1. 开始接受服务时间服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布过程, 接受服务的的时长服从参数为 $\lambda$ 的指数分布。

已知每个人接受服务的时间是独立的并服从均值为 20 分钟的指数分布

$$\frac{1}{\lambda}=20\Rightarrow\lambda=\frac{1}{20},P(N(t)=n)=e^{-\frac{t}{20}}\frac{(\frac{t}{20})^n}{n!},E(N(t))=\frac{t}{20}$$

$$E(N(4\times60))=12,P(N(4*60)=9)=e^{-12}\frac{12^9}{9!}\approx0.0874$$

2. 已知天文台观测到的流星流是一个泊松分布过程，且平均每小时观察到 3 颗流星

$$\Rightarrow E(N(1))=\lambda1=3,\lambda=3,P(N(t)=n)=e^{-3t}\frac{(3t)^n}{n!}$$

$$P(N(4)=0)=e^{-3\times4}\frac{(3\times4)^0}{0!}=e^{-12}$$

3. 已知乘客按照强度为 $\lambda$ 强度的泊松分布过程到达火车站

$$\Rightarrow P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$E(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i))=\sum_{n=0}^{+\infty}E(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t)=n)P(N(t)=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}E(\sum_{i=1}^{n}(t-T_i))e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n\cdot t-\sum_{i=1}^{n}E(T_i))e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(n\cdot t-n\cdot\lambda\cdot t)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=t\cdot(1-\lambda)\cdot e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{+\infty}n\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$=t\cdot(1-\lambda)\cdot e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)\cdot e^{\lambda t}=\lambda t^2(1-\lambda)$$

4. 已知顾客以 6 分钟的平均速率进入某商场，这一过程可以用泊松分布过程来描述。

$\Rightarrow$ 设 $N_1(t)$ 表示在时间 $(0,t])$ 进入商城的人数, 服从强度为 6 的泊松分布过程

$$P(N_1(t)=n)=e^{-6t}\frac{(6t)^n}{n!}$$

已知进入该商场的每位顾客买东西的概率为 0.9

$\Rightarrow$ 设 $Y(i)$ 表示第 i 位顾客是否购买东西，1 表示买，0 表示不买;$Y(i)$ 服从于概率为 0.9 的 $0-1$ 分布

设 $X(t)$ 表示 t 时刻在商场买东西的顾客数, $X(t)=\sum_{i=0}^{N_1(t)}Y(i)$

$$E(X(t))=\sum_{n=0}^{+\infty}E(X(t)|N_1(t)=n)P(N_1(t)=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}E(\sum_{i=0}^{n}Y(i))e^{-6t}\frac{(6t)^n}{n!}=e^{-6t}\sum_{n=0}^{+\infty}n\cdot0.9\cdot\frac{(6t)^n}{n!}$$

$$=e^{-6t}\cdot0.9\cdot(6t)\cdot e^{6t}=5.4t$$