Institut für Informationsverarbeitung (TNT)
Appelstraße 9a, 30167 Hannover
www.tnt.uni-hannover.de

Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn
Tom Wehrbein, M.Sc.

WiSe 2025/26 **13.01.2026**

Praktische Übung: Computer Vision für medizinische und industrielle Anwendungen

Versuch 9: Kamerakalibrierung und Triangulation

Aufgabe 1 - Bestimmung von Projektionsmatrizen

Zur Kalibrierung von Kameras kann ein dreidimensionales Objekt verwendet werden, bei dem die Koordinaten aussagekräftiger Punkte

$$X_i^w = [X_i, Y_i, Z_i]$$

in Weltkoordinaten bekannt sind. Die Punkte

$$X_i^{img} = [x_i^b, y_i^b]$$

bezeichnen die entsprechenden im Bild gefundenen Projektionen in Bildkoordinaten. Gesucht ist nun eine Matrix P, so dass

$$\begin{pmatrix} x_i^b \\ y_i^b \\ 1 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle i erfüllt ist.
Die Punkte lassen sich also nicht direkt ineinander überführen, sondern müssen über ihre homogenen Koordinaten verknüpft werden. Für alle korrespondierenden Punktpaare gilt

$$X_i^{img} \times P X_i^w = 0,$$

d.h. Bildpunkte und projizierte Punkte sind zwar linear abhängig, aber i.A. nicht identisch, da mehrere Punkte im Raum auf den selben Bildpunkt projiziert werden. Zur

Bestimmung von P kann die obige Gleichung umgestellt werden, um ein Gleichungssystem aufzustellen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -X_1 & -Y_1 & -Z_1 & -1 & y_1^b X_1 & y_1^b Y_1 & y_1^b Z_1 & y_1^b \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1^b X_1 & -x_1^b Y_1 & -x_1^b Z_1 & -x_1^b \\ & & & & & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X_n & -Y_n & -Z_n & -1 & y_n^b X_n & y_n^b Y_n & y_n^b Z_n & y_n^b \\ X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_n^b X_n & -x_n^b Y_n & -x_n^b Z_n & -x_n^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Problem kann nicht eindeutig gelöst werden, da ein Skalierungsfaktor unbestimmbar bleibt. Um das Gleichungssystem zu lösen und die triviale Lösung $P = 0$ zu vermeiden, können Sie $p_{34} = 1$ setzen und das Gleichungssystem so umformen, dass die letzte Spalte auf die rechte Seite gebracht wird. Beachten Sie bei der Interpretation des Lösungsvektors, dass MATLAB eine spaltenweise Speicheranordnung verwendet.

a) Implementieren Sie eine Funktion `P = getProjectionMatrix(Xw, Ximg)`, die mit Hilfe eines Kalibrierungsobjektes (hier ein farbiger Würfel) die 3×4-Projektionsmatrix bestimmt.

   Hinweis: Sie können das Gleichungssystem $Ax = b$ in MATLAB auf verschiedene Arten lösen.

   - Backslash-Operator: `x = A\b`
   - Pseudoinverse: `x = pinv(A)*b`
   - über Singulärwertzerlegung: `svd([A,-b])` oder `svd(A)` falls $b = 0$
     x ist Singulärvektor zum kleinsten Singulärwert (idealerweise 0)

b) Vervollständigen Sie `kalibrierung.m`, um Ihre Funktion zu testen. Nutzen Sie dazu die Testbilder in `focusedStereoSetup.mat` bzw. `parallelStereoSetup.mat`.

   Zur Kalibrierung wird ein farbiger Würfel mit 6 cm Kantenlänge verwendet, die Weltkoordinaten der Eckpunkte finden sich im gegebenen Skript. Achten Sie darauf, dass in beiden Bildern mindestens 6 Ecken zu sehen sind. Dies müssen nicht zwangsläufig dieselben Ecken sein.

   Kalibrieren Sie nun eines der Bilder, indem Sie die projizierten Eckpunkte des Würfels markieren (`getPoints.m`). Durch Druck der Zahlen 1-8 wird im Bild an der Stelle der Maus der entsprechende Punkt gesetzt. Ein Linksklick löscht den dichtesten Punkt, ein Rechtsklick beendet die Funktion. Achten Sie auf die richtigen Korrespondenzen zum Kalibrierungsobjekt und dass nicht alle Eckpunkte gefunden werden können. Nicht gefundene Punkte werden in der Funktion auf 0 gesetzt und sollten nicht in der Kalibrierung verwendet werden.

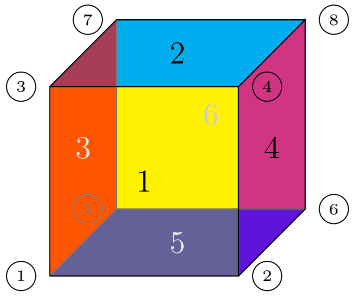

Abbildung 1: Definition des Kalibrationswürfels (Seite 6 ist grün)

c) Bewerten Sie die Qualität Ihrer Kalibrierung. Projizieren Sie dazu die Originalkoordinaten des Würfels in das Bild und bestimmen Sie den mittleren quadratischen Abstand zu den per Hand markierten Punkt:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \| X_i^{img} - P X_i^w \|_2^2$$

Achten Sie auf die Normierung der projizierten Punkte (homogene Koordinaten)!

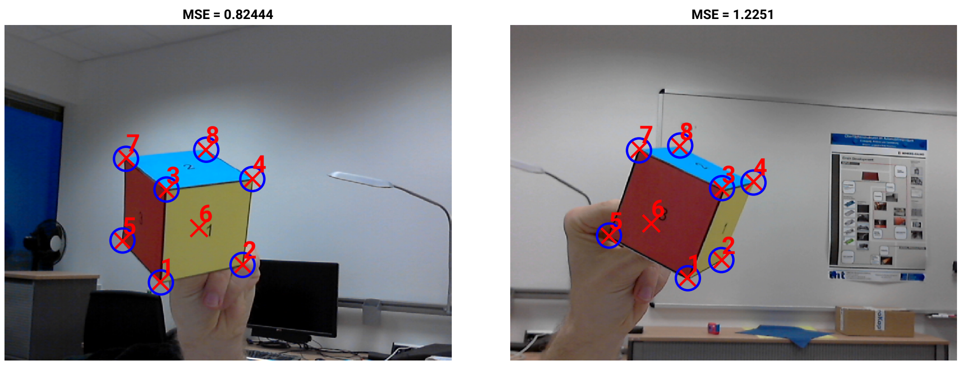

Abbildung 2: Ausgewählte und projizierte Eckpunkte des Würfels im Bildpaar aus `focusedStereoSetup.mat`

Aufgabe 2 - Szenenrekonstruktion und Triangulation

Im Folgenden wird die zweite Aufnahme des Stereobildes verwendet, um weitere Informationen aus der aufgenommenen Szene zu extrahieren.

a) Kalibrieren Sie ebenfalls die zweite Kamera.

b) Stellen Sie anschließend das Kalibrierungsobjekt (`plotCube.m`) und die Kamerazentren in einem dreidimensionalen Plot dar. Für das Kamerazentrum C gilt $P \cdot C = 0$ bei bekannter Projektionsmatrix P. Der Nullraum einer Matrix kann mit der MATLAB-eigenen Funktion `null` bestimmt werden.

   Hinweise: Bei annähernd parallel ausgerichteten Kameras werden die Kamerazentren aufgrund der Ungenauigkeit der Kalibrierung eher schlecht rekonstruiert.

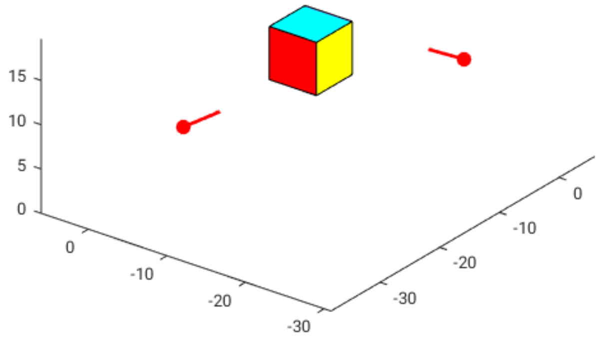

Abbildung 3: 3D-Szene mit Kalibrierungsobjekt und Kamerazentren/-ausrichtung

c) Mit zwei kalibrierten Kameras lassen sich nun die dreidimensionalen Koordinaten von Objekten im Bild rekonstruieren, sofern die Punkte in beiden Bildern sichtbar sind. Schreiben Sie eine Funktion `X = myTriangulation(x1, x2, P1, P2)`, die aus je einem Punkt im Stereobildpaar und den bekannten Projektionsmatrizen den ursprünglichen dreidimensionalen Punkt X in der rekonstruierten Szene bestimmt.

Es werden die Bedingungen

$$x_1 \times P_1 X = 0 \qquad \text{und} \qquad x_2 \times P_2 X = 0$$

genutzt, woraus sich das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1 p_1^{3T} - p_1^{1T} \\ y_1 p_1^{3T} - p_1^{2T} \\ x_1 p_1^{2T} - y_1 p_1^{1T} \\ x_2 p_2^{3T} - p_2^{1T} \\ y_2 p_2^{3T} - p_2^{2T} \\ x_2 p_2^{2T} - y_2 p_2^{1T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt, wobei p_i^{jT} die j-te Zeile der i-ten Projektionsmatrix bezeichnet. Auch hier muss die letzte Spalte der Matrix als Lösungsvektor auf die rechte Seite gebracht werden.

d) Bestimmen Sie wiederum die Güte, indem Sie die dreidimensionalen Eckpunkte des Kalibrierungsobjektes aus den im Bild per Hand bestimmten Punkten approximieren und den quadratischen mittleren Abstand zu den tatsächlichen Koordinaten bestimmen.

Kontrollfragen

a) Wie viele Punkte werden mindestens zur Kamerakalibrierung benötigt? Warum?

b) Mehr Punkte verbessern üblicherweise die Qualität der Kalibrierung. Warum?