HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

Dipl.-Math. Xenia Bogomolec

Brückenkurs Mathematik

Lösungen zum Übungsblatt 3 (Vektoren)

Aufgabe 1. *Berechnen Sie die Längen der Vektoren*
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{9+25+144} = \sqrt{178}$
$|\vec{v}| = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$
$|\vec{w}| = \sqrt{121+1+9} = \sqrt{131}$

Aufgabe 2. *Gegeben seien die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$,
$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 17 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a) *Berechnen und zeichnen Sie*

(i) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \end{pmatrix}$

(ii) $\vec{b} - \vec{d} + \vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}$

(iii) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} - 3\vec{d} = \begin{pmatrix} -23\frac{9}{10} \\ 14\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) *Berechnen Sie jeweils den Winkel φ zwischen den Vektoren*

(i) $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 13,\ |\vec{a}| = \sqrt{10},\ |\vec{b}| = \sqrt{29}$
$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{13}{\sqrt{290}} = 0,76339 \Leftrightarrow \varphi = 42,79°$

(ii) $\vec{a}$ *und* $\vec{d}$:
φ *ist gleich dem Winkel zwischen* $\vec{a}$ *und* $\frac{1}{4}\vec{d}$
$\vec{a} \cdot \frac{1}{4}\vec{d} = -1,\ |\vec{a}| = \sqrt{10},\ |\frac{1}{4}\vec{d}| = \sqrt{5}$
$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{50}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \varphi = 98,13°$

(c) *Wählen Sie zwei Vektoren in* $\mathbb{R}^2$ *mit dem Zwischenwinkel* $\varphi = 45°$. *Was ist der Wert von* $\cos\varphi$? *Zeigen Sie mit der Formel aus dem Brückenkurs, warum sich der Wert nicht verändert, wenn man die Vektoren mit unterschiedlichen Faktoren streckt.*

Zum Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *und* $r, s \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*
$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}} = \frac{rs(a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2)}{rs\sqrt{(a_1^2+a_2^2)}\cdot\sqrt{(b_1^2+b_2^2)}}$
$= \frac{ra_1\cdot sb_1 + ra_2\cdot sb_2}{\sqrt{r^2(a_1^2+a_2^2)}\cdot\sqrt{s^2(b_1^2+b_2^2)}} = \frac{r\vec{a}\cdot s\vec{b}}{|r\vec{a}|\cdot|s\vec{b}|}$

Aufgabe 3. *Berechnen Sie* $\vec{u} \times \vec{v}$ *für* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 7 - 4\cdot 3 \\ 4\cdot 4 - 2\cdot 7 \\ 2\cdot 3 - (-1)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-12 \\ 16-14 \\ 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. *Berechnen Sie jeweils die Seitenlängen und den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A,B und C:*

(a) $A = (1,0), B = (3,5), C = (5,0)$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{29},$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{29},$$
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{16} = 4$$

Fläche $F = \frac{1}{2}(4 \cdot 5)$ *(Skizze!)*

(b) $A = (3,5), B = (-4,1), C = (5,6)$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4-3 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{65},$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5+4 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{106},$$
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{5}$$

Erweitere zwei der Vektoren zu Vektoren in $\mathbb{R}^3$*:*

$$\text{Fläche } F = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} \vec{a} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{b} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -35+36 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

Die Fläche kann mit beliebiger Vektorwahl berechnet werden, wir bekommen immer das gleiche Ergebnis!

Aufgabe 5. *Berechnen Sie die Fläche des durch* $\vec{u}$ *und* $\vec{v}$ *aufgespannten Dreiecks für*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Fläche } A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$$