

Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Лабораторная работа по общему курсу физики  
Электричество и магнетизм

## **Скин-эффект.**

Таранов Александр  
Группа Б01-206

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>1</b>
1.1	Скин-эффект в полом цилиндре . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Экспериментальная установка</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Ход работы</b>	<b>5</b>
3.1	Параметры установки . . . . .	5
3.2	Низкие частоты . . . . .	5
3.3	Высокие частоты . . . . .	6
3.4	Индуктивность катушки . . . . .	7
3.5	Зависимость коэффициентов ослабления . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>8</b>

**Цель работы:** исследовать явление проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр.

**В работе используются:** генератор сигналов АКИП–3420, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас, медный экран в виде полого цилиндра, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, двухканальный осциллограф GOS–620, RLC-метр.

## 1. Теоретическое введение

*Скин-эффектом* называется явление протекания токов высокой частоты в тонком поверхностном слое проводника. Скин-эффект проявляется в виде уменьшения амплитуды колебаний внутри проводника и увеличения в поверхностном слое.

Качественно скин-эффект объясняется явлением электромагнитной индукции. Рассмотрим длинный цилиндрический проводник (рис. 1), по которому течет ток  $J$ . Согласно закону Био-Савара-Лапласа, электрический ток создает магнитное поле  $B$ , силовые линии которого представляют собой окружности с центром на оси проводника.

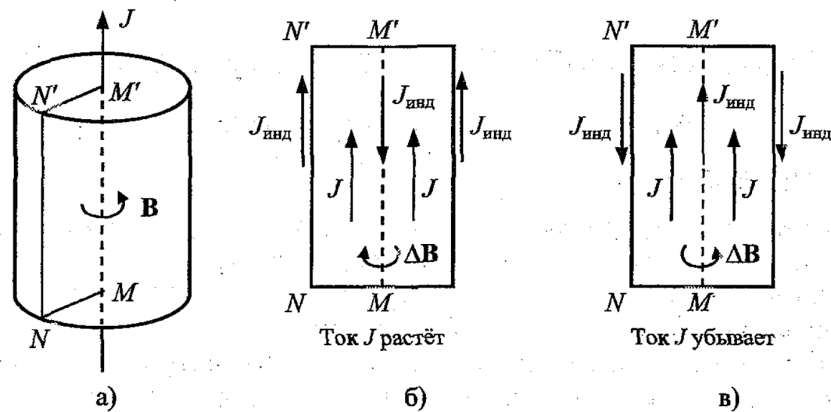


Рис. 1: а) – переменный ток внутри проводника. б) и в) – случаи увеличения и уменьшения тока.

Рассмотрим контур  $NMM'N'$  внутри проводника. По закону электромагнитной индукции при изменении магнитного потока сквозь этот контур, создаётся индукционное электрическое поле:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$$

При возрастании тока через проводник  $\frac{dJ}{dt} > 0$ , индукционный ток сонаправлен с внешним током на отрезке  $NN'$  и противоположно направлен на отрезке  $MM'$ . При убывании тока  $\frac{dJ}{dt} < 0$ , индукционный ток будет сонаправлен на отрезке  $MM'$  и противоположно направлен на отрезке  $NN'$ . Таким образом, индукционное электрическое поле стремится скомпенсировать изменение внешнего поля внутри проводника и усилить на поверхности. В этом и заключается суть скин-эффекта.

## 1.1. Скин-эффект в полем цилиндре

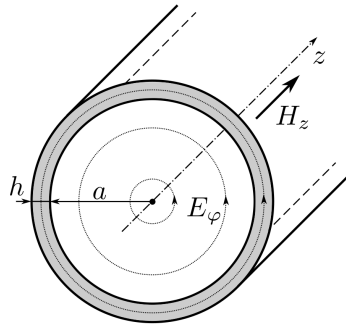


Рис. 2

В работе изучается скин-эффект в медном цилиндре, помещенном внутрь соленоида. Найти теоретическое распределение электромагнитного поля внутри такого цилиндра является сложной задачей, поэтому для упрощения вычислений и эксперимента используются следующие предположения. Цилиндр должен быть длинным, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами и считать электромагнитное поле зависящим только от расстояния до оси симметрии цилиндра. Так как измерить поле внутри твердого тела невозможно, то используется полый цилиндр. Измерив поле внутри цилиндра, можно вычислить поле на его границе. Чтобы можно

было пренебречь кривизной стенок цилиндра и в малой области считать их плоскими, стенки цилиндра должны быть тонкими.

Магнитное поле внутри цилиндра направлено вдоль оси  $z$ , а вихревое электрическое поле всюду перпендикулярно радиусу. Пусть электромагнитное поле изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega$ :

$$H_z = H(r) \cdot e^{i\omega t}$$

$$E_\varphi = E(r) \cdot e^{i\omega t}$$

На границе цилиндра касательные к поверхности компоненты как  $\mathbf{E}$ , так и  $\mathbf{H}$  непрерывны. Так как внутри цилиндра ток отсутствует, то магнитное поле внутри цилиндра является однородным.

$$H_z(r, t) = H_1 e^{i\omega t}$$

По закону Фарадея найдем вихревое электрическое поле:

$$E_\varphi \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \mu_0 \frac{dH_z}{dt}$$

$$E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

На границе цилиндра  $E_1 = -\frac{1}{2} i\omega a \mu_0 H_1$ .

Найдем распределение поля внутри стенки. Поле внутри стенки описывается уравнением скин-эффекта.

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega \sigma \mu_0 H$$

Зададим следующие граничные условия:

$$H(0) = H_0$$

$$H(h) = H_1$$

Решения будем искать в виде:

$$H(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

Решением дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям будет

$$H_1 = \frac{H_0}{\operatorname{ch} ah + \frac{1}{2} \alpha a \operatorname{sh}(\alpha h)} \quad (1)$$

Рис. 3: Поле в стенке цилиндра  
где  $\alpha = \sqrt{i\omega \sigma \mu_0} = \frac{1+i}{\delta}$ .

Проанализируем предельные случаи.

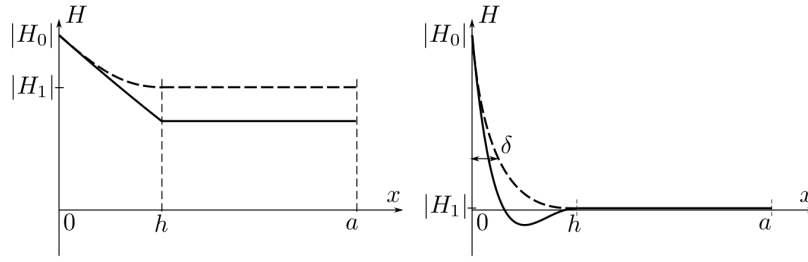


Рис. 4: Распределение амплитуды колебаний магнитного поля изображено пунктиром, мгновенное значение в некоторый момент времени – сплошной линией. Слева случай низких частот  $\delta \gg h$ , справа случай высоких частот  $\delta \ll h$ .

1. Случай низких частот  $\delta \gg h$ . Толщина скин-слоя превосходит толщину цилиндра, поэтому магнитное поле не полностью затухает внутри стенки цилиндра и имеет некую постоянную составляющую внутри полости.  $\alpha h \ll 1$ ,  $\text{ch } \alpha h \approx 1$ ,  $\text{sh } \alpha h \approx \alpha h$ .

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i \frac{ah}{\delta^2}}$$

Тогда отношение модулей амплитуд будет равно:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (ah\sigma\mu_0\omega)^2}} \quad (2)$$

Колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол

$$\psi = \arctg \left( \frac{ah}{\delta} \right)^2. \quad (3)$$

2. Случай высоких частот  $\delta \ll h$ . Толщина скин слоя меньше толщины стенки, поэтому внутри цилиндра магнитное поле будет равно 0.  $\alpha h \gg 1$ ,  $\text{sh } \alpha h \approx \text{ch } \alpha h \approx \frac{1}{2} e^{\alpha h}$ .

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha a} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta})}$$

Тогда отношение модулей амплитуд будет равно:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}} \quad (4)$$

Колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол

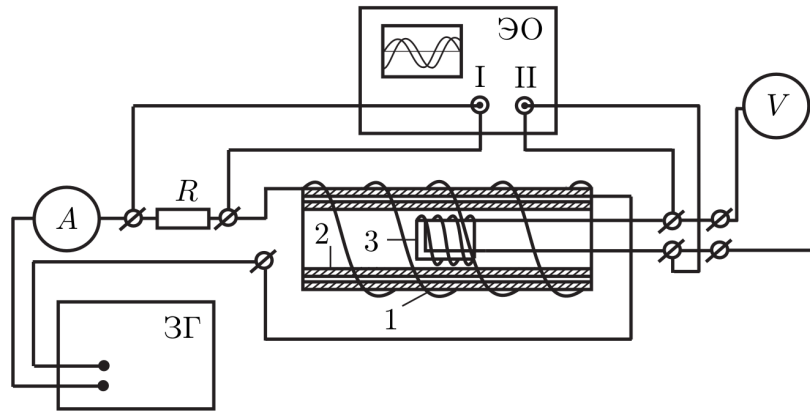
$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} \quad (5)$$

## 2. Экспериментальная установка

### Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке:

Переменное магнитное поле создаётся соленоидом, подключенным к генератору звуковой частоты ЗГ. Соленоид намотан на полый цилиндрический каркас из поливинилхлорида 1, в который вставлен медный цилиндр 2. Для измерения магнитного



поля внутри цилиндра используется измерительная катушка 3. Действующие значения тока и напряжения в цепи измеряются соответственно амперметром  $A$  и вольтметром  $V$ . Для измерения сдвига фаз используется осциллограф ЭО. Один вход осциллографа подключен к резистору, напряжение на котором пропорционально току в цепи. Второй вход подключен к измерительной катушке.

ЭДС индукции, возникающая в измерительной катушке равна

$$U = -SN \frac{dB_1(t)}{dt} = -i\omega\mu_0 SN H_1 e^{i\omega t}$$

Действующее значение напряжения, измеряемое вольтметром

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 |H_1|$$

Магнитное поле внутри цилиндра пропорционально напряжению и обратно пропорционально частоте:

$$|H_1| \propto \frac{U}{\nu}$$

Магнитное поле снаружи катушки пропорционально пропускаемому току:

$$|H_0| \propto I$$

Тогда

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = C \cdot \frac{U}{\nu I} \quad (6)$$

где  $C$  – некоторая константа. Эта константа может быть экспериментально измерена при малых частотах, так как при  $\nu \rightarrow 0$ , выполняется  $\frac{|H_1|}{|H_0|} \rightarrow 1$ .

Так как материал, из которого изготовлен цилиндр может содержать примеси, то в работе измеряется проводимость данного цилиндра  $\sigma$ . Для измерения  $\sigma$  измеряется зависимость сдвига фаз между  $H_1$  и  $H_0$  от  $\nu$  в областях низких, высоких частот. Также измеряется индуктивность экрана  $L$  от частоты  $\nu$ .

Важно отметить, что, поскольку сигнал на измерительной катушке 3 пропорционален не полю, а его производной, то сдвиг фаз  $\psi = \varphi - \pi/2$ , где  $\varphi$  – измеренная на экране осциллографа разность фаз между входами  $I$  и  $II$ .

### 3. Ход работы

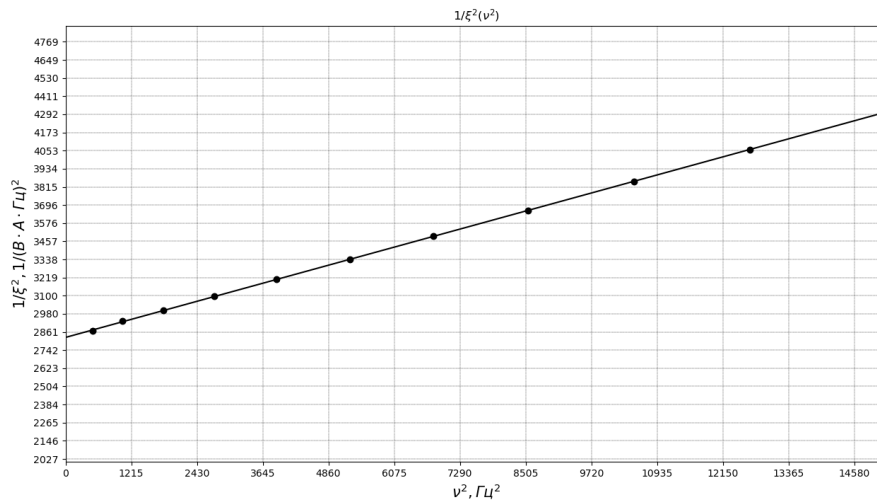
#### 3.1. Параметры установки

$D = 45$  мм - наружный диаметр полого цилиндра

$h = 1.5$  мм - толщина стенки полого цилиндра

#### 3.2. Низкие частоты

Используя экспериментальные данные построим график зависимости  $1/\xi^2 = f(\nu^2)$ :



$\bar{x}$	$\sigma_x^2$	$\bar{y}$	$\sigma_y^2$	$r_{xy}$	$a$	$\Delta a$	$b$	$\Delta b$
5.38e+03	1.56e+07	3350.81	1.48e+05	1.52e+06	0.100	0.0004	2825.33	1.41

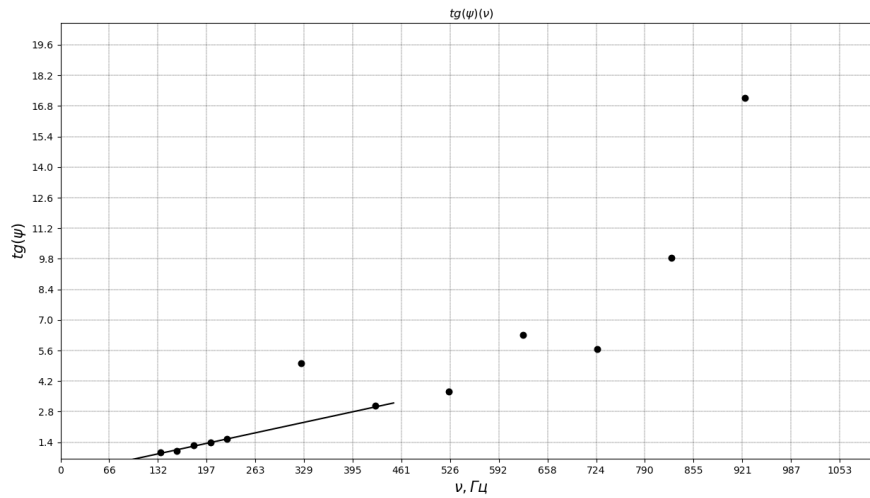
Используя формулу зависимости (6), найдём зависимость описывающую наш график:

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{4 + (a h \sigma \mu_0 2 \pi \nu)^2}{4 \xi_0^2}$$

Отсюда найдём проводимость меди:

$$\sigma = \frac{\sqrt{k} b}{a h \mu_0 \pi} = (4.73 \pm 0.19) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

Теперь найдем проводимость используя фазовый сдвиг, учитывая сдвиг по фазе на  $\pi/2$ :



$\bar{x}$	$\sigma_x^2$	$\bar{y}$	$\sigma_y^2$	$r_{xy}$	$a$	$\Delta a$	$b$	$\Delta b$
1.80e+02	1.01e+03	1.22	5.53e-02	7.41e+00	0.0100	0.0001	-0.10	0.11

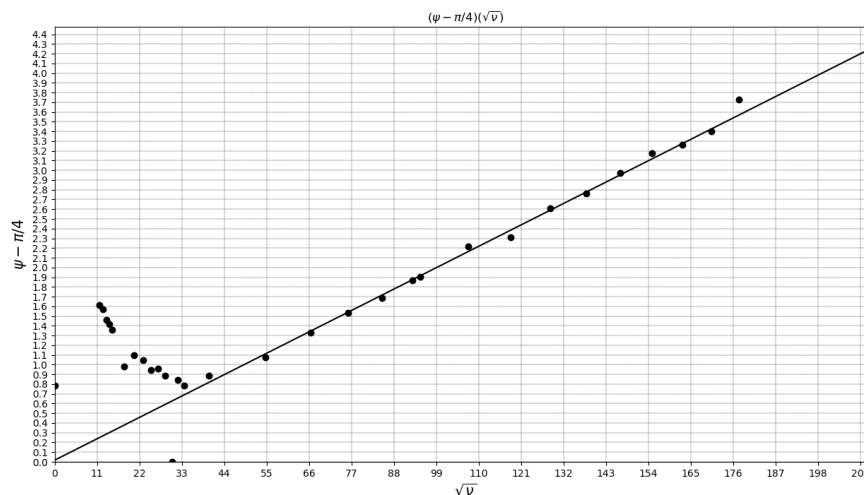
Аппроксимируем прямой линейный участок экспериментального графика. Из угла наклона найдем проводимость вещества:

$$tg(\psi) = tg(\phi + \pi/2) = \frac{ah}{\delta^2} = \pi ah\mu_0\sigma\nu$$

$$\sigma = (5.89 \pm 0.06) \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$$

### 3.3. Высокие частоты

Построим график зависимости (5), используя экспериментальные данные и прямую, проходящую через начало отсчета, которая будем касаться экспериментальных точек при больших частотах:





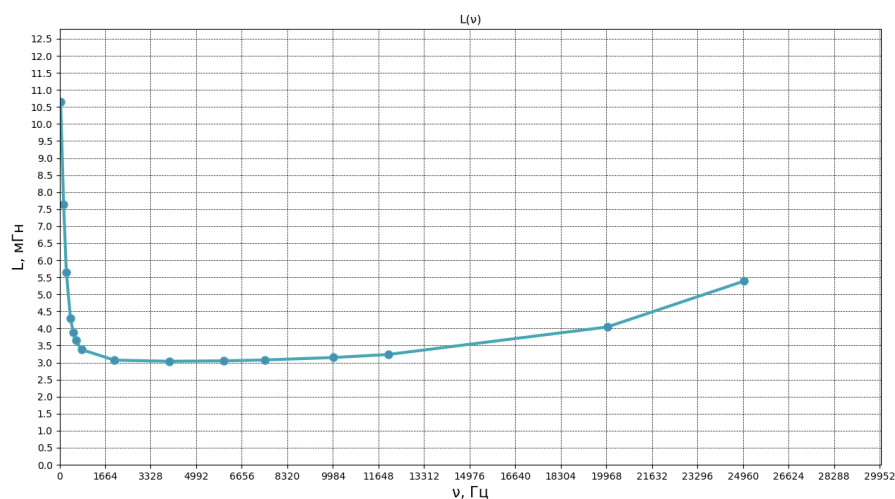
$\bar{x}$	$\sigma_x^2$	$\bar{y}$	$\sigma_y^2$	$r_{xy}$	$a$	$\Delta a$	$b$	$\Delta b$
6.83e+01	3.09e+03	1.69	8.33e-01	4.61e+01	0.0200	0.0001	0.67	0.11

Найдем проводимость используя угол наклона графика:

$$\sigma = \frac{k^2}{\pi h^2 \mu_0} = (4.52 \pm 0.18) \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$$

### 3.4. Индуктивность катушки

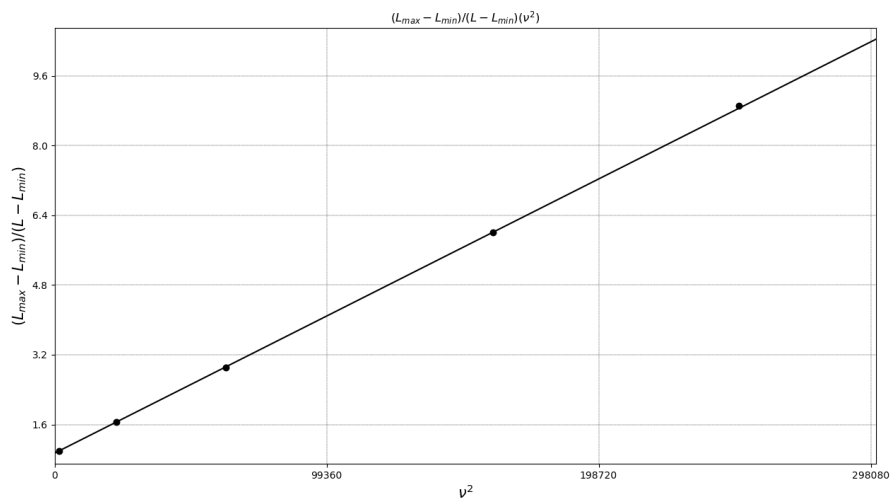
Используя полученные данные зависимости индуктивности катушки от частоту построим её график и найдём минимальное и максимальное значения индуктивностей:



$$L_{min} = 3.04 \text{ мГн}, L_{max} = 10.66 \text{ мГн}$$

Построим график зависимости  $(L_{max} - L_{min})/(L - L_{min})(\nu^2)$  и аппроксимируем его прямой:

$$f(L) = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2$$



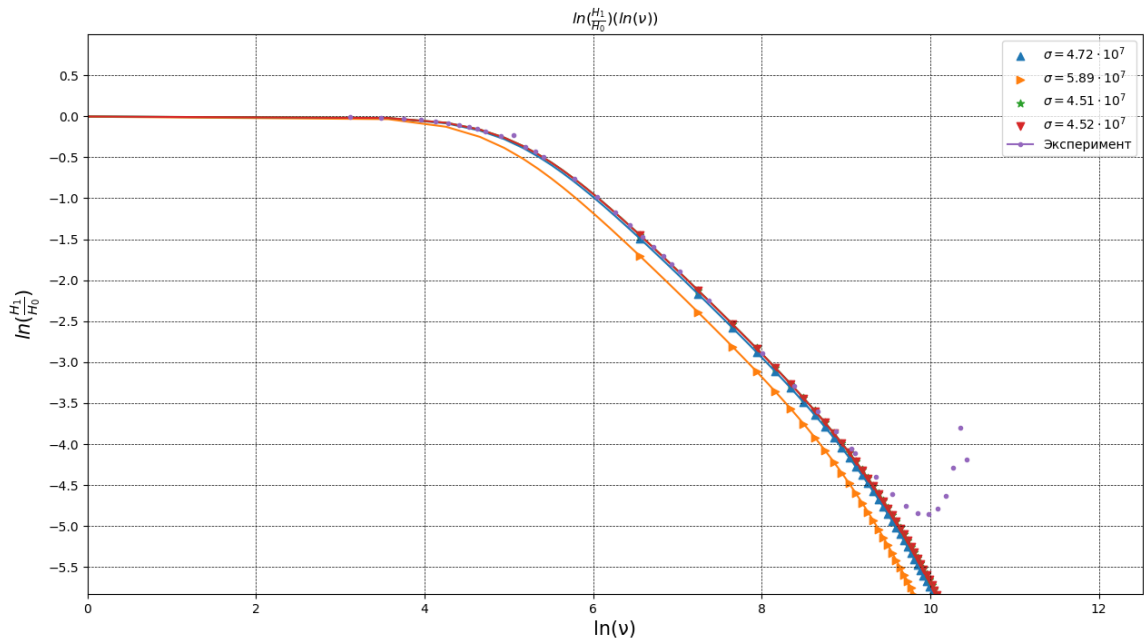
$\bar{x}$	$\sigma_x^2$	$\bar{y}$	$\sigma_y^2$	$r_{xy}$	$a$	$\Delta a$	$b$	$\Delta b$
9.93e+04	8.64e+09	4.10	8.77e+00	2.75e+05	3.19e-05	9.28e-08	0.93	0.01

Найдём проводимость из угла наклона графика:

$$\sigma = (4.54 \pm 0.1) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

### 3.5. Зависимость коэффициентов ослабления

Используя  $\xi_0$ , полученное ранее, рассчитаем зависимость коэффициентов ослабления поля для всего диапазона частот, полученных в ходе работы. Построим экспериментальную и теоретические зависимости данных кривых для разных значений проводимости.



Теоретические графики для разных значений проводимости совпадают с экспериментальными значениями, что говорит о выполнимости зависимости (1)

## 4. Заключение

В работе исследовался скин-эффект в медном полем цилиндре.

Была экспериментально подтверждена зависимость модуля магнитного поля  $H_1$  внутри цилиндра от величины внешнего магнитного поля  $H_0$  при низких частотах

$$|H_1| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}$$

где  $a$  – радиус цилиндра,  $h$  – толщина стенок цилиндра,  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$  – толщина скин-слоя.

Была определена проводимость медного цилиндра в области низких частот

$$\sigma = (4.73 \pm 0.19) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

Экспериментально была подтверждена теоретическая зависимость сдвига фазы между магнитным полем внутри цилиндра  $H_1$  и вне  $H_0$  в области низких частот:

$$\operatorname{tg} \psi = \left( \frac{ah}{\delta} \right)^2.$$

Была определена проводимость медного цилиндра вторым способом в области средних частот:

$$\sigma = (5.89 \pm 0.06) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

Экспериментально была подтверждена теоретическая зависимость сдвига фазы между магнитным полем внутри цилиндра  $H_1$  и вне  $H_0$  в области высоких частот:

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta}$$

Была определена проводимость в области высоких частот:

$$\sigma = (4.52 \pm 0.18) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

С помощью  $RLC$ -метра была определена проводимость цилиндра:

$$\sigma = (4.54 \pm 0.1) \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$