distinta. Ahora para una variación de $\omega_2 = \omega_2(0) + 0,00001$:

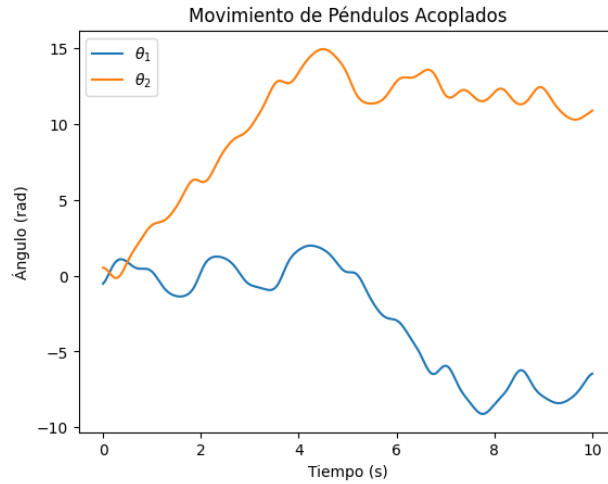


Figura 10: evolución temporal del sistema con pequeña variación en ω_2

Vemos cómo a medida que evoluciona el tiempo las coordenadas difieren debido a las pequeñas variaciones. Ahora variando $\theta_1 = \theta_1(0) + 0,00001$:

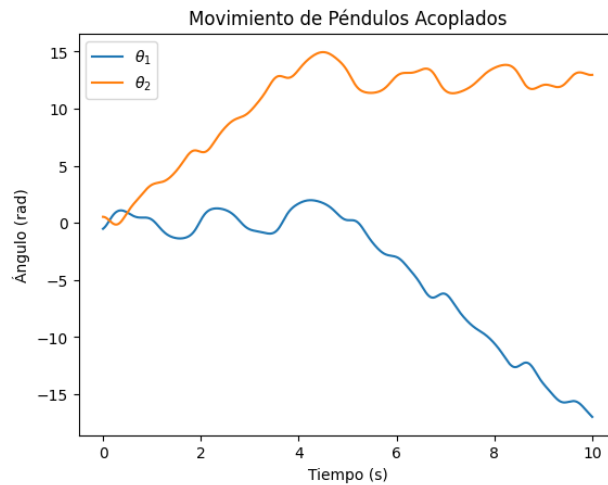


Figura 11: evolución temporal del sistema con pequeña variación en θ_1

se observa cómo difiere de la gráfica sin variaciones principalmente en el comportamiento que tiene θ_2 después de los 8 segundos. Si se considera ahora una pequeña variación tal que $\theta_2 = \theta_2(0) + 0,00001$:

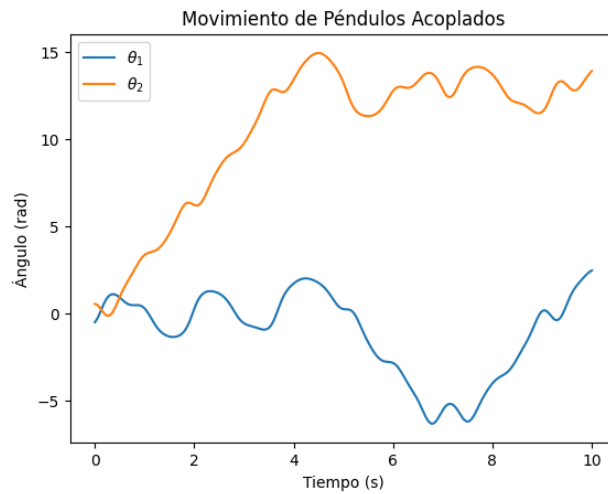


Figura 12: evolución temporal del sistema con pequeña variación en θ_2

la cual difiere nuevamente de la gráfica donde no hay estas pequeñas variaciones. Cabe aclarar que esa diferencia de velocidades no es la única manera de que el sistema presente un comportamiento caótico, también se puede dar debido a una gran diferencia de ángulos.

3.4. Espectro de potencia de Fourier

Esta parte del trabajo no fue posible realizarla debido al poco manejo de los autores sobre el tema pero por la investigación realizada se cree que debe obtenerse una gráficas .

4. Conclusiones y Recomendaciones

El análisis del sistema de péndulos acoplados por un resorte demuestra que la dinámica del sistema está fuertemente influenciada por las masas, longitudes de las varillas, y la disposición del resorte. Las ecuaciones de movimiento obtenidas reflejan cómo pequeñas modificaciones en estos parámetros pueden cambiar significativamente las frecuencias naturales y los modos normales de oscilación del sistema. Con este estudio se pudieron evaluar varias cosas interesantes:

- Las variaciones en las masas y longitudes conducen a asimetrías en las ecuaciones de movimiento, lo que resulta en un acoplamiento más complejo entre los péndulos. Afectando la distribución de energía y las trayectorias de oscilación.
- En casos donde se consideran oscilaciones grandes, las ecuaciones muestran que la no linealidad tiene gran influencia en la evolución del sistema. La no linealidad puede llevar a comportamientos no periódicos y, en ciertos casos, a la posibilidad de comportamiento caótico.

- La posición del resorte influye directamente en cómo se transfiere la energía entre los péndulos. Los cambios en la geometría del sistema pueden alterar esta transferencia, variando los modos de oscilación y las frecuencias del sistema.
- Bajo condiciones de no linealidad, el sistema puede presentar comportamiento caótico. Esto resalta la complejidad de sistemas acoplados y cómo diversos factores pueden llevar a dinámicas impredecibles y sensibles a las condiciones iniciales.
- Durante el desarrollo de la solución numérica, se identificaron algunas inconsistencias en el código utilizado para simular la dinámica del sistema. Es necesario realizar ajustes y correcciones en el código para mejorar la precisión de las simulaciones y garantizar que los resultados numéricos reflejen adecuadamente el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones.
- Adicionalmente, para comprender mejor las características de las oscilaciones y la transferencia de energía en el sistema, es necesario analizar el comportamiento de la señal en términos del espectro de potencias de Fourier, para identificar frecuencias dominantes, patrones de resonancia, y posibles componentes caóticos en las señales de los péndulos.

En conclusión, este estudio resalta la complejidad dinámica de los sistemas acoplados y la necesidad de un análisis detallado de los parámetros para comprender completamente su comportamiento. La interacción entre los distintos elementos del sistema puede llevar a una gran variedad de resultados, desde movimientos regulares hasta caos, dependiendo de las condiciones y configuraciones específicas.

5. Referencias

1. Cosenza, M. (2015). Mecánica Clásica. Universidad de los Andes (ULA). Facultad de Ciencias. Departamento de Física. Mérida-Venezuela (Publicación Electrónica), 133-141.
2. Maianti, M., Pagliara, S., Galimberti, G., Parmigiani, F. (2009). Mechanics of two pendulums coupled by a stressed spring. *Am. J. Phys.*, 77(9), 834-838.
3. Guzev, M., Dmitriev, A. (2016). Stability analysis of two coupled oscillators. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 4(2), 139-152