

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Лабораторная работа по общему курсу физики
Электричество и магнетизм

**Свободные и вынужденные колебания в
электрическом контуре.**

Таранов Александр
Группа Б01-206

Содержание

1	Теоретическое введение	1
1.1	Последовательный RLC контур	1
1.2	Свободные затухающие колебания	1
1.3	Апериодические колебания	1
2	Экспериментальная установка	2
3	Ход работы	3
3.1	Проверка формулы Томсона	3
3.2	Определение критического сопротивления и декремента затухания . . .	5
3.3	Добротность контура	6
4	Заключение	9

Цель работы: исследования свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре.

В работе используются: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, индуктивность, электронный осциллограф.

1. Теоретическое введение

1.1. Последовательный RLC контур

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R . Обозначим разность потенциалов на конденсаторе U_C , а ток, текущий в контуре, через I . Тогда

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad (1)$$

Вводя обозначения $\gamma = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, получим уравнение

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad (2)$$

Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh}(\kappa t), \quad (3)$$

где $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $U_0 = U_C$ – начальное напряжение на конденсаторе.

1.2. Свободные затухающие колебания

В случае, когда $\gamma < \omega_0$, имеем $\kappa = i\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – частоты свободных (собственных) колебаний. Тогда ток

$$I = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \quad (4)$$

затухает и имеет колебательный характер. Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = \frac{1}{\tau}$, где τ – время затухание амплитуды в e раз. Формулы для напряжения на конденсаторе и тока в цепи можно переписать иначе:

$$U_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta), \quad (5)$$

$$I = -\frac{U_0}{L} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta).$$

1.3. Аперiodические колебания

В случае $\gamma > \omega_0$, формулы для тока и напряжения на конденсаторе имеют следующий вид:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh}(\kappa t), \quad (6)$$

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\kappa} \text{sh}(\kappa t) + \text{ch}(\kappa t) \right).$$

Процесс в этом случае не является колебательным, его называют аperiodическим. Режим, соответствующий $\gamma = \omega_0$, называется *критическим*. В этом случае предельный переход $\omega \rightarrow 0$ в (6) даст

$$I = -\frac{U_0}{L}te^{-\gamma t}, \quad (7)$$

$$U_C = U_0e^{-\gamma t}(1 + \gamma t).$$

Сопротивление в этом случае

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8)$$

называется *критическим сопротивлением* контура.

Добротность контура по определению

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (9)$$

где W – запасённая энергия, ΔW – потери за период. Тогда

$$Q = 2\pi \frac{CU_0^2/2 \cdot e^{-2\gamma t}}{CU_0^2/2 \cdot (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(T+t)})} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10)$$

Логарифмическим декрементом затухания называются число

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \quad (11)$$

или

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}. \quad (12)$$

2. Экспериментальная установка

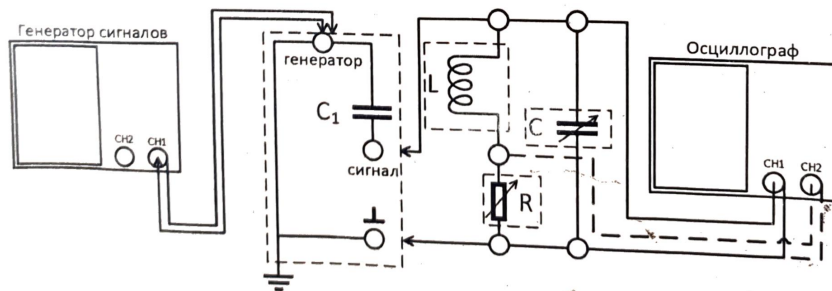


Рис. 1: Экспериментальная установка

Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности L с активным сопротивлением R_L , переменной емкостью C и сопротивлением R . Картина колебаний напряжения на емкости наблюдается на экране двухканального осциллографа. Для возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор C_1 на вход колебательного

контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

Установка предназначена для исследования не только возбужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи. При изучении свободно затухающих колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор. За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности. Напряжение на конденсаторе U_C поступает на вход канала 1(X) электронного осциллографа. Для наблюдения фазовой картины затухающих колебаний на канал 2(Y) подается напряжение с резистора R (пунктирная линия на схеме установки), которое пропорционально току $I(IdU_C/dt)$.

При изучении возбужденных колебаний на вход колебательного контура подается синусоидальный сигнал. С помощью осциллографа возможно измерить зависимость амплитуды возбужденных колебаний в зависимости от частоты внешнего сигнала, из которого возможно определить добротность колебаний. В этом случае генератор сигналов используется для подачи цугов синусоидальной формы.

3. Ход работы

3.1. Проверка формулы Томсона

Установим в контуре $R = 0$, $C = 0$, $L = 100$ мГн. Для генератора импульсов имеем следующие настройки: длительность импульсов 10 мкс, частота повторения импульсов 100 Гц. и амплитуда сигнала 20 В.

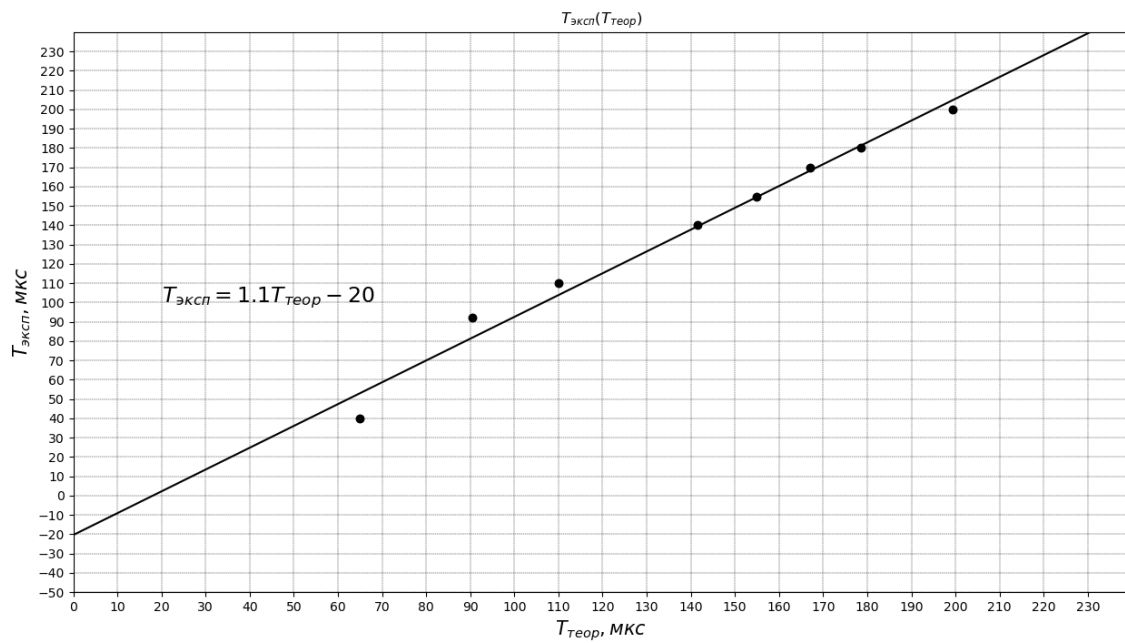
При таких параметрах установки период колебаний T_0 равен 65 мкс.

Теперь узнаем нулевое значение ёмкости магазина ёмкости, которое мы будем использовать как добавочную ёмкость:

$$C_0 = \frac{T_0^2}{4\pi^2 L} = \frac{(65 \cdot 10^{-6})^2}{4\pi^2 0.1} = 1,07 \cdot 10^{-9} \text{Ф} \quad (13)$$

Увеличивая значение C , снимем зависимость $T(C)$:

$T_{\text{эсп}}, \text{ мкс}$	40	92	110	140	155	170	180	200
$C, \text{ мкФ}$	1.07	2.07	3.07	5.07	6.07	7.07	8.07	10.07
$T_{\text{теор}}, \text{ мкс}$	65.0	90.4	110.1	141.5	154.8	167.1	178.5	199.4

Рис. 2: График зависимости $T_{\text{теор}}(T_{\text{эксп}})$

\bar{x}	σ_x^2	\bar{y}	σ_y^2	r_{xy}	a	Δa	b	Δb
1.38e+02	1.87e+03	135.88	2.42e+03	2.11e+03	1.13	0.06	-20.45	8.93

Из графика видно, что для цепи с $R = 0$ действительно выполняется формула Томсона для периода свободных колебаний. Однако нужно учитывать, что у катушки всё ещё есть сопротивление R_L и формула Томсона описывает период колебаний лишь приблизительно.

3.2. Определение критического сопротивления и декремента затухания

Из формулы Томсона, имея значение индуктивности катушки, найдём такую ёмкость, при которой частота колебаний будет равна 6.5 кГц: $C^* = 6$ нФ. Тогда поставим значение $C^* = 6$ нФ на магазине. Из полученных значений найдём критическое сопротивление из теоретической формулы: $R_{кр} = 2\sqrt{L/C} = 8165$ Ом.

Теперь найдём значение критического сопротивления, увеличивая сопротивление на магазине от нуля до тех пор, пока колебания не станут аperiodическими: $R_{кр} = 4000 \pm 100$ Ом.

Теперь установим посчитанное значение ёмкости на магазине ёмкостей. Снимая значения амплитуд с осциллографа, посчитаем зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления:

R, Ом	400	800	1000	1200	1400	1600	1800
Θ	0.43	0.85	1.02	1.18	1.33	1.65	1.94
U_m , В	3.18	2.4	2.08	1.8	1.57	1.35	1.18
U_{m+n} , В	0.88	0.44	0.27	0.17	0.11	0.26	0.17
n	3	2	2	2	2	1	1
$Q_{теор}$	10.21	5.10	4.08	3.40	2.92	2.55	2.28
Q	7.34	3.70	3.08	2.66	2.36	1.91	1.62

Таблица с результатами в фазовой плоскости:

R, Ом	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800
n	3	3	3	2	2	2	1	1
U_m , В	5.6	4.9	3.4	3.8	3.4	3	2.7	2.4
U_{m+n} , В	1.8	1	0.7	0.6	0.4	0.2	0.6	0.4
Θ	0.38	0.53	0.53	0.92	1.07	1.35	1.50	1.79
$Q_{теор}$	10.21	6.80	5.10	4.08	3.40	2.92	2.55	2.27
Q	8.30	5.93	5.96	3.41	2.94	2.32	2.09	1.75

Теперь построим зависимость $\frac{1}{\theta^2} \left(\frac{1}{R^2} \right)$:

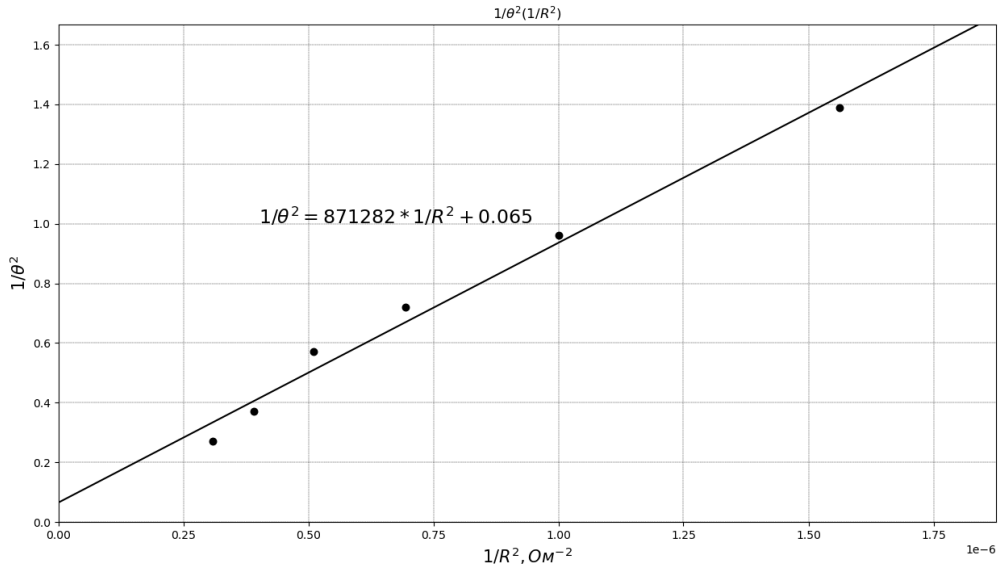


Рис. 3: График зависимости $\frac{1}{\theta^2} \left(\frac{1}{R^2} \right)$

\bar{x}	σ_x^2	\bar{y}	σ_y^2	r_{xy}	a	Δa	b	Δb
7.44e-07	1.85e-13	0.71	1.42e-01	1.61e-07	871282.13	54950.25	0.06	0.05

При этом критическое сопротивление связано с этим коэффициентом формулой $R_{кр} = 2\pi\sqrt{a} = 5873 \pm 370 \text{ Ом}$.

3.3. Добротность контура

Рассчитаем теперь значения добротности для минимум и максимума логарифмического декремента, взятые из предыдущей таблицы с данными:

$$Q_{min} = \frac{\pi}{\theta_{max}} = 1.62 \pm 0,10, \quad Q_{max} = \frac{\pi}{\theta_{min}} = 7.34 \pm 0,43 \quad (14)$$

Погрешности высоки из-за погрешностей измерения логарифмических декрементов затухания.

Теперь найдём те же самые значения через спирали на фазовой плоскости, измеряя аналогично логарифмический декремент затухания:

$$Q_{min} = \frac{\pi}{\theta_{max}} = 1.75 \pm 0,08, \quad Q_{max} = \frac{\pi}{\theta_{min}} = 8.30 \pm 0,49 \quad (15)$$

Теперь построим резонансные кривые в координатах $U/U_0 = f(\nu/\nu_0)$, где $U_0 = 8.5 \text{ В}$, $\nu_0 = 6.0 \text{ кГц}$. Для $R = 400 \text{ Ом}$

ν , кГц	6	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4
$2U_{Cres}$, В	17	7	7.9	10.7	12.5	14.5	16.1	16.1	15	13.6	10.9	10
$\Delta\phi$	1.40	2.52	2.47	2.27	2.09	1.91	1.66	1.13	0.95	0.74	0.54	0.42
Δx , мс	37.2	75.6	72.8	64.4	58.4	52.4	44.8	29.6	24.4	18.8	13.2	10
ω , c^{-1}	37.70	33.30	33.9	35.2	35.81	36.44	37.0	38.32	38.9	39.58	40.84	41.4
U/U_0	1	0.41	0.46	0.63	0.74	0.855	0.95	0.95	0.88	0.8	0.64	0.59
ν/ν_0	1	0.88	0.9	0.93	0.95	0.97	0.98	1.02	1.03	1.05	1.08	1.1

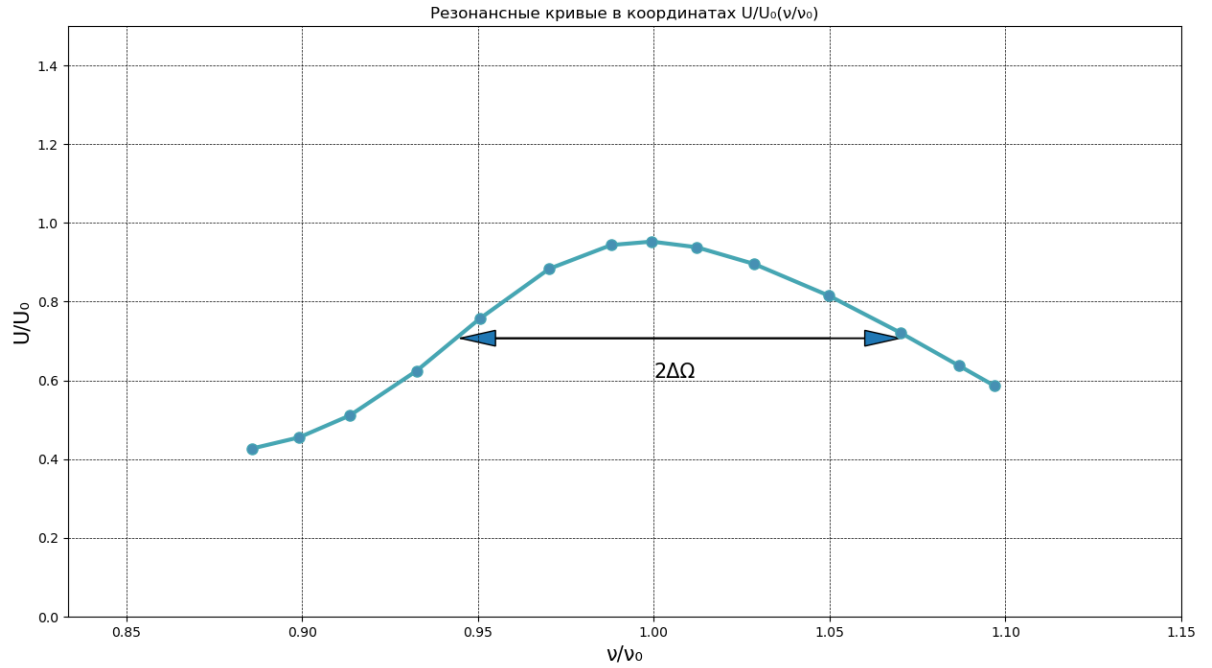


Рис. 4: График зависимости $U/U_0(\nu/\nu_0)$ при $R = 400$ Ом

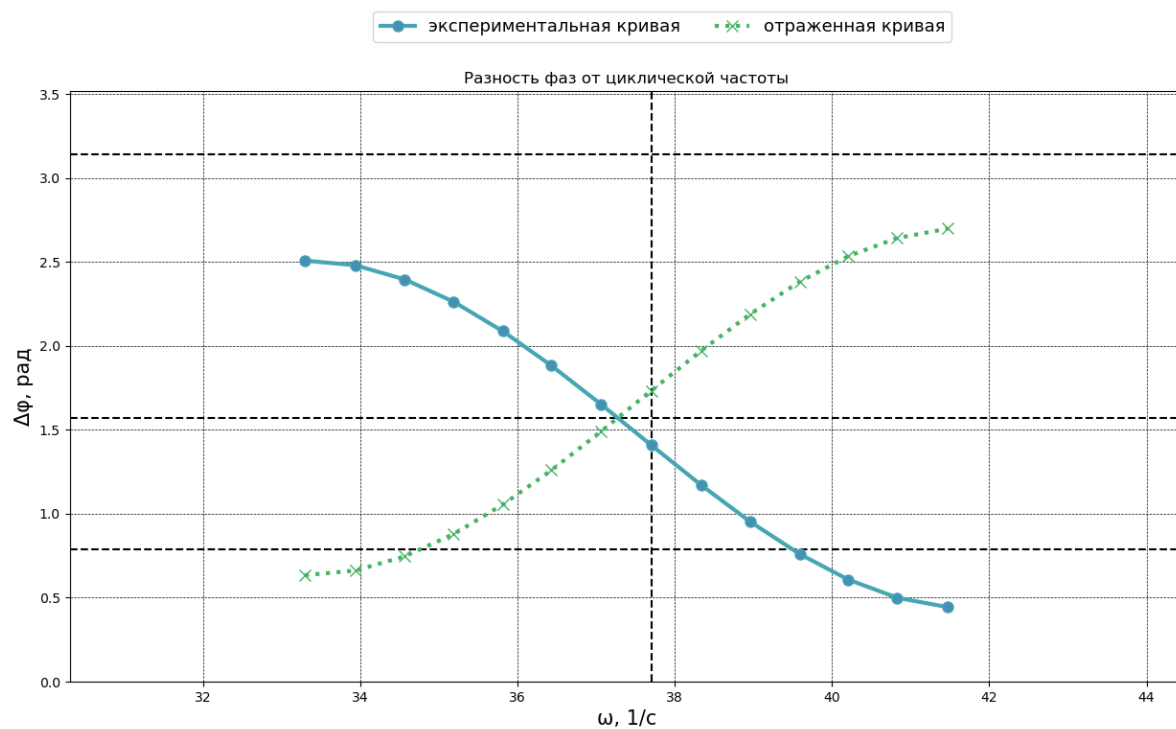
Расчитаем добротность, используя дельту между точками на уровне $f(1)/\sqrt{2}$:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega} = \frac{1}{1.05 - 0.945} = (9.52 \pm 0.48) \quad (16)$$

Построим ФЧХ для различных значений сопротивлений. Для нахождения добротности отразим нашу кривую на уровне $\pi/2$

Найдём добротность, используя разницу циклических частот на уровне $\pi/4$:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 37.7/(40.2 - 34.6) = (6.7 \pm 0.3) \quad (17)$$

Рис. 5: График зависимости $\phi(\omega)$ при $R = 400 \text{ Ом}$

4. Заключение

В результате эксперимента подтверждена формула Томсона для свободных колебаний, а так же измерены различные параметры RLC контура при различных значениях параметров контура.

Критическое сопротивление для контура было найдено тремя способами: $R_{кр} = 8165 \text{ Ом}$ – посчитанное значение из теоретической формулы, $R_{кр} = 4000 \pm 100 \text{ Ом}$ – напрямую, исследуя, когда колебания переходят в апериодические и $R_{кр} = 5873 \pm 370 \text{ Ом}$ – значение, найденное косвенным способом через измерение логарифмических декрементов затухания при различных сопротивлениях.

Для добротностей имеем следующее: $Q_{min} = 1.62 \pm 0.10$, $Q_{max} = 7.34 \pm 0.43$ – значения, измеренные через логарифмические декременты затухания из ранее построенной таблицы, $Q_{min} = 1.75 \pm 0.08$, $Q_{max} = 8.30 \pm 0.49$ – значения, измеренные через спирали на фазовой диаграмме. Используя график зависимости резонансных кривых в координатах $U/U_0(\nu/\nu_0)$ получили $Q = 9.52 \pm 0.48$, а используя график разности фаз от циклической частоты $Q = 6.7 \pm 0.3$