

## Brückenkurs Mathematik zum Wintersemester 2015/2016

### Lösungen zum Übungsblatt 5

**Aufgabe 1.** *Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen:*

(a)  $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7) = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = \{2, -7\}$

(b)  $\sqrt{81x^2 + 36x + 4} = \sqrt{(9x + 2)^2} = 11$   
 $\Leftrightarrow 9x + 2 = 11$  oder  $-9x - 2 = 11 \Rightarrow \mathcal{L} = \{1, -\frac{13}{9}\}$

(c)  $3^x = 243 \Rightarrow x = 5$

(d)  $a^{x+15} = a^8$ , Exponentenvergleich liefert  $x + 15 = 8 \Rightarrow x = -7$

(e)  $v(v^{x-3})^{x+2} = v^4(v^{3x+1})^{x-3} \Leftrightarrow v(v^{(x-3)(x+2)}) = v^4(v^{(3x+1)(x-3)}) \Leftrightarrow v^{x^2-x-6} = v^{3x^2-8x+1}$ , Exponentenvergleich liefert  $x^2 - x - 6 = 3x^2 - 8x + 1$   
 $\Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} = 0$   
 $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49-40}{16}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{7}{4} \pm \frac{3}{4} \Rightarrow \mathcal{L} = \{1, \frac{5}{2}\}$

(f)  $6 + 2 \lg x = 2 \Leftrightarrow 2 \lg x = -4 \Leftrightarrow \lg x = \log_{10} x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

(g)  $\lg \sqrt[3]{4x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\lg 4 + \lg x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lg x = \log_{10} x = \frac{3}{2} - \lg 4 \Rightarrow x = 10^{(\frac{3}{2} - \lg 4)}$

**Aufgabe 2.** Suchen Sie nach Nullstellen folgender Polynomfunktionen, indem Sie sie (wenn möglich) in Linearfaktoren zerlegen:

Frage: Ist das für jedes Polynom möglich?

Hinweis: Nullstellen müssen Faktoren des konstanten Gliedes sein.

(a)  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  :

Mögliche Nullstellen sind  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ .

Teste Polynomdivision für 1 als Nullstelle:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \div (x - 1) = x^2 - x - 6$$

Geht ohne Rest auf, also ist 1 eine Nullstelle von  $f(x)$ !

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) \text{ laut Vieta}$$

$\Rightarrow 1, -2$  und  $3$  sind Nullstellen von  $f(x)$  und  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  zerfällt in Linearfaktoren.

(b)  $f(x) = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = 2x(x^3 + x^2 + x + 1)$  :

Wegen dem Faktor  $2x$  haben wir die Nullstelle  $x = 0$ , andere mögliche Nullstellen sind  $\pm 1$ .

Teste Polynomdivision für 1 als Nullstelle:

$$(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x - 1) = x^2 + 2x + 3 + \dots$$

Geht nicht ohne Rest auf, also ist 1 keine Nullstelle von  $f(x)$ !

Teste Polynomdivision für  $-1$  als Nullstelle:

$$(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x + 1) = x^2 + 1$$

Geht ohne Rest auf, also ist  $-1$  eine Nullstelle von  $f(x)$ !

Aber  $x^2 + 1 = 0$  hat keine Lösung in  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow -1$  und  $0$  sind Nullstellen von  $f(x)$  und  $2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$  zerfällt nicht in Linearfaktoren.

**Aufgabe 3.** Lösen Sie die folgenden Gleichungen und prüfen Sie, für welche  $x$  sie definiert sind:

(a)  $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-4}{2(x+2)}$  :

$$\frac{4+(x+2)}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{x^2-4} \Leftrightarrow x+6 = x^2-4x+4 \Leftrightarrow x^2-5x-2=0$$

$$p\text{-}q\text{-Formel ergibt } x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

(b)  $\sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1} + 2x = 7$  :

$$\sqrt{(\frac{2}{3}x + 1)^2 + 2x} = 7 \Leftrightarrow (\frac{2}{3}x + 1) + 2x = 7 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x + 2x = 6 \Leftrightarrow \frac{8}{3}x =$$

$$6 \Leftrightarrow x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \text{ (Wurzeln sind positiv definiert)}$$

**Aufgabe 4.** Lösen Sie die Gleichungen mit dem Substitutionsverfahren und prüfen Sie die Lösungen:

(a)  $x^6 - 16x^3 = -64$  :  $y := x^3$ , dann ist  $y = 8$  und  $x = \sqrt[3]{8} = 2$

(b)  $e^x + e^{-x} = 2$  :  $y := e^x$ , dann ist  $y = 1$  und  $x = 0$

(c)  $(\ln x)^2 - 9 \ln x = -20$  :  $y := \ln x$ , dann ist  $y \in \{4, 5\}$  und  $x \in \{e^4, e^5\}$

**Aufgabe 5.** Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich von  $f(x)$ , die Umkehrfunktion  $f^{-1}(x)$  und den Definitionsbereich von  $f^{-1}(x)$ :

(a)  $f(x) = 6x + 3$  :  
 $y = 6x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{6} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{6}$   
 $D_f = \mathbb{R}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

(b)  $f(x) = \frac{1}{25}x^2$  :  
 $y = \frac{1}{25}x^2 \Leftrightarrow 25y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \pm 5\sqrt{x}$   
 $D_f = \mathbb{R}$

Getrennte Betrachtung für die Umkehrfunktionen:

$$f^{-1}(x) = 5\sqrt{x} \text{ für } x \in \mathbb{R}_0^+, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+ \\ f^{-1}(x) = -5\sqrt{x} \text{ für } x \in \mathbb{R}^-, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$$

Laut Definition einer Funktion darf man jedem  $x$  nur ein  $y$  zuordnen. Eine um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn gedrehte Parabel erfüllt dieses Kriterium nicht, eine halbe Parabel jedoch schon.

(c)  $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$  :  
 $y(x+4) = x-1 \Leftrightarrow xy - x = -1 - 4y \Leftrightarrow x(y-1) = -1 - 4y \Leftrightarrow x = \frac{4y+1}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{1-x}$   
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

**Aufgabe 6.** Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen und der Gleichung:

(a)  $x + 2 < 5x - 8$  :  
 $4x > 10 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \Rightarrow L = (\frac{5}{2}, \infty]$

(b)  $(x-3)^2 < 4$  :  
 $-2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow L = (1, 5)$

$$(c) \ x^2 + 3 \leq 2:$$

$$x^2 \leq -1 \Rightarrow L = \emptyset$$

$$(d) \ \left| \frac{x}{5} - 2 \right| \leq 3:$$

$$-3 \leq \frac{x}{5} - 2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{5} \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 25$$

$$\Rightarrow L = [-5, 25]$$

$$(e) \ |x^2 - 2x| = 1:$$

$$x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 2, \text{ also } x = 1 + \sqrt{2}$$

$$x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ also } x = 1$$

$$\Rightarrow L = \{1, 1 + \sqrt{2}\}$$