1. (1) 已知甲盒子有两个红球，乙盒子有四个白球。每次从两个盒子各取一球交换 $P(X_n|X_{n-1},X_{n-1},\cdots,X_1,X_0)=P(X_n|X_{n-1})$ 所以随机过程 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 是一个 Markov 链。

转移概率矩阵为 $\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

(2) 由 (1) 知转移概率矩阵 $P=\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$。从转移概率矩阵可知，各个状态之间是互通是不可约的，所以随机过程是正常返的，又因为周期为 1，所以随机过程 $\{X_n,n=0,1,\cdots\}$ 是遍历的

(3)

$$\begin{cases}\pi_1=\pi_1\times\frac{1}{2}+\pi_2\times\frac{1}{2}\\ \pi_2=\pi_1\times\frac{3}{8}+\pi_2\times\frac{1}{2}+\pi_3\times\frac{1}{8}\\ \pi_3=\pi_2\times 1\\ \sum_{i=1}^{3}\pi_i=1\end{cases}$$

解得 $\pi_1=\pi_2=\pi_3=\frac{1}{3}$ 2.

$$令\ A=\{X_1,X_2,\cdots,X_5\}P(A)=\sum_i P(X_2,X_3,X_4,X_5|X_1=i)\cdot P(X_1=i)$$

$$=\sum_i\sum_j P(X_3,X_4,X_5|X_2=j,X_1=i)\cdot P(X_1=i)\cdot P(X_2=j|X_1=i)$$

$$=\sum\cdots\sum P(X_5|X_4,X_3,X_2,X_1)\cdot P(X_4|X_3,X_2,X_1)\cdot P(X_3|X_2,X_1)\cdot P(X_2|X_1)\cdot P(X_1)$$

甲盒中: 红球 90 个，白球 10 个，摸到一个球后放回另一个颜色的球。当前摸到红球的概率只受前一时刻摸球的影响，是一个马尔可夫链

$P(A)=\sum\cdots\sum P(X_5|X_4)\cdot P(X4|X_3)\cdot P(X_3|X_2)\cdot P(X_2|X_1)\cdot P(X_1)$

所以

$$P(X_1=红,X_2=红,X_3=红,X_4=红,X_5=白)=0.9*0.89*0.88*0.87*0.14=0.8585$$

乙盒：红球 50，白球 50 个，每次摸到球后放回。每次摸到红球的概率互相独立

$P(A)=P(X_1)\cdot P(X_2)\cdot P(X_3)\cdot P(X_4)\cdot P(X_5)$ 所以

$$P(X_1=红,X_2=红,X_3=红,X_4=红,X_5=白)=0.5*0.5*0.5*0.5*0.5=0.3125$$

丙盒：红球 40 个，白球 60 个，每次摸到球后不放回。每次摸到红球的概率受前一时刻摸球的影响，是一个马尔可夫链

$P(A) = \sum \cdots \sum P(X_5|X_4) \cdot P(X4|X_3) \cdot P(X_3|X_2) \cdot P(X_2|X_1) \cdot P(X_1)$

所以 $P(X_1 = \text{红}, X_2 = \text{红}, X_3 = \text{红}, X_4 = \text{红}, X_5 = \text{白}) = \frac{40}{100} \times \frac{39}{99} \times \frac{38}{98} \times \frac{37}{97} \times \frac{60}{96} = 0.1456$

$$
\begin{aligned}
P(\text{甲}|A) &= \frac{P(A|\text{甲}) \cdot P(\text{甲})}{P(A)} = \frac{P(A|\text{甲}) \cdot P(\text{甲})}{\sum_\omega P(A|\omega)P(\omega)} \\
&= 0.6521 \\
\text{同理可得} & P(\text{乙}|A) = 0.2373 P(\text{丙}|A) = 0.1106
\end{aligned}
$$

所以来自甲盒的可能性最高