

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Лабораторная работа по общему курсу физики
Электричество и магнетизм

Спектральный анализ электрических сигналов.

Таранов Александр
Группа Б01-206

Содержание

1	Теоретическое введение	1
1.1	Периодические прямоугольные импульсы	1
1.2	Периодическая последовательность цугов	2
1.3	Амплитудно-модулированные колебания	2
2	Ход работы	4
2.1	Прямоугольные импульсы и проверка соотношений неопределенностей .	4
2.2	Спектр периодической последовательности цугов	5
2.3	Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала	5
2.4	Изучение фильтрации сигналов	7
3	Заключение	7

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигналов на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределенностей, познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье, подключенный к персональному компьютеру.

1. Теоретическое введение

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt.$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n :

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$\psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}. \quad (4)$$

1.1. Периодические прямоугольные импульсы

Введем величину: $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (5)$$

Здесь V_0 — амплитуда сигнала.

Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

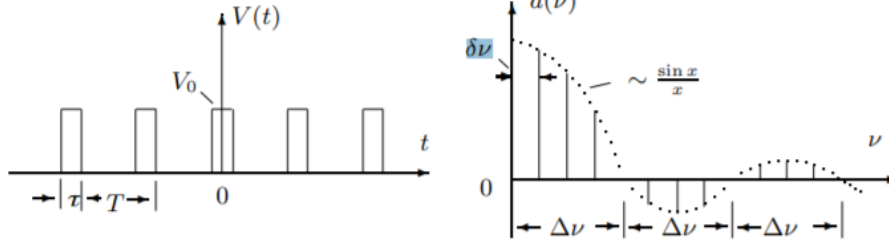


Рис. 1: График сигнала и его спектра (прямоугольный импульс)

Пусть T кратно τ . Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ – расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6)$$

1.2. Периодическая последовательность цугов

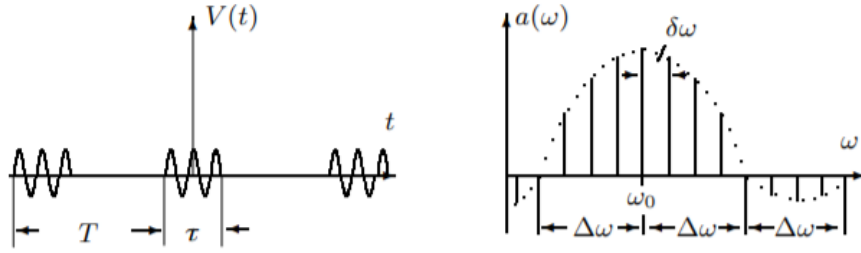


Рис. 2: График сигнала и его спектра (цуг)

Возьмём цуги колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T .

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = \\ &= V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть T кратно τ . Тогда спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0 .

1.3. Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

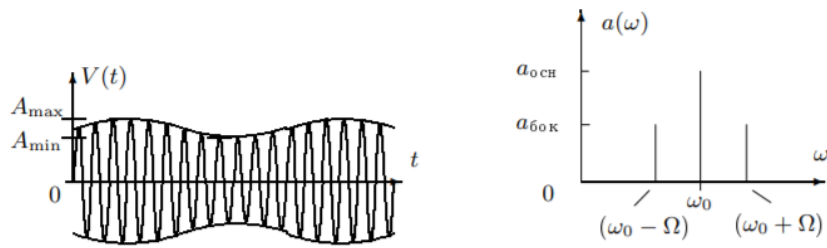


Рис. 3: Пример амплитудной модуляции

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (8)$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \quad (9)$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (10)$$

2. Ход работы

2.1. Прямоугольные импульсы и проверка соотношений неопределенностей

Из соотношения неопределенности найдем ширину спектра

$$\Delta\nu = 1/\tau = 1/50 \cdot 10^{-6} = 20 \text{ кГц}$$

Будем изменять $\nu_{\text{повт}}$ при фиксированном τ , а затем τ при фиксированном $\nu_{\text{повт}}$:

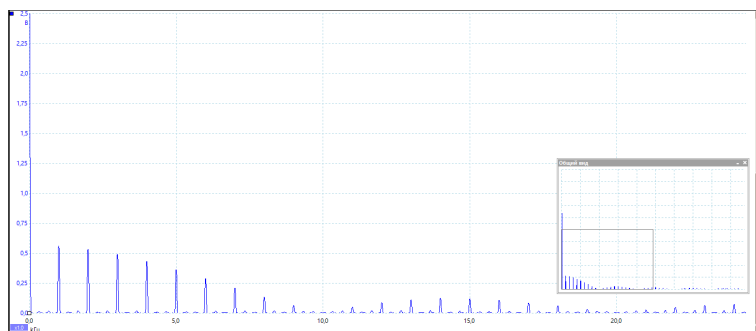


Рис. 4: Спектр при $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$

Из графиков видно выполнение соотношения неопределенности: для спектра при $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$, $\Delta\nu = 10 \text{ кГц} = 1/100 \cdot 10^{-6}$.

Измерим амплитуды и частоты нескольких гармоник, сравним их с значениями рассчитанными теоретически по формулам:

$$\nu_n \frac{n}{T}, |a_n| = \frac{|\sin(\frac{\pi n \tau}{T})|}{\pi n}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu_{\text{эксп}}, \text{ кГц}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu_{\text{теор}}, \text{ кГц}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_{\text{эксп}}, \text{ мВ}$	3172	563	532,9	493,5	433,3	366,2	294,4	213,4	134,7
$a_{\text{теор}}, \text{ мВ}$	-	0,0984	0,0935	0,0858	0,0757	0,0637	0,0505	0,0368	0,0234
$a_{\text{эксп}}/a_1$	-	1,00	0,95	0,88	0,77	0,65	0,52	0,38	0,24
$a_{\text{теор}}/a_1$	-	1,00	0,95	0,87	0,77	0,65	0,51	0,37	0,24

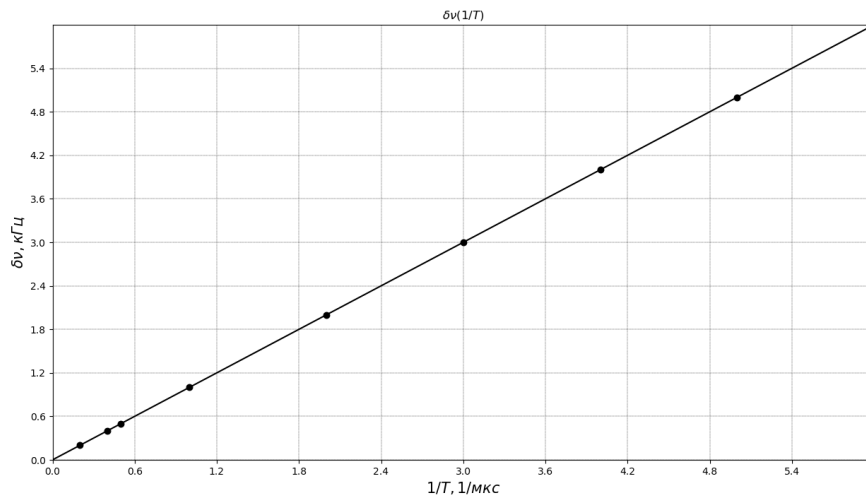
Теперь зафиксируем период повторения прямоугольного сигнала и будем изменять длительность импульса:

$\tau, \text{ мкс}$	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$\nu, \text{ кГц}$	49	25	17	15	10	8	7	6	6,5	5
$1/\tau, \text{ мкс} \cdot 10^6$	0,050	0,025	0,017	0,013	0,010	0,008	0,007	0,006	0,006	0,005

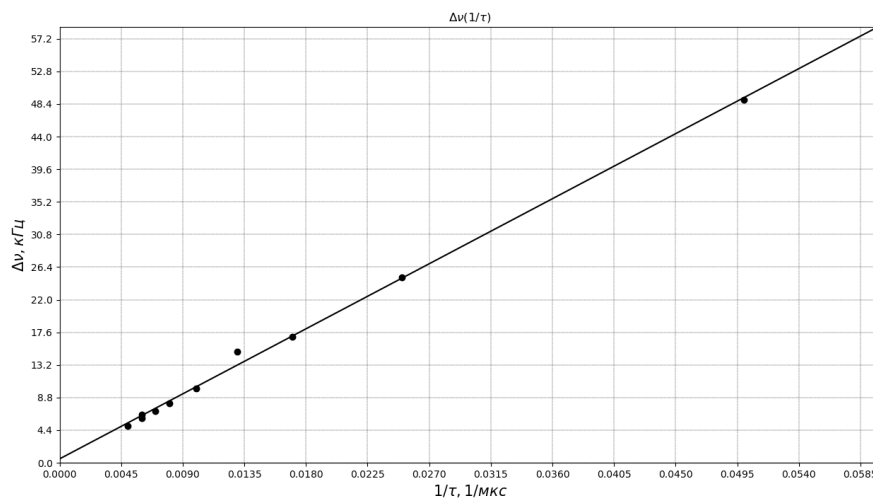
Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала и будем изменять период повторения:

$\nu, \text{ кГц}$	5	4	3	2	1	0,5	0,4	0,2
$\delta\nu, \text{ кГц}$	5	4	3	2	1	0,5	0,4	0,2

Построим графики зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$ и $\delta\nu(1/T)$:



\bar{x}	σ_x^2	\bar{y}	σ_y^2	r_{xy}	a	Δa	b	Δb
2.01e+00	2.88e+00	2.01	2.88e+00	2.88e+00	1.00	0.00	0.00	0.00



\bar{x}	σ_x^2	\bar{y}	σ_y^2	r_{xy}	a	Δa	b	Δb
1.47e-02	1.73e-04	14.85	1.65e+02	1.69e-01	975.15	16.89	0.52	0.33

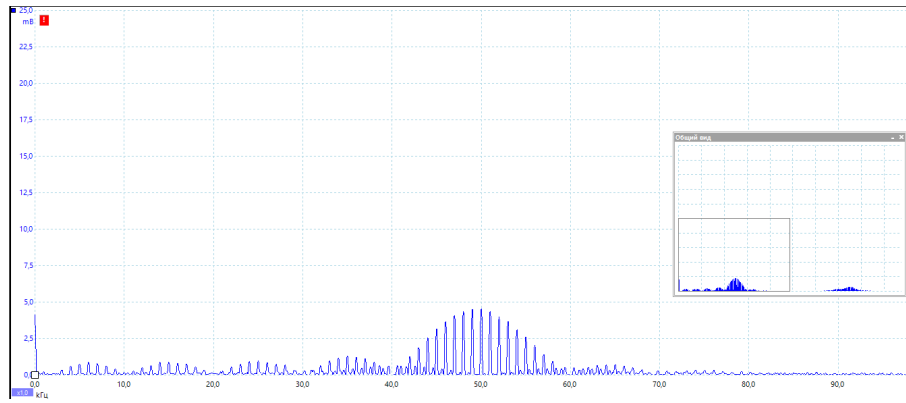
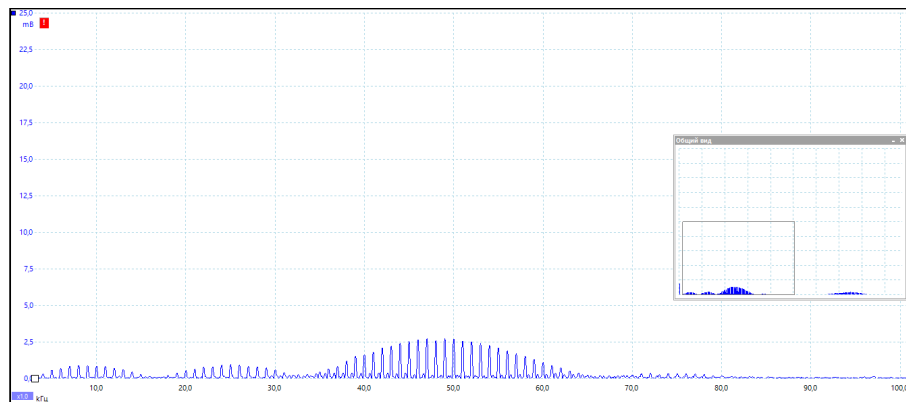
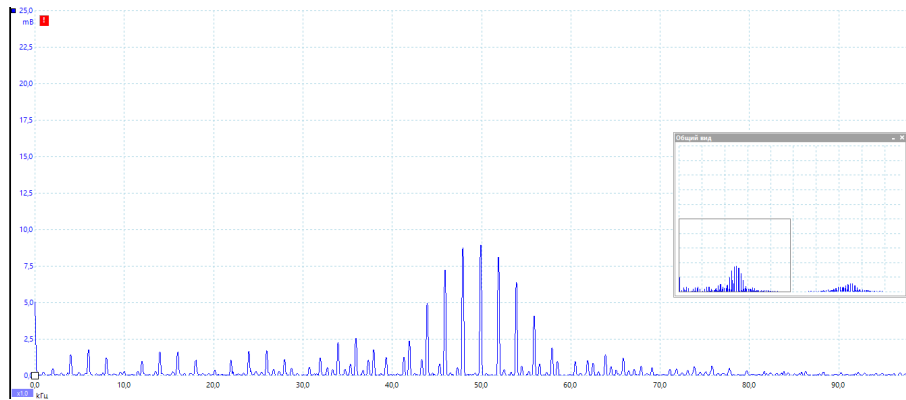
2.2. Спектр периодической последовательности цугов

Будем изменять параметры сигнала: частоту несущую сигнал, период повторения и число периодов синусоиды в одном импульсе.

2.3. Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

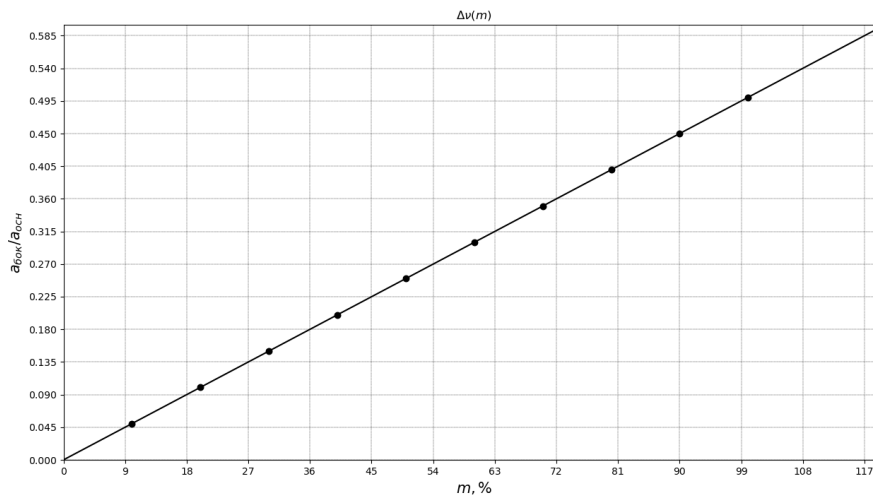
Измерим максимальную и минимальную амплитуды сигнала: $A_{max} = 1,504 \text{ В}$, $A_{min} = 496,4 \text{ мВ}$. $\nu_0 = 50 \text{ кГц}$, $\nu_{\text{мод}} = 2 \text{ нГц}$.

Измерим амплитуды боковой и основной спектральных линий, в зависимости от глубины модуляции:

Рис. 5: Спектр при $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$ Рис. 6: Спектр при $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 3$ Рис. 7: Спектр при $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 0.5$ мс, $N = 5$

m, %	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$a_{\text{очн}}, \text{ мВ}$	705	705	705	705	705	705	705	705	705	705
$a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	34,72	69,91	105	140	175,5	209	247,4	279,4	316,2	351,4
$a_{\text{бок}}/a_{\text{очн}}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50

\bar{x}	σ_x^2	\bar{y}	σ_y^2	r_{xy}	a	Δa	b	Δb
5.50e+01	8.25e+02	0.28	2.06e-02	4.12e+00	0.00	0.00	0.00	0.00



2.4. Изучение фильтрации сигналов

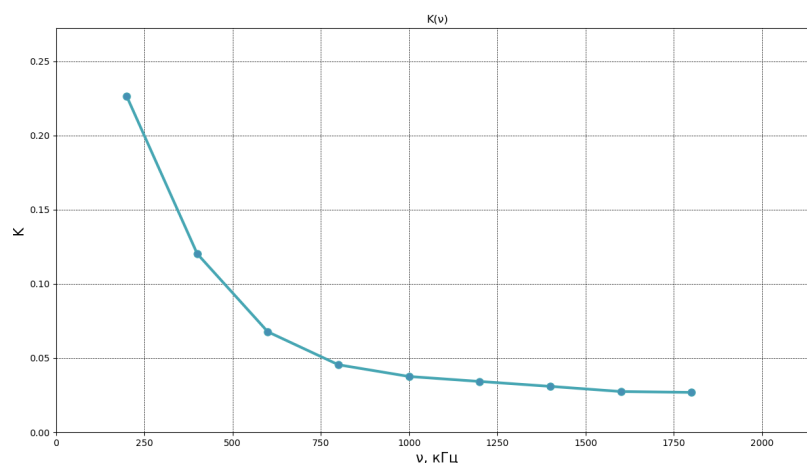
Характеристики сигнала и RC-цепочки:

$$\tau_{RC} = RC = 3\text{мкс}, T = 3\text{мкс}, \tau = 150\text{нс}$$

Сравним исходный и фильтрованный сигнал:

$a_{\Phi}, \text{мВ}$	38,62	20	12	6,9	6,2	5,6	4,8	4,2	4,1
$a_0, \text{мВ}$	170	169	167,8	166,1	163	159,7	156,8	155,7	150
K	0,227	0,118	0,072	0,042	0,038	0,035	0,031	0,027	0,027
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu, \text{кГц}$	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800

Построим график зависимости амплитудного коэффициента фильтрации от частоты:



3. Заключение

Таким образом теоретическое описание спектров исследуемых сигналов подтвердилось на основе их изучения с помощью генератора и осциллографа.