1. 验证 $S=\{(x_1,x_2)||x_2|<x_1\}$ 是凸集

$$|x_2|<x_1 \to x_1>0, x_1>x_2>-x_1$$
$$\text{在 S 中取} x(x_1,x_2), y(y_1,y_2)$$
$$z=\lambda x+(1-\lambda)y=(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1, \lambda x_2+(1-\lambda)y_2))$$
$$|x_2|<x_1 \Leftrightarrow x_1^2-x_2^2>0$$
$$z_1^2-z_2^2=[\lambda x_1+(1-\lambda)y_1]^2-[\lambda x_2+(1-\lambda)y_2]^2$$
$$=[\lambda x_1+(1-\lambda)y_1+\lambda x_2+(1-\lambda)y_2]\cdot[\lambda x_1+(1-\lambda)y_1-\lambda x_2+(1-\lambda)y_2]$$
$$=[\lambda(x_1+x_2)+(1-\lambda)(y_1+y_2)]+[\lambda(x_1-x_2)+(1-\lambda)(y_1-y_2)]$$
$$\begin{cases} x_1>0 \\ x_1>x_2>-x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1+x_2>0, x_1-x_2>0$$
$$\text{同理可得} y_1+y_2>0, y_1-y_2>0$$
$$\Rightarrow z_1^2-z_2^2>0$$
$$x_1>0 and y_1>0 \Rightarrow z_1>0$$
$$\begin{cases} z_1>0 \\ z_1^2-z_2^2>0 \end{cases} \Rightarrow |z_2|<z_1, \text{所以 S 是凸集}$$

2. 判断 $f(x)=x_1^2+2x_2^2$ 是凸函数或严格凸函数

$$\text{取} x(x_1,x_2), y(y_1,y_2)$$
$$z=\lambda x+(1-\lambda)y=(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1, \lambda x_2+(1-\lambda)y_2)$$
$$f(z)=(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)^2+2(\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)^2$$
$$=\lambda^2(x_1^2+2x_2^2)+(1-\lambda)^2(y_1^2+2y_2^2)+2\lambda(1-\lambda)(x_1y_1+2x_2y_2)$$
$$\text{依据基本不等式} ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$
$$f(z)\leq \lambda^2(x_1^2+2x_2^2)+(1-\lambda)^2(y_1^2+2y_2^2)+\lambda(1-\lambda)(x_1^2+y_1^2+2(x_2^2+y_2^2))$$
$$=\lambda(x_1^2+2x_2^2)+(1-\lambda)(y_1^2+2y_2^2)$$
$$=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$\text{所以 } f(x)=x_1^2+2x_2^2 \text{ 是凸函数}$$