Теория вероятностей и математическая статистика

Теоретический справочник

Содержание

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1 Случайное событие

Определение: Случайное событие — это результат опыта, который может произойти или не произойти при выполнении определённого комплекса условий.

- **Достоверное событие** (Ω) — событие, которое обязательно произойдёт
- **Невозможное событие** ($\emptyset$) — событие, которое не может произойти
- **Противоположное событие** ($\overline{A}$) — событие, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A

1.2 Вероятность

Определение: Вероятность события A — это числовая мера возможности наступления этого события.

Свойства вероятности:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Классическое определение:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где m — число благоприятных исходов, n — общее число равновозможных исходов.

2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Определение случайной величины

Определение: Случайная величина — это функция, которая каждому элементарному исходу ставит в соответствие некоторое действительное число.

Типы случайных величин:

- **Дискретные** — принимают счётное множество значений
- **Непрерывные** — принимают любые значения из некоторого интервала

3 ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

3.1 Определение

Функция распределения $F(x)$ случайной величины X — это функция, определяющая вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x)$$

3.2 Свойства функции распределения

1. **Монотонность**: $F(x)$ — неубывающая функция
2. **Ограниченность**: $0 \leq F(x) \leq 1$
3. **Предельные значения**:
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. **Непрерывность слева**: $F(x - 0) = F(x)$

3.3 Связь с вероятностью

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

4 ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

4.1 Определение

Плотность распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X — это производная функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

4.2 Свойства плотности распределения

1. **Неотрицательность**: $f(x) \geq 0$ для всех x
2. **Связь с функцией распределения**:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

3. **Вероятность попадания в интервал**:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

5 УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ

5.1 Для дискретных случайных величин

Условие нормировки: Сумма всех вероятностей должна равняться единице:

$$\sum P(X = x_i) = 1$$

5.2 Для непрерывных случайных величин

Условие нормировки: Интеграл плотности по всей области определения равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Физический смысл: Случайная величина обязательно примет какое-то значение из множества всех возможных значений.

6 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

6.1 Определение

Математическое ожидание $E[X]$ (или $M[X]$) — это среднее значение случайной величины, взвешенное по вероятностям.

6.2 Формулы

Для дискретной случайной величины:

$$E[X] = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$$

Для непрерывной случайной величины:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

6.3 Свойства математического ожидания

1. **Линейность**: $E[aX + b] = aE[X] + b$
2. **Аддитивность**: $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
3. **Для независимых величин**: $E[XY] = E[X]E[Y]$

Физический смысл: Математическое ожидание показывает "центр тяжести"распределения случайной величины.

7 ДИСПЕРСИЯ

7.1 Определение

Дисперсия $D[X]$ (или $\mathrm{Var}[X]$) — это мера разброса случайной величины относительно её математического ожидания:

$$D[X] = E[(X - E[X])^2]$$

7.2 Формулы для вычисления

Альтернативная формула:

$$D[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Для дискретной случайной величины:

$$D[X] = \sum (x_i - E[X])^2 \cdot P(X = x_i)$$

Для непрерывной случайной величины:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 \cdot f(x) dx$$

7.3 Свойства дисперсии

1. $D[X] \geq 0$
2. $D[c] = 0$ (для константы c)
3. $D[aX + b] = a^2 D[X]$
4. Для независимых величин: $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$

7.4 Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

Физический смысл: Дисперсия характеризует степень разброса значений случайной величины вокруг математического ожидания.

8 КОВАРИАЦИЯ

8.1 Определение

Ковариация двух случайных величин X и Y — это мера их линейной зависимости:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

8.2 Формулы для вычисления

Альтернативная формула:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Для дискретных случайных величин:

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum\sum(x_i - E[X])(y_j - E[Y]) \cdot P(X = x_i, Y = y_j)$$

8.3 Свойства ковариации

1. $\text{Cov}(X, X) = D[X]$
2. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ (симметричность)
3. $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \cdot \text{Cov}(X, Y)$
4. Для независимых величин: $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Интерпретация:

- $\text{Cov}(X, Y) > 0$: положительная связь
- $\text{Cov}(X, Y) < 0$: отрицательная связь
- $\text{Cov}(X, Y) = 0$: отсутствие линейной связи

9 КОРРЕЛЯЦИЯ

9.1 Определение

Коэффициент корреляции (коэффициент корреляции Пирсона) — это нормированная ковариация:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma[X] \cdot \sigma[Y]}$$

где $\sigma[X]$ и $\sigma[Y]$ — среднее квадратическое отклонение X и Y соответственно.

9.2 Свойства коэффициента корреляции

1. **Ограниченность**: $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
2. **Симметричность**: $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$
3. **Инвариантность к линейным преобразованиям**: $\rho(aX + b, cY + d) = \text{sign}(ac) \cdot \rho(X, Y)$

9.3 Интерпретация значений

- $\rho = 1$: полная положительная линейная зависимость
- $\rho = -1$: полная отрицательная линейная зависимость
- $\rho = 0$: отсутствие линейной зависимости
- $|\rho|$ близко к 1: сильная линейная связь
- $|\rho|$ близко к 0: слабая линейная связь

Физический смысл: Коэффициент корреляции показывает силу и направление линейной связи между двумя случайными величинами.

10 ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

10.1 Определение

Характеристическая функция случайной величины X — это комплекснозначная функция:

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = E[\cos(tX)] + i \cdot E[\sin(tX)]$$

10.2 Формулы

Для дискретной случайной величины:

$$\varphi_X(t) = \sum e^{itx_k} \cdot P(X = x_k)$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot f(x)dx$$

10.1 Свойства характеристической функции

1. $\varphi_X(0) = 1$
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$ для всех t
3. **Равномерная непрерывность**
4. **Взаимно однозначное соответствие** с функцией распределения

10.2 Связь с моментами

k-й момент:

$$E[X^k] = \frac{1}{i^k} \cdot \left. \frac{d^k \varphi_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

Математическое ожидание:

$$E[X] = \frac{1}{i} \cdot \varphi'_X(0)$$

Дисперсия:

$$D[X] = -\varphi''_X(0) + (\varphi'_X(0))^2$$

11 ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

11.1 Нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$

Плотность:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Параметры:

- $E[X] = \mu$
- $D[X] = \sigma^2$

Характеристическая функция:

$$\varphi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

11.2 Показательное распределение Exp(λ)

Плотность:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Параметры:

- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $D[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

11.3 Равномерное распределение $U(a, b)$

Плотность:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

Параметры:

- $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- $D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

12 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

12.1 Закон больших чисел (ЗБЧ)

При увеличении числа независимых испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений стремится к математическому ожиданию.

12.2 Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Сумма большого числа независимых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному, независимо от распределений слагаемых.

12.3 Неравенство Чебышёва

$$P(|X - E[X]| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$