**Méthodes Numériques – TP 7**

Ruding LOU

ruding.lou@ensam.eu

# Résolution d'équations différentielles ordinaires

- Veuillez déposer vos fichiers sur la plateforme SAVOIR
- Veuillez créer un **fichier** par exercice et le **nommer** de manière suivante : **NOM_Prenom_TP7_ex1.py**
- Respecter les consignes générales (Annexe. 1).

**1.** Utiliser les **méthodes numériques** pour un système d'équations différentielles avec une condition initiale.

$$\begin{cases} y' = \quad x + 4\,z & y(0) = 2 \\ z' = 2\,z - 4\,y & z(0) = 1 \end{cases}$$

n est saisi dans la console

- Tracer la **solution analytique** sur [0, 1] (Annexe. 2).
- Utiliser **RK1** pour approcher $y(1)$ et $z(1)$ en n pas. Tracer les itérations comme l'Annexe. 3.
- Utiliser **RK2** pour approcher $y(1)$ et $z(1)$ en n pas. Tracer les itérations comme l'Annexe. 3.
- Observer les erreurs d'approximation en différents points et avec différentes méthodes.

**2.** Utiliser les **méthodes numériques** pour résoudre une équation différentielle avec une condition initiale :

$$\begin{cases} y'' + 3\,y' + 40\,y = 0 & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 & y'(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

n est saisi dans la console

- Tracer sur [0, 1] la **solution analytique** (Annexe. 4)
- Utiliser la méthode d'**Euler** pour approcher $y(1)$ en n pas. Tracer les itérations (Annexe. 5).
- Utiliser la méthode d'**Euler modifiée** pour approcher $y(1)$ en n pas. Tracer les itérations (Annexe. 6).
- Utiliser la méthode d'**Adams-Moulton 2** pour approcher $y(1)$ en n pas. Tracer les itérations (Annexe. 7).
- Observer les erreurs d'approximation en différents points et avec différentes méthodes.

## Annexe. 1

L'utilisateur **lance le programme** et **se laisse guider** dans la console :

- demander à l'utilisateur de saisir le **nombre** des pas si cela concerne l'exercice ;
- afficher les **itérations** calculées des différentes méthodes
- afficher le **tableau d'erreurs** des différentes méthodes ;

Tracer dans une figure la solution analytique $y(x)$ (et $z(x)$ ou $y'(x)$ ) et les solutions numériques $(x_i, y_i)$ ou $(x_i, y_i, z_i)$. .

## Annexe. 2

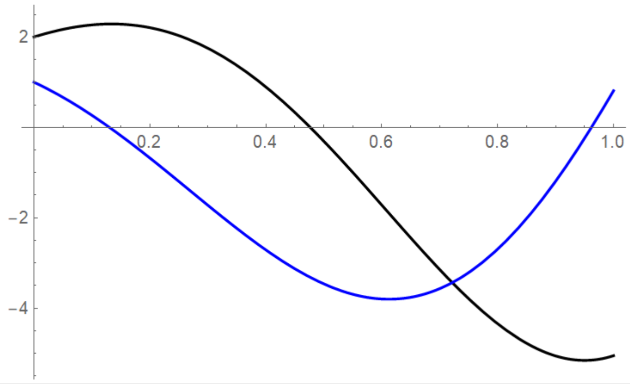
Equations:

$$y'[x] == x + 4\,z[x]$$
$$z'[x] == -4\,y[x] + 2\,z[x]$$
$$y[0] == 2$$
$$z[0] == 1$$

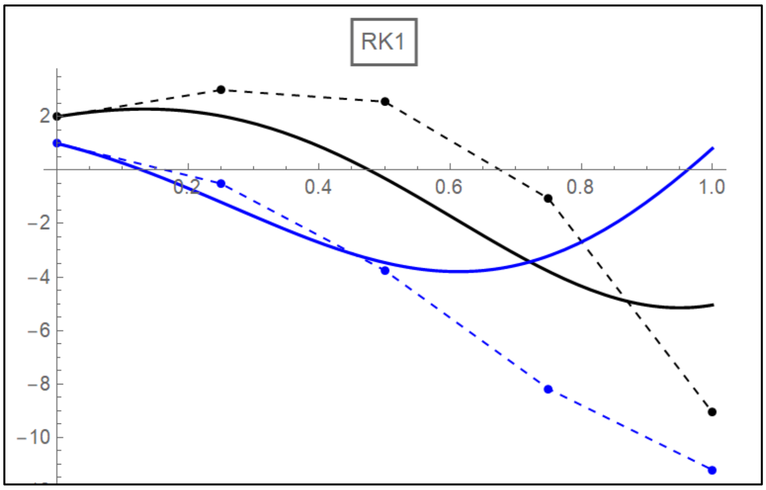
Analytic solution:

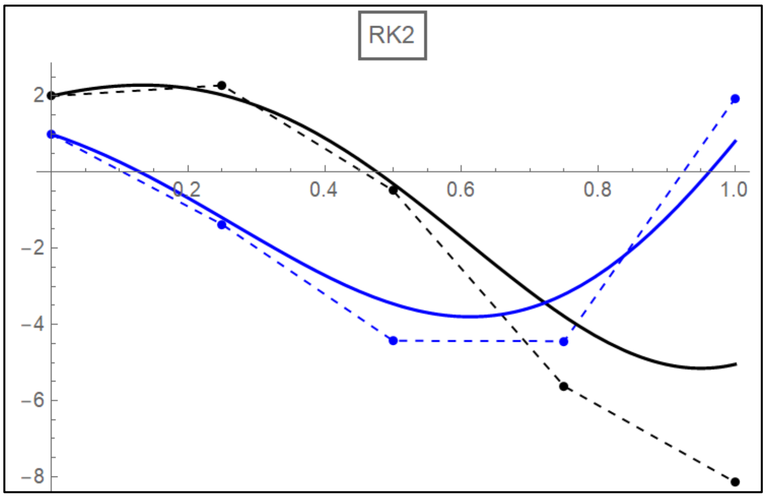
$$y[x] \to \frac{1}{960}\left(1875\,e^{x}\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{15}\,x\right] + 45\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{15}\,x\right]^{2} - 120\,x\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{15}\,x\right]^{2} + 139\sqrt{15}\,e^{x}\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{15}\,x\right] + 45\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{15}\,x\right]^{2} - 120\,x\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{15}\,x\right]^{2}\right)$$

$$z[x] \to \frac{1}{480}\left(495\,e^{x}\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{15}\,x\right] - 15\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{15}\,x\right]^{2} - 120\,x\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{15}\,x\right]^{2} - 217\sqrt{15}\,e^{x}\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{15}\,x\right] - 15\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{15}\,x\right]^{2} - 120\,x\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{15}\,x\right]^{2}\right)$$



## Annexe. 3



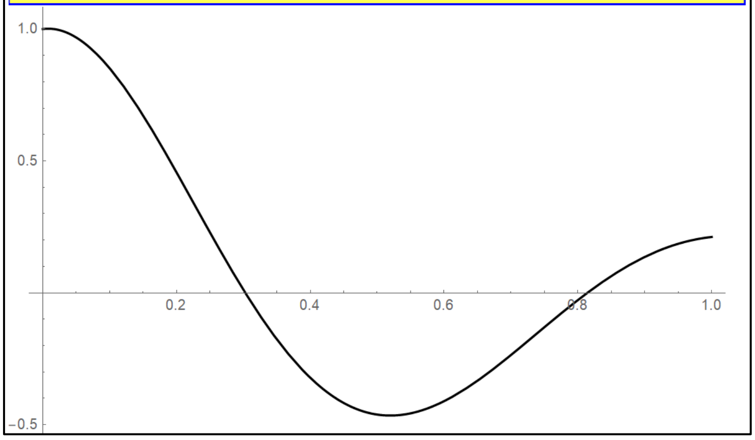



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0. | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1. |
| Erreur RK1 en $y_i$ | 0. | 0.969811 | 2.86622 | 2.72514 | 4.01495 |
| Erreur RK1 en $z_i$ | 0. | 0.695581 | 0.289867 | 4.97679 | 12.0301 |
| | | | | | |
| Erreur RK2 en $y_i$ | 0. | 0.251061 | 0.180652 | 1.83541 | 3.09576 |
| Erreur RK2 en $z_i$ | 0. | 0.179419 | 0.969554 | 1.22972 | 1.12824 |

## Annexe. 4

Equation: $y'' + 3y' + 40y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{3}$

Analytic solution: $y = \frac{1}{453} e^{-\frac{3x}{2}} \left(11\sqrt{151}\sin\left(\frac{\sqrt{151}\,x}{2}\right) + 453\cos\left(\frac{\sqrt{151}\,x}{2}\right)\right)$



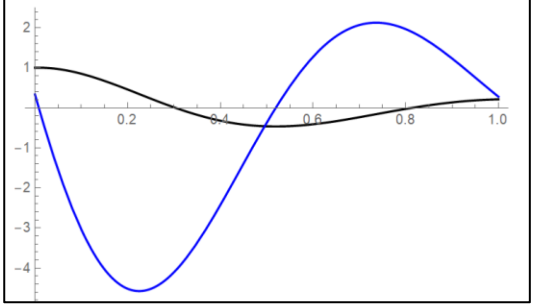

$2^{nd}$ order equation: $40\,y[x] + 3\,y'[x] + y''[x] == 0$ $\quad y[0] == 1$, $y'[0] == \frac{1}{3}$

$1^{st}$ order system: $u'[x] == v[x]$, $v'[x] == -40\,u[x] - 3\,v[x]$ $\quad u[0] == 1$, $v[0] == \frac{1}{3}$

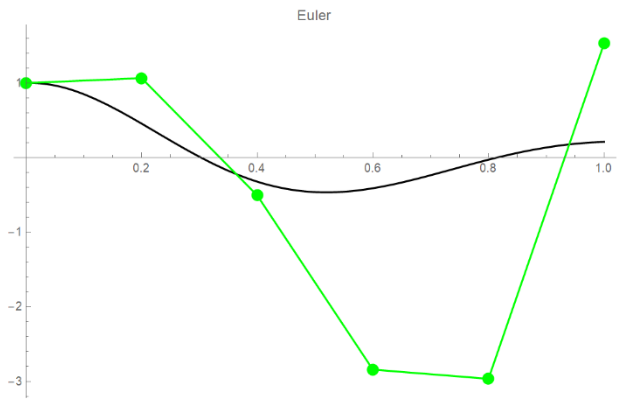
Analytic solution:

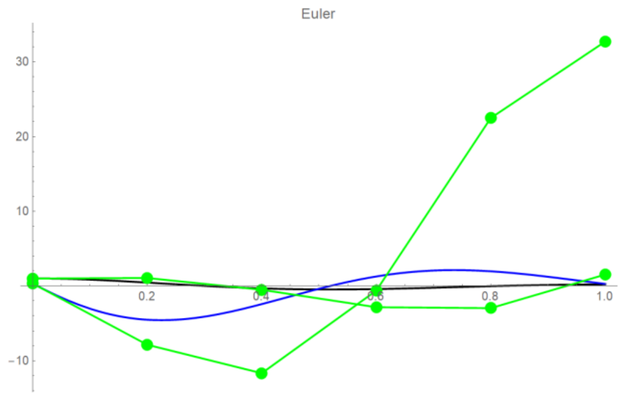
$u[x] \to \frac{1}{453} e^{-3x/2} \left(453\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{151}\,x}{2}\right] + 11\sqrt{151}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{151}\,x}{2}\right]\right)$

$v[x] \to -\frac{1}{453} e^{-3x/2} \left(-151\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\sqrt{151}\,x}{2}\right] + 243\sqrt{151}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{151}\,x}{2}\right]\right)$

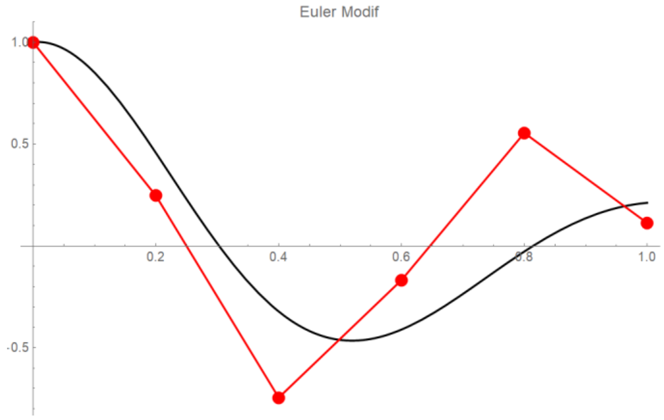


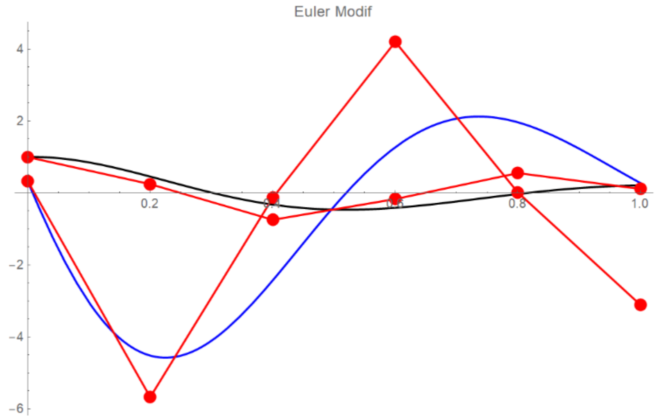

## Annexe. 5



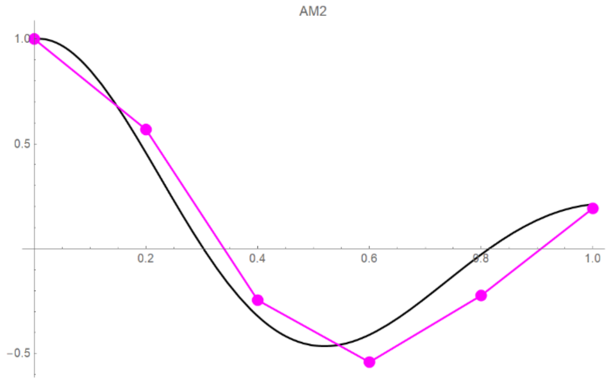



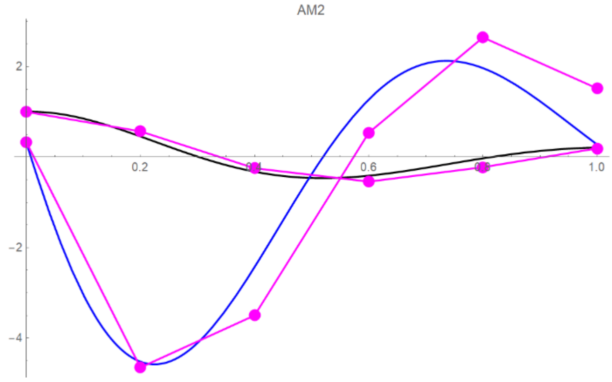

## Annexe. 6




## Annexe. 7




| $x_i$ | 0. | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Erreur Euler en $y_i$ | 0. | 0.609982 | 0.184766 | 2.43209 | 2.93906 | 1.32063 |
| Erreur EulerModif en $y_i$ | 0. | 0.210018 | 0.423032 | 0.242941 | 0.581941 | 0.0987877 |
| Erreur Adams−Mouton 2 en $y_i$ | 0. | 0.111943 | 0.0762261 | 0.130778 | 0.195828 | 0.0189867 |