TEMA 3 - PMP

Exercițiul 1 : rezolvare

$$A \perp C \mid B \iff P(A = x_A, B = x_B, C = x_C) = \frac{1}{K} \phi_{A,B}(x_A, x_B)\, \phi_{B,C}(x_B, x_C), \ \forall x_A, x_B, x_C$$

unde A, B și C variabile aleatoare discrete

$\phi_{A,B}$ și $\phi_{B,C}$ funcții pozitive

$K > 0$ o constantă de normalizare

Pasul 1: independența condiționată $A \perp C \mid B$:

: înseamnă că dacă știm valoarea lui B, atunci A și C devin independente, în termeni de probabilități, acest lucru înseamnă:

$$P(A, C \mid B) = P(A \mid B)\, P(C \mid B)$$

Pasul 2: probabilitatea comună $P(A, B, C)$

: factorizarea a probabilității comune, înseamnă probabilitatea ca toate variabilele să ia anumite valori simultan

$$P(A, B, C) = P(A \mid B, C) \cdot P(C \mid B) \cdot P(B)$$

Regula lanțului pt. prob.

dar $A \perp C \mid B$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A, B, C) = P(A \mid B) \cdot P(C \mid B) \cdot P(B)$$

Pasul 3: factorizarea probabilității $P(A, B, C)$

Rescriem $P(A \mid B)$ sub formă de funcție pozitivă: $P(A \mid B) = \dfrac{\phi_{A,B}(x_A, x_B)}{Z_{A,B}}$

unde: $\phi_{A,B}(x_A, x_B)$ este o funcție pozitivă ce descrie interacțiunea dintre A și B

$Z_{A,B}$ este o constantă de normalizare

Rescriem $P(C \mid B)$ sub formă de funcție pozitivă: $P(C \mid B) = \dfrac{\phi_{B,C}(x_B, x_C)}{Z_{B,C}}$

unde: $\phi_{B,C}(x_B, x_C)$ este o funcție pozitivă ce descrie interacțiunea dintre B și C

$Z_{B,C}$ este o altă constantă de normalizare

Pasul 4:

$$P(A, B, C) = P(A \mid B) \cdot P(C \mid B) \cdot P(B) = \frac{\phi_{A,B}(x_A, x_B)}{Z_{A,B}} \cdot \frac{\phi_{B,C}(x_B, x_C)}{Z_{B,C}} \cdot P(B)$$

constantele de normalizare se pot combina în K, a.î. avem:

$P(A,B,C) = \frac{1}{K} \phi_{A,B}(x_A, x_B)\, \phi_{B,C}(x_B, x_C)$, unde $K = Z_{A,B} Z_{B,C} \cdot P(B)$