# 1 问题重述

20 世纪初期，在伦敦曾观察到这种现象，大约每两年爆发一次麻疹传染病，生物学家试图解释这种现象，他认为易受感染的人数因人口中增添新的成员而不断得到补充。因此他假设

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\alpha S(t)I(t) + \mu \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ \alpha, \beta, \mu &> 0 \end{aligned} \tag{1}$$

试求：

1. 找出方程组的平衡解
2. 证明当方程组的初始值足够接近这个平衡解时，每一个解当 $t$ 趋于无穷大时都趋于平衡解

# 2 方程组的平衡解

令方程组 1 右式等于 0 ，从而：

$$\alpha S(t)I(t) = \mu \tag{2}$$

$$I(t)(\alpha S(t) - \beta) = 0 \tag{3}$$

由 $\mu > 0$ 及式 2 知 $I(t) \neq 0$ 。从而得平衡解

$$S^* = \frac{\beta}{\alpha} \tag{4}$$

$$I^* = \frac{\mu}{\beta} \tag{5}$$

# 3 平衡解的稳定性

**引理** 1. 若特征方程 $det(A - \lambda E) = 0$ 没有零根或者零实部的根，则非线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x) \tag{6}$$

的零解的稳定性与其线性近似的方程组 $\frac{dx}{dt} = Ax$ 的零解的稳定性一致。其中 $R(0) = 0$ ，并且

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} \to 0, \ (\|x\| \to 0) \tag{7}$$

这也就是说当特征方程 $det(A - \lambda E) = 0$ 的根均具有负实部时，方程组 6 的零解是渐进稳定的。

**命题** 1. 当方程组 1 的初始值足够接近这个平衡解时其平衡解具有渐进稳定性

**证明**. 令 $x_1=\bar{S}=S-\frac{\beta}{\alpha}, x_2=\bar{I}=I-\frac{\mu}{\beta}$ ，并记 $x=(x_1,x_2)^T$ 。方程组 1 可化为

$$\frac{dx}{dt}=\left[\begin{array}{cc} -\frac{\alpha\mu}{\beta} & -\beta \\ \frac{\alpha\mu}{\beta} & 0 \end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c} -\alpha x_1x_2 \\ \alpha x_1x_2+\frac{\alpha\mu}{\beta}x_1 \end{array}\right] \tag{8}$$

记 $R(x)=(-\alpha x_1x_2, \alpha x_1x_2+\frac{\alpha\mu}{\beta}x_1)^T$ ，可得

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x\|}\to 0 \quad (\|x\|\to 0)$$

令

$$A=\left[\begin{array}{cc} -\frac{\alpha\mu}{\beta} & -\beta \\ \frac{\alpha\mu}{\beta} & 0 \end{array}\right] \tag{9}$$

则方程组 8 符合引理 1 条件，可由其线性近似方程组的稳定性推知其稳定性。

$$det(\lambda E-A)=\lambda^2+\frac{\alpha\mu}{\beta}\lambda+\alpha\mu$$

其中 $p=\frac{-\alpha\mu}{2\beta}<0$ ，$q=\alpha\mu>0$ 。可见此方程的两个根均具有负实部，故而原方程组 1 的唯一一个平衡点 $(\frac{\beta}{\alpha},\frac{\mu}{\beta})$ 渐进稳定。 □

当 $\alpha=6,\mu=3,\beta=8$，初值取 $(-3,4)$ 时方程组 8 数值解如图 1,2 所示。事实上，在进行数值实验时发现 $s(0),t(0)$ 无论取怎样的正值，最后都会收敛到平衡解，进一步可证明原系统在吸引域 $s>0,t>0$ 上是全局渐进稳定的。

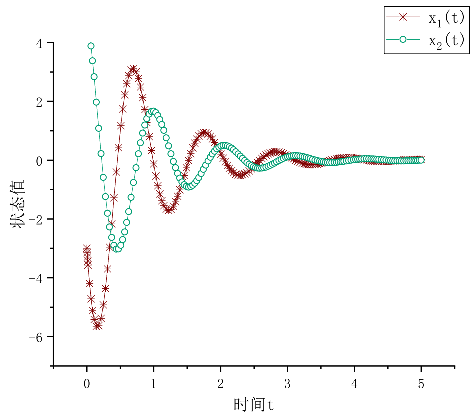


图 1: 微分方程数值解

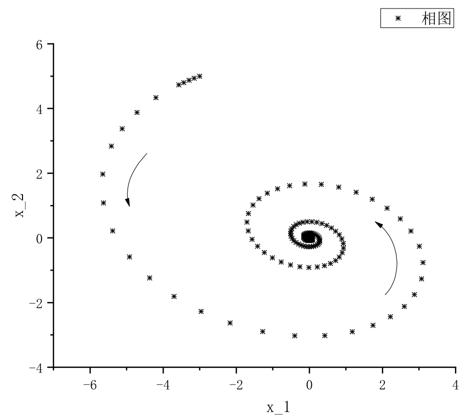


图 2: 数值解相图