

Asignación 2 - Mecánica Clásica

Juan Felipe León Pulgarin
Alexandra Serrano Mendoza
Universidad Industrial de Santander

30 Agosto 2024

Índice

1. Introducción	2
2. Metodología	2
2.1. Trayectorias	2
2.2. Sección transversal diferencial para el potencial apantallado para diferentes valores de α	3
3. Resultados y análisis	5
3.1. Decaimiento de los potenciales	5
3.2. Trayectorias	7
3.3. Diferentes valores de α	9
3.4. Ángulos de dispersión	9
3.4.1. Diferentes valores de energías	9
3.5. Diferentes valores para el parámetro de impacto	10
3.6. Diferentes valores para el parámetro de apantallamiento	11
4. Conclusiones	11

Resumen

El trabajo desarrolla un análisis de los potenciales de Coulomb y Yukawa para estudiar su influencia en las trayectorias y ángulos de dispersión de partículas. A través de métodos analíticos y numéricos, se observó que el potencial de Yukawa introduce un apantallamiento que disminuye el alcance de la interacción y, por ende, reduce la sección transversal diferencial. Los resultados revelan que parámetros como la energía inicial y el parámetro de impacto tienen efectos significativos sobre la dinámica de las partículas, lo que se refleja en sus trayectorias y dispersión angular. Este análisis es útil para comprender sistemas físicos en los que intervienen fuerzas de corto alcance, como en interacciones nucleares y en plasmas.

1. Introducción

Una de las grandes incógnitas hace unos años fue referente a las trayectorias que describían los planetas. Originalmente fue un problema que abordó de manera numérica basándose en observaciones. Con la llegada de la teoría de campos se logró entender que una fuente (en este caso planetas) podría causar que un cuerpo que esté bajo la influencia de este describa determinada trayectoria [1]. Para el problema que se va a abordar en este trabajo se pretende describir el potencial de Coulomb y el potencial de Yukawa los cuales están descritos por las siguientes ecuaciones respectivamente:

$$V(r) = \frac{k}{r}; \quad V(r) = \frac{k}{r}e^{-\alpha r}. \quad (1)$$

De ellas se quiere determinar el rango efectivo de apantallamiento, para ello, conocer cuándo se da un cambio significativo del momento de la partícula bajo la influencia de los potenciales. Adicionalmente, mostrar cómo se comporta dados diferentes valores del parámetro α dado que se espera que afecte la sección transversal. Finalmente, se busca aplicar los modelos construidos con valores dados por partículas de alta y baja energía con el objetivo de comparar su comportamiento bajo influencia del potencial de Coulomb y Yukawa.

2. Metodología

Es fundamental entender cómo decaen los potenciales. Para ello, se realizó una gráfica utilizando Python que relaciona los valores de los potenciales con las distancias, para ese caso se consideró $\alpha = 1,0$ y $k = 1,0$. Para corroborar que fue correctamente planteada el código se usó $\alpha = 0$. Además considerar que el apantallamiento hace que el potencial sea de corto alcance también es importante. Esta afirmación se puede deducir de un razonamiento en el cual se consideran valores de α muy pequeños, esto se comprobó mediante simulaciones que permitieron comparar las trayectorias así como también se asemejan las ecuaciones diferenciales.

El rango efectivo de la interacción está totalmente relacionado con el parámetro de apantallamiento α , esto se comprueba comparando los valores arrojados en el potencial de Coulomb. Lo anterior también tiene relación con el comportamiento de la sección transversal. Entonces se tomaron como referencia diferentes energías para evaluar las ecuaciones obtenidas por medio del código de python.

Se comprobó el comportamiento de estos potenciales para diferentes partículas con el fin de comparar entre las que son de alta energía con las consideradas de baja energía. Esto se hizo por medio de una simulación la cual nos va a indicar si hay una mayor o menor sección transversal.

2.1. Trayectorias

Para hallar la trayectoria que describiría determinada partícula se hizo para el potencial de Coulomb se parte de la ecuación de la órbita en coordenadas polares

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(u)}{l^2u}, \quad (2)$$

considerando la expresión que relaciona el potencial con la fuerza por medio de una derivada de modo que $F(r) = -ku^2$ entonces la anterior ecuación se transforma en:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{k}{l^2}, \quad (3)$$

siendo l el momento angular. Al resolver la ecuación diferencial:

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{l^2} \quad (4)$$

si se simplifica y se considera:

$$e = \frac{Al^2}{k}, \quad (5)$$

y una distancia característica:

$$r_0 = \frac{l^2}{k}, \quad (6)$$

se llega a una forma de la solución dada por:

$$r(\theta) = \frac{l^2/k}{1 + e \cos(\theta)}. \quad (7)$$

Donde e es la excentricidad de la órbita. Se parte de un proceso análogo para el potencial de Yukawa con una diferencia al momento de obtener la ecuación diferencial, porque esta no tendrá una solución analítica:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{l^2} e^{-\alpha/u} \left(1 + \frac{\alpha}{u}\right). \quad (8)$$

Aunque en una primera instancia la anterior formula no tiene solución, se realizó un análisis de los posibles valores para α para poder determinar si es posible resolver la ecuación diferencial de manera analítica. Aún así para los dos casos se usó el método Runge-Kutta de cuarto orden para obtener la trayectoria que describe la partícula bajo estos potenciales, esto debido que nos permite obtener descripciones de la trayectoria para cualquier caso.

2.2. Sección transversal diferencial para el potencial apantallado para diferentes valores de α

La sección transversal diferencial para una dispersión es la cantidad que describe la probabilidad de que una partícula sea desviada en un ángulo sólido $d\Omega$. Para calcularla, podemos usar la relación generalizada:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{b(\theta)}{\sin\theta} \right) \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right| \quad (9)$$

donde $b(\theta)$ es el parámetro de impacto en función del ángulo de dispersión θ .

Para el potencial de Coulomb $V(r) = \frac{k}{r}$, la relación entre el parámetro de impacto b y el ángulo de dispersión θ está dado por:

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{k}{2Eb} \right) \quad (10)$$

donde E es la energía cinética de la partícula incidente, y k es la constante de Coulomb.

Para llegar a esta expresión, partimos de la conservación del momento angular l , que es constante para una interacción de fuerzas centrales:

$$l = mr^2 \dot{\theta} \quad (11)$$

donde m es la masa de la partícula, r es la distancia entre la partícula y el centro del potencial y $\dot{\theta}$ es la velocidad angular.

Asimismo, la energía total de la partícula también se conserva, de modo que:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + V(r) \quad (12)$$

y sustituyendo $V(r) = \frac{k}{r}$ para el potencial de Coulomb, podemos reescribir en términos de r y \dot{r} , tal que:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} \quad (13)$$

Ahora, resolviendo para la trayectoria de la partícula, hacemos el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$, expresando la ecuación de movimiento en términos de u y θ en lugar de r y t .

Derivando dos veces respecto a θ y usando la ecuación de movimiento radial, tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = \frac{mk}{l^2} \quad (14)$$

donde la solución general de esa ecuación es:

$$u(\theta) = \frac{mk}{l^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \quad (15)$$

ahora, para determinar el ángulo de dispersión, necesitamos encontrar el cambio en la dirección de una partícula debido al potencial. Consideramos que la partícula comienza a alejarse del centro cuando la fuerza centrífuga balancea la fuerza de Coulomb, lo cual ocurre en un ángulo de dispersión definido por la relación entre b , E y k .

Para obtener el ángulo de dispersión se parte de la ecuación que se encuentra en el libro guía^[2]

$$\theta_{max} = b \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}, \quad (16)$$

Esta nos sirve para introducir en la expresión $\chi = \pi - 2\theta_{max}$ a que se va a tomar en cuenta la siguiente configuración: el parámetro de impacto es el que está denotado como b y es la distancia

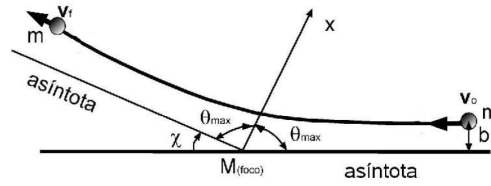


Figura 1: Extraído de Mecánica Clásica por Mario Cosenza e ilustra una partícula de masa m que va a cambiar su momento debido a la influencia de las masa M [2]

de una partícula de velocidad inicial v_0 con respecto a una línea paralela al vector velocidad que cruza con la partícula fuente ubicada en el foco y este permite determinar la distancia en la cual se presenta un cambio de momento considerando las condiciones iniciales. El parámetro está dado por:

$$b = \frac{l}{\sqrt{2mE}} \quad (17)$$

dada una línea que cruza por la partícula que se encuentra en el foco y la partícula con una velocidad v_0 . Bajo este modelo, se decidió evaluar para diferentes valores de energía, parámetros de impacto y de apantallamiento.

3. Resultados y análisis

3.1. Decaimiento de los potenciales

Al revisar qué valores tomaban los potenciales teniendo en cuenta que la constante $k = 1,0$ (Unidades dependiendo del sistema a estudiar) y que $\alpha = 1,0$ (Inverso de la distancia) se obtuvo la figura 2. Cabe resaltar que las cantidades que se usaron son totalmente arbitrarias debido a que se deseaba únicamente comparar el comportamiento de los dos potenciales, en cuanto a las unidades se buscó una concordancia que permitiera comparar los dos modelos planteados.

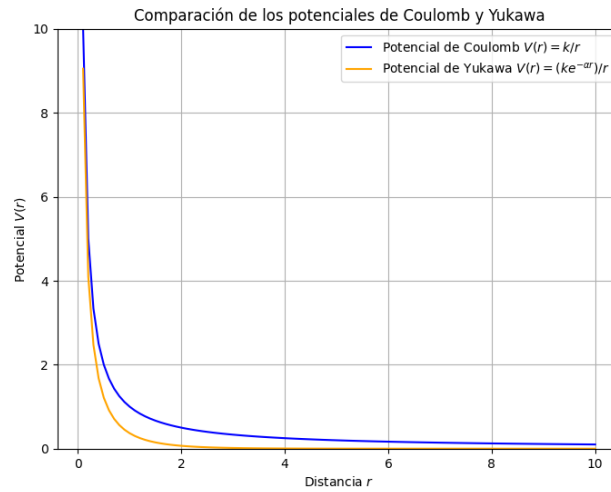


Figura 2: Comparación de los dos potenciales (Yukawa y Coulomb).

Se puede evidenciar que para valores muy pequeños de distancia el potencial de Yukawa empieza a predominar sobre el de Coulomb, pero a medida que se va considerando una partícula más lejana el potencial de apantallamiento se vuelve débil rápidamente dando paso a que el otro potencial tome valores más grandes. Este es un comportamiento esperado ya que la literatura indica que el potencial de Yukawa es de corto alcance. Para corroborar que el modelo tomado anteriormente fue el correcto, se consideró un valor de $\alpha = 0$ debido a que este fuerza a que los dos potenciales describan una misma curva, esto lo podemos deducir de las ecuaciones 2 y 8 o incluso de las formulas 1.

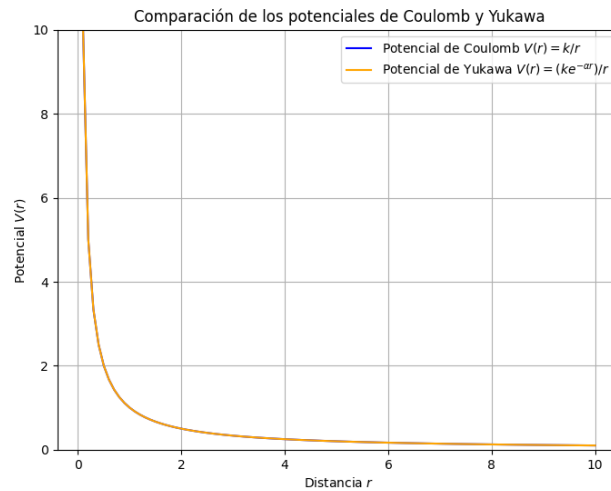


Figura 3: curvas descritas por los potenciales para $\alpha = 0$.

3.2. Trayectorias

Una vez se verificó que fue bien planteado el modelo, se procedió a obtener trayectorias descritas por los potenciales. Partiendo por el potencial de Coulomb, por ello se usó la ecuación (7) y se obtuvieron gráficas que describen diferentes curvas:

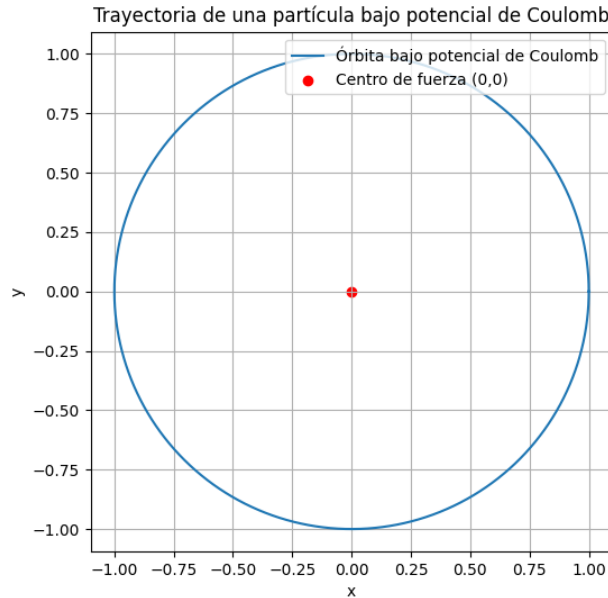


Figura 4: Trayectoria que describe una órbita circular

Para ese caso, se consideraron los parámetros $k = 1,0$ y $l = 1,0$. Mientras las condiciones iniciales son $u = 1,0$ y su derivada es nula. Con lo anterior, es posible encontrar A e introducirlo a la ecuación 8 para hallar que $e = 0$ y se confirma teóricamente que la curva que debe ser descrita es una circunferencia.

La trayectoria descrita por el potencial de Yukawa usando los los parámetros $k = 1,0$, $\alpha = 0,5$ y $l = 1,0$. Mientras que las condiciones iniciales fueron $u = 1,0$ y la derivada es nula.

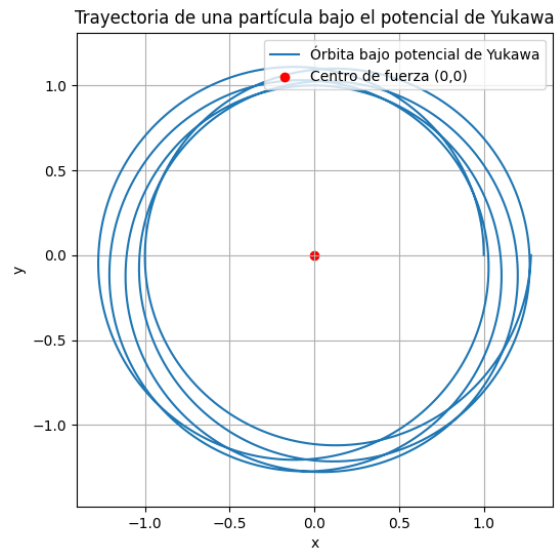
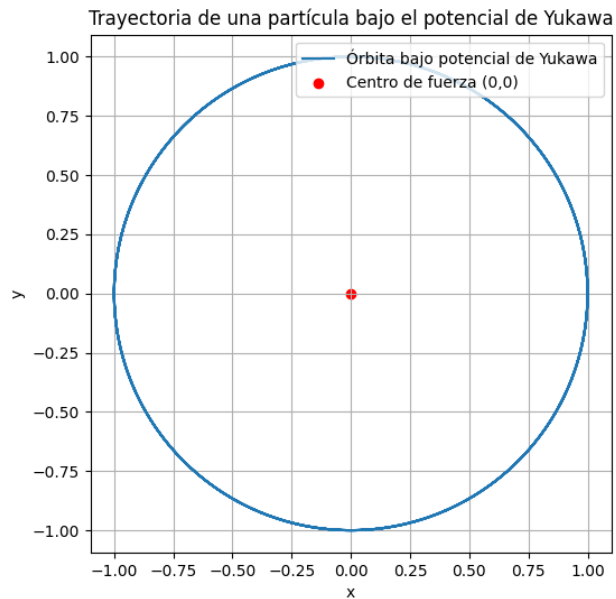


Figura 5: Trayectoria potencial de Yukawa

podemos ver que no describe una circunferencia exacta pero sí se asemeja, este comportamiento se debe a la función exponencial que se encuentra en la formula. Para comprobar nuevamente que el código y el modelo teórico estuvo correctamente planteado se asignó parámetro $\alpha = 0$, de tal forma que debe coincidir con la figura 4

Figura 6: Trayectoria perfectamente circular producto del potencial de Yukawa($\alpha = 0$)

Donde nuevamente por la forma de la ecuación diferencial para el potencial de Yukawa el valor de α evaluado para este caso hace que sea igual a la ecuación diferencial de Coulomb.

3.3. Diferentes valores de α

Cuando variamos α , podemos observar los siguientes efectos:

- Cuando $\alpha \rightarrow 0$, el potencial apantallado se convierte en el potencial de Coulomb normal, y la sección transversal diferencial sigue la ley de dispersión de Rutherford, caracterizada por una alta dispersión a ángulos grandes debido al largo alcance de la interacción.
- Cuando α aumenta, el potencial decae más rápido con la distancia, limitando el alcance de la interacción, causando que la sección transversal diferencial disminuye con ángulos grandes ya que las partículas no son desviadas intensamente a grandes distancias; y también, las partículas de baja energía tienen una interacción mas débil, por lo que se reduce más la sección transversal en comparación con las partículas de alta energía.
- Para valores altos de α , si el apantallamiento es muy fuerte, el potencial solo tiene un efecto significativo en cortas distancias. En este caso, las partículas se desvian solo en ángulos pequeños, lo que implica una sección transversal reducida en todas direcciones.

3.4. Ángulos de dispersión

3.4.1. Diferentes valores de energías

Para este caso se consideró $k = 1,0$, el parámetro de apantallamiento $\alpha = 0,5$, $m = 1$ y $b = 0,5$

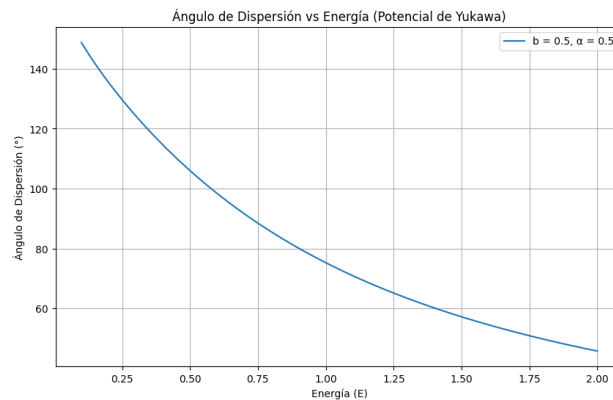


Figura 7: Se puede observar cómo decrece el ángulo de dispersión a medida que aumentan los valores de E

el comportamiento de esta gráfica resulta lógico debido a que la partícula al tener menor energía termina interactuando fuertemente, lo que produce un ángulo de dispersión. Por el contrario las

partículas de altas energías logran superar el potencia, por lo cual se genera un menor ángulo de dispersión.

3.5. Diferentes valores para el parámetro de impacto

Los valores asignados fueron $k = 1,0$, el parámetro de apantallamiento $\alpha = 0,5$, $m = 1$ y $E = 0,5$.

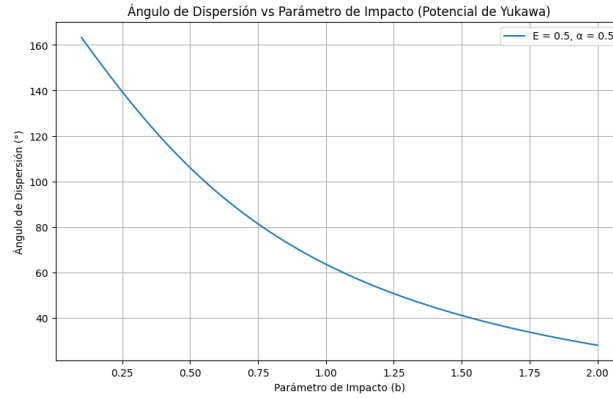


Figura 8: Se puede observar cómo decrece el ángulo de dispersión a medida que aumentan los valores de E

Al igual que en el caso anterior, el ángulo de dispersión decrece. Esto se debe que al no tener una energía lo suficientemente baja para grandes distancias, la partícula no interaccionará mucho con la fuente como se muestra en la siguiente gráfica donde se usó el valor de $E = 0,1$

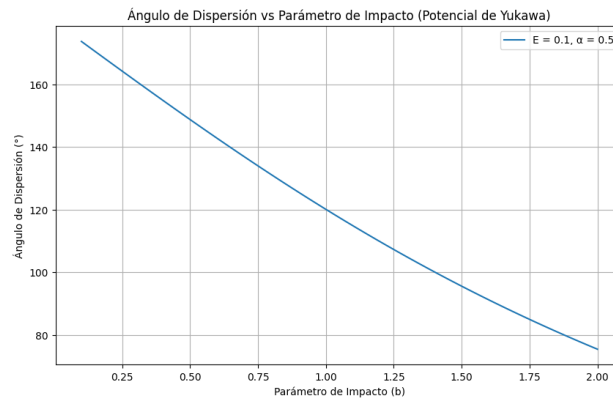


Figura 9: Para bajas energías se aumenta la distancia b a la cual se puede ver afectada la partícula de masa m

Por lo cual es importante considerar que el rango de influencia del potencial sobre un cuerpo depende de estos dos factores los cuales están relacionados de manera que pueden cambiar la

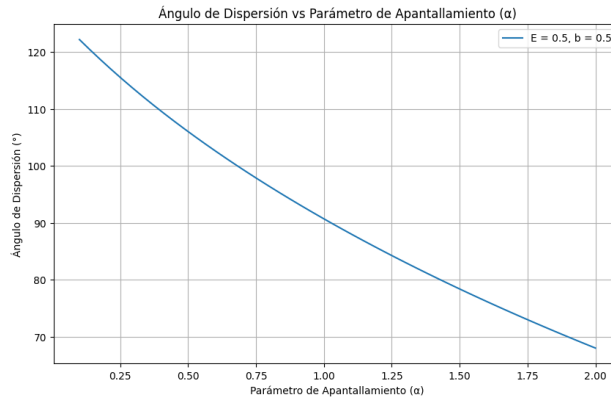


Figura 10: Se puede apreciar un decrecimiento de los ángulos de dispersión con el aumento del parámetro de apantallamiento

cinemática del problema y son propios de una partícula de baja o alta energía.

3.6. Diferentes valores para el parámetro de apantallamiento

Para este caso se consideró $k = 1,0$, el parámetro de impacto $b = 0,5$, $m = 1$ y $b = 0,5$. Cuando los valores de α son pequeños, el potencial tiene un mayor alcance, eso causa que la partícula tenga una interacción más fuerte y por consiguiente un mayor ángulo de dispersión. A medida que aumenta el alcance efectivo del potencial disminuye, y el ángulo de dispersión se reduce.

4. Conclusiones

- Para ciertos valores del parámetro α el potencial de Yukawa se puede llegar a comportar como el potencial de Coulomb
- El apantallamiento reduce la sección transversal diferencial en ángulos grandes y limita el alcance efectivo de la interacción, haciendo que reduzca la dispersión y la intensidad, a medida que α aumenta.
- Se observó que el ángulo de dispersión decrece a medida que la energía total de la partícula aumenta. Para energías bajas, la partícula experimenta una mayor interacción con el centro de fuerza, lo que resulta en un cambio significativo en su dirección. A energías altas, la partícula tiene suficiente energía cinética para superar el potencial y desviarse mínimamente, lo que corresponde a ángulos de dispersión más pequeños. Este comportamiento es consistente con el hecho de que la fuerza disminuye rápidamente con la distancia en el potencial de Yukawa.
- El parámetro de impacto controla la proximidad de la partícula al centro de fuerza. Para valores pequeños de b , la partícula pasa más cerca del centro, interactúa fuertemente con el potencial y produce ángulos de dispersión grandes. En contraste, para valores grandes de b ,

la interacción es más débil y el ángulo de dispersión tiende a cero. Este resultado refleja cómo la geometría inicial de la trayectoria influye directamente en la dinámica del sistema.

- El parámetro de apantallamiento controla el alcance efectivo del potencial de Yukawa. Un apantallamiento bajo se asemeja al potencial de Coulomb, donde el alcance es largo y las partículas experimentan mayores ángulos de dispersión debido a una interacción más extendida. A medida que α aumenta, el potencial decae exponencialmente, limitando el rango de interacción. Como resultado, el ángulo de dispersión disminuye significativamente, reflejando la naturaleza de corto alcance de este tipo de potencial.

Referencias

- [1] Arthur Koestler. *The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe*. Penguin Arkana, 1990.
- [2] Mario Cosenza. *Mecánica Clásica*. Universidad de Los Andes, 2016.