HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

Dipl.-Math. Xenia Bogomolec

Brückenkurs Mathematik

Lösungen zum Übungsblatt 6

Aufgabe 1. *Differenzieren Sie $f(x)$ nach der Summenregel:*

(a) $f(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{2}x^3 - 5x + 8 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 5$

(b) $f(x) = ax^4 - 2bx^3 + cx^2 - 4dx \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 - 6bx^2 + 2cx - 4d$

(c) $f(x) = a\sin x + b\cos x + cx \Rightarrow f'(x) = a\cos x - b\sin x + c$

(d) $f(x) = 2\sqrt{x^5} - 5\sqrt[4]{x} = 2x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = 5x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}} = 5\sqrt{x^3} - \frac{5}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(e) $f(x) = x^{-3} - x^{-7} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} + 7x^{-8}$

(f) $f(x) = e^x + e^{3x} - \ln x \Rightarrow f'(x) = e^x + 3e^{3x} - \frac{1}{x}$

Aufgabe 2. *Differenzieren Sie $f(x)$ nach der Produktregel:*

(a) $f(x) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(b) $f(x) = x^3 \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = x^2(1 + 3\ln x)$

(c) $f(x) = (4x^3 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 5) \Rightarrow f'(x) = 20x^4 - 32x^3 + 54x^2 + 10x - 12$

(d) $f(x) = e^{2x} \cdot \sin x \Rightarrow f'(x) = e^{2x}(2\sin x + \cos x)$

Aufgabe 3. *Differenzieren Sie $f(x)$ nach der Quotientenregel:*

(a) $f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

(b) $f(x) = \frac{\ln x}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-4\ln x}{x^5}$

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{e^{2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x - 2\cos x}{e^{2x}}$

Aufgabe 4. *Differenzieren Sie $f(x)$ nach der Kettenregel:*

(a) $f(x) = 3(5x^2 + 2x + 3)^4 \Rightarrow f'(x) = 12(5x^2 + 2x + 3)^3(10x + 2)$

(b) $f(x) = \sin(3x + 12) \Rightarrow f'(x) = 3\cos(3x + 12)$

(c) $f(x) = \ln e^{2x} + x^2 = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$ *Kettenregel war nicht nötig!*

(d) $f(x) = e^{\cos x} \Rightarrow f'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$

Aufgabe 5. *(Zusatzaufgabe) Differenzieren Sie geschickt:*

(a) $f(x) = e^{\ln(\sin x)} \Rightarrow f'(x) = \cos x$

(b) $f(x) = \cos^2(2x + 3) \Rightarrow f'(x) = -4\cos(2x + 3)\sin(2x + 3)$

(c) $f(x) = \ln\frac{1}{x^2} + \ln\frac{x+4}{x} = -3\ln x + \ln(x + 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x} + \frac{1}{x+4}$

(d) $f(x) = \ln(\tan x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$

Aufgabe 6. *Bestimmen Sie die Definitionsmenge, die Bildmenge, alle Nullstellen, den Scheitelpunkt und die Umkehrfunktion $f(x) = x^2 + 4x + 3$:*

$D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$
$Imf = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$ *(siehe Scheitelpunkt)*
Nullstellen: $f(x) = (x + 1)(x + 3) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3,$
Scheitelpunkt ist $(-2, -1)$, *denn* $f'(x) = 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ *und* $f(-2) = -1$.
Umkehrfunktion: $y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 \Leftrightarrow y + 1 = (x + 2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y + 1} = x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{y + 1} - 2 = x$ $\Longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2$

Aufgabe 7. *Berechnen Sie das Volumen des durch $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Spates für*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Spatvolumen:

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \right| = \left| 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(6-8)-(12-4)+(8-2)| = |-4| = 4$$

$$\textit{mit Sarrus: } V = \left| \begin{array}{|ccc|cc} 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right| = |6+8+4-2-8-12| = |-4| = 4$$