

WiSe 2025/26

20.01.2026

Praktische Übung: Computer Vision für medizinische und industrielle Anwendungen

Versuch 10: Principal Component Analysis

Aufgabe 1 - Grundlagen der PCA

Im Folgenden sollen die grundlegenden Eigenschaften der PCA an einem einfachen dreidimensionalen Beispiel illustriert werden. Folgen Sie den Bemerkungen im Skript `pca_test.m` und setzen Sie folgende Punkte um:

- Generieren Sie eine dreidimensionale Punktmenge. Welche Auswirkungen haben die einzelnen Parameter?
- Bestimmen Sie die Hauptkomponenten der Punkte, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren (MATLAB: `eig`) der Kovarianzmatrix

$$C = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^\top, \quad x_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

bestimmen. \bar{x} bezeichnet den Mittelwert der Punktmenge.

- Plotten Sie die Hauptachsen in die Punktmenge.

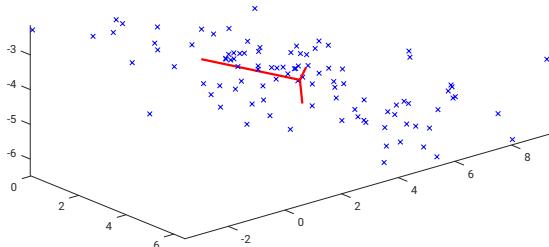


Abbildung 1: Visualisierung der Hauptachsen

- d) Projizieren Sie die Punkte auf eine der Hauptachsen, d.h. den 1D-Unterraum, der durch einen der Eigenvektoren v_i gegeben ist. Verwenden Sie das Skalarprodukt

$$\alpha_i(x) = \frac{\langle x - \bar{x}, v_i \rangle}{\|v_i\|} \in \mathbb{R},$$

um die Projektion α_i des Punktes x zu bestimmen. Bestimmen Sie die Varianz der projizierten Punkte.

- e) Rekonstruieren Sie die 3D-Punkte anschließend wieder aus dem jeweiligen Unterraum:

$$p_i(x) = \alpha_i(x) \frac{v_i}{\|v_i\|} + \bar{x} = \frac{\langle x - \bar{x}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i + \bar{x}.$$

Plotten Sie die rekonstruierten Punkte zusammen mit den Originalpunkten und den Hauptachsen.

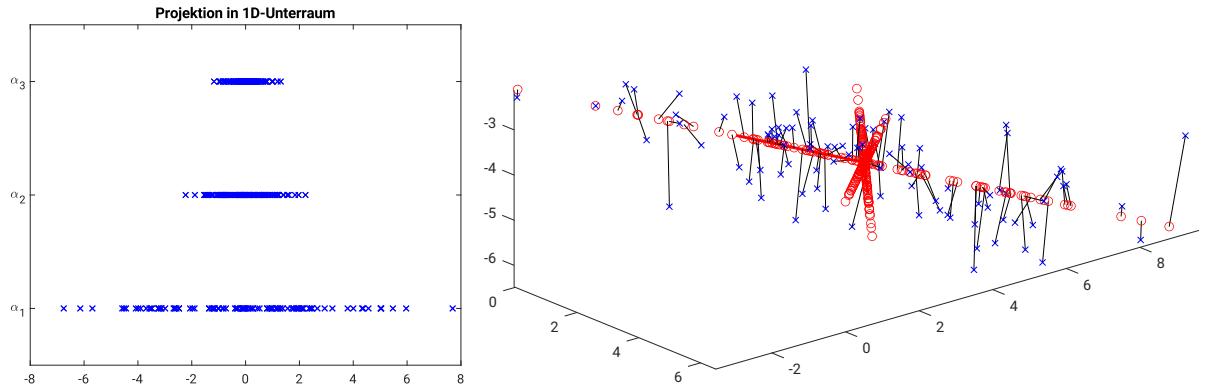


Abbildung 2: Projektion der Punkte in die 1D-Unterräume und anschließende Rekonstruktion inkl. Korrespondenzen zu Originalpunkten (schwarze Linien)

- f) Projizieren Sie die Punkte in den 2D-Unterraum, der von den ersten beiden Hauptkomponenten (Eigenvektoren zu den beiden größten Eigenwerten) aufgespannt wird und rekonstruieren Sie anschließend wiederum die 3D-Punkte:

$$p_{1,2}(x) = \frac{\langle x - \bar{x}, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle x - \bar{x}, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 + \bar{x}$$

Plotten Sie die rekonstruierten Punkte und bestimmen Sie den mittleren quadratischen Rekonstruktionsfehler

$$\varepsilon = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \|p_{1,2}(x_i) - x_i\|^2$$

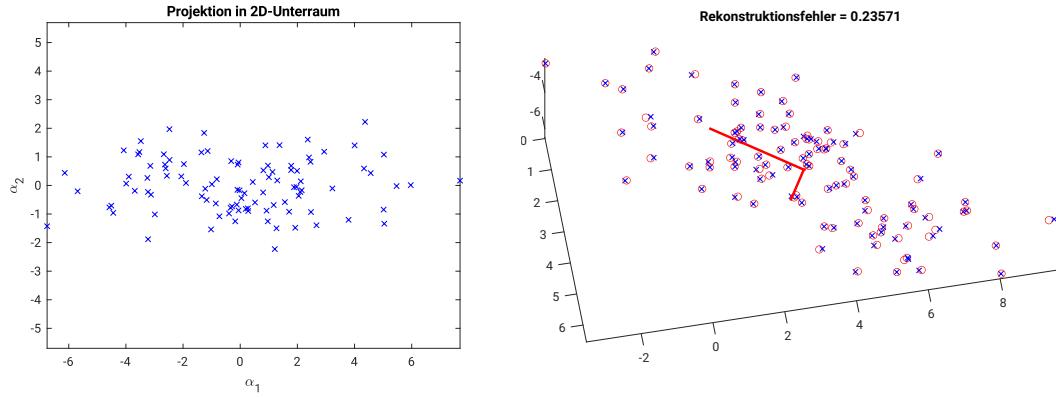


Abbildung 3: Projektion der Punkte in den 2D-Unterraum und anschließende Rekonstruktion

Aufgabe 2 - PCA zur Gesichtsrekonstruktion

Nutzen Sie die PCA zur Erstellung eines (PCA-)Gesichtsraums, aus dem Sie z.B. fehlende Bildteile rekonstruieren können. Folgen Sie dem Skript `faceRecon.m`, in dem die folgenden Punkte umgesetzt werden:

- Erstellung des PCA-Raums mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung oder dem “algebraischen Trick”
- Illustration der Eigenvektoren (Eigenfaces) - Wie viele Eigenfaces gibt es?

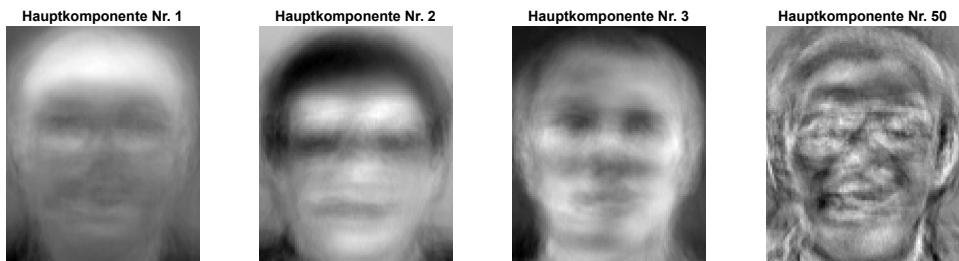


Abbildung 4: Visualisierungen verschiedener Eigenfaces

- Projektion und Rekonstruktion bekannter Gesichter (bekannte Datenpunkte im PCA-Raum)
- Ergänzung fehlender Bildinformationen (Iteration von Projektion und Rekonstruktion des korrupten Bildes, um den fehlenden Inhalt in jedem Schritt besser approximieren zu können)
- Wiederholen Sie Ihre Versuche, indem Sie den PCA-Raum ohne die zu rekonstruierende Person (s8) aufbauen, d.h. laden Sie die Bilder dieser Person nicht in den Datenraum.



Abbildung 5: Rekonstruktion eines bekannten Gesichts aus verschiedenen Unterräumen (links) und Rekonstruktion fehlender Daten (rechts)

Kontrollfragen

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Parametern zur Erstellung der Punkt-wolke, den Eigenwerten der Kovarianzmatrix, der Varianz der projizierten Punkte (1 d)) und dem Rekonstruktionsfehler (1 f))?
- Wie beeinflusst die Anzahl der verwendeten Eigenfaces das Ergebnis in Aufgabe 2?
- Erklären Sie die Unterschiede in der Gesichtsrekonstruktion, abhängig davon, ob Bilder von der Person in den PCA-Raum einfließen oder nicht. Vergleichen Sie die Rekonstruktion mit unterschiedlich vielen Eigenfaces.

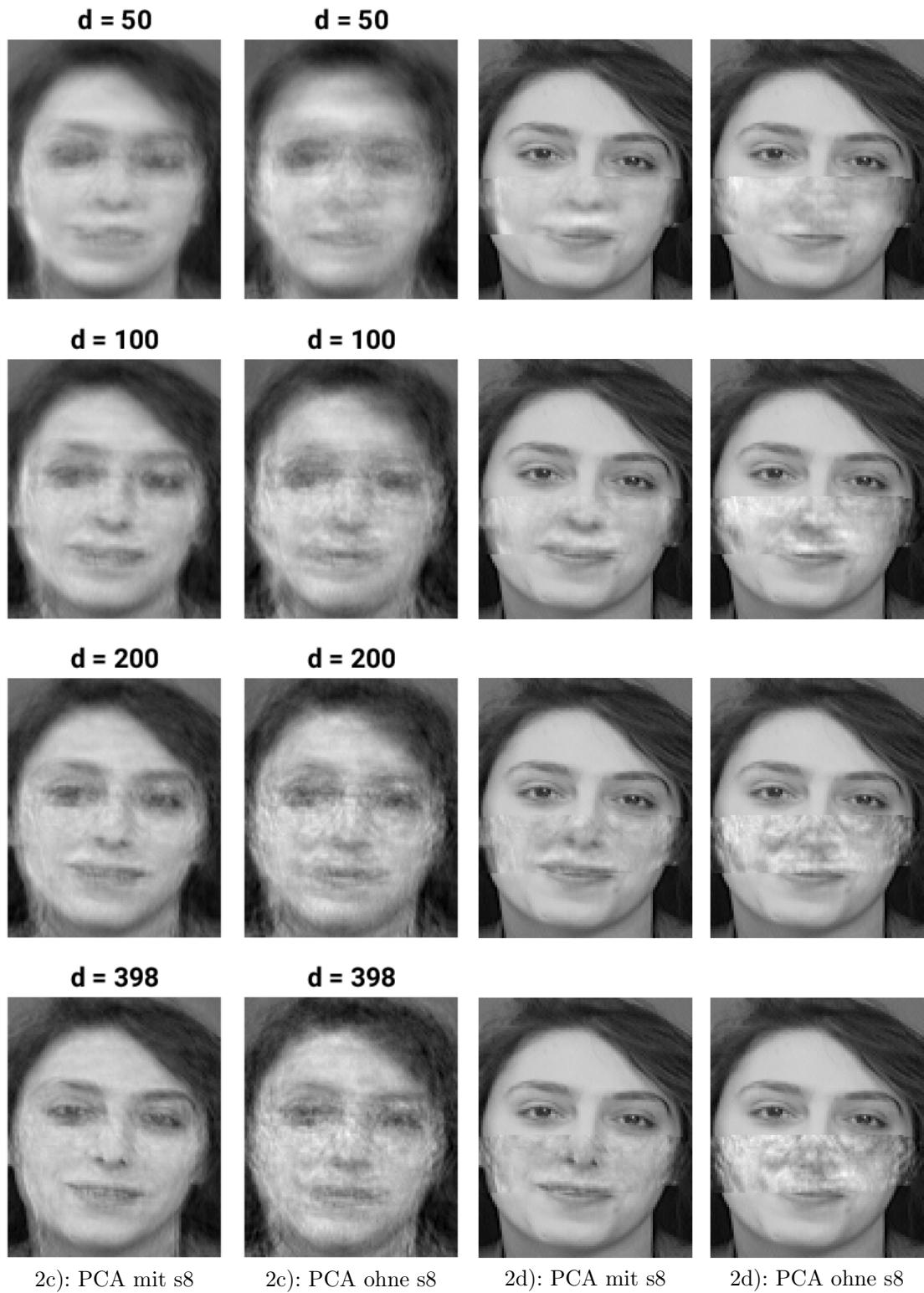


Abbildung 6: Vergleich der Rekonstruktionen bei verschiedener Anzahl verwendeter Eigenfaces abhängig von der Berücksichtigung von Person s8 in den PCA-Daten