Anhang

October 4, 2010

A Ideale und Moduln

Hier werden weitere Definitionen und Zusamenhänge zur Ring- und Modultheorie erwähnt, die zum Verständnis einer Primärzerlegung im arithmetischen Fall benötigt werden. Im ersten Teil gehen wir auf Quotienten von Idealen und deren Saturierungen ein, im zweiten Teil erinnern wir an assoziierte Primideale und Dimensionsbegriffe, im dritten Teil geht es um Moduln und im Speziellen Syzygienmoduln. Bei einigen Objekten betrachten wir auch deren geometrische Interpretation. Grundlegende Kenntnisse über Ringe und Moduln werden vorausgesetzt. Bei den fehlenden Beweisen verweisen wir auf die jeweils erwähnte Literatur.

A.1 Quotienten von Idealen und deren Saturierung

Bei der Konstruktion einer Primärzerlegung eines Ideals $I \subset R[x_, \ldots, x_n]$ mit einem beliebigen Ring R wird zu einem großen Teil mit Quotienten von Idealen und Moduln und deren Saturierung gearbeitet. Deswegen wenden wir uns erst mal diesen Begriffen zu.

Definition 1 (GP07, Kap.1.8.8) *Seien I, J Ideale eines noetherschen Ringes R oder Untermoduln eines R-Moduls M. Dann ist der Quotient von I nach J definiert als*

$$(I : J) := \{r \in R : rJ \subset I\}$$

Offensichtlich gilt

$$(I : \langle b_1, \cdots, b_s \rangle) = \bigcap_{i=1}^{s} (I : \langle b_i \rangle)$$

Betrachten wir den Quotienten von I nach Potenzen von J

$$I = (I : J) \subset (I : J^2) \subset \cdots R$$

Da R noethersch ist, gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $(I : J^s) = (I : J^{s+i}) \quad \forall i \geq 0$. So ein s genügt

$$(I : J^\infty) := \bigcup_{i \geq 0} (I : J^i) = (I : J^s)$$

und $(I : J^s)$ nennt man die *Saturierung* von I nach J. Das minimale derartige s heisst *Saturierungsexponent*. Ist I ein Radikalideal, so ist der Saturierungsexponent 1.

Der Quotient und die Saturierung des Untermoduls eines Moduls werden analog definiert. Man kann die Erzeugenden eines Untermoduls eines freien R-Moduls R^k als Vektoren mit k Einträgen betrachten. Darauf werden wir aber nicht weiter eingehen. In [AL], Kapitel 3 und in [GP07], Kapitel 2 sind die Theorie und algorithmische Umsetzungen zu diesem Thema ausführlich beschrieben.

Beispiel 1 $R = \mathbb{Z}[x, y]$, $I := \langle xy^2, y^3 \rangle$, $J := \langle x, y \rangle$
$(I : J) = (I : J^\infty) = (\langle xy^2, y^3 \rangle : \langle x, y \rangle) = \langle y^2 \rangle$

Trotzdem ist I in diesem Fall kein Radikalideal, denn $\sqrt{I} = \langle xy^2, y \rangle \neq I$. Nun noch einige Eigenschaften von Idealquotienten:

Lemma 2 (GP07, Lemma 1.8.14.) *Sei R ein Ring und I, J, K Ideale in R. Dann gilt*

(1) $(I \cap J) : K = (I : K) \cap (J : K)$ *im Speziellen gilt* $(I : K) = (I \cap J) : K$*, falls* $K \subset J$ *ist.*

(2) $(I : J) : K = (I : J \cdot K)$

(3) Ist I ein Primideal und $J \not\subset I$, dann ist $(I : J^j) = I$ *für* $j > 0$.

(4) Ist $I = \bigcap_{i=1}^r P_i$ mit Primidealen P_i , dann ist $(I : J^\infty) = (I : J) = \bigcap_{J \not\subset P_i} P_i$.

Diese Punkte sind für die geometrische Betrachtung von Quotienten und Saturierungen interessant. Im Punkt (4) haben wir es mit der Zerlegung eines Radikalideals zu tun. Dann ist

$$V(I) = \cup_{i=1}^r V(P_i).$$

Ausserdem ist genau dann $J \subset P_i$, wenn $V(P_i)$ ein abgeschlossenes Unterschema von $V(J)$ ist. Somit ist die Varietät $V(I : J)$ definiert durch

$$V(I : J) = \bigcup_{V(P_i) \not\subset V(J)} V(P_i).$$

Mit anderen Worten ist dann $V(I : J)$ der Zariski-Abschluss von $V(I)\backslash V(J)$.

A.2 Assoziierte Primideale und Dimensionsbegriffe

Bei der algorithmischen Primärzerlegung im arithmetischen Fall werden die assoziierten Primideale des zu zerlegenden Ideals sukzessiv nach der Höhe deren Dimension gesucht. Was hier mit der Dimension eines Ringes oder eines Ideals gemeint ist, wird in der folgenden Definition erläutert.

Definition 3 (GP07, Def. 3.3.1.) *Sei A ein Ring*

(1) Die Menge aller Ketten von Primidealen in A wird definiert als

$$C(A) := \{\zeta = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A) \mid P_i Primideal)\}$$

(2) Ist $\zeta = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subsetneq A) \in C(A)$, so ist $m := length(\zeta)$ die Länge von ζ.

(3) Die Dimension von A ist definiert als

$$dim(A) := sup\,\{length(\zeta)\} \mid \zeta \in C(A)$$

(4) Für ein Primideal $P \subset A$ sei

$$C(A, P) := \{\zeta = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m) \in C(A) \mid P_m = P\}$$

die Menge der Ketten von Primidealen, welche in P enden. Wir definieren die Höhe von P als $ht(P) = sup\{length(\zeta) \mid \zeta \in C(A, P)\}$.

(5) Für ein allgemeines Ideal $I \subset A$ sei die Höhe von I definiert al $ht(I) := inf\,\{ht(P) \mid I \subset P, Primideal\}$ und $dim\ (I) := dim(A/I)$ sei die Dimension von I.

Die so definierte Dimension von Ringen heisst auch *Krull-Dimension*. Betrachten wir einen Polynomialen Ring in mehreren Variablen über einem Körper, so sind diese Definitionen noch leicht zu veranschaulichen. Wir kennen einfache Beispiele aus der Algebraischen Geometrie in denen wir uns die Varietät $V(I)$ eines Ideals I vorstellen und dann die Komponente der höchsten Dimension auch die Dimension des Ideals verkörpert. Im Falle von $k[x_1, \cdots, x_n]$ haben maximale Ketten von Primidealen, das heisst Ketten, die nicht verfeinert werden können, alle die Länge n. Also ist es offensichtlich, dass $k[x_1, \cdots, x_n]$ die Dimension n hat. Aber schon bei

Lokalisierungen dieses Rings ist das nicht mehr so. Ein algebraisch abgeschlossener Körper, der nur zwei Ideale, sich selbst und das Nullideal hat, ist somit offensichtlich von Dimension 0. Ein Hauptidealbereich, also auch $\mathbb{Z}$ hat die Dimension 1. $\mathbb{Z}[x]$ hat die Dimension 2. Es hat sogar jeder Noethersche Ring $R[x]$ die Dimension $k+1$, wenn k die Dimension von R ist. Also folgt, dass $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ die Dimension $n+1$ hat. Dass man vorsichtig mit diesen Dimensionbegriffen umgehen muss, zeigt folgendes Beispiel:

Beispiel 2 Im Ring $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})[x, y, z]$ betrachten wir die Kette

$$\langle 2 \rangle \subsetneq \langle 2, x \rangle \subsetneq \langle 2, x, y \rangle \subsetneq \langle 2, x, y, z \rangle$$

Jedes dieser Ideale ist prim, und die Dimension von $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})[x, y, z]$ ist 3. Da dieser Ring kein Integritätsbereich ist, ist das Nullideal hier kein Primideal.

In [Eis95] kann mehr zum Thema Dimension von Ringen und Idealen gelesen werden.
Da wir es mit dem Polynomialen Ring über den ganzen Zahlen zu tun haben, müssen wir auf der geometrischen Seite affine Schemata betrachten. Dort ist die Anschauung schon abstrakter. Anstelle eines affinen Raums betrachtet man $\mathrm{Spec}(A) = \{P \mid A \supset P \quad \text{Primideal}\}$ als umgebenden "Raum" von den Nullstellenmengen $V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subset P\}$. Während man im ersten Fall eine Topologie über abgeschlossene Mengen $V(I)$, $I \subset A$ Ideal, definiert hat (Zariski Topologie), macht man dies bei $\mathrm{Spec}(A)$ über die offenen Mengen $\mathrm{Spec}(A) \setminus V(f)$, $f \in A$, also diejenigen Primideale, die f nicht enthalten.
Nun interessieren uns aber Primideale, die in besonderer Beziehung zu einem bestimmten allgemeinen Ideal I stehen:

Definition 4 (GP07, Def. 4.1.1.) *Sei A ein Noetherscher Ring und $I \subseteq A$ ein Ideal.*

(1) Die Menge der zu I assoziierten Primideale wird definiert als
$Ass(I) := \{P \subset A : P$ Primideal und $P = (I : \langle b \rangle)$ für ein $b \in A\}$
Elemente von $Ass(\langle 0 \rangle)$ heissen auch assoziierte Primideale von A.

(2) Seien $P, Q \in Ass(I)$ und $Q \subseteq P$, dann heisst P ein eingebettetes Primideal von I. Dieser Begriff ist geometrisch motiviert.
Wir definieren $Ass(I, P) := \{Q \mid Q \in Ass(I), Q \subset P\}$

(3) I heisst equidimensionales oder rein dimensionales Ideal, falls alle zu I assoziierten Primideale von gleicher Dimension sind.

Zum Beispiel sind alle zu einem 0-dimensionalen Ideal I assoziierten Primideale auch 0-dimensional, da sie alle auch I enthalten. Man kann sich das geometrisch so vorstellen, dass eine Menge von isolierten Punkten auch nur Teilmengen von isolierten Punkten enthalten kann.
Ein zu I assoziiertes Primideal P heisst minimal, wenn für jedes Primideal $Q \subset R$ mit $I \subset Q \subset P$ gilt, dass $Q = P$. Die Menge der minimalen assoziierten Primideale von I ist $minAss(I)$.
Da wir diejenigen Primärideale suchen, deren Radikale die zu dem Ideal assoziierten Primideale sind, ist folgender Zusammenhang interessant:

Lemma 5 (AL, Lemma 4.6.14.) *Sei $I \subset A$ ein Ideal eines noetherschen Ringes A und sei $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ eine Primärzerlegung, so dass die Q_i P_i-primär sind mit maximalen Idealen P_i. Dann sind für $j = 1, \ldots, r$*

$$Q_j = \{f \in A \mid (I : \langle f \rangle) \not\subset P_j\}$$

Beweis: Sei $j \in \{1, \ldots, r\}$. Wir bezeichnen $\{f \in A : (I : \langle f \rangle) \not\subset P_j\}$ mit Q'_j. Für ein $f \in Q'_j$ gibt es dann ein $g \in A$, so dass $g \notin M_j$ aber $fg \in I \subset Q_j$ ist. Da Q_j primär ist, ist entweder f oder eine Potenz von g in Q_j. Da aber $g \notin M_j = \sqrt{Q_j}$ folgt, dass $f \in Q_j$.
Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir $f \in Q_j$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$, $i \neq j$ gibt es ein $s_i \in M_i - M_j$. Dann ist $s_i^{e_i} \in Q_i$. Nun sei s das Produkt dieser $s_i^{e_i}, i \neq j$ und liegt im Produkt der $Q_i, i \neq j$ aber nicht in M_j. Dann ist fs im Produkt aller Q_j und somit auch in I enthalten. Also ist $s \in I : \langle f \rangle$ und $s \notin M_j$, so dass $f \in Q'_j$ sein muss.

q.e.d.

In der Primärzerlegung wollen wir unnötige Primärideale ausschliessen, damit wir eine irredundante Zerlegung erhalten. Deswegen wollen wir keine eingebetteten Primideale miteinbeziehen.

Proposition 6 (GP07, Prop. 3.3.5.) *Sei R ein Noetherscher Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Dann ist $minAss(I) = \{P_1, \cdots, P_n\}$ endlich und*

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \cdots \cap P_n$$

Im Speziellen ist $\sqrt{I}$ der Schnitt von allen Primidealen die I enthalten.

Den zweiten Punkt hatten wir schon in der Einführung gezeigt. Auch in der Konstruktion der Primärzerlegung nach dem Finden der assoziierten Primideale in Theorem 20 schliesst man überflüssige Primideale aus. Somit schliesst sich hier der Kreis.

A.3 Endlich erzeugte und freie Moduln

Wir benötigen für die Konstruktion der assoziierten Primideale Informationen über Moduln und im Speziellen auch endlich erzeugte Moduln und freie Moduln endlichen Ranges. Dazu wollen wir erstmal an folgende Definition errinnern:

Definition 7 *Sei R ein Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. M heisst frei, falls M isomorph ist zu R^n für ein $n \in \mathbb{N}$. Genau dann gibt es eine R-Basis von M, d.h. ein R-linear unabhängiges Erzeugendensystem.*

Zum Beispiel ist ein endlich erzeugtes Ideal in einem Ring R ein freier R-Modul oder $\mathbb{Z}_p[x]/f(x)$ für ein Polynom $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$.
Schon im Beweis des ersten Theorems taucht der Begriff von Lösungsmengen der Form $(h_{i1}, \cdots, h_{ik})$ von Gleichungen $h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k = 0$ einer Basis $(f_1, \cdots, f_q)$ eines Ideals auf. Dass wir es dann auch wieder mit Untermoduln, den sogenannten *Syzygienmoduln* zu tun haben wird in folgender Definition erläutert. A. Seidenberg hat in den siebziger Jahren eine Konstruktion von Syzygienmoduln von polynomialen Idealen mit Koeffizienten aus Körpern der Charakteristik $n \leq 0$ veröffentlicht. Mit Hilfe von Gröbner Basen hat man dann auch Syzygienkonstruktionen im arithmetischen Fall entwickelt. Syzygien werden in vielen weiteren algebraischen Konstruktionen nützlich eingesetzt.

Definition 8 (GP07, Def. 2.5.1.) *Eine Syzygie oder eine Relation zwischen k Elementen $f_1, \cdots, f_k$ eines R-Moduls M ist ein k-Tupel $(g_1, \cdots, g_k) \in R^k$, welches folgender Gleichung genügt*

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i = 0$$

Die Menge aller Syzygien zwischen $f_1, \cdots, f_k$ ist ein Untermodul von R^k. Dieser ist sogar der Kern des Ringhomomorphismus

$$\varphi : F_1 := \bigoplus_{i=1}^{k} R\varepsilon_i \to M, \varepsilon_i \to f_i$$

wobei $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ eine kanonische Basis von R^k ist.
φ bildet surjektiv auf den R-Modul $I := \langle f_1, \cdots, f_k \rangle_R$ ab und

$$syz(I) := syz(f_1, \cdots, f_k) := Ker(\varphi)$$

wird der Modul der Syzygien von I bezüglich der Erzeugenden $f_1, \cdots, f_k$ genannt.

Der zweite Teil dieser Definition ist eigentlich eine Proposition. Es ist jedoch leicht zu sehen, dass für die Menge aller dieser k-Tupel die Moduloperationen wie verlangt gelten und sie darunter auch abgeschlossen ist.
Ist R ein lokaler b.z.w. graduierter Ring und $\{f_1, \cdots, f_k\}$, $\{g_1, \cdots, g_k\}$ minimale homogene Erzeugendensysteme von I, so sind $syz(f_1, \cdots, f_k)$ und $syz(g_1, \cdots, g_k)$ zueinander isomorph. Dann ist also $syz(I)$ wohldefiniert bis auf graduierte Isomorphismen. Im Allgemeinen hängt $syz(I)$ von der Wahl der Basis des Ideals I ab. Es kann aber gezeigt werden, dass für $I = \langle f_1, \cdots, f_k \rangle = \langle g_1, \cdots, g_s \rangle$ gilt:

$$syz(f_1, \cdots, f_k) \oplus R^s \cong syz(g_1, \cdots, g_s) \oplus R^k$$

Die Syzygienkonstruktion nach A. Seidenberg im Falle eines Körpers ist eine Konstruktion, die hauptsächlich Elemente der linearen Algebra beinhaltet. Sie funktioniert zwar nicht im arithmetischen Fall, aber für endliche Körper mit genügend großer Charakteristik p. Genügend groß heisst hierbei, dass wir eine obere Grenze für den Grad der g_j, $j = 1, \ldots, s$ brauchen, damit wir ausschliessen können, dass die Grade der g_j eventuell von p geteilt werden. Er ging dabei von r Relationen der f_{ij}, $i = 1, \ldots, r$ aus und berechnete eine einfache rekursive Funktion $M(n, r, d)$ von n, r und $d \geq \max \deg(f_i)$:
Wir betrachten die Matrix des Linearen Gleichungssystems der r Gleichungen mit den g_j als Variablen und nehmen an, sie seien linear unabhängig. Sei Δ die Determinante dieser Matrix, die dann ungleich 0 sein muss. Wir stellen $\Delta g_1, \ldots, \Delta g_r$ als Linearkombination der $g_{r+1}, \ldots, g_s$ dar und erhalten so Lösungen

$$(g_{11}, \ldots, g_{1r}, \Delta, 0, \ldots, 0) \ldots (g_{s1}, \ldots, g_{sr}, 0, \ldots, 0, \Delta)$$

Wir hatten eine homogene lineare Transformation durchgeführt, so dass wir annehmen konnten, dass der Koeffizient der höchsten Potenz von x_n in Δ ein Element aus dem Körper k ist. Nun beobachten wir, dass $\deg_{x_n} (g_{ij})$ und $\deg (\Delta) \leq rd$ sein müssen. Die g_j sind Polynome $\sum g_{ij} x_n^j$ vom Grad $rd - 1$ in x_n mit Koeffizienten aus $k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Jede der r Gleichungen erhöht rd und wir erhalten insgesamt $r^2 d$ Gleichungen.
$M(n, r, d) = M(n-1, r^2 d, d) + rd$ ist eine mögliche rekursive Funktion für M. Da $M(o, r, d) = 0$ erlaubt ist, können wir schreiben:

$$M(n, r, d) = rd + (rd)^2 + (rd)^4 + \cdots + (rd)^{2^{n-1}} \leq n(rd)^{2^{n-1}}$$

Das ist das N, welches im Algorithmus SPLITTING(I) auftaucht. Die Quelle zu dieser Berechnung ist [Sei10.74].
In den Artikeln von A.Seidenberg taucht auch der Begriff eines *Moduls von endlicher Präsentation* auf. Ein R-Modul M heisst von endlicher Präsentation, wenn es einen Homomorphismus von einem freien R-Modul endlichen Ranges auf M gibt, so dass dessen Kern endlich erzeugt ist. Hier sollte "es

gibt" in Hinblick auf die konstruktivistische Intention heissen, dass M durch eine endliche Menge von Erzeugenden und durch eine endliche Anzahl von Relationen zwischen den Erzeugenden gegeben ist. Mit anderen Worten ist dann der Syzygienmodul endlich erzeugt.

Lemma 9 (Sei74, Lemma 2) *Ist ein Modul M von endlicher Präsentation, so hat jede Abbildung eines freien R-Moduls endlichen Ranges auf M einen endlich erzeugten Kern.*

Tatsächlich ist auch für einen Modul ein Erzeugendensystem so gut wie das andere. Mit anderen Worten kann man mit den gegebenen Relationen des einen Erzeugendensystems die Relationen jedes anderen Erzeugendensystems konstruieren. In [Ri74] und in [Sei74] sind viele weitere algorithmische Aspekte von Noetherschen Ringen beschrieben. Die meisten dieser Algorithmen wurden schon in verschiedene Computeralgebrasysteme implementiert.

B Abbildungen als "Übersetzungen"

Wir wollen noch die Begriffe von Erweiterungen und Kontraktionen von Idealen erläutern. Diese Definitionen sind für Moduln analog. Wir werden sie hier aber nur für Ideale formulieren.

B.1 Homomorphismen zwischen Polynomringen

Sie sind unentbehrlich für Zerlegungen von Idealen und Moduln über Ringen. Mit ihrer Hilfe können wir Informationen, welche schon in der Zerlegung von Idealen in $k[x_1, \ldots, x_n]$ für einen Körper k und Unterräumen von Vektorräumen erarbeitet wurden auf unseren Fall übertragen.
Wir betrachten also einen Homomorphismus $f : A \to B$ zwischen zwei Ringen A und B.

Definition 10 (AM69) *(1) Die Erweiterung oder Verlängerung I^e eines Ideals $I \subset A$ ist das Ideal $B\langle f(I)\rangle$ in B.*

(2) Die Kontraktion J^c eines Ideals $J \subset B$ ist das Ideal $f^{-1}(J)$ in A.

Die Kontraktion eines Primideals $P \subset B$ ist immer auch ein Primideal in A, eine Verlängerung eines Primideals $P \subset A$ ist jedoch nicht unbedingt ein Primideal in B. Diese Tatsache legt schon fest, dass wir bei Abbildungen immer $A = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ setzen. Wir betrachten ein klassisches Beispiel aus der Zahlentheorie:

Beispiel 3 Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$, $i = \sqrt{-1}$, ein Homomorphismus von zwei Hauptidealringen:

(1) Die Erweiterung des Primideals $\langle 2\rangle$ ist dann $\langle 2\rangle^e = \mathbb{Z}[i]\langle 2\rangle = \langle 2i\rangle = \langle (1+i)^2\rangle$, also das Quadrat eines Primideals.

(1) Ist eine Primzahl $p \equiv 1 \mod 4$, so ist $\langle p\rangle^e$ das Produkt zweier unterschiedlicher Ideale. Zum Beispiel ist $\langle 5\rangle^e = \langle (2+i)(2-i)\rangle$.

Folgende Eigenschaften von Kontraktionen und Erweiterungen sind für uns interessant:

Proposition 11 (AM69, Prop. 1.17.) *Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus von Ringen und $I \subset A$, $J \subset B$ zwei Ideale. Dann gilt:*

(1) $I \subset I^{ec}$, $J^{ce} \subset J$

(2) $J^c = J^{cec}$, $I^e = I^{ece}$

(3) *Setzen wir* $C = \{J^c \mid J \in B\} \subset A$ *und* $E = \{I^e \mid I \in A\} \subset B$ *so gilt:* $C = \{I \mid I^{ec} = I\}$ *und* $E = \{J \mid J^{ce} = J\}$.
$I \mapsto I^{ec}$ *definiert eine bijektive Abbildung von* C *nach* E, *deren Inverse durch* $J \mapsto J1c$ *gegeben ist.*

Damit haben wir einige grundlegende Hilfsmittel, die wir in unserem Algorithmus direkt oder indirekt angewandt haben erkärt. Es würde aber wie bei allen Dingen, die auf vielen anderen bereits erarbeiteten Prozessen aufbauen den Rahmen sprengen, diese Prozesse bis in die Wurzeln zu erläutern.

References

[AL94] William W. Adams und Philippe Loustaunau: *An Introduction to Gröbner bases*. Graduate Studies in Mathematics. 3. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1994.

[AM69] Michael F. Atiyah und I.G. Macdonald: *Introduction to commutaive algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[Eis95] David Eisenbud: *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics. 150. Berlin, Springer-Verlag, 1995.

[GP07] Gert-Martin Greuel und Gerhard Pfister: *A Singular introduction to commutative algebra, 2nd extended edition*. Berlin, Springer-Verlag, 2007.

[Ri74] Fred Richman: *Constructive Aspects of Noetherian Rings*. RI: American Mathematical Society (AMS), Proceedings of the AMS, Vol. 44, No. 2, pages 436-441, June 1974.

[Sei78] Abraham Seidenberg: *Constructions in a polynomial ring over the ring of integers*. American Journal of Mathematics, 1978 (received 1974), 100(4): pages 685-703.

[Sei74] Abraham Seidenberg: *What is Noetherian?*. Seminario Matematico e Fisico, Italy, May 1974.

[Sei10.74] Abraham Seidenberg: *Constructions in algebra*. RI: American Mathematical Society (AMS), Transactions of the AMS, Vol. 197, pages 273-313, October 1974.

[Vas04] Wolmer Vasconcelos:*Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 3rd Edition*. Berlin, Springer-Verlag, 2004.