25 北京高考 15 题

XeRnHe

2025 年 7 月 20 日

1 题目

15．关于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$，以下说法正确的有________．

① 存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立；

② 存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立；

③ 使得 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个；

④ 使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个．

2 解析

对于①：
$f(x)+f(2x)$ 为增函数，$-x$ 为减函数，舍。
对于②：
由上①分析，②大概率可行，由等式右侧 $-x$ 可考虑构造一次函数。
设 $f(x)=kx+b(k<0)$ 可求解 $f(x)=-\frac{1}{3}x$ 符合题意，直接观察亦可知。
对于③④：
由函数奇偶性分析，$\cos x$ 为偶函数。
又 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$f(x)-f(-x)$ 为奇函数，故④舍。
对于多选题，足够我们选择②③。
其中构造 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+kx$ 为符合③的函数。

3 拓展

当 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立，当且仅当 $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+h(x)$，其中 $h(x)$ 为奇函数。
证明:
对任意 $f(x)$，令 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)], h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.
有 $g(x)$ 为偶函数，$h(x)$ 为奇函数，$f(x)=g(x)+h(x)$.
（任何函数均可表示为奇函数和偶函数的和）

$$\because f(x)+f(-x)=\cos x$$

$$\therefore g(x)+h(x)+g(-x)+h(-x)=\cos x$$

$$\therefore 2g(x)=\cos x$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\cos x+h(x)$$