高等数学

1. 函数求极限

① $\frac{0}{0}$ (或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型)，洛必达法 $\rightarrow$ $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$

② 常见等价无穷小 (8个)：当 $x \rightarrow 0$ 时
$$\begin{cases} x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \tan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (1+x)^k - 1 \sim kx \quad (1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e \end{cases}$$

有问题

③ $\frac{\infty}{\infty}$ 型，抓大头 即 $x + x^2 \sim x^2$ $\quad x^2 + e^x \sim e^x$

④ $0 \cdot \infty$ 型：化为 $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ 或 $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$，再洛

⑤ $\infty - \infty$ 型：转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 洛

⑥ 1^∞ 型 公式：$\lim f(x)^{g(x)} \xlongequal{\text{当式是}1^\infty\text{时}} e^{\lim[f(x)-1] \cdot g(x)}$

⑦ 0^0、∞^0 型：指底法 $a^b = e^{b\ln a}$

$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)}$

e和ln为反函数

$= e^{\lim g(x) \cdot [f(x)-1]}$

$\because \ln(1+x) \sim x$ (当 $x \rightarrow 0$)

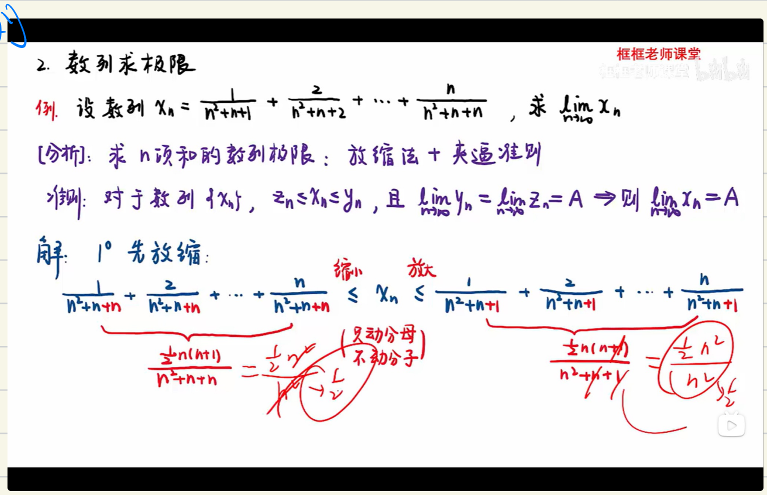
证：$\because \ln f(x) \xlongequal{f(x)\rightarrow 1} \ln[1+\boxed{f(x)-1}] \sim \boxed{f(x)-1}$

2. 数列求极限

(1) 求n项和的数列极限：放缩法+夹逼准则

准则：对于数列$\{x_n\}$ $z_n \le x_n \le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \Rightarrow$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

例



(2) 当数列由递推式给定时，一般用"单调有界原理"

原理：若数列$\{a_n\}$满足 $\left\{\begin{array}{l} ① \{a_n\}单调\nearrow，② a_n \le M(有上界) \\ ① \{a_n\}单调\searrow，③ a_n \ge L(有下界) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n ∃$

证明：① 先看单调性：作差法 $a_n - a_{n-1} > 0 \nearrow$；$a_n - a_{n-1} < 0 \searrow$ } 单调有界定理 → 证明有极限存在

② 再看有界性：$a_n > m \Rightarrow \{a_n\}$有下界

求解：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 递推式两边取极限（此时等式两边均有A）→ 求出A值

3. 函数的连续性：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \text{则} f(x) \text{在} x_0 \text{处连续}$$

例：若 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x\le 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a,b 的关系？

解：由 $f(x)$ 在分段点 $x=0$ 处连续 得 $\lim\limits_{x\to \boxed{0^-}} f(x) = \lim\limits_{x\to \boxed{0^+}} f(x) = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(a+bx^2) = a$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin bx}{x} = b = f(0) = a$

$\therefore a=b$

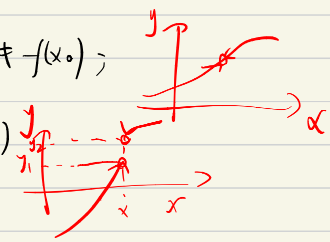
4. 函数的间断点

间断点：不连续点（一般为无定义点、分段点）

第一类间断点

① 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \ne f(x_0)$；

② 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$



特点：左右极限均存在（但可能不等于 $f(x)$ 或不相等）

③ 无穷间断点 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$

④ 振荡间断点（不考） $\sin\frac{1}{x}$，$\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处

例：$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点个数有___个

解：1° 无定义点：$x=0$、$x=\pm1$、$x=\pm2$ …

2° 当 $x=0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-x^2)}{\sin\pi x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-x^2)}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow x=0$ 可去间断点、

当 $x=1$ 时 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x(1-x^2)}{\sin\pi x} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-2x}{\cos\pi x\cdot\pi} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow x=1$ 可去间断点、

当 $x=-1$ 时 同上 过程略 $\Rightarrow$ 可去间断点

当 $x=\pm2$ 时 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x(1-x^2)}{\sin\pi x} = \frac{2\cdot(1-4)}{0} = \infty \Rightarrow x=2$ 为无穷间断点、$x=-2$ 同理

$x=\pm3$、$x=\pm4$，…无定义点均为无穷间断点、

$\therefore$ 可去间断点有 3 个

导数

1. 分段函数的可导性

分段函数在分段点处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 = 右导数 $\left(\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\right)$

2. 隐函数求导 —— 方程两边同时对 x 求导（y 是 x 的函数）

（只需 x'，y 以复合函数的方式求导）

例：已知 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，求 $y'(0)$，$y''(0)$：

解：1° 先在方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 两边对 x 求导：

$\Rightarrow e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0 \quad (*)$

令 $x=0 \Rightarrow e^{y(0)}\cdot y'(0)+6y(0)=0$（其中原方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 中令 $x=0$ 得 $e^{y(0)}=1 \Rightarrow y(0)=0$）

$\Rightarrow y'(0)=0$

2° 在 $(*)$ 式两边对 x 求导

$e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''+6y'+6y'+6xy''+2=0$

令 $x=0 \Rightarrow$

$e^{y(0)}\cdot[y'(0)]^2+e^{y(0)}y''(0)+6y'(0)+6y'(0)+0+2=0$

$\Rightarrow y''(0)=-2$

基本求导公式

$(C)'=0$，

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$，

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$，

$(\sin x)'=\cos x$，

$(\cos x)'=-\sin x$，

$(\tan x)'=\sec^2 x$，

$(\cot x)'=-\csc^2 x$，

$(\sec x)'=\sec x\tan x$，

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

$(a^x)'=a^x\ln a$，$(e^x)'=e^x$，

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，

$(\text{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

基本求导公式

3. 参数方程求导

若参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'_t}{x'_t}$

4. 对数法求导数

当函数为幂指函数（$f(x)=x^x$）；连乘、连除、开方乘方函数 —— 先取对数后求导

$\ln\frac{A^{\frac{1}{3}}\cdot B^4}{C^5} \Rightarrow \frac{1}{3}\ln A+4\ln B+5\ln C$

5. 用莱布尼茨法求高阶导数

$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}\cdot v''+\cdots+uv^{(n)}$ （莱布尼茨公式）

（解时 一般把幂函数 x^n 看成 v）

微分

$f(x)'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow dy=y'(x)\cdot dx \quad dy|_{x=x_0}=y'(x_0)\cdot dx$

微分中值定理及导数的应用

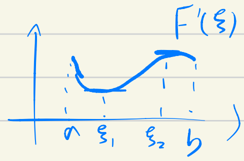
1. 利用罗尔定理证明含ξ的等式

① 罗尔定理

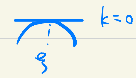
$$\begin{cases} 1.\ f(x) 在 [a,b] 上连续 \\ 2.\ 在 (a,b) 内可导 \\ 3.\ f(a)=f(b) \end{cases}$$

（连续、可导、等高）

⇒ 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$



f(x)在x=ξ 斜率为0



② 罗尔定理之常见辅助函数构造小结：

要证明的结论	凑成等价导数形式	辅助函数F(x)
$f'(\xi)=A\xi+B$	$\left[f(x)-\frac{A}{2}x^2-Bx\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=f(x)-\frac{A}{2}x^2-Bx$
$f'(\xi)g(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$	$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=f(x)\cdot g(x)$
$f'(\xi)+g'(\xi)f'(\xi)=0$	$\left[e^{g(x)}\cdot f(x)\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=e^{g(x)}f(x)$
$f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$	$\left[e^{\int g(x)dx}\cdot f(x)\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=e^{\int g(x)dx}\cdot f(x)$ 公式法
$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$	$\left[e^{\lambda x}\cdot f(x)\right]'_{x=\xi}=0$	$F(x)=e^{\lambda x}\cdot f(x)$

不定积分

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d\cos x$$
$$= \ln|\cos x| + C$$

直接积分表

(1) $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$	(2) $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
(3) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	(4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
(5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	(6) $\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
(7) $\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	(8) $\int \sec x\,dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
(9) $\int \csc x\,dx = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$	(10) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
(11) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	(12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
(13) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$	(14) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a-x}{a+x}\rvert + C$
(15) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert + C$	(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
(17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C$

① 凑积分法（第一换元法）

$$\int f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx = \int f(\ln x)\,d\ln x$$

技巧1 $\int \frac{1}{1+e^x}dx$ （分子＋图－图）

去约分母

$$= \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx = \int 1\,dx - \boxed{\int \frac{e^x}{1+e^x}dx}$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,d(e^x+1) \to \ln(e^x+1)$$

$\int \frac{1}{\square}d\square = \ln|\square|$

$$= x - \ln(1+e^x) + C$$

技巧2 分子分母同乘因子

$$\int \frac{1\cdot e^x}{(1+e^x)\cdot e^x}dx$$

原式 $= \int \frac{1}{1+e^x}dx$

$= \int \frac{e^x}{(1+e^x)e^x}dx$

$= \int \frac{1}{(1+e^x)e^x}de^x$

换 $t=e^x$

$= \int \frac{1}{(1+t)t}dt$

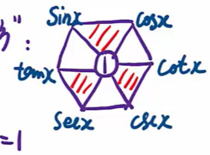
$= \int (\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t})dt$

$= \ln|t| - \int \frac{1}{1+t}d(t+1)$

$= \ln|t| - \ln|1+t| + C$

$= \ln|e^x| - \ln|1+e^x| + C$

[分析]：① 三角函数的"六边形"：



3个平方关系：

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\tan^2 x+1=\sec^2 x$

$\cot^2 x+1=\csc^2 x$.

3个倒数关系：

$\sin x\cdot\csc x=1$；$\tan x\cdot\cot x=1$；$\cos x\cdot\sec x=1$

技巧3

$$\int\frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx \xrightarrow{同除\cos^2 x} \int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x+2}dx=\int\frac{1}{2+\tan^2 x}d\tan x$$

使用条件

$$\int\frac{1}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}dx$$

② 第二换元法

① 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ （令 $x=a\sin t$）；含有 $\sqrt{a^2+x^2}$ （令 $x=a\tan t$）

$$\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{(\underbrace{1-\sin^2 t}_{\cos^2 t})}=a\cos t$$

含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ （令 $x=a\sec t$）；只在 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 讨论

$$\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}=a\sqrt{\underbrace{1+\tan^2 t}_{\sec^2 t}}=a\sec t$$

$$\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=a\sqrt{\underbrace{\sec^2 t-1}_{\tan^2 t}}=a\tan t$$

② 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 含有一次根式 $\sqrt{ax+b}$ （令 $\sqrt{ax+b}=t$）

③ 当 $\int f(x)dx$ 的 $f(x)$ 含有 $\sqrt[m]{x}$ 与 $\sqrt[n]{x}$ （令 $\sqrt[l]{x}=t$，$l=m$ 与 n 的最小公倍数）

技巧1 "△" → "▽"

分式 上简下繁 化为 上繁下简

例①

$$\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\,dx \xlongequal[\sqrt{1-x^2}=\cos t]{令 x=\sin t} \int \frac{1}{(1-\sin t)\cdot\cos t}\,d\sin t = \int \frac{1}{(1-\sin t)\cos t}\cos t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{1-\sin t}\,dt$$

$$\boxed{\frac{1+\sin t}{(1+\sin t)(1-\sin t)} = \frac{1+\sin t}{1-\sin^2 t} = \frac{1+\sin t}{\cos^2 t}}$$

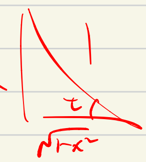
$$= \int \frac{1+\sin t}{\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int \underbrace{\frac{1}{\cos^2 t}}_{\sec^2 t}\,dt + \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$$

$$= \tan t - \int \frac{1}{\cos^2 t}\,d\cos t \quad (-2)$$

$$= \tan t - \frac{1}{\cos t} + C$$

(回代) 三角形代换 x



$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

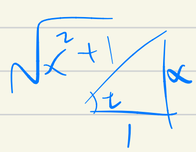
例②

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx \xlongequal[\sqrt{x^2+1}=\sec t]{令 x=\tan t} \int \frac{1}{\tan^2 t\sec t}\,d\tan t$$

$$= \int \frac{1}{\tan^2 t\,\cancel{\sec t}}\sec^2 t\,dt$$

$$= \int \frac{\sec t}{\tan^2 t}\,dt$$

$$= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt$$



$$= \int \frac{1}{\boxed{\sin}^2 t}\,d\boxed{\sin}t = -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$$

例③ $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx \xrightarrow[\sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2]{令\sqrt[6]{x}=t} \int \frac{1}{t^3+t^2}dt^6$

$x^{\frac{1}{6}}=t \Rightarrow \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}=(x^{\frac{1}{6}})^3=t^3$

$=6\int \frac{t^3}{t^2(t+1)}dt$

$=6\int \frac{\boxed{t^3+1}-1}{t+1}dt = 6\int t^2-t+1\,dt - 6\int \frac{1}{t+1}dt$

$\boxed{t^3+1} \to (t+1)(t^2-t+1)$

$=6(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t) - 6\ln(t+1)+C$

$=6\left[\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln(1+\sqrt[6]{x})\right]+C$

3. 分部积分

① 当被积函数为两类复合函数相乘(复合)时，用分部法：$\int u\,dv = uv-\int v\,du$

② 口诀"反对幂三指" $\to e^x, e^{2x}$ 谁在后面提谁

反 $\to \arcsin x$，对 $\to \ln x$，幂 $\to x^a$，三 $\to \sin x,\ \cos x,\ \tan x$

例：$\int x\cdot e^{2x}dx$ (幂 指)

$(e^{2x})'=e^{2x}\cdot 2 \Rightarrow \int e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}$

解：原式 $=\frac{1}{2}\left[\int x\,de^{2x}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}-\int e^{2x}dx\right]$

$=\frac{1}{2}(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x})+C = \frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

4. 有理函数不定积分

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ ① 当分母 $Q(x)$ 可因式分解 ($\Delta>0$) 时 —— 用裂项法

② 当不能 ($\Delta<0$) 时 —— 配方法 + $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ 或 $\int \frac{(分母)'}{分母}dx$

○ 裂项传统待定系数

$\frac{1}{(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-4}$ 通分

$A(x-4)+B(x+3)=1$

$\Rightarrow Ax-4A+Bx+3B=1$

$\Rightarrow x(A+B)-4A+3B=1$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -4A+3B=1 \end{cases}$

○ 快速：

直接待入 x

$A(x-4)+B(x+3)=1$

$\begin{cases} 7B=1 & (代x=4) \\ -7A=1 & (代x=-3) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{7} \\ A=-\frac{1}{7} \end{cases}$

用裂项法时

分子是比分母低一次的多项式

$\frac{6x-3}{(x^2+1)(x+1)}$

$=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}$

③ 当分式为三角函数相除时

1. 万能公式法：

$令\ \tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2\arctan t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

2. "△" → "▽"

例

$$\int\frac{1}{1+\sin x}dx \xlongequal{\text{同乘}\ \frac{1-\sin x}{1-\sin x}} \int\frac{1-\sin x}{\underbrace{1-\sin^2 x}_{\cos^2 x}}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\sec^2 x\,dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$$

补充：

表格法：（快速求多项式积分）：　可以用于定积分

A	$(A)'$	$(A)''$	$\cdots$	$(A)^{(n)}=0$
B	$\int B$	$\iint B$	$\cdots$	$\int^{(n)}B$

$$\int A\cdot B\,dx=(A)'\int B-(A)''\iint B+\cdots+0$$

注意符号

（考试要化开 x）

牛莱公式

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

定积分

一、

1. 利用定积分求极限（数列）

第1步 写和式 第2步 提因子$\frac{1}{n}$ 得$f(\frac{i}{n})$ 第3步 令$\frac{i}{n}=x$ 得$f(x)$ 用公式

2. 洛必达求极限

例：求极限 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt}{x} + \frac{\int_0^x \sin t\,dt}{x^2}\right]$

① $\frac{0}{0}$型极限：洛必达法则

② 变上限积分求导：$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

解：原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\,dt}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{1} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = x$

$= 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

二、利用换元法求定积分

例：求定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

① 积分区间对称时，常用"偶倍奇0"化简：$\int_{-a}^{a}奇\,dx=0$ $\int_{-a}^{a}偶\,dx = 2\int_0^a 偶\,dx$

② 华里氏公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx = \begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (当n为偶数)\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 & (当n为奇数)\end{cases}$

解：原式 $= \int_{-1}^{1}\frac{2x^2+\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}_{偶}dx + \int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}}_{奇}dx$

$= 2\int_0^1\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx + 0 \xlongequal[x=0时t=0,\ x=1时t=\frac{\pi}{2}]{令x=\sin t} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+\cos t}\,d\sin t$ $\quad d\sin t = \cos t\cdot dt$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+\cos t}\cdot\cos t\cdot dt$ $\quad \sin^2 t = 1-\cos^2 t$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{(1+\cos t)}(1-\cos t)}{\cancel{1+\cos t}}\cos t\cdot dt$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)\cos t\,dt$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t-\cos^2 t\,dt$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$

$\xlongequal{华里氏} 4\left|1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right| = 4-\pi$

三、利用分部积分法求定积分

① $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

② 当被积函数为两类不同函数相乘时 —— 用分部积分法

("反对幂三指")：$\int_a^b \underbrace{x}_{幂}\cdot \underbrace{\cos x}_{三}\,dx \qquad \int_a^b \underbrace{x^2}_{幂}\,\underbrace{\ln x}_{对}\,dx$

例：(1) 原式 $= \int_1^2 x\cdot \ln\sqrt{x}\,dx \xlongequal[x=t^2]{\sqrt{x}=t} \int_1^{\sqrt{2}} t^2\ln t\,dt^2 = 2\int_1^{\sqrt{2}} \underbrace{t^3}_{幂}\,\underbrace{\ln t}_{对}\,dt$

$= 2\cdot\frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}} \underbrace{\ln t}_{u}\,d\,\underbrace{t^4}_{v}$

$= 2\cdot\frac{1}{4}\left[\ln t\cdot t^4\Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \cancel{t^4}^{\,3}\,d\ln t^{\frac{1}{t}}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\ln\sqrt{2}\cdot 4 - \int_1^{\sqrt{2}} t^3\,dt\right]$

$= 2\ln\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4\Big|_1^{\sqrt{2}}$

$= \ln 2 - \frac{3}{8}$