

高  
等  
教  
學

高  
等  
教  
學

# 1. 重要极限与极根

(1)  $\frac{0}{0}$  (或  $\infty - \infty$  型), 洛必达  $\rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$

(2) 常见等价无穷小 (8个):  $x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$   
 当  $x \rightarrow 0$  时  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (1+x)^k - 1 \sim kx$

(3)  $\infty$  型, 抓大头 即  $x + x^2 \sim x \quad x^2 + e^x \sim e^x$  (课本补充)

(4)  $0 \cdot \infty$  型: 化为  $\frac{\infty}{\infty}$  或  $\frac{0}{0}$ , 再洛

$$\begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ (1+\frac{1}{x})^x = e \end{cases}$$

(5)  $\infty - \infty$  型, 转化为  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型

(6)  $1^\infty$  型 公式:  $\lim f(x) \stackrel{\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时}}{=} e^{\lim [f(x)-1] \cdot g(x)}$

(7)  $0^0$ 、 $\infty^{\infty}$  型: 由  $a^b = e^{b \ln a}$

$$\begin{aligned} \lim f(x)^{g(x)} &= \lim e^{g(x) \ln f(x)} \\ &\stackrel{\text{对数函数}}{=} e^{\lim g(x) \cdot [f(x)-1]} \end{aligned}$$

$$\therefore \ln(1+x) \sim x \quad (\because x \rightarrow 0)$$

$$\text{即: } \ln f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln [1 + \boxed{f(x)-1}] \sim \boxed{f(x)-1}$$

## 2. 数列求极限

(1) 求 $n$ 项和的数列极限：放缩法+夹逼准则

准则：对于数列 $\{x_n\}$   $z_n \leq x_n \leq y_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

例)

### 2. 数列求极限

例：设数列  $x_n = \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n+n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

[分析]：求 $n$ 项和的数列极限：放缩法+夹逼准则

准则：对于数列 $\{x_n\}$ ,  $z_n \leq x_n \leq y_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

解：1° 先放缩：

$$\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n+n} \stackrel{\text{缩小}}{\leq} x_n \stackrel{\text{放}}{\leq} \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \dots + \frac{n}{n^2+n+1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{n^2+n+1}}_{\text{只动分母}} + \underbrace{\frac{2}{n^2+n+1} + \dots + \frac{n}{n^2+n+1}}_{\text{不动分子}} \stackrel{\text{放}}{\leq} \frac{\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{1}{n^2+n+1} + \dots + \frac{1}{n^2+n+1}}{\underbrace{n}_{\text{只动分子}}} = \frac{\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{1}{n^2+n+1} + \dots + \frac{1}{n^2+n+1}}{n} = \frac{1}{n}$$

(2) 当数列由递推式给定时，一般用“单调有界原理”

原理：若数列 $\{a_n\}$ 满足  $\left\{ \begin{array}{l} (1) \{a_n\} \text{ 单调 } \\ (2) a_n \leq M \text{ (有上界)} \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} (1) \{a_n\} \text{ 单调 } \\ (2) a_n \geq L \text{ (有下界)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

证明：

① 先看单调性：作差法、 $a_n - a_{n-1} > 0 \rightarrow$

$a_n - a_{n-1} < 0 \downarrow$

$\left. \begin{array}{l} \text{单调有界原理} \rightarrow \text{证明有极限存在} \end{array} \right\}$

② 再看有界性： $a_n > m \Rightarrow \{a_n\}$  有下界

求解：

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  递推式两边取极限（此时等式两边均有 $A$ ） $\rightarrow$  求出 $A$ 值

### 3. 连续性的连续性：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x) 在 x_0 处连续$$

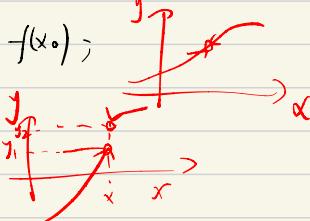
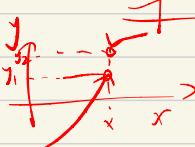
例：若  $f(x) = \begin{cases} a+bx^2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续，则  $a, b$  的关系？

解：由  $f(x)$  在分段点  $x=0$  处连续 得  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a+bx^2) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{x} = b = f(0) = a$$
$$\therefore a = b$$

### 4. 函数的间断点

间断点：不连续点（一般为无定义点、分段点）

- 第一类间断点
- ① 可去间断点： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$ ； 
  - ② 跳跃间断点： $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  

特点：左右极限均存在（但可能不等于  $f(x)$  或不相等）

③ 无穷间断点  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$

④ 振荡间断点  $\sin \frac{1}{x}$ ,  $\cos \frac{1}{x}$  在  $x=0$  处

例： $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$  的可去间断点个数有一个

解：1° 无定义点： $x=0, x=\pm 1, x=\pm 2 \dots$

2° 当  $x \geq 0$  时  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow x=0$  可去间断点

当  $x=1$  时  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1-x^2)}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{\cos \pi x} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow x=1$  可去间断点

当  $x=-1$  时 同上过程略  $\Rightarrow$  可去间断点

当  $x=\pm 2$  时  $\lim_{x \rightarrow \pm 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{x(1-x^2)}{\sin \pi x} = \frac{2 \cdot (1-4)}{\sin \pi \cdot 2} = -2 \Rightarrow x=\pm 2$  为无穷间断点  $x=\pm 2$  为间断点

$x=\pm 3, x=\pm 4, \dots$  无定义点均为无穷间断点

∴ 可去间断点有 3 个

# 导数

## 1. 分段函数的可导性

分段函数在分段点处可导  $\Leftrightarrow$  左导数 = 右导数 ( $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ )

## 2. 隐函数求导 — 方程两边同时对 x 求导 (y 是 x 的函数)

(只消  $x^1, y$  以复合函数的方式求导)

例 1. 已知  $y = y(x)$  由方程  $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$  所确定, 求  $y'(0), y''(0)$ :

解: 1° 先在方程  $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$  两边对 x 求导:

$$\Rightarrow e^y \cdot y' + 6y + 6xy' + 2x = 0 \quad (*)$$

$\because x=0 \Rightarrow e^{y(0)}, y'(0) + y(0) = 0$  (其中原方程  $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$  中令  $x=0$  得)  $\therefore y'(0) = 0$

2° 在 (\*) 式两边对 x 求导

$$e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y'' + by' + 6y' + 6xy'' + 2 = 0$$

$$\because x=0 \Rightarrow$$

$$e^{y(0)} \cdot [y'(0)]^2 + e^{y(0)} y''(0) + by'(0) + 6y'(0) + 0 + 2 = 0 \\ \Rightarrow y''(0) = -2$$

## 3. 参数方程求导

$$\text{若参数方程 } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'}{x'}$$

## 4. 对数法求导数

当函数为幂指函数 ( $f(x) = x^x$ ): 乘除、逆除、开方乘方函数 — 先取对数后求导

## 5. 用莱布尼兹法求高阶导数

$$\ln \frac{A^{\frac{1}{n}} + B^{\frac{1}{n}}}{C^{\frac{1}{n}}} \Rightarrow \frac{1}{n} \ln A + \frac{1}{n} \ln B + \frac{1}{n} \ln C$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \dots + u v^{(n)} \quad (\text{莱布尼兹公式})$$

(解时一般把幂函数看成 v)

## 微分

$$f(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'(x) \cdot dx \quad dy|_{x=x_0} = y'(x_0) \cdot dx$$

$(C)' = 0,$	$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x,$
$(x^n)' = nx^{n-1},$	$(\log x)' = -\frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2},$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
$(\sin x)' = \cos x,$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
$(\cos x)' = -\sin x,$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$
$(\tan x)' = \sec^2 x,$	$(\operatorname{cot} x)' = -\csc^2 x,$
$(\cot x)' = -\csc^2 x,$	$(\operatorname{arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2},$
$(\sec x)' = \sec x \tan x,$	$(\operatorname{arcsec} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x,$	

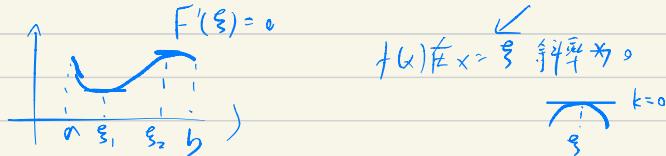
# 微分中值定理及导数的应用

1. 利用罗尔定理证明含 $\alpha$ 的等式

(1) 罗尔定理

- $\left\{ \begin{array}{l} 1. f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续} \\ 2. \text{在 } (a, b) \text{ 内可导} \\ 3. f(a) = f(b) \end{array} \right.$ 
(连续、可导、等高)

$\Rightarrow$  则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = 0$



## ② 罗尔定理之常见辅助函数构造小结:

要证明的结论	凑成等价导数形式	辅助函数
$f(\xi) = A\xi + B$	$[f(x) - \frac{A}{2}x^2 - Bx]_{x=\xi}' = 0$	$F(x) = f(x) - \frac{A}{2}x^2 - Bx$
$f'(\xi)g(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$	$[f(x) \cdot g(x)]_{x=\xi}' = 0$	$F(x) = f(x) \cdot g(x)$
$f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$	$[e^{g(x)} \cdot f(x)]_{x=\xi}' = 0$	$F(x) = e^{g(x)} \cdot f(x)$
$f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0$	$[e^{\int g(x)dx} \cdot f(x)]_{x=\xi}' = 0$	$F(x) = e^{\int g(x)dx} \cdot f(x)$ 公式法
$f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$	$[e^{\lambda x} \cdot f(x)]_{x=\xi}' = 0$	$F(x) = e^{\lambda x} \cdot f(x)$

## 中值定理

### ① 罗尔定理

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{闭区间连续} \\ \text{开区间可导} \\ f(a) = f(b) \end{array} \right. \Rightarrow \exists \xi (a < \xi < b) \text{ 使 } f'(\xi) = 0$$

### ② 拉格朗日中值定理 (微分中值定理)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{闭区间连续} \\ \text{开区间可导} \end{array} \right. \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

### ③ 柯西定理

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{闭区间连续} \\ \text{开区间可导} \\ (g'(x) \neq 0) \end{array} \right. \Rightarrow \exists \xi (a < \xi < b) \text{ 使 } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

例:  $f(x) = x^2 - 4x$ ,  $[1, 3]$  验证满足罗尔定理的条件

解:  $f(x) = x^2 - 4x$  在  $[1, 3]$  上连续, 在  $(1, 3)$  内有  $f(x) = 2x - 4$   
 $\Rightarrow f(x)$  在  $(1, 3)$  内导

$$f(1) = f(3) = -3 \Rightarrow f(x) \text{ 在 } [1, 3]$$
$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \quad x = 2 \Rightarrow \xi = 2$$

## 不定积分

(1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C (a \neq -1)$	(2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$
(3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	(4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$
(5) $\int \cos x dx = \sin x + C$	(6) $\int \tan x dx = -\ln \cos x  + C$
(7) $\int \cot x dx = \ln \sin x  + C$	(8) $\int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x  + C$
(9) $\int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x  + C$	(10) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
(11) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	(12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
(13) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	(14) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a-x}{a+x} \right  + C$
(15) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + C$	(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
(17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2}  + C$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) \\ = |\ln|\cos x|| + C$$

## ① 分部积分法 (第一换元法)

$$\int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int f(\ln x) d(\ln x)$$

技巧1  $\int \frac{1}{1+e^x} dx$  (分子+分母-约分)

$$= \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} dx = \int 1 dx - \boxed{\int \frac{e^x}{1+e^x} dx}$$

$$= x - \ln(1+e^x) + C \quad \begin{matrix} \frac{1}{2} d\ln(1+e^x) \\ = \ln(1+e^x) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \int \frac{1}{1+e^x} d(e^x+1) \end{matrix}$$

$$\text{原式} = \boxed{\int \frac{1}{1+e^x} dx}$$

## 技巧2 分子分离同乘因子

$$\begin{aligned} & \int \frac{1 \cdot e^x}{(1+e^x)} dx \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{分子} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{分母} \end{matrix} \\ & \quad \cdot e^x \quad \begin{matrix} \frac{1}{(1+e^x)} e^x \\ \rightarrow \\ 1+e^x \end{matrix} \\ & = \int \frac{1}{1+e^x} dx \\ & = \int \left( \frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x} \right) de^x \\ & = \ln|e^x| - \int \frac{1}{1+e^x} de^x \\ & = \ln|e^x| - \ln|1+e^x| + C \\ & = \ln|e^x| - \ln|1+e^x| + C \end{aligned}$$

[分析]: ① 三角函数的“六边形”:		3个平方关系:
3个倒数关系:		$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \cot^2 x + 1 = \csc^2 x.$

技巧3

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx \quad \text{使用条件} \quad \int \frac{1}{\tan^2 x + 2} dx = \int \frac{1}{z + \tan^2 x} dz$$

$$\int \frac{1}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} dx$$

### ② 第二换元法

$$\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \sqrt{\frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t}} = a \cos t$$

① 当  $\int f(x) dx$  的  $f(x)$  含有  $\sqrt{a^2 - x^2}$  ( $\because x = a \sin t$ )，含有  $\sqrt{x^2 + a^2}$  ( $\because x = a \tan t$ )

$$\text{含有 } \sqrt{x^2 - a^2} \quad (\because x = a \sec t), \text{ 只在 } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 有效}$$

$$\sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = a \sqrt{1 + \tan^2 t} = a \sec t$$

$$\sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = a \sqrt{\frac{\sec^2 t - 1}{\tan^2 t}} = a \tan t$$

② 当  $\int f(x) dx$  的  $f(x)$  含有一次根式  $\sqrt{ax+b}$  ( $\because \sqrt{ax+b} = t$ )

③ 当  $\int f(x) dx$  的  $f(x)$  含有  $m\sqrt{x}$  与  $n\sqrt{x}$  ( $\because \sqrt[4]{x} = t, t = m \text{ 与 } n \text{ 的乘积}$ )

技巧 1  $\triangle \rightarrow \triangle$   
分子上简下繁 分母上繁下简

例①  $\int \frac{1}{(1-\sqrt{1-x^2})} dx$

$\begin{array}{c} \triangle \xrightarrow{\text{分子}} \triangle \\ \text{分母上简下繁 分母上繁下简} \end{array}$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{1-\sin t} dt \quad \leftarrow \frac{1+\sin t}{(1+\sin t)(1-\sin t)} = \frac{1+\sin t}{1-\sin^2 t} = \frac{1+\sin t}{\cos^2 t} \quad \boxed{\text{分子分母同时除以 } (1-\sin t)} \\ &= \int \frac{1+\sin t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 t} dt + \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \\ &\leftarrow \sec^2 t \\ &= \tan t - \int \frac{1}{\cos^2 t} d(\tan t) \\ &= \tan t - \frac{1}{\cos t} + C \quad (\text{回代}) \quad \text{三角形代换} \times \boxed{\frac{1}{\cos t}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C \end{aligned}$$

例②  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+1}} dx$

$\begin{array}{c} \triangle \xrightarrow{\text{分子}} \triangle \\ \text{分母上简下繁 分母上繁下简} \end{array}$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{\tan^2 t \sec t} \sec^2 t dt \\ &= \int \frac{\sec t}{\tan t} dt \\ &= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 t} d(\tan t) \quad \boxed{\sqrt{x^2+1} \propto \tan t} \\ &= -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C \end{aligned}$$

例③  $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}\sqrt{x}} dx$   $\begin{cases} \text{令 } \sqrt{x} = t \\ \sqrt{x+3} = \sqrt{t^2 + 3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = t, \sqrt{x+3} = \sqrt{t^2 + 3}$

$$= \int \frac{t^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}(t+1)} \cdot dt$$

$$= \int \frac{t^{\frac{1}{2}}}{t+1} dt = \int t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} dt = \int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt$$

$$= \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t \right] - (ln(t+1)) + C$$

$$= \left[ \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{x}}{2} + \int \frac{1}{\sqrt{x}} - ln(1+\sqrt{x}) \right] + C$$

### 3. 分部积分法

① 当被积函数为两类复合函数相乘(复合)时, 用分部法:  $\int u dv = uv - \int v du$

② 已知“反对方程”三步  $e^{x e^u}$  指在后面推导

$\arcsin x$   $\ln x$   $x^a$   $\sin x$   $\cos x$

$\arcsin x$   $\ln x$   $x^a$   $\sin x$   $\cos x$

例:  $\int x \cdot e^{2x} dx$   $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2 \Rightarrow \int e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}$

解: 原式 =  $\frac{1}{2} \left[ \int x de^{2x} \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[ xe^{2x} - \int e^{2x} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} \right] + C = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

### 4. 有理函数不定积分

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  ① 当分子  $P(x)$  可因式分解 ( $C > 0$ ) 时 — 用型法

② 当不能 ( $C < 0$ ) 时 — 已方法 +  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$  或  $\int \frac{1}{ax^2+b} dx$

### 0. 剩余传统待定系数

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}$$

$$\begin{cases} A(-4) + B(-3) = 1 \\ A + B = 0 \\ A + 3B = 1 \end{cases}$$

### 0. 快速:

直接待入  $x$

$$A(x+4) + B(x+3) = 1$$

$$\begin{cases} 7B = 1 \quad (\text{代入 } x=4) \\ -7A = 1 \quad (\text{代入 } x=-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{1}{7} \\ A = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

### 用型法的

分子是分母低次  
的多项式

$$\frac{6x^3}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$= \frac{A \times B}{x+1} + \frac{C}{x^2+1}$$

### ③ 当各式为三角函数相除时

1. 万能公式法:

$$\text{令 } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \arctan t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2.  $\Delta \rightarrow \nabla$

$$\begin{aligned} \text{例) } \int \frac{1}{1+\sin x} dx &\stackrel{\text{同乘}}{=} \int \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \sec^2 x dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C \end{aligned}$$

补充:

只用于主积分

表格法: (快速求多项式积分),

$$\begin{array}{c|ccccc} A & | & (A)' & | & (A)'' & | \dots & | (A)^{(n)} \\ \hline B & + & \int B & - & \int \int B & + \dots & - \int^{(n)} B \end{array} = 0$$

$$\int A \cdot B dx = (A)' \int B - (A)'' \int \int B + \dots + 0$$

注意符号

(尝试要化开)

# 牛莱公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

# 定积分

## 1. 利用定积分求极限 (数列)

第1步 写和式 第2步 提因子  $\frac{1}{n}$  得  $f\left(\frac{j}{n}\right)$  第3步: 让  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  得  $f(x)$  用公式

## 2. 洛必达求极限

例: 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt}{x} + \frac{\int_0^x \sin t dt}{x^2} \right]$

①  $\frac{0}{0}$  型极限, 洛必达法则

② 变上限积分求导: ( $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$ )

$$\begin{aligned} \text{解: } \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \infty \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

## 二、利用换元法求定积分

例: 求定积分  $\int_{-1}^1 \frac{2x + \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$

① 积分区间对称时, 常用“偶倍奇零”化简:  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ,  $\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx$

② 华里氏公式  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (\text{当 } n \text{ 为偶数}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 & (\text{当 } n \text{ 为奇数}) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{解: } \text{原式} &= \int_{-1}^1 \frac{2x + \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{2x^2}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx + 0 \quad \begin{matrix} \cancel{2x + \sin x} \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{matrix} \quad 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1 + \cos t} dt = \cancel{\cos t} \cdot dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1 + \cos t} \cdot \cancel{\cos t} \cdot dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos t)(1-\cos t)}{1+\cos t} \cdot \cancel{\cos t} \cdot dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t) dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t - \cos^2 t dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &\underline{\text{华里氏}} \quad 4 \left| 1 - \frac{1}{2} \sin^2 t \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 - \pi \end{aligned}$$

### 三. 利用分部积分法求不定积分

$$① \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

② 当被积函数为两类不同函数相乘时 —— 用分部积分法

(“反对幂三指”):  $\int_a^b x \cdot \cos x dx$   $\int_a^b x^2 \ln x dx$

例: (1) 原式  $= \int_1^2 x \cdot \ln \sqrt{x} dx$   $\stackrel{u=t}{\underset{x=t^2}{\equiv}} \int_1^{\sqrt{2}} t^2 \ln t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} t^3 \ln t dt$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln t}{t} dt \stackrel{u=t^4}{\underset{v}{\equiv}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \left[ \ln t \cdot t^4 \Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} t^3 dt \right]$$

$$= 2 \left[ \ln \sqrt{2} \cdot 4 - \int_1^{\sqrt{2}} t^3 dt \right]$$

$$= 2 \ln \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} t^4 \Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \ln 2 - \frac{3}{8}$$