HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES AND ARTS

Dipl.-Math. Xenia Bogomolec

Brückenkurs Mathematik zum Wintersemester 2015/2016

Lösungen zum Übungsblatt 4

Aufgabe 1. *Zeichnen Sie den Graphen der Funktion* $f(x) = x^2 - 2x + 3$ *im Intervall* $[-3, 4]$.
Lösung: Die Punkte ergeben miteinander verbunden eine Parabel
$f(-3) = 18, f(-2) = 11, f(-1) = 6, f(0) = 3, f(1) = 2$ *(Minimum),* $f(2) = 3, f(3) = 6, f(4) = 11$

Aufgabe 2. *Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge, die Bildmenge, alle Nullstellen, den Scheitelpunkt und die Umkehrfunktion:*

(a) $f(x) = 3x^2 + 5$:
$D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$
$Imf = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 5\}$
f *hat keine Nullstellen!*
Scheitelpunkt ist $(0, 5)$, *denn* x^2 *ist immer grösser als* 0 *für* $x \neq 0$, *also muss bei* $x = 0$ *das Minimum von* f *sein.*
$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-5}{3}}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x+4}$:
$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}$
$Imf = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\} \Rightarrow$ *es gibt keine Nullstellen!*
Einen Scheitelpunkt gibt es nicht, aber wir haben einen Pol bei $x = -4$.
$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 4$

Aufgabe 3. *Zeichnen Sie die folgenden Betragsfunktionen:*

(a) $f(x) = |2x^2|$ *ist eine um Faktor* 2 *gestreckte Parabel.*

(b) $f(x) = |x^2 - 9|$ *ist eine um* 9 *Einheiten nach unten versetzte Parabel, zwischen Nullstellen* -3 *und* 3 *an der* x*-Achse nach oben gespiegelt.*

(c) $f(x) = |x|$ *entspricht der oberen Hälfte der Achsendiagonalen.*

Aufgabe 4. *Führen Sie die Polynom-Divisionen durch:*

(a) $(x^3 + 7x^2 + 9x - 5) \div (x + 5) = (x^2 + 2x - 1)$

(b) $(x^5 - x^4 - 13x^3 + 16x^2 + 13x - 10) \div (x^2 + 3x - 2) = (x^3 - 4x^2 + x + 5)$

(c) $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \div (x + 1) = (x^2 + 2x + 1)$

Aufgabe 5. *Beschreiben Sie Symmetrie, Monotonieverhalten und Achsenschnittpunkte der folgenden Graphen:*

(a) $f(x) = x^6 + 14$ *ist eine gerade Funktion, also achsensysmmetrisch bezgl. der* y*-Achse. Der Graph entspricht der Parabel* x^6 *um 14 Einheiten in* y*-Richtung nach oben verschoben. Somit gibt es keinen Schnittpunkt mit der* x*-Achse, aber der Schnittpunkt mit der mit der* y*-Achse ist bei* $(0, 14)$.

(b) $f(x) = 3x^{-4}$ *ist auch eine gerade Funktion, symmetrisch bezgl. der* y*-Achse. Im ersten Quadranten der Gaußschen Zahlenebene ähnelt sie der positiven Hälfte einer Hyperbel.* f *hat gar keine Achsenschnittpunkte.*

(c) $f(x) = 2(x - 2)^3 + 1$ *entspricht der Funktion* $g(x) = x^3$ *in* x*-Richtung um 2 und in* y*-Richtung um 1 Einheit verschoben. Zudem ist sie um Faktor 3 in* y*-Richtung gestreckt. Der Schnittpunkt mit der* y*-Achse ist* $(0, -15)$ *und Schnittpunkt mit der* x*-Achse ist* $(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$. *(Jede Polynomfunktion mit ungeradem größten Koeffizienten hat einen Nullpunkt! Der Beweis auf youtube: https://www.youtube.com/watch?v=8l-La9HEUIU)*

Aufgabe 6. *Rechnen Sie von Grad ins Bogenmaß um oder umgekehrt:*

(a) $30° = \frac{\pi}{6}$

(b) $-45° = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

(c) $135° = \frac{3\pi}{4}$

(d) $\frac{\pi}{4} = 45°$

(e) $-\frac{5\pi}{6} = -150° = 210°$

(f) $\frac{\pi}{3} = 60°$

Aufgabe 7. *Gegeben seien rechtwinklige Dreiecke mit Katheten a und b und Hypotenuse c und Winkeln α(gegenüber a), β(gegenüber b) und $\gamma = 90°$. Berechnen Sie die fehlenden Seiten oder Winkel:*

(a) $a = 3cm, b = 4cm:$
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, $\alpha = \sin\frac{3}{5}$, $\beta = \sin\frac{4}{5}$

(b) $c = 10cm, \alpha = 45°:$
$\beta = \alpha = 45°$, *und wegen* $a = b$ *gilt* $2a^2 = c^2 \Rightarrow a = b = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \sqrt{\frac{100}{2}} = \sqrt{50} = \sqrt{2} \cdot 5$

Aufgabe 8. *Bestimmen Sie erst Amplitude, Periode und Phasenverschiebung der Schwingungsfunktion $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ und zeichnen Sie nachher ihren Verlauf.*
$f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = A\sin(bx + c)$
Amplitude $A = 3$, *Periode* $P = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, *Phasenverschiebung* $x_0 = \frac{c}{b} = -\frac{\pi}{8}$