

Brückenkurs Mathematik zum Wintersemester 2015/2016

Lösungen zum Übungsblatt 6

Aufgabe 1. *Differenzieren Sie $f(x)$ nach der Summenregel:*

$$(a) f(x) = \frac{3}{4}x^6 + \frac{1}{2}x^3 - 5x + 8 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 5$$

$$(b) f(x) = ax^4 - 2bx^3 + cx^2 - 4dx \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 - 6bx^2 + 2cx - 4d$$

$$(c) f(x) = a \sin x + b \cos x + cx \Rightarrow f'(x) = a \cos x - b \sin x + c$$

$$(d) f(x) = 2\sqrt{x^5} - 5\sqrt[4]{x} = 2x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = 5x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}} = 5\sqrt{x^3} - \frac{5}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

$$(e) f(x) = x^{-3} - x^{-7} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} + 7x^{-8}$$

$$(f) f(x) = e^x + e^{3x} - \ln x \Rightarrow f'(x) = e^x + 3e^{3x} - \frac{1}{x}$$

Aufgabe 2. *Differenzieren Sie $f(x)$ nach der Produktregel:*

$$(a) f(x) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(b) f(x) = x^3 \cdot \ln x \Rightarrow f'(x) = x^2(1 + 3 \ln x)$$

$$(c) f(x) = (4x^3 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 5) \Rightarrow f'(x) = 20x^4 - 32x^3 + 54x^2 + 10x - 12$$

$$(d) f(x) = e^{2x} \cdot \sin x \Rightarrow f'(x) = e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$$

Aufgabe 3. *Differenzieren Sie $f(x)$ nach der Quotientenregel:*

$$(a) f(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$(b) f(x) = \frac{\ln x}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - 4 \ln x}{x^5}$$

$$(c) f(x) = \frac{\cos x}{e^{2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x - 2 \cos x}{e^{2x}}$$

Aufgabe 4. Differenzieren Sie $f(x)$ nach der Kettenregel:

$$(a) f(x) = 3(5x^2 + 2x + 3)^4 \Rightarrow f'(x) = 12(5x^2 + 2x + 3)^3(10x + 2)$$

$$(b) f(x) = \sin(3x + 12) \Rightarrow f'(x) = 3 \cos(3x + 12)$$

$$(c) f(x) = \ln e^{2x} + x^2 = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 \quad \text{Kettenregel war nicht nötig!}$$

$$(d) f(x) = e^{\cos x} \Rightarrow f'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$$

Aufgabe 5. (Zusatzaufgabe) Differenzieren Sie geschickt:

$$(a) f(x) = e^{\ln(\sin x)} \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$(b) f(x) = \cos^2(2x + 3) \Rightarrow f'(x) = -4 \cos(2x + 3) \sin(2x + 3)$$

$$(c) f(x) = \ln \frac{1}{x^2} + \ln \frac{x+4}{x} = -3 \ln x + \ln(x + 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x} + \frac{1}{x+4}$$

$$(d) f(x) = \ln(\tan x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die Definitionsmenge, die Bildmenge, alle Nullstellen, den Scheitelpunkt und die Umkehrfunktion $f(x) = x^2 + 4x + 3$:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\} \quad (\text{siehe Scheitelpunkt})$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) = (x + 1)(x + 3) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3,$$

$$\text{Scheitelpunkt ist } (-2, -1), \text{ denn } f'(x) = 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ und } f(-2) = -1.$$

$$\text{Umkehrfunktion: } y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 \Leftrightarrow y + 1 = (x + 2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y + 1} = x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{y + 1} - 2 = x \quad \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie das Volumen des durch \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} aufgespannten Spates für

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Spatvolumen:

$$V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \right| = \left| 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(6-8)-(12-4)+(8-2)| = |-4| = 4$$

$$\text{mit Sarrus: } V = \left| \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \right| = |6 + 8 + 4 - 2 - 8 - 12| = |-4| = 4$$