1. 求随机相位正弦波的均值函数、方差函数和自相关函数。

$$X(t) = a\sin(\omega t + \Theta), t \in T = (-\infty, +\infty), \Theta \in (0, 2\pi)$$

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[a\sin(\omega t + \Theta)] = aE[\sin(\omega t + \Theta)]$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \Theta)P(\Theta)\mathrm{d}\Theta = \frac{a}{2\pi}\left[-\cos(\omega t + \Theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\sigma^2(X(t)) = E\left\{\left[X(t) - \mu_X(t)\right]^2\right\} = E[X(t)^2] = E(a^2\sin^2(\omega t + \Theta))$$

$$= a^2E\left\{\frac{1-\cos\left[2(\omega t + \Theta)\right]}{2}\right\} = \frac{a^2}{2}\left[1 - E(\cos(2\omega t + 2\Theta))\right]$$

$$E(\cos(2\omega t + 2\Theta)) = \int_0^{2\pi} \cos(2\omega t + 2\Theta)\mathrm{d}\Theta = \left[\frac{sin(2\omega t + 2\Theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2(X(t)) = \frac{a^2}{2}$$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right] = E\left[a\sin(\omega t_1 + \Theta)a\sin(\omega t_2 + \Theta)\right]$$

$$= a^2E[\cos(\omega(t_1 - t_2)) - \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta)] = a^2\left\{\cos(w(t_1 - t_2)) - E\left[\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\Theta)\right]\right\}$$

$$= a^2\cos\left[w(t_1 - t_2)\right]$$

2. 设 $X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, t \in T = (-\infty, +\infty)$, 其中 A、B 是相互独立，且都服从正态分布 $N(0, \delta^2)$ 的随机变量，ω 是实常数。试证明 $X(t)$ 是正态过程，并求它的均值函数和自相关函数。

对于随机变量$X(t), \sin\omega t\ \ \cos\omega t$是实常数。

A,B 是相互独立且都服从正态分布的随机变量

根据定理: 相互独立的正态随机变量的线性组合也满足正态分布

$\Rightarrow X(t)$也是正态随机变量, 对于随机变量$t \in T$,随机过程 $X(t)$ 是正态过程

$$\mu_X(t) = E\left[X(t)\right] = E\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right] = E(A\cos\omega t) + E(B\sin\omega t)$$

$$= \cos\omega tE(A) + \sin\omega tE(B) = 0$$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right] = E\left[(A\cos\omega t_1 + B\sin\omega t_1)(A\cos\omega t_2 + B\sin\omega t_2)\right]$$

$$= E(A^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + AB\cos\omega t_1\sin\omega t_2 + AB\sin\omega t_1\cos\omega t_2 + B^2\sin\omega t_1\sin\omega t_2)$$

$$= \cos\omega t_1\cos\omega t_2E(A^2) + \sin\omega t_1\sin\omega t_2E(B^2)$$

$$D(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

$$\Rightarrow R_{xx}(t_1, t_2) = \cos\omega t_1\cos\omega t_2\left[D(A) + E(A)^2\right] + \sin\omega t_1\sin\omega t_2E(B^2)\left[D(B) + E(B)^2\right]$$

$$= \delta^2(\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + \sin\omega t_1\sin\omega t_2) = \delta^2\cos\omega(t_1 - t_2)$$