Теория вероятностей
Полный теоретический курс

Содержание

1 Основные понятия и определения

1.1 Случайное событие

Определение 1.1. Случайное событие — это событие, которое может произойти или не произойти в результате испытания (эксперимента).

Виды событий:

- **Достоверное событие** (Ω) — событие, которое обязательно произойдет
- **Невозможное событие** ($\emptyset$) — событие, которое не может произойти
- **Элементарное событие** (ω) — событие, которое нельзя разложить на более простые
- **Составное событие** — событие, состоящее из нескольких элементарных событий

1.2 Пространство элементарных событий

Определение 1.2. Пространство элементарных событий Ω — множество всех возможных исходов испытания.

Пример 1.1. Примеры пространств элементарных событий:

- Бросание монеты: $\Omega = \{\text{герб}, \text{решка}\}$
- Бросание кубика: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Измерение температуры: $\Omega = (-\infty, +\infty)$

1.3 Алгебра событий

События можно рассматривать как подмножества пространства элементарных событий Ω.

Операции над событиями:

- **Сумма событий** $A \cup B$ — происходит хотя бы одно из событий A или B
- **Произведение событий** $A \cap B$ — происходят оба события A и B одновременно
- **Разность событий** $A \setminus B$ — происходит A, но не происходит B
- **Дополнение события** $\overline{A}$ — не происходит событие A

2 Классическое определение вероятности

2.1 Определение

Определение 2.1. Если пространство элементарных событий конечно и все элементарные события равновозможны, то вероятность события A равна:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где:

- m — число элементарных событий, благоприятствующих A
- n — общее число элементарных событий

2.2 Свойства классической вероятности

Свойство 2.1. 1. $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(\Omega) = 1$

3. $P(\emptyset) = 0$

4. Если события A и B несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2.3 Основные формулы комбинаторики

- **Размещения без повторений:** $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- **Размещения с повторениями:** $\overline{A}_n^k = n^k$
- **Перестановки:** $P_n = n!$
- **Сочетания без повторений:** $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- **Сочетания с повторениями:** $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

3 Геометрическая вероятность

3.1 Определение

Определение 3.1. Если множество элементарных событий представляет собой некоторую геометрическую фигуру, а событие A соответствует части этой фигуры, то:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ — площади (объемы, длины) соответствующих областей.

3.2 Парадокс Бертрана

Пример 3.1. Классический пример неоднозначности в определении геометрической вероятности при неточной постановке задачи.

4 Алгебра событий

4.1 Законы алгебры событий

- **Коммутативность:**
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- **Ассоциативность:**
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Дистрибутивность:**
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- **Законы де Моргана:**
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5 Аксиомы теории вероятностей

5.1 Аксиоматика Колмогорова

Определение 5.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, где:

- Ω — пространство элементарных событий
- $\mathcal{F}$ — σ-алгебра событий
- P — вероятностная мера

Аксиомы:

1. **Неотрицательность:** $P(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$
2. **Нормированность:** $P(\Omega) = 1$
3. **Счетная аддитивность:** Для попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

5.2 Следствия из аксиом

Свойство 5.1.
1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$

6 Условная вероятность

6.1 Определение

Определение 6.1. Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B $(P(B) > 0)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

6.2 Свойства условной вероятности

Свойство 6.1. При фиксированном B условная вероятность $P(\cdot|B)$ удовлетворяет всем аксиомам вероятности:

1. $P(A|B) \geq 0$
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Для несовместных событий: $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

6.3 Теорема умножения

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Для нескольких событий:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

7 Независимость событий

7.1 Независимость двух событий

Определение 7.1. События A и B **независимы**, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Эквивалентные условия (при $P(B) > 0$):

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$

7.2 Независимость нескольких событий

Определение 7.2. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **независимы в совокупности**, если для любого подмножества индексов $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

7.3 Попарная независимость

Определение 7.3. События **попарно независимы**, если любые два из них независимы. Попарная независимость не влечет независимость в совокупности.

8 Формула полной вероятности и формула Байеса

8.1 Формула полной вероятности

Теорема 8.1. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют **полную группу** (попарно несовместны и их объединение равно Ω), и $P(H_i) > 0$. Тогда для любого события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются **гипотезами**.

8.2 Формула Байеса

Теорема 8.2. При тех же условиях, если $P(A) > 0$, то:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j) \cdot P(H_j)}$$

Вероятности $P(H_i)$ называются **априорными**, а $P(H_i|A)$ — **апостериорными**.

9 Повторные независимые испытания

9.1 Схема Бернулли

Определение 9.1. Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p (и не происходит с вероятностью $q = 1 - p$).

Биномиальное распределение: Вероятность того, что событие A произойдет ровно k раз:

$$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

9.2 Наивероятнейшее число успехов

Определение 9.2. k_0 — наивероятнейшее число успехов, если $P(\xi = k_0) \geq P(\xi = k)$ для всех k.

Находится из неравенства:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p$$

9.3 Предельные теоремы

Теорема 9.1 (Пуассона)**.** При $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$:

$$P(\xi = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Теорема 9.2 (Локальная теорема Лапласа)**.** При больших n и не слишком малых p и q:

$$P(\xi = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

Теорема 9.3 (Интегральная теорема Лапласа)**.**

$$P(k_1 \leq \xi \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

10 Случайные величины

10.1 Определение

Определение 10.1. Случайная величина ξ — это функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω и принимающая действительные значения.

Формально: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$

10.2 Типы случайных величин

- **Дискретная** — принимает конечное или счетное множество значений
- **Непрерывная** — принимает значения из некоторого интервала
- **Смешанная** — комбинация дискретной и непрерывной

10.3 События, связанные со случайной величиной

- $\{\xi = x\}$ — событие, состоящее в том, что ξ принимает значение x
- $\{\xi < x\}$ — событие, состоящее в том, что ξ принимает значение меньше x
- $\{a < \xi \leq b\}$ — событие, состоящее в том, что ξ принимает значение из интервала $(a, b]$

11 Функция распределения

11.1 Определение

Определение 11.1. Функция распределения случайной величины ξ:

$$F(x) = P(\xi < x)$$

11.2 Свойства функции распределения

Свойство 11.1. 1. **Неубывание:** $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$

2. **Ограниченность:** $0 \leq F(x) \leq 1$

3. **Предельные значения:**

   - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
   - $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4. **Непрерывность слева:** $F(x - 0) = F(x)$

5. $P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$

6. $P(\xi = a) = F(a) - F(a - 0)$

12 Дискретные случайные величины

12.1 Закон распределения

Определение 12.1. Дискретная случайная величина полностью характеризуется **рядом распределения**:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

где $p_i = P(\xi = x_i)$, $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$

12.2 Функция распределения

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой функцией.

12.3 Основные дискретные распределения

- **Биномиальное распределение** $B(n, p)$**:**

$$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

- **Распределение Пуассона** (λ)**:**

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- **Геометрическое распределение** $Geom(p)$**:**

$$P(\xi = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- **Гипергеометрическое распределение:**

$$P(\xi = k) = \frac{C_m^k C_{n-m}^{n-k}}{C_n^n}$$

13 Непрерывные случайные величины

13.1 Плотность распределения

Определение 13.1. Непрерывная случайная величина характеризуется **плотностью распределения** $f(x)$ такой, что:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

13.2 Свойства плотности распределения

Свойство 13.1. 1. $f(x) \geq 0$ для всех x

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки)

3. $P(a < \xi \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

4. $f(x) = F'(x)$ в точках непрерывности

5. $P(\xi = a) = 0$ для любого a

13.3 Основные непрерывные распределения

- **Равномерное распределение $U(a,b)$:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- **Нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$:**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- **Показательное распределение $Exp(\lambda)$:**

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

- **Гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \beta)$:**

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

14 Числовые характеристики случайных величин

14.1 Математическое ожидание

Определение 14.1. Для дискретной случайной величины:

$$E[\xi] = \sum_i x_i \cdot p_i$$

Для непрерывной случайной величины:

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Свойство 14.1. Свойства математического ожидания:

1. $E[c] = c$ (константа)
2. $E[c\xi] = c \cdot E[\xi]$
3. $E[\xi + \eta] = E[\xi] + E[\eta]$
4. Если ξ и η независимы, то $E[\xi\eta] = E[\xi] \cdot E[\eta]$

14.2 Дисперсия

Определение 14.2.

$$D[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^2] = E[\xi^2] - (E[\xi])^2$$

Свойство 14.2. Свойства дисперсии:

1. $D[c] = 0$
2. $D[c\xi] = c^2 \cdot D[\xi]$
3. $D[\xi + c] = D[\xi]$
4. Если ξ и η независимы, то $D[\xi + \eta] = D[\xi] + D[\eta]$

14.3 Среднее квадратическое отклонение

Определение 14.3.

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]}$$

14.4 Моменты случайной величины

Определение 14.4. Начальный момент k-го порядка:

$$\mu_k = E[\xi^k]$$

Центральный момент k-го порядка:

$$\mu_k = E[(\xi - E[\xi])^k]$$

Связь: $\mu_1 = E[\xi]$, $\mu_2 = D[\xi]$

14.5 Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Определение 14.5. Коэффициент асимметрии:

$$\text{Skew}[\xi] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Коэффициент эксцесса:

$$\text{Kurt}[\xi] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

14.6 Мода и медиана

Определение 14.6. Мода — значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность (для дискретных) или наибольшую плотность (для непрерывных).

Медиана Me — такое число, что $P(\xi < Me) = P(\xi > Me) = \frac{1}{2}$.

15 Основные законы распределения

15.1 Нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$

Определение 15.1. Плотность:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Характеристики:

- $E[\xi] = \mu$
- $D[\xi] = \sigma^2$
- Симметрично относительно μ

Определение 15.2. Стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Теорема 15.1 (Правило трех сигм)**.**

$$P(|\xi - \mu| < 3\sigma) \approx 0.9973$$

15.2 Показательное распределение $Exp(\lambda)$

Определение 15.3. Плотность:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Характеристики:

- $E[\xi] = \frac{1}{\lambda}$
- $D[\xi] = \frac{1}{\lambda^2}$
- Обладает свойством "отсутствия памяти"

15.3 Равномерное распределение $U(a, b)$

Определение 15.4. Плотность:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

Характеристики:

- $E[\xi] = \frac{a+b}{2}$
- $D[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12}$

15.4 Распределение Пуассона (λ)

Определение 15.5. Вероятности:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Характеристики:

- $E[\xi] = \lambda$
- $D[\xi] = \lambda$

16 Многомерные случайные величины

16.1 Двумерные случайные величины

Определение 16.1. Совместная функция распределения:

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$$

Для дискретных величин — совместный ряд распределения:

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}$$

Для непрерывных величин — совместная плотность:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv$$

16.2 Маргинальные распределения

Определение 16.2. Функции распределения:

- $F_\xi(x) = F(x, +\infty)$
- $F_\eta(y) = F(+\infty, y)$

Плотности:

- $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$
- $f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

16.3 Независимость случайных величин

Определение 16.3. Случайные величины ξ и η **независимы**, если:

$$F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

Эквивалентно:

$$f(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$$

16.4 Условные распределения

Определение 16.4. Условная плотность:

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)}, \quad \text{если } f_\eta(y) > 0$$

16.5 Ковариация и корреляция

Определение 16.5. Ковариация:

$$\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E[\xi])(\eta - E[\eta])] = E[\xi\eta] - E[\xi]E[\eta]$$

Коэффициент корреляции:

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{Cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}$$

Свойство 16.1. Свойства:

- $-1 \leq \rho(\xi, \eta) \leq 1$
- Если ξ и η независимы, то $\rho(\xi, \eta) = 0$
- $|\rho(\xi, \eta)| = 1 \iff$ существует линейная зависимость

17 Предельные теоремы

17.1 Неравенства

Теорема 17.1 (Неравенство Маркова)**.** Если $\xi \geq 0$, то

$$P(\xi \geq t) \leq \frac{E[\xi]}{t}$$

Теорема 17.2 (Неравенство Чебышева)**.**

$$P(|\xi - E[\xi]| \geq t) \leq \frac{D[\xi]}{t^2}$$

17.2 Закон больших чисел

Теорема 17.3 (Слабый закон больших чисел (теорема Чебышева))**.** Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями, ограниченными одной константой, то:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{E[\xi_1] + E[\xi_2] + \cdots + E[\xi_n]}{n}$$

Теорема 17.4 (Усиленный закон больших чисел (теорема Колмогорова))**.** При более сильных условиях сходимость происходит почти наверное.

17.3 Центральная предельная теорема

Теорема 17.5 (Теорема Ляпунова)**.** Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями a_i и дисперсиями σ_i^2, и выполняется условие Ляпунова, то:

$$\frac{\sum \xi_i - \sum E_i}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Теорема 17.6 (Теорема Муавра-Лапласа)**.** Частный случай ЦПТ для схемы Бернулли.

18 Цепи Маркова

18.1 Определение

Определение 18.1. Цепь Маркова — последовательность случайных величин $X_0, X_1, X_2, \ldots$, такая что:

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

18.2 Переходные вероятности

Определение 18.2. $p_{ij}(n)$ — вероятность перехода из состояния i в состояние j за n шагов.

Матрица переходных вероятностей:

$$P = (p_{ij}), \quad \text{где } \sum_j p_{ij} = 1$$

18.3 Уравнение Чепмена-Колмогорова

Теорема 18.1.

$$p_{ij}(m+n) = \sum_k p_{ik}(m) \cdot p_{kj}(n)$$

18.4 Классификация состояний

- **Достижимое состояние:** j достижимо из i, если $p_{ij}(n) > 0$ для некоторого n
- **Сообщающиеся состояния:** i и j сообщаются, если каждое достижимо из другого
- **Неприводимая цепь:** все состояния сообщаются
- **Возвратное состояние:** вероятность возвращения равна 1
- **Периодическое состояние:** НОД$\{n : p_{ii}(n) > 0\} > 1$

18.5 Стационарное распределение

Определение 18.3. Распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ называется **стационарным**, если:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij} \quad \text{для всех } j$$

и $\sum_j \pi_j = 1$.