Cofinalidade
Ref. Introduction to Set Theory - Thomas Jech

Autor: Xenônio
Discord: xennonio

Sumário

1 Prefácio

A ideia dessas notas é apresentar o conceito de cofinalidade, dando motivações e intuições sobre ela. Em geral, os primeiros capítulos são um aglomerado de resultados e exemplos a respeito da ideia de cofinalidade, mostrando como ela pode surgir como um conceito natural e quais propriedades seguem dela.

Em particular, o conceito de cofinalidade nos leva naturalmente aos Axiomas de Grandes Cardinais. Veremos como cardinais fracamente inacessíveis surgem na análise de uma simples pergunta ao se estudar cardinais regulares e singulares, que é: existe algum cardinal limite regular incontável?

Vale ressaltar que é assumido que o leitor tenha uma familiaridade com o básico de aritmética cardinal e ordinal para compreender as provas dos Teoremas, entretanto, caso não esteja, é possível entender a intuição por trás lendo apenas os comentários escritos ao longo do texto que direcionam o leitor a uma investigação natural dos conceitos definidos.

2 Motivação

2.1 Exemplos Conhecidos

Considere os seguintes teoremas:

- A união finita de conjuntos finitos é finita, i.e., se S é um sistema de conjuntos tal que $|S| < \omega_0$ e, para todo $A \in S$, temos que $|A| < \omega_0$, então

$$\left|\bigcup S\right| < \omega_0$$

- Analogamente, temos que a união contável de conjuntos contáveis é contável, i.e., se S é um sistema de conjuntos tal que $|S| < \omega_1$ e, para todo $A \in S$, temos que $|A| < \omega_1$, então

$$\left|\bigcup S\right| < \omega_1$$

Note que, em cada caso, temos que a moral da história é que é difícil "alcançar" $\aleph_0$ e $\aleph_1$, respectivamente, "por baixo". Tal fenômeno pode ser capturado de forma precisa por meio do conceito de *cofinalidade*.

Em particular, generalizaremos a pergunta do seguinte modo: Sabemos que todo ordinal limite é o supremo do conjunto de todos os ordinais menores, i.e., para todo ordinal limite λ

$$\lambda = \bigcup \lambda$$

mas não necessariamente precisamos tomar o conjunto de *todos* os ordinais menores, podemos encontrar um subconjunto próprio S de λ tal que $\lambda = \sup S$, o quão pequeno S pode ser? Esse é o conceito que desejamos capturar.

2.2 Definição de Cofinalidade

Definição 2.1. Definiremos portanto $\mathrm{cf}(\alpha)$, a cofinalidade de α, com α um ordinal limite, como o menor ordinal ϑ tal que α é o limite de uma sequência transfinita crescente $\langle \alpha_\nu : \nu < \vartheta \rangle$ de comprimento ϑ, ou seja

$$\alpha = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu$$

De forma equivalente, o que torna mais fácil de visualizar qual a relação disso com a motivação discutida acima, $\mathrm{cf}(\alpha)$ é o menor ordinal β tal que existe $f : \beta \to \alpha$, com

$$\alpha = \bigcup_{\nu < \beta} f(\nu) = \bigcup \mathrm{Im}(f)$$

i.e., é o menor β tal que existe uma união de β elementos α_ν menores que α

2.3 Cardinais Singulares e Regulares

Com isso, podemos definir dois tipos de cardinais κ, em particular aqueles que podem ser escritos como a união de κ elementos menores, denominados singulares, e aqueles que não podem, denominados regulares, em outras palavras:

Definição 2.2. Um cardinal infinito κ é singular sse existe uma sequência transfinita crescente $\langle \alpha_\nu : \nu < \vartheta \rangle$ de ordinais $\alpha_\nu < \kappa$ cujo comprimento ϑ é um ordinal limite menor que κ e

$$\kappa = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu$$

Um cardinal infinito que não é singular é denominado regular.

De forma equivalente, podemos defini-los de uma maneira mais concreta por meio do seguinte lema

Lema 2.1. Um cardinal infinito κ é singular se, e somente se, é a soma de menos que κ cardinais menores, i.e.

$$\kappa = \sum_{i \in I} \kappa_i$$

com $|I| < \kappa$ e $\kappa_i < \kappa$, para todo $i \in I$.

Prova. ($\Rightarrow$) Se κ é singular, então $\kappa = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu$ para alguma sequência transfinita crescente com $\alpha_\nu < \kappa$ e $\vartheta < \kappa$. Como todo ordinal é o conjunto de todos os ordinais menores, então

$$\kappa = \bigcup_{\nu < \vartheta} \alpha_\nu = \bigcup_{\nu < \vartheta} \left(\alpha_\nu \setminus \bigcup_{\xi < \nu} \alpha_\xi \right)$$

definindo $A_\nu := \alpha_\nu \setminus \bigcup_{\xi < \nu} \alpha_\xi$, temos que $\langle A_\nu : \nu < \vartheta \rangle$ é uma sequência de comprimento menor que κ com conjuntos disjuntos de cardinalidade $\kappa_\nu = |A_\nu| = \left| \alpha_\nu \setminus \bigcup_{\xi < \nu} \alpha_\xi \right| \leq |\alpha_\nu| < \kappa$, portanto

$$\kappa = \sum_{\nu < \vartheta} \kappa_\nu$$

($\Leftarrow$) Assuma que $\kappa = \sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$, com $\lambda, \kappa_\alpha < \kappa$, para todo $\alpha < \lambda$. Portanto

$$\kappa = \sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha = \lambda \cdot \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$$

e, como $\lambda < \kappa$, então necessariamente $\kappa = \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$, pois, caso contrário, $\kappa = \lambda$, contradição. Logo κ é o supremo da imagem da sequência transfinita $\langle \kappa_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$, portanto é fácil achar uma subsequência crescente com limite κ. $\dashv$

Note que tal caracterização captura bem a ideia discutida pela motivação. Podemos relacioná-la com o conceito de cofinalidade da seguinte forma: em particular é esperado e fácil verificar que, se κ é um cardinal singular, então $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, i.e., existe uma sequência crescente de tamanho menor que κ com elementos menores que κ, mas que tem κ como limite e, se κ for regular, como $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \kappa$, temos que $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

3 Exemplos e Propriedades de Cardinais Singulares e Regulares

3.1 Exemplos de Cardinais Regulares e Singulares

Para facilitar a notação, diremos que um cardinal $\aleph_\alpha$ é um *cardinal sucessor* se α for um ordinal sucessor, e diremos que é um *cardinal limite* se α for um ordinal limite.

Vamos explorar o conceito que criamos a alguns cardinais. Para os casos utilizados na motivação, temos que $\mathrm{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$ e $\mathrm{cf}(\aleph_1) = \aleph_1$, i.e., ambos são cardinais regulares, vistos que não podem ser escritos como a união de $\aleph_0$ ou $\aleph_1$ elementos menores, respectivamente. Em particular, o teorema seguinte provará que todo cardinal sucessor $\aleph_{\alpha+1}$ é um cardinal regular, ou seja, não é fácil "atingi-lo por baixo", apenas com conjuntos menores.

Teorema 3.1. Todo cardinal sucessor $\aleph_{\alpha+1}$ é um cardinal regular.

Prova. Assuma por contradição que $\aleph_{\alpha+1}$ seja singular, portanto, pelo Lema 2.1, ele pode ser escrito como a soma de um número menor de cardinais menores:

$$\aleph_{\alpha+1} = \sum_{i \in I} \kappa_i$$

com $|I| < \aleph_{\alpha+1}$ e $\kappa_i < \aleph_{\alpha+1}$, para todo $i \in I$. Portanto $|I|, \kappa_i \leq \aleph_\alpha$ para todo $i \in I$, logo, temos que

$$\aleph_{\alpha+1} = \sum_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot |I| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

contradição, portanto $\aleph_{\alpha+1}$ é um cardinal regular. $\dashv$

Em contrapartida, temos que

$$\begin{aligned} \aleph_\omega &= \lim_{n \to \omega} \aleph_n \\ \aleph_{\omega+\omega} &= \lim_{n \to \omega} \aleph_{\omega+n} \\ \aleph_{\omega \cdot \omega} &= \lim_{n \to \omega} \aleph_{\omega \cdot n} \\ \aleph_{\omega_1} &= \lim_{\alpha \to \omega_1} \aleph_\alpha \end{aligned}$$

É fácil ver que a grande maioria dos cardinais limites que temos contatos, exceto por $\aleph_0$ são de fato singulares, enunciaremos isso de uma maneira mais precisa com o próximo teorema. Além disso cada um dos exemplos mostrados acima tem cofinalidade ω. Veremos o quão poderoso é isso quando apresentarmos outras formas intuitivas de visualizá-los, mas por enquanto vamos responder a perguntas naturais que surgem como: existem cardinais regulares arbitrariamente grandes? Ou melhor, todos os cardinais limites incontáveis são regulares?

3.2 Algumas Propriedades Básicas

Vamos antes mostrar que de fato existem cardinais singulares arbitrariamente grandes, e mais, se $\aleph_\alpha$ é um cardinal limite singular, então o menor cardinal limite maior que $\aleph_\alpha$, i.e., o próximo cardinal limite, também é singular.

Lema 3.1. Existem cardinais singulares arbitrariamente grandes.

Prova. Seja $\aleph_\alpha$ um cardinal arbitrário e considere a sequência

$$\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1}, \aleph_{\alpha+2}, \ldots, \aleph_{\alpha+n}, \ldots$$

para $n \in \omega$, portanto

$$\aleph_{\alpha+\omega} = \lim_{n\to\omega} \aleph_{\alpha+n}$$

e, portanto $\aleph_{\alpha+\omega}$ é um cardinal singular maior que $\aleph_\alpha$. $\dashv$

Como corlário temos que

Corolário 3.1. Se $\aleph_\alpha$ é um cardinal limite singular, então o próximo cardinal limite $\aleph_{\alpha+\omega}$ também é singular, em particular, se $\aleph_\alpha$ for regular, temos também que $\aleph_{\alpha+\omega}$ é singular.

Com isso, podemos ter uma visualização dos primeiros cardinais em relação a ser singular ou regular. Temos que, após $\aleph_0$, o cardinal primeiro cardinal limite regular, temos que todos os sucessores até $\aleph_\omega$ são regular, e $\aleph_\omega$ por si só é singular, em particular, pelo lema anterior, todos os cardinais $\aleph_\omega$ que podem ser atingidos por meio de soma, multiplicação e exponenciação, são fáceis de provar serem singulares. Portanto a "reta" dos cardinais possui, aparentemente, quase sempre um cardinal singular nos cardinais limites e sempre contáveis muitos cardinais regulares sucessores entre eles.

3.3 Cardinais Limites Regulares Incontáveis

Vamos agora investigar como seria um cardinal limite regular incontável, assuma que $\aleph_\alpha$ é tal cardinal, como α é um ordinal limite, então

$$\aleph_\alpha = \lim_{\beta\to\alpha} \aleph_\beta$$

i.e., $\aleph_\alpha$ é o limite de uma sequência crescente de comprimento α. Como $\aleph_\alpha$ é um cardinal regular, então necessariamente $\alpha \geq \aleph_\alpha$, mas, como $\alpha \leq \aleph_\alpha$, então

$$\boxed{\alpha = \aleph_\alpha}$$

tal propriedade sugere que esses cardinais tem de ser bem grandes. Entretanto, o Lema a seguir revela que a propriedade destacada não é tão forte assim quanto parece, visto que podemos provar também que existem cardinais singulares $\aleph_\alpha$ arbitráriamente grandes tais que $\aleph_\alpha = \alpha$.

Lema 3.2. Existem cardinais singulares $\aleph_\alpha$ arbitrariamente grandes tais que $\aleph_\alpha = \alpha$.

Prova. Seja $\aleph_\gamma$ um cardinal arbitrário e considere a sequência definida por $\alpha_0 = \omega_\gamma$, $\alpha_1 = \omega_{\alpha_0} = \omega_{\omega_\gamma}$, $\alpha_2 = \omega_{\alpha_1} = \omega_{\omega_{\omega_\gamma}}$, etc. em geral, $\alpha_{n+1} = \omega_{\alpha_n}$, para todo $n \in \omega$. Com isso, seja $\alpha = \lim_{n\to\omega} \alpha_n$, obviamente $\langle \aleph_{\alpha_n} : n \in \omega \rangle$ tem limite $\aleph_\alpha$, logo

$$\aleph_\alpha = \lim_{n\to\omega} \aleph_{\alpha_n} = \lim_{n\to\omega} \alpha_{n+1} = \alpha$$

logo $\aleph_\alpha$ é o limite de uma sequência de cardinais menores com comprimento ω, portanto $\aleph_\alpha$ é um cardinal singular maior que $\aleph_\gamma$. $\dashv$

Uma dúvida natural é qual seria exemplo de um cardinal limite regular incontável? Tais cardinais são denominados fracamente inacessíveis, e acontece que a existência de tais cardinais κ é independente da ZFC, uma vez que $V_\kappa \vDash$ ZFC, contradizendo o Segundo Teorema da Incompletude de Gödel.

3.4 Cofinalidade como a Cardinalidade de um Conjunto Ilimitado

Vamos agora analisar uma visão um pouco diferente sobre como intuir sobre o conceito de cofinalidade, que nos será útil ao pensar no sentido prático da existência de tais cardinais.

Podemos definir $\mathrm{cf}(\kappa)$ como a menor cardinalidade de um conjunto A tal que $A \subseteq \kappa$ e, para todo $\beta < \kappa$, existe um $\alpha \in A$ tal que $\beta \leq \alpha$, i.e.

$$\mathrm{cf}(\kappa) = \min\{|A| : A \subseteq \kappa \wedge \forall\beta < \kappa(\exists\alpha \in A(\beta \leq \alpha))\}$$

Em outras palavras, ele é o menor tamanho que um conjunto precisa ter para ser ilimitado em κ, tal definição de cofinalidade é equivalentes as anteriores.

Em particular, o que estamos querendo dizer então, é que cardinais regulares precisam de muito mais elementos para conseguir tornar uma sequência ilimitada, enquanto que cardinais singulares não. Isso tem um impacto no seguinte sentido: Imagine que queiramos provar alguma propriedade, em relação a ordinais menores que $\aleph_\omega$, que tenha uma qualidade indutiva, tal processo requer somente contáveis muitos passos, uma vez que a cofinalidade de $\aleph_\omega$ é ω, enquanto que, por exemplo, fazer o mesmo com $\aleph_1$ exigiria incontáveis muitos passos.

4 Propriedades Algébricas da Cofinalidade

Note que, provamos que se $\aleph_\alpha$ for singular, então $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) < \omega_\alpha$ e, se for regular, então $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$. Mostraremos que

Lema 4.1. Se um ordinal limite α não for um cardinal, então $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$. Em particular, para todo ordinal limite α, temos que $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ se, e somente se, α for um cardinal regular.

Prova. Seja α um número ordinal que não é um cardinal. Sendo $\kappa = |\alpha|$, existe $f : \kappa \to \alpha$ bijetor, i.e., uma sequência $\langle \alpha_\nu : \nu < \kappa \rangle$ de comprimento κ tq $\{\alpha_\nu : \nu < \kappa\} = \alpha$. Agora podemos encontrar, via indução transfinita, uma subsequência crescente com limite α. Como o comprimento da subsquência é no máximo κ, e como $\alpha < \kappa = |\alpha|$ (visto que α não é um cardinal), então $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$. $\dashv$

Lema 4.2. Para todo ordinal limite α, temos que

$$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$$

Prova. Seja $\vartheta = \mathrm{cf}(\alpha)$. Obviamente ϑ é um ordinal limite e $\mathrm{cf}(\vartheta) \leq \vartheta$. Assuma por contradição que $\gamma = \mathrm{cf}(\vartheta) < \vartheta$, logo existe uma seq. crescente $\langle \nu_\xi : \xi < \gamma \rangle$ tq $\lim_{\xi \to \gamma} \nu_\xi = \vartheta$. Como $\vartheta = \mathrm{cf}(\alpha)$, existe $\langle \alpha_{\nu_\xi} : \xi < \gamma \rangle$ com limite α. Mas $\gamma < \vartheta$, contradição, visto que $\vartheta = \mathrm{cf}(\alpha)$ implica que ϑ é o menor ordinal tq α é o limite de uma sequência de comprimento ϑ. $\dashv$

Corolário 4.1. Para todo ordinal limite α, $\mathrm{cf}(\alpha)$ é um cardinal regular.

5 Exponenciação de Cardinais

Enquanto adição e multiplicação de cardinais é simples, uma vez que

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$$

a exponenciação de cardinais é bem mais complicada. Em particular, veremos alguns resultados básicos. Acontece que existe uma diferença entre cardinais regulares e singulares em relação a exponenciação.

Em particular, veremos que a Hipótese Generalizada do Contínuo

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}, \quad \text{para todo } \alpha$$

simplifica enormemente exponenciação de cardinais e, sem ela, não há muito o que provar além de

$$2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$$

e

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta}.$$

5.1 Teorema de König

Antes de provar alguns teoremas sobre exponenciação de cardinais, vamos provar o Teorema de König, que assume que estamos trabalhando na ZFC.

Teorema 5.1. Teorema de König. Se $\kappa_i < \lambda_i$, $\forall i \in I$, onde κ_i e λ_i são cardinais, $i \in I$, então

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$$

A ideia por trás da prova é: Se $\kappa_i < \lambda_i$, então toda função $f_i : \kappa_i \to \lambda_i$ é não-sobrejetora, portanto, existe um elemento $b_i \in \lambda_i \backslash \mathrm{Im}(f_i)$, com isso, obtemos que, para toda função $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$, o elemento $b = \langle b_i : i \in I\rangle$ não está na imagem de f.

Prova. Sejam $\langle A_i : i \in I\rangle$ e $\langle B_i : i \in I\rangle$ tais que $|A_i| = \kappa_i$ e $|B_i| = \lambda_i$ e A_i mutuamente disjuntos, $i \in I$. Como $|A_i| < |B_i|$, então, dadas $f_i : A_i \to B_i$ injetoras, sabemos que elas não são sobrejetoras. Defina então

$$B_i^\dagger = \{x \in B_i : x \notin f_i[A_i]\}$$

Como f_i não é sobrejetora, $B_i^\dagger \neq \emptyset$, $i \in I$, portanto, por AC podemos escolher $b_i^\dagger \in B_i^\dagger$, $i \in I$. Construiremos uma injeção

$$F : \bigcup_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$$

da seguinte forma

$$\pi_j(F(a)) = \begin{cases} f_i(a), \ i = j \\ b_j^\dagger, \ i \neq j \end{cases}$$

Se $F(x) = F(y)$, com $x \in A_i$ e $y \in A_j$, então

$$\pi_i(F(x)) = \pi_i(F(y))$$

Se $i \neq j$, então

$$\pi_i(F(x)) = f_i(x) = b_i^\dagger = \pi_i(F(y))$$

contradição, visto que $b_i^\dagger \notin f_i[A_i]$. Se $i = j$, então $f_i(x) = f_i(y)$, mas como f_i é injetora, $x = y$, portanto F é injetora. Vamos agora provar que não há nenhuma sobrejeção.
Assuma por contradição que $G : \bigcup_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$ seja sobrejetora, defina

$$B_i^\ddagger = \{x \in B_i : x \notin \pi_i(G[A_i])\}$$

Como $(\pi_i \circ G) : A_i \to B_i$, então ela não é sobrejetora e, portanto, $B_i^\ddagger \neq \emptyset$, $i \in I$. AC nos garante que existe $b = \left\langle b_i^\ddagger : i \in I \right\rangle$ tal que $b_i^\ddagger \in B_i^\ddagger$. Como G é sobrejetora, existe $x \in A_i$, para algum $i \in I$, tal que $G(x) = b^\ddagger$, logo $\pi_i(G(x)) = \pi_i\big(b^\ddagger\big) \in B_i^\ddagger$, contradição, logo não existe G sobrejetora. $\dashv$

Note que a escolha de $B_i^\dagger$ e $B_i^\ddagger$ lembra a escolha de $X = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ na prova do Teorema de Cantor e, de fato, o Teorema de Cantor é um corolário do Teorema de König para $\kappa_i = 1$ e $\lambda_i = 2$, $i \in I$.

5.2 Exponenciação Cardinal para Cardinais Regulares

Com o Teorema de König em mãos podemos provar o seguinte lema

Lema 5.1. Para todo ordinal α
$$\mathrm{cf}\left(2^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$$

Note que o Lema anterior restringer vários valores para os quais $2^{\aleph_\alpha}$ não pode assumir, a depender de sua confinalidade. Por exemplo, se $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$, então $\mathrm{cf}\left(2^{\aleph_0}\right) = \mathrm{cf}\left(\aleph_\omega\right) = \aleph_0 > \aleph_0$, contradição.

Prova. Seja $\vartheta = \mathrm{cf}\left(2^{\aleph_\alpha}\right)$, portanto, existem $\kappa_\nu < 2^{\aleph_\alpha}$, $\nu < \vartheta$ tal que

$$2^{\aleph_\alpha} = \sup\langle \kappa_\nu : \nu < \vartheta\rangle = \vartheta \cdot \sup\langle \kappa_\nu : \nu < \vartheta\rangle = \sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu$$

visto que $\vartheta = \mathrm{cf}\left(2^{\aleph_\alpha}\right) \leq 2^{\aleph_\alpha}$. Pelo Teorema de König, para $\lambda_\nu = 2^{\aleph_\alpha}$, temos que

$$2^{\aleph_\alpha} = \sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu < \prod_{\nu<\vartheta} 2^{\aleph_\alpha} = \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^\vartheta$$

Assuma por contradição que $\vartheta \leq \aleph_\alpha$, logo

$$2^{\aleph_\alpha} > \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^\vartheta \leq \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$$

contradição, portanto $\vartheta = \mathrm{cf}\left(2^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$. ⊣

Note que a prova do Teorema acima é exatamente a mesma para um cardinal $\kappa > 1$ qualquer no lugar de 2, o que nos fornece

Corolário 5.1. Para todo cardinal $\kappa > 1$ e todo ordinal α
$$\mathrm{cf}\left(\kappa^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$$

Para cardinais $\aleph_\alpha$ regulares, as desigualdades mostradas até agora são as únicas propriedades que podem ser provadas para $2^{\aleph_\alpha}$. Entretanto, se $\aleph_\alpha$ for singular, então podemos provar várias outras propriedades. Provaremos um deles na seção seguinte e, mais adiante, provaremos o Teorema de Silver.

5.3 Exponenciação Cardinal para Cardinais Singulares

Teorema 5.2. Seja $\aleph_\alpha$ um cardinal singular, se $2^{\aleph_\xi} = \aleph_\beta$ para $\xi < \alpha$, então $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\beta$.

Prova. Como $\aleph_\alpha$ é singular existem $\kappa_i < \aleph_\alpha$, $i \in I$, com $|I| = \aleph_\lambda < \aleph_\alpha$ tal que

$$2^{\aleph_\alpha} = \sum_{i \in I} \kappa_i$$

Por hipótese, $2^{\kappa_i} = 2^{\aleph_\lambda} = \aleph_\beta$, logo

$$2^{\aleph_\alpha} = 2^{\sum_{i \in I} \kappa_i} = \prod_{i \in I} 2^{\kappa_i} = \prod_{i \in I} \aleph_\beta = (\aleph_\beta)^{\aleph_\lambda} = \left(2^{\aleph_\lambda}\right)^{\aleph_\lambda} = 2^{\aleph_\lambda} = \aleph_\beta$$

$\dashv$

Lema 5.2. Se $\alpha \leq \beta$, então

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$$

Prova. Como $2 < \aleph_\alpha$, obviamente $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Pelo Teorema de Cantor $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$, logo

$$\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta} \leq \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$$

$\dashv$

Ao tentar calcular $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ para $\alpha > \beta$ o seguinte resultado é útil

Lema 5.3. Seja $\alpha \geq \beta$, logo

$$\left|[\omega_\alpha]^{\aleph_\beta}\right| = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$$

Prova. Como $|\omega_\alpha \times \omega_\beta| = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\alpha = |\omega_\alpha|$, então $\left|[\omega_\alpha \times \omega_\beta]^{\aleph_\beta}\right| = \left|[\omega_\alpha]^{\aleph_\beta}\right|$. Agora, toda função $f : \omega_\beta \to \omega_\alpha$ está em $[\omega_\alpha \times \omega_\beta]^{\aleph_\beta}$, portanto $\omega_\alpha^{\omega_\beta} \subseteq [\omega_\alpha \times \omega_\beta]^{\aleph_\beta}$, então

$$\left|\omega_\alpha^{\omega_\beta}\right| = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \left|[\omega_\alpha \times \omega_\beta]^{\aleph_\beta}\right| = \left|[\omega_\alpha]^{\aleph_\beta}\right|$$

Para a desigualdade contrária, se $X \in [\omega_\alpha]^{\aleph_\beta}$, então existe f em ω_b tal que $\mathrm{Im}(f) = X$. Com isso, dada tal função f_X para cada $X \in [\omega_\alpha]^{\aleph_\beta}$, definimos $F(X) = f_X$. Se $X \neq Y$, então $\mathrm{Im}(f_X) = X$ e $\mathrm{Im}(f_Y) = Y$, logo $F(X) = f_X \neq f_Y = F(y)$, i.e., F é injetora e, portanto

$$\left|[\omega_\alpha]^{\aleph_\beta}\right| \leq \left|\omega_\alpha^{\omega_\beta}\right| = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$$

$\dashv$

5.4 Como calcular $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ em ZFC + GHC

Assumindo a Hipótese Generalizada do Contínuo (GHC), podemos provar os seguintes teoremas

Teorema 5.3. (GHC) Se $\aleph_\alpha$ é um cardinal regular, então

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, \text{ se } \alpha > \beta \\ \aleph_{\beta+1}, \text{ se } \alpha \leq \beta \end{cases}$$

Prova. Se $\alpha \leq \beta$, pelo Lema 5.2. $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$. Seja então $\alpha > \beta$. Seja $S = [\omega_\alpha]^{\aleph_\beta}$, pelo Lema 5.3. $|S| = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Na seção 3.4. provamos que a cofinalidade de κ pode ser interpretada como o menor tamanho que um conjunto precisa ter para ser ilimitado em κ. Em particular, como $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$ para cardinais regulares, sabemos que todo $X \subseteq \omega_\alpha$, tal que $|X| < \aleph_\alpha$, é limitado. Seja portanto

$$B = \bigcup_{\delta < \omega_\alpha} \mathcal{P}(\delta)$$

a coleção de todos os subconjuntos limitados de ω_α. Mostraremos que $|B| \leq \aleph_\alpha$ e, como $S \subset B$, então $|S| = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$, visto que obviamente $|S| = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha$. Da definição de B obtemos que

$$|B| \leq \sum_{\delta < \omega_\alpha} 2^{|\delta|}$$

Entretanto, para todo cardinal $\aleph_\gamma < \aleph_\alpha$, temos que $2^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma+1} \leq \aleph_\alpha$, portanto $2^{|\delta|} \leq \aleph_\alpha$, para todo $\delta < \omega_\alpha$, logo

$$|B| \leq \sum_{\delta < \omega_\alpha} 2^{|\delta|} \leq \sum_{\delta < \omega\alpha} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

$\dashv$

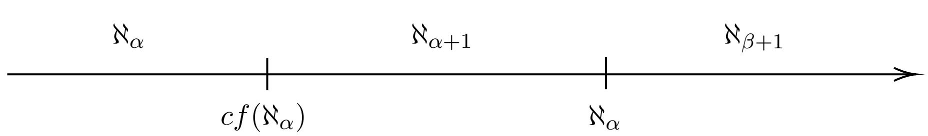
Provaremos uma fórmula similar, mas mais complicada, para exponenciação de cardinais singulares.

Teorema 5.4. (GHC) Se $\aleph_\alpha$ é um cardinal singular, então

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, \text{ se } \aleph_\beta < \mathrm{cf}\,(\aleph_\alpha), \\ \aleph_{\alpha+1}, \text{ se } \mathrm{cf}\,(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha, \\ \aleph_{\beta+1}, \text{ se } \aleph_\beta \geq \aleph_\alpha \end{cases}$$

Esquematicamente, obtemos que

$$f(\aleph_\beta) = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$$



Prova. Se $\beta \geq \alpha$, então $\aleph_\beta \geq \aleph_\alpha$ e $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$. Se $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, então todo $X \subseteq \omega_\alpha$ tq $|X| = \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) < \aleph_\alpha$ é limitado em ω_α e, portanto, pelo mesmo argumento que no Teorema anterior obtemos que $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$. Seja então $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$. Por um lado

$$\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \tag{$\dagger$}$$

Por outro, pelo Corolário 5.1. $\mathrm{cf}\left(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\right) > \aleph_\beta$ e, como $\aleph_\beta \geq \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, então $\mathrm{cf}\left(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\right) \neq \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, portanto $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \neq \aleph_\alpha$. Com isso, temos que ($\dagger$) garante que $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$. ⊣

5.5 Fórmula de Hausdorff

Se não assumirmos a GHC a situação fica bem mais complicada. Em particular, conseguimos provar o seguinte Teorema

Teorema 5.5. (Fórmula de Hausdorff) Para quaisquer ordinais α e β vale que

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$$

Prova. Se $\beta \geq \alpha+1$, então $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$, visto que $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\beta \leq 2^{\aleph_\beta}$. Seja portanto $\beta \leq \alpha$, como $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$ e $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$, então $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$. Logo, basta mostrarmos que $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$. Como $\omega_\beta < \omega_{\alpha+1}$ e $\omega_{\alpha+1}$ é regular, então para qualquer $f : \omega_\beta \to \omega_{\alpha+1}$, f é limitada, i.e., existe $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ tq $f(\xi) < \gamma$, para todo $\xi < \omega_\beta$. Com isso

$$\omega_{\alpha+1}^{\omega_\beta} = \bigcup_{\gamma < \omega_{\alpha+1}} \gamma^{\omega_\beta}$$

Agora, todo $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ é tal que $|\gamma| \leq \aleph_\alpha$ e, como $\left|\bigcup_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} \gamma^{\omega_\beta}\right| \leq \sum_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} |\gamma|^{\aleph_\beta}$, então

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} |\gamma|^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$$

⊣