HOCHSCHULE HANNOVER
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

Dipl.-Math. Xenia Bogomolec

Brückenkurs Mathematik

Lösungen zum Übungsblatt 5

Aufgabe 1. *Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen:*

(a) $x^2 + 5x - 14 = (x-2)(x+7) = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = \{2, -7\}$

(b) $\sqrt{81x^2 + 36x + 4} = \sqrt{(9x+2)^2} = 11$
$\Leftrightarrow 9x + 2 = 11$ *oder* $-9x - 2 = 11 \Rightarrow \mathcal{L} = \{1, -\frac{13}{9}\}$

(c) $3^x = 243 \Rightarrow x = 5$

(d) $a^{x+15} = a^8$, *Exponentenvergleich liefert* $x + 15 = 8 \Rightarrow x = -7$

(e) $v(v^{x-3})^{x+2} = v^4(v^{3x+1})^{x-3} \Leftrightarrow v(v^{(x-3)(x+2)}) = v^4(v^{(3x+1)(x-3)}) \Leftrightarrow v^{x^2-x-6} = v^{3x^2-8x+1}$, *Exponentenvergleich liefert* $x^2 - x - 6 = 3x^2 - 8x + 1$
$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} = 0$
$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49-40}{16}} = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{7}{4} \pm \frac{3}{4} \Rightarrow \mathcal{L} = \{1, \frac{5}{2}\}$

(f) $6 + 2\lg x = 2 \Leftrightarrow 2\lg x = -4 \Leftrightarrow \lg x = \log_{10} x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

(g) $\lg \sqrt[3]{4x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\lg 4 + \lg x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lg x = \log_{10} x = \frac{3}{2} - \lg 4 \Rightarrow x = 10^{(\frac{3}{2} - \lg 4)}$

Aufgabe 2. *Suchen Sie nach Nullstellen folgender Polynomfunktionen, indem Sie sie (wenn möglich) in Linearfaktoren zerlegen:*
Frage: Ist das für jedes Polynom möglich?
Hinweis: Nullstellen müssen Faktoren des konstanten Gliedes sein.

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$:
Mögliche Nullstellen sind $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
Teste Polynomdivision für 1 *als Nullstelle:*
$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \div (x - 1) = x^2 - x - 6$
Geht ohne Rest auf, also ist 1 *eine Nullstelle von* $f(x)$*!*
$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$ *laut Vieta*
$\Rightarrow 1, -2$ *und* 3 *sind Nullstellen von* $f(x)$ *und* $x^2 - 2x^2 - 5x + 6$ *zerfällt in Linearfaktoren.*

(b) $f(x) = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = 2x(x^3 + x^2 + x + 1)$:
Wegen dem Faktor $2x$ *haben wir die Nullstelle* $x = 0$*, andere mögliche Nullstellen sind* ± 1.
Teste Polynomdivision für 1 *als Nullstelle:*
$(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x - 1) = x^2 + 2x + 3 + \ldots$
Geht nicht ohne Rest auf, also ist 1 *keine Nullstelle von* $f(x)$*!*
Teste Polynomdivision für -1 *als Nullstelle:*
$(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x + 1) = x^2 + 1$
Geht ohne Rest auf, also ist -1 *eine Nullstelle von* $f(x)$*!*
Aber $x^2 + 1 = 0$ *hat keine Lösung in* $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow -1$ *und* 0 *sind Nullstellen von* $f(x)$ *und* $2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$ *zerfällt nicht in Linearfaktoren.*

Aufgabe 3. *Lösen Sie die folgenden Gleichungen und prüfen Sie, für welche* x *sie definiert sind:*

(a) $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-4}{2(x+2)}$:
$\frac{4+(x+2)}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{x^2-4} \Leftrightarrow x + 6 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0$
p-q-Formel ergibt $x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$

(b) $\sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1} + 2x = 7$:
$\sqrt{(\frac{2}{3}x + 1)^2} + 2x = 7 \Leftrightarrow (\frac{2}{3}x + 1) + 2x = 7 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x + 2x = 6 \Leftrightarrow \frac{8}{3}x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ *(Wurzeln sind positiv definiert)*

Aufgabe 4. *Lösen Sie die Gleichungen mit dem Substutionsverfahren und prüfen Sie die Lösungen:*

(a) $x^6 - 16x^3 = -64:$ $y := x^3$, *dann ist* $y = 8$ *und* $x = \sqrt[3]{8} = 2$

(b) $e^x + e^{-x} = 2:$ $y := e^x$, *dann ist* $y = 1$ *und* $x = 0$

(c) $(\ln x)^2 - 9\ln x = -20:$ $y := \ln x$, *dann ist* $y \in \{4, 5\}$ *und* $x \in \{e^4, e^5\}$

Aufgabe 5. *Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich von* $f(x)$, *die Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ *und den Definitionsbereich von* $f^{-1}(x)$:

(a) $f(x) = 6x + 3:$
$y = 6x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{6} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{6}$
$D_f = \mathbb{R}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \frac{1}{25}x^2:$
$y = \frac{1}{25}x^2 \Leftrightarrow 25y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \pm 5\sqrt{x}$
$D_f = \mathbb{R}$

Getrennte Betrachtung für die Umkehrfunktionen:
$f^{-1}(x) = 5\sqrt{x}$ *für* $x \in {\mathbb{R}_0}^+, D_{f^{-1}} = {\mathbb{R}_0}^+$
$f^{-1}(x) = -5\sqrt{x}$ *für* $x \in \mathbb{R}^-, D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$

Laut Definition einer Funktion darf man jedem x *nur ein* y *zuordnen. Eine um* $90°$ *im Uhrzeigersinn gedrehte Parabel erfüllt dieses Kriterium nicht, eine halbe Parabel jedoch schon.*

(c) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}:$
$y(x+4) = x - 1 \Leftrightarrow xy - x = -1 - 4y \Leftrightarrow x(y-1) = -1 - 4y \Leftrightarrow x = \frac{4y+1}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{1-x}$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Aufgabe 6. *Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen und der Gleichung:*

(a) $x + 2 < 5x - 8$:
$4x > 10 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \Rightarrow L = (\frac{5}{2}, \infty]$

(b) $(x-3)^2 < 4$*:*
$-2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow L = (1,5)$

(c) $x^2 + 3 \leq 2$*:*
$x^2 \leq -1 \Rightarrow L = \emptyset$

(d) $|\frac{x}{5} - 2| \leq 3$*:*
$-3 \leq \frac{x}{5} - 2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{5} \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 25$
$\Rightarrow L = [-5, 25]$

(e) $|x^2 - 2x| = 1$*:*
$x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2,$ *also* $x = 1 + \sqrt{2}$
$x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0,$ *also* $x = 1$
$\Rightarrow L = \{1, 1 + \sqrt{2}\}$