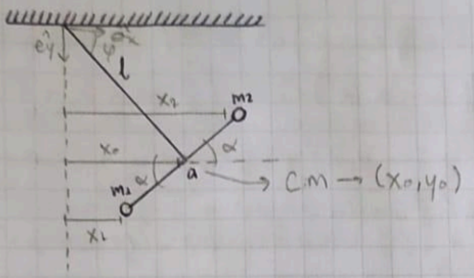
Problemas de los viernes 2 - 23 de agosto del 2024

Alexandra Serrano Mendoza y Juan Felipe León Pulgarin

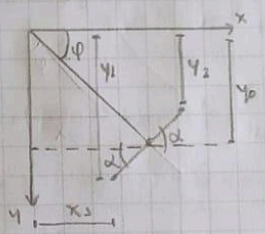
PROBLEMAS DE LOS VIERNES 23/Agosto/2024

1. Pendulo Compuesto. (Hallar las ecs de movimiento)



Coordenadas x_o y y_o en términos de φ

$$\begin{cases} x_o = l\cos\varphi \\ y_o = l\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$



$$x_o - x_1 = \frac{a}{2}\cos\alpha$$
$$x_2 - x_o = \frac{a}{2}\cos\alpha$$
$$y_1 - y_o = \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$y_o - y_2 = \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\rightarrow x_1 = x_o - \frac{a}{2}\cos\alpha$$
$$y_1 = \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha + y_o$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{a}{2}\cos\alpha + x_o$$
$$y_2 = -\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha + y_o$$

Reemplazando x_o y y_o . . .

$$x_1 = l\cos\varphi - \frac{a}{2}\cos\alpha \,, \quad y_1 = \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha + l\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$x_2 = \frac{a}{2}\cos\alpha + l\cos\varphi \,, \quad y_2 = -\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha + l\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

¡las Coordenadas generalizadas Son φ y α

Velocidades:

$$\vec{V}_1 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(l\cos\varphi - \frac{a}{2}\cos\alpha\right)\hat{e}_x + \frac{d}{dt}\left(\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha + l\operatorname{sen}\varphi\right)\hat{e}_y$$

$$\underbrace{\vec{V}_1 = \left(-l\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\varphi} + \frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\,\dot{\alpha}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{a}{2}\cos\alpha\,\dot{\alpha} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)\hat{e}_y}$$

$$\rightarrow V_1^2 = \left(-l\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\varphi} + \frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\,\dot{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\cos\alpha\,\dot{\alpha} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)^2$$

$$= (l\operatorname{sen}\varphi\dot{\varphi})^2 - 2l\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\dot{\alpha}\operatorname{sen}\varphi\dot{\varphi} + \left(\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\dot{\alpha}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{a}{2}\cos\alpha\dot{\alpha}\right)^2 + 2l\frac{a}{2}\cos\alpha\dot{\alpha}\cos\varphi\dot{\varphi} + (l\cos\varphi\dot{\varphi})^2$$

$$= \left(l^2\dot{\varphi}^2\,[\underbrace{\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi}_{1}]\right) + \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2\dot{\alpha}^2\,(\underbrace{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}_{1})\right]$$

$$\underbrace{V_1^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + a^2/4\,\dot{\alpha}^2}$$

$$\vec{V}_2 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{a}{2}\cos\alpha + l\cos\varphi\right)\hat{e}_x + \frac{d}{dt}\left(-\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha + l\operatorname{sen}\varphi\right)\hat{e}_y$$

$$\underbrace{\vec{V}_2 = \left(-a/2\operatorname{sen}\alpha\,\dot{\alpha} - l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)\hat{e}_x + \left(l\cos\varphi\dot{\varphi} - \frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\dot{\alpha}\right)\hat{e}_y}$$

$$\rightarrow V_2^2 = \left(-\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\dot{\alpha} - l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(l\cos\varphi\dot{\varphi} - \frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\dot{\alpha}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\dot{\alpha}\right)^2 + 2\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\dot{\alpha}\,l\cos\varphi\dot{\varphi} + (l\cos\varphi\dot{\varphi})^2$$

$$+ (l\cos\varphi\dot{\varphi})^2 - 2l\cos\varphi\dot{\varphi}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\dot{\alpha} + \left(\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha\dot{\alpha}\right)^2$$

$$\underbrace{V_2^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + a^2/4\,\dot{\alpha}^2}$$

Ahora, para el Lagrangiano tenemos: E. Cinética y E. Potencial

E. Cinética

$$T = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\alpha}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\alpha}^2\right)$$

E. Potencial

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \quad ; \quad h_1 = y_1 \quad y \quad h_2 = y_2$$

$$U = m_1 g\left(\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha + l\operatorname{sen}\varphi\right) + m_2 g\left(-\frac{a}{2}\operatorname{sen}\alpha + l\operatorname{sen}\varphi\right)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\ell^2 \dot{\varphi}^2 + a^2/4\, \dot{\alpha}^2\right)(m_1+m_2) - m_1 g\left(a/2 \operatorname{Sen}\alpha + \ell \operatorname{Sen}\varphi\right)$$
$$- m_2 g\left(\ell \operatorname{Sen}\varphi - a/2 \operatorname{Sen}\alpha\right)$$

→ Ahora la ecuación de Euler-Lagrange para φ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m_1 g \ell \cos\varphi - m_2 g \ell \cos\varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = (m_1+m_2)\ell^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (m_1+m_2)\ell^2 \ddot{\varphi}$$

$$(m_1+m_2)\ell^2 \ddot{\varphi} - (m_1+m_2) g \ell \cos\varphi = 0$$

→ Ahora la ecuación de Euler Lagrange para α

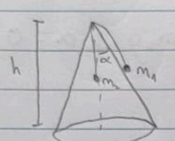
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -m_1 g \frac{a}{2}\cos\alpha + m_2 \frac{a}{2}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = (m_1+m_2)\frac{a^2}{4}\dot{\alpha} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right) = (m_1+m_2)\frac{a^2}{4}\ddot{\alpha}$$

$$(m_1+m_2)\frac{a^2}{4}\ddot{\alpha} - g\frac{a}{2}\cos\alpha\,(m_2-m_1) = 0$$

② Considerando dos masas m_1 y m_2



* Considerando las coordenadas: $x = r\cos\varphi$, $y = r\,\text{sen}\,\varphi$, $z = h$

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{z_2^2} = l$$

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\,\text{sen}\,\varphi + r^2\cot^2\alpha)^{1/2} + h = l$$

* Simplificando y derivando con respecto a t:

$$\dot{r}(1 + \cot^2\alpha)^{1/2} + \dot{h} = 0$$
$$\dot{h}^2 = -\dot{r}^2\csc^2\alpha$$

* También se obtienen:

$$h = l - r\csc\alpha$$

* Operando on estas expresiones para obtener un lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2\csc^2\alpha + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2\csc^2\alpha - m_1 g r\cot\alpha$$
$$- m_2 g l + m_2 g r\csc\alpha$$

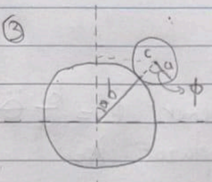
* obteniendo las ecuaciones de euler-lagrange para φ:

$$m_1 r^2\dot{\varphi} = k$$

* obteniendo las ecuaciones de euler-lagrange para r:

$$m_1\ddot{r}\csc^2\alpha - m_2\ddot{r}\csc^2\alpha - m_1 r\dot{\varphi}^2 + m_1 g\cot\alpha - m_2 g\csc\alpha = 0.$$

③



* Se parte de tener una distancia del origen coordenado hasta el centro del cilindro de radio a:

$$a+b=r \Rightarrow \mathbf{r} = r\sin\theta\,\hat{i} + r\cos\theta\,\hat{j}$$

* Teniendo en cuenta esta consideración sabiendo que $\dot{\mathbf{r}} = v$ podemos asegurar:

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

* El lagrangiano entonces queda tal que:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}) + \frac{1}{2}(ma^2)(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}) - mg(b + r\cos\theta)$$

* Donde en la energía cinetica por rotación se considera $w = \dot{\phi} + \dot{\theta}$.
* debemos considerar también que las ligaduras son:

$$r = a+b \Rightarrow \dot{r} = 0 \quad \wedge \quad b\theta = a\phi \Rightarrow b\dot{\theta} - a\dot{\phi} = 0$$

* Al realizar las respectivas derivadas para obtener las ecuaciones de euler-lagrange considerando además los multiplicadores de lagrange:

(r) $\cancel{m\ddot{r}}^{\,0} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1$

$-m(b+a)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1$

(θ) $mr^2\ddot{\theta} + ma^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - mgr\,\mathrm{sen}\,\theta = b\lambda_2$

$m(b+a)^2\ddot{\theta} + ma^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - mg(b+a) = b\lambda_2$

(ϕ) $ma^2(\ddot{\phi}+\ddot{\theta}) = -\cancel{\phi}\lambda_2$

* De la ligadura $b\theta = a\phi$ se puede obtener $\ddot{\phi} = \frac{b}{a}\ddot{\theta}$ para obtener de la ecuación de θ y reemplazar λ_2

$$m(b+a)^2\ddot{\theta} + ma(b+a)\ddot{\theta} - mg(b+a)\operatorname{sen}\theta = -bm(b+a)\ddot{\theta}$$
$$2(b+a)\ddot{\theta} = g\operatorname{sen}\theta$$

* multiplicando por $\dot{\theta}dt$ e integrando:

$$(b+a)\dot{\theta}^2 = -g\cos\theta + c$$

* Teniendo como condición inicial $\dot{\theta}(0)=0$ entonces $c=g$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{b+a}(1-\cos\theta)$$

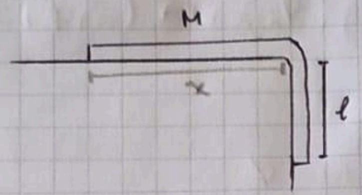
* Esto se reemplaza en la ecuación de la coordenada r y se obtiene:

$$-mg(1-2\cos\theta) = \lambda_1$$

como λ_1 representa la fuerza normal entonces:

$$2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow \theta = 60°$$

4.



Trayectoria de la cuerda en función de t

La longitud de la cuerda es constante

$$L = \ell + x$$

La masa es invariante

$$M = m_m + m_\ell$$

masa sobre la mesa; masa colgante

Densidad lineal

$$\rho = m/L$$

Entonces

$$m_m = x\,\frac{m}{L} \;;\quad m_\ell = \ell\,\frac{m}{L}$$

$$m_m = \frac{x}{L} M \quad y \quad m_\ell = \frac{\ell}{L} M$$

Si derivamos L, tal que

$$L = \ell + x \rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 = \dot{x} + \dot{\ell}$$

$$\dot{x} = -\dot{\ell}$$

La energía cinética del sistema:

$$T = \frac{1}{2} m_m (-\dot{\ell})^2 + \frac{1}{2} m_\ell (\dot{\ell})^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{L} M \dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell}{L} m \dot{\ell}^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{L}\dot{\ell}^2 \underbrace{(x+\ell)}_{L}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\ell}^2$$

La energía potencial del sistema

$$U = -m_\ell \cdot g \cdot \frac{\ell}{2}$$

$$= -\frac{\ell}{L} \cdot g \cdot \frac{\ell}{2}$$

$$U = -\frac{1}{2}\frac{g}{L}\ell^2$$

Ahora el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\ell}^2 + \frac{1}{2}\frac{g}{L}\ell^2$$

Planteando la Ec de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}} = m\dot{\ell} \ , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}}\right) = m\ddot{\ell}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} = \frac{\ell}{L} m g$$

Sustituyendo, tenemos la ec. de movimiento

$$\ddot{\ell} - \frac{\ell g}{L} = 0$$