

Exercițiul 1 : rezolvare

$$A \perp B | C \Leftrightarrow P(A=x_A, B=x_B, C=x_C) = \frac{1}{K} \phi_{A,B}(x_A, x_B) \phi_{B,C}(x_B, x_C), \forall x_A, x_B, x_C$$

unde A, B și C variabile aleatoare discrete

$\phi_{A,B}$ și $\phi_{B,C}$ funcții pozitive

$K > 0$ o constantă de normalizare

Pasul 1 : independența condiționată $A \perp B | C$:

: înseamnă că dacă știm valoarea lui B , atunci A și C devin independente, în termeni de probabilități, acest lucru înseamnă :

$$P(A, C | B) = P(A | B) P(C | B)$$

Pasul 2 : probabilitatea comună $P(A, B, C)$

: factorizarea a probabilității comune, înseamnă probabilitatea ca toate variabilele să ia anumite valori simultan

~~scriem probabilitatea comună~~

$$P(A, B, C) = P(A | B, C) \cdot P(C | B) \cdot P(B) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Regula lanțului pt. prob.} \\ \text{dar } A \perp B | C \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A, B, C) = P(A | B) \cdot P(C | B) \cdot P(B)$$

Pasul 3 : factorizarea probabilității $P(A, B, C)$

$$\text{Rescriem } P(A | B) \text{ sub formă de funcție pozitivă : } P(A | B) = \frac{\phi_{A,B}(x_A, x_B)}{Z_{A,B}}$$

unde: $\phi_{A,B}(x_A, x_B)$ este o funcție pozitivă ce descrie interacțiunea dintre A și B
 $Z_{A,B}$ este o constantă de normalizare

$$\text{Rescriem } P(C | B) \text{ sub formă de funcție pozitivă : } P(C | B) = \frac{\phi_{B,C}(x_B, x_C)}{Z_{B,C}}$$

unde: $\phi_{B,C}(x_B, x_C)$ este o funcție pozitivă ce descrie interacțiunea dintre B și C
 $Z_{B,C}$ este o altă constantă de normalizare

~~scriem probabilitatea comună~~

Pasul 4 :

$$P(A, B, C) = P(A | B) \cdot P(C | B) \cdot P(B) = \frac{\phi_{A,B}(x_A, x_B)}{Z_{A,B}} \cdot \frac{\phi_{B,C}(x_B, x_C)}{Z_{B,C}} \cdot P(B)$$

constantele de normalizare se pot combina în K , a.ș. avem :

$$P(A, B, C) = \frac{1}{K} \phi_{A,B}(x_A, x_B) \phi_{B,C}(x_B, x_C), \text{ wobei } K = Z_{A,B} Z_{B,C} \cdot P(B)$$

$$P(A, B, C) = \frac{1}{K} \phi_{A,B}(x_A, x_B) \phi_{B,C}(x_B, x_C) \quad (1)$$

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit $P(A, B, C)$ berechnen, wenn A, B und C die Werte 1, 2, 3 annehmen. Dazu müssen wir die Wahrscheinlichkeiten $\phi_{A,B}$ und $\phi_{B,C}$ für diese Werte berechnen.

Die Wahrscheinlichkeit $\phi_{A,B}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass A den Wert 1 annimmt und B den Wert 2 annimmt. Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch:

$$\phi_{A,B}(1, 2) = P(A=1, B=2) = P(A=1) \cdot P(B=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(2, 1) = P(A=2, B=1) = P(A=2) \cdot P(B=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(2, 2) = P(A=2, B=2) = P(A=2) \cdot P(B=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(1, 1) = P(A=1, B=1) = P(A=1) \cdot P(B=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(3, 3) = P(A=3, B=3) = P(A=3) \cdot P(B=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(3, 1) = P(A=3, B=1) = P(A=3) \cdot P(B=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(3, 2) = P(A=3, B=2) = P(A=3) \cdot P(B=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(1, 3) = P(A=1, B=3) = P(A=1) \cdot P(B=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(2, 3) = P(A=2, B=3) = P(A=2) \cdot P(B=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(3, 1) = P(A=3, B=1) = P(A=3) \cdot P(B=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(3, 2) = P(A=3, B=2) = P(A=3) \cdot P(B=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(3, 3) = P(A=3, B=3) = P(A=3) \cdot P(B=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(1, 1) = P(A=1, B=1) = P(A=1) \cdot P(B=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(1, 2) = P(A=1, B=2) = P(A=1) \cdot P(B=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(1, 3) = P(A=1, B=3) = P(A=1) \cdot P(B=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(2, 1) = P(A=2, B=1) = P(A=2) \cdot P(B=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(2, 2) = P(A=2, B=2) = P(A=2) \cdot P(B=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(2, 3) = P(A=2, B=3) = P(A=2) \cdot P(B=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\phi_{A,B}(3, 1) = P(A=3, B=1) = P(A=3) \cdot P(B=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$