Algebra II

Prof. Dr. W. Ebeling

October 27, 2007

Einleitung

1 Vergleiche

1.1 LA I

Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen über Körpern (affine Unterräume des jeweiligen Körpers).

1.2 LA II

Quadriken

$$\sum a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + c = 0$$

Unterschied: $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

1.2.1 Beispiel

a) $xy = 0$

b) $x^2 + y^2 = 0$
über $\mathbb{R} : \{(0,0)\}$
über $\mathbb{C} : x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = 0$

1.3 Algebra I

$a_nx^n + \ldots + a_0 = 0 \qquad a_i \in k$
Lösung $x \in k$ ist abhängig vom Körper k.
Lösung existiert immer für $k = \mathbb{C}$ oder k ist algebraisch abgeschlossen. $\Longleftrightarrow$
Jedes Polynom vom Grad ≤ 1 über k hat in k eine Wurzel.

2 Algebraische Geometrie

$$\begin{array}{lcl} f_1 \quad (x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_m \quad (x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array} \qquad f_1(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$$

$\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_k := k^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in k, \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$
ist der affine Raum. Unterschied zu Vektorräumen: Keine Addition, Nullpunkt nicht ausgezeichnet.
Der affine Raum wird später mit einer Topologie versehen (Zariski-Topologie).
(Endliche Körper $\rightarrow$ Codierungstheorie)$k = \mathbb{C}$
$f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ definiert eine Abbildung

$$f : \mathbb{A}^n_k \rightarrow k(a_1, \ldots, a_n) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n)$$

(In dieser Vorlesung werden Polynome und Abbildungen gleich bezeichnet.)
Eine Abbildung bestimmt ein Polynom (ganzrationale Funktion)nur dann, wenn $\mid k \mid = \infty$, z.B. wenn k algebraisch abgeschlossen ist.

2.1 Definition

$P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ heißt Nullstelle von $f \Longleftrightarrow f(P) = f(a_1, \ldots, a_n) = 0$

$V(f) = \{P \in \mathbb{A}^n : f(P) = 0\}$ heißt dann Varietät von f.

Sei $T \subset k[x_1, \ldots, x_n], V(T) := \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0 \quad \forall f \in T\}$

2.2 Definition

$Y \subset \mathbb{A}^n$ heißt **affin algebraische Menge** (abgeschlossen bezgl. der Zariski-Topologie), wenn es ein $T \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ gibt mit $Y = V(T)$.

Es ist nicht nötig beliebige Teilmengen T von $k[x_1, \ldots, x_n]$ zu betrachten.
$J = (T)$ ist das von T erzeugte Ideal in $k[x_1, \ldots, x_n]$
Mit dem Hilbertschen Basissatz, den wir noch kennenlernen werden, folgt, dass $k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Noetherscher Ring ist. Dann ist J endlich erzeugt, d.h. es gibt $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $J = (f_1, \ldots, f_m)$.

2.3 Lemma 1

$$V(T) = V(J) = V(f_1, \ldots, f_m)$$

Beweis:
$V(J) \subset V(T)$ ist klar, da $T \subset J$
Zu zeigen: $V(T) \subset V(J)$: Sei $g \in J$, $P \in V(T)$
Zu zeigen: $g(P) = 0$
$\exists h_1, \ldots, h_l \in T$ und $q_1, \ldots, q_l \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit

$$g = h_1 q_1 + \ldots + h_l q_l$$

(Hier sind die Koeffizienten die q_i)
$g(P) = h_1(P)q_1(P) + \ldots + h_l(P)q_l(P) = 0$, da $h_i(P) = 0$
$V(J) = V(f_1, \ldots, f_m)$ analog

Ohne Einschränkung sind nur endliche Gleichungssysteme zu betrachten.

2.4 Beispiele

2.4.1 Kegelschnitte(Quadriken)

$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R})$

Spezialfälle:

$x^2 + y^2 + 1 = 0$	(Kreis)
$-x^2 + y^2 = 0$	(Parabel)
$xy - 1 = 0$	(Hyperbel)

aber auch:

$x^2 + y^2 = 0$	(Punkt)
$xy = 0$	(Geradenpaar)
$x^2 - 1 = 0$	(2 parallele Geraden)
$x^2 = 0$	(Doppelgerade)
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	$\emptyset$

2.4.2 Affine Algebraische Kurven

a)Newtonscher Knoten:
$C : y^2 = x^3 + x^2$
Rationale Parametrisierung:
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$
Es gilt: $\varphi(\mathbb{R}) = C$:
$(t^3 - t)^2 = t^6 - 2t^4 + t^2$
$(t^2 - 1)^3 + (t^2 - 1)^2 = t^6 - 2t^4 + t^2$

φ ist nicht injektiv, denn $\varphi(-1) = 0 = \varphi(1)$

b) Neilsche Parabel: $C : x^3 = y^2$
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$
φ ist injektiv, aber $\varphi'(0) = (0,0)$ ist Singularität.

An Stelle von $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ kann man $\mathbb{C}\{z_1, \cdots, z_n\}$ (Ring der konvergenten Potenzreihen) betrachten.