

## 1 Метод сопряженных градиентов

Цель работы – закрепление навыков программной реализации в Octave (Scilab) на примере реализации метода сопряженных градиентов для итерационного метода решения СЛАУ.

### 1.1 Краткая теоретическая справка

На сегодняшний день самыми эффективными итерационными методами решения СЛАУ являются проекционные методы Крыловского типа (Krylov subspace methods). Идею таких подпространств в 1931 г. предложил Алексей Николаевич Крылов – русский кораблестроитель, специалист в области механики, математик. Одним из первых был разработан метод сопряженных градиентов. Метод предназначен для решения СЛАУ с симметричной матрицей. Иллюстрация работы метода при  $n=2$  приведена на рисунок 1.1 ( $\mathbf{x}_0$  – начальное приближение).

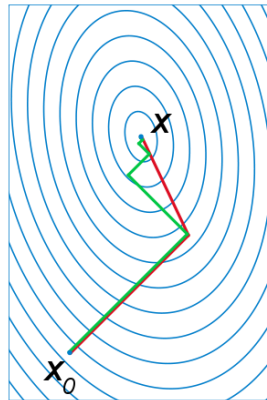


Рисунок 1.1 – Сравнение методов градиентного спуска (зеленый) и метода сопряженных градиентов для  $n=2$

Далее приведен алгоритм метода сопряженных градиентов (CG).

#### Алгоритм метода CG

**Выбрать начальное приближение  $\mathbf{x}_0$**

**Вычислить  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0$**

**Для  $i = 1, 2, \dots$  до сходимости или до  $N_{it}^{max}$**

**$\mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{r}_{i-1}$**

**$\rho_{i-1} = (\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})$**

**Если  $i = 1$**

**$\mathbf{p}_1 = \mathbf{z}_0$**

**Иначе**

$$\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{z}_{i-1} + \beta_{i-1} \mathbf{p}_{i-1}$$

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{A} \mathbf{p}_i$$

$$\alpha_i = \rho_{i-1} / (\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \alpha_i \mathbf{q}_i$$

Если  $\|\mathbf{r}_i\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq Tol$   
 то КОНЕЦ ( $\mathbf{x}_i$  – полученное решение)  
 увеличить  $i$

## 1.2 Порядок выполнения работы

1. Программно реализовать алгоритм метода сопряженных градиентов.
2. Проверить корректность работы на примере решения СЛАУ ( $\mathbf{x}_0$ – нулевой вектор,  $Tol=10^{-3}$ ,  $N_{it}^{max}=100$ ):  $\mathbf{A} = [10 \ 6 \ 2 \ 0; 6 \ 1 \ 5 \ 4; 2 \ 1 \ 1 \ -2; 0 \ 4 \ -2 \ 2]$ ,  $\mathbf{b} = [14; 4; 8; 6]$  . Использовать произвольное начальное приближение. Построить график зависимости относительной нормы невязки ( $\|\mathbf{r}_i\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2$ ) от номера итерации.
3. Полученные аналогичные результаты с помощью стандартных средств Octave (Scilab).
4. Решить СЛАУ с матрицей Гильберта (матрица  $\mathbf{H}$  с элементами  $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ ) при  $\mathbf{x}_0$ – нулевой вектор,  $Tol=10^{-3}$ ,  $N_{it}^{max}=100$ ) для порядков матрицы  $N = 10, 11, \dots, 14$ . Для задания вектора свободных членов  $\mathbf{b}$  воспользоваться заранее заданным вектором решения  $\mathbf{x}$  в виде  $1, 2, \dots, N$ . Результаты вычислений (вектор решения) занести в таблицу.
5. Решить те же СЛАУ с помощью стандартного средства Octave или Scilab ( $\mathbf{x}=\mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$ ). Результаты вычислений (вектор решения) занести в таблицу.
6. При решении методом сопряженных градиентов, изменяя точность вычислений ( $Tol=10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ ) получить вектор решения при порядке матрицы СЛАУ  $N = 15$ . Полученные значения занести в таблицу с указанием числа требуемых итераций. Для каждого случая построить график зависимости относительной нормы невязки ( $\|\mathbf{r}_i\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2$ ) от номера итерации.
7. Проанализировать полученные результаты и сформулировать выводы по работе.

8. Оформить отчет.

### **1.3 Содержание и требования к оформлению отчета**

Отчет должен содержать титульный лист, название работы и цель работы, исходные данные, результаты расчетов, таблицы и графики, анализ результатов и выводы по работе.

Оформление должно соответствовать ОС ТУСУР 01-2013 "работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления".