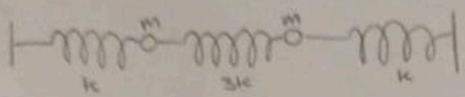
Mecánica Clásica - Taller de los viernes

18 de Octubre 2024

1.

PROBLEMAS 18 OCTUBRE

1. Considere un sistema formado por 2 partículas de masa m por 3 resortes, dos constantes elasticas k y otro 3k como se muestra. Calcule las frecuencias y las configuraciones de los modos normales para pequeñas oscilaciones



(1) Primero tenemos la E.Potencial del sistema

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{3}{2}k(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

expandiendo el 2ndo término

$$U = \frac{1}{2}3k\,(x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2) + \frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2)$$

$$U = \frac{3}{2}kx_2^2 + \frac{3}{2}kx_1^2 - 3kx_2x_1 + \frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2)$$

$$U = 2kx_2^2 + 2kx_1^2 - 3kx_2x_1 = k[2x_1^2+2x_2^2-3x_2x_1]$$

(2) Usando $U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}x_ix_j$

$V_{11} = 2k$

$V_{22} = 2k$

$V_{21} = -3k$

$V_{12} = -3k$

$$V = \begin{pmatrix} 2k & -3k \\ -3k & 2k \end{pmatrix} \text{ matriz U}$$

Ahora, para la E.Cinetica

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$T_{11} = m$

$T_{22} = m$

$T_{21}, T_{12} = 0$

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \text{ matriz T}$$

(3) Posteriormente, partimos de $\det(V - \omega^2 T) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 2k-\omega^2 m & -3k \\ -3k & 2k-\omega^2 m \end{pmatrix} = 0$$

que da como resultado

$$(2k-\omega^2 m)(2k-\omega^2 m) - (3k)(-3k) = 0$$

$$2k - \omega^2 m = \pm 3k$$

→ Para el signo negativo

$$2k - \omega^2 m = -3k$$

$$-2k + \omega^2 m = 3k$$

$$\omega^2 m = 5k \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{5k}{m}}$$

→ Para el signo positivo

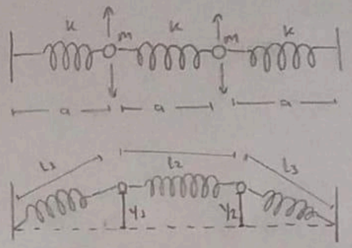
$$2k - \omega^2 m = 3k$$

$$-\omega^2 m = 3k - 2k$$

$$-\omega^2 m = k \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{-k}{m}}$$

2.

2. Para un sistema como se muestra en la figura (2 masas iguales y todos los resortes iguales). Calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales para pequeñas oscilaciones



$l_1 = \sqrt{a^2 + y_1^2}$

$l_2 = \sqrt{a^2 + y_2^2}$

$l_3 = \sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2}$

→ E. Cinetica

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) \implies T_{11} = T_{22} = m \ , \ T_{21} = T_{12} = 0$$

Para las l_i, Podemos considerar que $y_i << a$, y Podemos hacer una expansión binomial

$$l_1 = \sqrt{a^2 + y_1^2} = a\left(1 + \left(\frac{y_1}{a}\right)^2\right)^{1/2} \approx a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{a}\right)^2\right) = a + \frac{y_1^2}{2a}$$

$$l_2 = \sqrt{a^2 + y_2^2} = a\left(1 + \left(\frac{y_2}{a}\right)^2\right)^{1/2} \approx a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{a}\right)^2\right) = a + \frac{y_2^2}{2a}$$

$$l_3 = \sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2} = a\left(1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{a}\right)^2\right)^{1/2} \approx a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y_2 - y_1}{a}\right)^2\right) = a + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2a}$$

A la longitud de los resortes fuera de su posición de equilibrio podemos restarle la longitud de los resortes en reposo, entonces el desplazamiento de los resortes queda:

$$\Delta l_1 = \frac{y_1^2}{2a} \ , \ \Delta l_2 = \frac{y_2^2}{2a} \ , \ \Delta l_3 = \frac{(y_2 - y_1)^2}{2a}$$

Podemos aproximar el Problema a pequeñas oscilaciones gracias a la aproximación $y_i << a$

→ E. Potencial (considerando también una tensión constante t_0)

$$U = \frac{1}{2} k t \Delta l_i \implies U = \frac{1}{2a} t_0 \left(y_1^2 + y_2^2 + (y_2 - y_1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2a} t_0 \left(y_1^2 + y_2^2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1 y_2\right)$$

$$= \frac{1}{2a} t_0 \left(2y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_1 y_2\right) = \frac{t_0 (y_1^2 + y_2^2 - y_1 y_2)}{a}$$

Ahora, Para las frecuencias de oscilación usamos la condición $\det |V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$

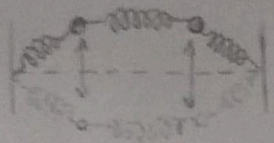
$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2t_0}{a} - \omega^2 m & -\frac{t_0}{a} \cancel{- \omega^2 (0)} \\ -\frac{t_0}{a} \cancel{- \omega^2 (0)} & \frac{2t_0}{a} - \omega^2 m \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{2t_0}{a} - \omega^2 m\right)\left(\frac{2t_0}{a} - \omega^2 m\right) - \left(\frac{t_0}{a}\right)^2 = 0 .$$

Despejando w^2:

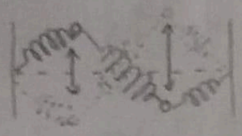
$$w^2 = \frac{2t_0 \pm t_0}{ma} \longrightarrow w_1 = \sqrt{\frac{t_0}{ma}} \quad y \quad w_2 = \sqrt{\frac{3t_0}{ma}}$$

Podemos tener 2 modos de oscilación considerando las dos frecuencias de oscilación posibles.



$w_1 = \sqrt{t_0/ma}$ (*)

ambas masas están en fase



$w_2 = \sqrt{3t_0/ma}$ (**)

ambas masas están desfasadas

→ Modos Normales

$$\left(\frac{2t_0}{a} - w_1^2 m\right)a_1 + \left(-\frac{t_0}{a}\right)a_2 = 0 \quad y \quad \left(\frac{2t_0}{a} - w_2^2 m\right)a_1 + \left(-\frac{t_0}{a}\right)a_2 = 0$$

Reemplazando w_1^2

$$\left(\frac{2t_0}{a} - \frac{t_0}{\cancel{m}a}\cancel{m}\right)a_1 - \frac{t_0}{a}a_2$$

$$= \frac{t_0}{a}a_1 - \frac{t_0}{a}a_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{a_1 = a_2}$$

Reemplazando w_2^2

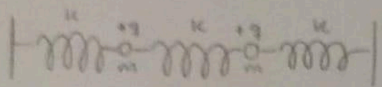
$$\left(\frac{2t_0}{a} - \frac{3t_0}{ma}\right)a_1 + \left(-\frac{t_0}{a}\right)a_2$$

$$= -\frac{t_0}{a}a_1 - \frac{t_0}{a}a_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = -a_2$$

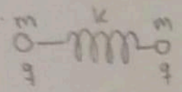
3.

3. Calcule las frecuencias y las configuraciones de los correspondientes modos normales. Pequeñas oscilaciones del mismo sistema pero con partículas cargadas



$$k\eta_1 - \underbrace{\frac{\epsilon q^2}{(\eta_1-\eta_2+l_0)^2}}_{\text{Fuerza de Coulomb}} + k(\eta_2-\eta_1) = m\ddot{\eta}$$

Probando con un problema mas sencillo



Para la masa 1 $\longrightarrow m_1\ddot{\eta}_1 = -\underbrace{\frac{\epsilon q^2}{(L-(\eta_2-\eta_1))^2}}_{\text{F. Eléctrica}} + \underbrace{k(\eta_2-\eta_1)}_{\text{F. Elastica}}$

Para la masa 2 $\longrightarrow m_2\ddot{\eta}_2 = \underbrace{\frac{\epsilon q^2}{(L-(\eta_2-\eta_1))^2}} - \underbrace{k(\eta_2-\eta_1)}$

Expandiendo por Taylor

$$\frac{\epsilon q^2}{(L-(\eta_2-\eta_1))^2} \simeq \frac{\epsilon q^2}{l^2} - \frac{\epsilon q^2}{l^3}(\eta_2-\eta_1)$$

- - - → el nivel de E. Potencial es cero, por eso se descarta.

Entonces:

$$m_1\ddot{\eta}_1 = -\frac{\epsilon q}{l^3}(\eta_2-\eta_1) + k(\eta_2-\eta_1)$$

$$m_2\ddot{\eta}_2 = \frac{-\epsilon q}{l^3}(\eta_2-\eta_1) - k(\eta_2-\eta_1)$$

De forma matricial

$$\begin{pmatrix} m_1\ddot{\eta}_1 \\ m_2\ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon q/l^3 - k & -\epsilon q/l^3 + k \\ -\epsilon q/l^3 + k & \epsilon q/l^3 - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Volviendo al caso normal (inicial)

Para $m_1 \rightarrow m_1\ddot{\eta}_1 = \frac{\epsilon q^2}{(L-(\eta_2-\eta_1))^2} - k(\eta_1-\eta_2) - k\eta_1$

Para $m_2 \rightarrow m_2\ddot{\eta}_2 = \frac{\epsilon q^2}{(L-(\eta_2-\eta_1))^2} - k(\eta_2-\eta_1) - k\eta_2$

Entonces, la forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} m_1\ddot{\eta}_1 \\ m_2\ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\epsilon q^2/l^3 + 2k & -2\epsilon q^2/l^3 + k \\ \epsilon q^2/l^3 - k & 2\epsilon q^2/l^3 + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Ahora, $\eta_1 = A_1 \cos\omega t$ y $\ddot{\eta}_1 = -A_1\omega^2 \cos\omega t$

$\eta_2 = A_2 \cos\omega t$ y $\ddot{\eta}_2 = -A_2\omega^2 \cos\omega t$

Para la ec. de movimiento

$$(V_{ij} - \omega^2 T_{ij})a_j = 0$$

→ Frecuencias de oscilación

$$\det|V - \omega^2 T| = 0$$

$$\Longrightarrow = \begin{vmatrix} 2\epsilon q^2/l^3 + 2k - \omega^2 m & -2\epsilon q^2/l^3 - k \\ -2\epsilon q^2/l^3 - k & 2\epsilon q^2/l^3 + 2k - \omega^2 m \end{vmatrix}$$

Podemos llamar $\varepsilon = \frac{2\epsilon q^2}{l^3}$

$$|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = (2k + \varepsilon - \omega^2 m)^2 - (k + \varepsilon)^2 = 0$$

$$\longrightarrow 2k + d - \omega^2 m = \pm (\varepsilon + k)$$

Despejando ω^2:

$$\omega^2 = \frac{2k + \varepsilon \pm (k + \varepsilon)}{m} \implies \omega_1 = \sqrt{k/m} \quad y \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k + \varepsilon}{m}}$$

Reemplazando

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \quad y \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k + 2\epsilon q^2/l^3}{m}}$$

$\longrightarrow$ Modos Normales

Para w_1:

$$\left(2k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3} - \omega_1^2 m\right) a_1 - \left(k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3}\right) a_2 =$$

$$\left[2k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3} - \left(\frac{k}{\cancel{m}}\right)\cancel{m}\right] a_1 - \left(k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3}\right) a_2 = 0$$

$$\left(k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3}\right) a_1 - \left(k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3}\right) a_2 = 0 \implies \underline{a_1 = a_2}$$

Para w_2:

$$-\left(k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3}\right) a_1 + \left[2k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3} - \left(\frac{3k + \left(\frac{4\epsilon q^2}{l^3}\right)}{m}\right) m\right] a_2 = 0$$

$$-\left(k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3}\right) a_1 + \left[2k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3} - 3k + \frac{4\epsilon q^2}{l^3}\right] a_2 = 0$$

$$-\left(k + \frac{2\epsilon q^2}{l^3}\right) a_1 + \left[-k - \frac{2\epsilon q^2}{l^3}\right] a_2 = 0 \implies \underline{-a_1 = a_2}$$