

已知顾客到来过程为 Poisson 分布, 平均 4 人/h, $\lambda = 4$
修理时间服从负指数分布, 平均需要 6min, $\mu = 10$

(1) 求修理店空闲的概率

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.4$$
$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\rho} \right)^{-1} = 1 - \rho = 0.6$$

(2) 店内恰有 3 个顾客的概率

$$p_3 = \rho^3 p_0 = 0.4^3 \times 0.6 = 0.0384$$

(3) 店内至少有一个顾客的概率

$$P(\text{至少有一个顾客}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 - p_0 = 0.4$$

(4) 店内平均顾客数

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{4}{10 - 4} = \frac{2}{3}$$

(5) 每位顾客在店内平均逗留的时间

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{10 - 4} = \frac{1}{6}$$

(6) 等待服务的平均顾客数

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu \times (\mu - \lambda)} = \frac{4^2}{10 \times (10 - 4)} = \frac{4}{15}$$

(7) 每位顾客平均等待服务时间

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4}{10 \times (10 - 4)} = \frac{1}{15}$$

(8) 顾客在店内等待时间超过 10min 的概率

已知顾客在系统中的逗留时间 T ，服从 $\mu - \lambda$ 的负指数分布

取 $t \sim \mu$ 的负指数分布

$$P(T_q > 10) = \int_t P(T_q + t > 10 + t) \cdot P(t) = \int_t P(T > 10 + t) \cdot P(t) = \int_t e^{-(\mu-\lambda)(10+t)} \times e^{-\mu t} = \frac{e^{-60}}{16}$$