Provas e Exercícios

Ref. H. D. Ebbnghaus

Primavera 2022

Contents

1 Sintaxe de Linguagens de Primeira Ordem

Lema 1. Se $\mathcal{A} \preceq \aleph_0$ então $\mathcal{A}^* \approx \aleph_0$.

Proof. Seja p_n o n-ésimo primo, se $\mathcal{A}^* = \{a_0, a_1, \dots\}$ existe $\alpha : \mathcal{A}^* \to \mathbb{N}$ tq:

$$\alpha(\square) = 1;$$

$$\alpha(a_{i_0}, \dots, a_{i_r}) := p_0^{i_0+1} \cdot \dots \cdot p_r^{i_r+1}.$$

Claramente α é injetiva, portanto $\mathcal{A}^* \preceq \aleph_0$ e como $\mathcal{A}^* \succeq \aleph_0$, visto que contém todas as strings possíveis, pelo teorema de Schröder–Bernstein $\mathcal{A}^* \approx \aleph_0$. $\square$

Exercício 1. Utilize o fato de que se $M_0, M_1, \dots \preceq \aleph_0$ então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \preceq \aleph_0$$

Para provar o **Lema 1**.

Proof. Definindo $M_n := \mathcal{A}^n$, então $\forall i (M_i \preceq \aleph_0)$, visto que $\kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$ e $n \in \mathbb{N}$, com isso

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathcal{A}^* \preceq \aleph_0.$$

Como $\mathcal{A}^* \succeq \aleph_0$ novamente pelo teorema de Schröder-Bernstein $\mathcal{A}^* \approx \aleph_0$. $\square$

Lema 2. Se $S \preceq \aleph_0$ então $\mathcal{T}^\mathcal{S}, \mathcal{L}^\mathcal{S} \approx \aleph_0$.

Proof. Se $S \preceq \aleph_0$ então também $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ e, pelo **Lema 1** $\mathcal{A}_\mathcal{S}^*$ também. Como $\mathcal{T}^\mathcal{S}, \mathcal{L}^\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_\mathcal{S}^* \preceq \aleph_0$ e $\mathcal{T}^\mathcal{S}$ contém todas as variáveis assim como $\mathcal{L}^\mathcal{S}$ todas as fórmulas da forma $v \equiv v$ então $\mathcal{T}^\mathcal{S}, \mathcal{L}^\mathcal{S} \succeq \aleph_0$, novamente pelo teorema de Schröder-Bernstein $\mathcal{T}^\mathcal{S}, \mathcal{L}^\mathcal{S} \approx \aleph_0$. $\square$

Lema 3. (a) $\forall t, t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$, t não é um segmento inicial próprio de t' (i.e. $\neg\exists\zeta \neq \square$ tq $t\zeta = t'$);
(b)$\forall\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, φ não é um segmento inicial próprio de φ'.

Proof. (a) Seja $P(\eta) := \forall t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ t não é um segmento inicial próprio de η. Usando indução em termos:
(i) $t = x$: Se t' é um termo arbitrário, como $\mathsf{len}(t) = 1$ precisaríamos que $t' = \square$ para este ser um termo inicial próprio, mas $\square$ não é um termo, visto que ambos (variáveis e constantes) tem $\mathsf{len} > 0$, assim como termos da forma $ft_1 \dots t_n$.
(ii) $t = c$: A prova é análoga.
(iii) $t = ft_1 \dots t_n$ com $P(t_1), \dots, P(t_n)$: Suponha t' um segmento inicial próprio de t, então $\exists\zeta \neq \square$ tq $t = t'\zeta$. Como t' inicia com f então pra ser um termo tem de ser da forma $ft'_1 \dots t'_n$, com isso

$$ft_1 \dots t_n = ft'_1 \dots t'_n\zeta,$$

Cancelando f temos que t'_1 é um segmento inicial de t_1, mas como t_1 goza de P, então $t_1 = t'_1$, continuando o processo temos que $t_i = t'_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, portanto $\zeta = \square$, o que contradiz a hipótese, i.e. t' não é um segmento inicial próprio de t.

(b) Seja $P(\Psi) := \forall\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ φ não é um segmento inicial próprio de Ψ. Usando indução em fórmulas assumimos que φ' é um segmento inicial próprio de φ, i.e. $\exists\zeta \neq \square$ tq $\varphi = \varphi'\zeta$.
(i) $\varphi = t_1 \equiv t_2$: $\varphi = \varphi'\zeta$ sse φ' é da forma $t'_1 \equiv t'_2$, portanto

$$t_1 \equiv t_2 = t'_1 \equiv t'_2\zeta.$$

mas t'_1 é um segmento inicial próprio de t_1, por (a) temos $t_1 = t'_1$, repetindo para t_2 chegamos em $\zeta = \square$, contradição.
(ii) $\varphi = Rt_1 \dots t_n$: $\varphi = \varphi'\zeta$ sse φ' for da forma $Rt'_1 \dots t'_n$, cancelando R e aplicando (a) em todos $t_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ chegamos em $\zeta = \square$, contradição.
(iii) $\varphi = \neg\psi$ com $* = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, $\psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ e $P(\psi)$: $\varphi = \varphi'\zeta$ sse φ' for da forma $\neg\chi, \chi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$. Assim $\psi = \chi\zeta$, portanto χ é um segmento inicial próprio de ψ, o que contrareia a hipótese, então $\psi = \chi$, dessa forma $\zeta = \square$, contradição.
(iv) $\varphi = (\psi * \chi)$ com $\psi, \chi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ e $P(\psi), P(\chi)$: $\varphi = \varphi'\zeta$ sse φ' é da forma $(\psi' *' \chi')$

$$(\psi * \chi) = (\psi' *' \chi')\zeta.$$

Por hipótese concluímos que $\psi = \psi'$ e, se $* = *'$, visto que, por hipótese, φ' é segmento inicial próprio de φ. Assim, também por hipótese, $\chi = \chi'$, portanto $\zeta = \square$, contradição.
(v) $\varphi = Qx\psi$ com $Q = \forall, \exists$, $\psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ e $P(\psi)$: $\varphi = \varphi'\zeta$ sse φ' é da forma $Qx'\psi'$, então

$$Qx\psi = Qx'\psi'\zeta.$$

Por (a) temos que $x = x'$ e, por hipótese, concluímos que $\psi = \psi'$, portanto $\zeta = \square$, contradição. $\square$

Lema 4. (a) Se $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ e $t_1 \dots t_n = t'_1 \dots t'_m$ então $m = n$ e $t_i = t'_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.
(b) Se $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi'_1, \dots, \varphi'_m \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ e $\varphi_1 \dots \varphi'_n = \varphi'_1 \dots \varphi'_m$ então $m = n$ e $\varphi_i = \varphi'_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Proof. (a) Se $t_1 \dots t_n = t'_1 \dots t'_m$ então t'_1 é segmento inicial próprio de t_1, do **Lema 3.(a)** concluímos que $t_1 = t'_1$, fazendo o mesmo temos que $t_i = t'_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Como ambos os termos são iguais temos

que $\mathsf{len}(t_1 \dots t_n) = \mathsf{len}(t'_1 \dots t'_m)$ i.e. $n = m$.
(b) Se $\varphi_1 \dots \varphi'_n = \varphi'_1 \dots \varphi'_m$ então φ'_1 é segmento inicial próprio de φ_1, do **Lema 3.(b)** concluímos que $\varphi_1 = \varphi'_1$, fazendo o mesmo temos que $\varphi_i = \varphi'_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Como ambos os termos são iguais temos que $\mathsf{len}(\varphi_1 \dots \varphi_n) = \mathsf{len}(\varphi'_1 \dots \varphi'_m)$ i.e. $n = m$.

$\square$

Exercício 2. (a) Seja $\mathfrak{C}_v$ o cálculo consistindo das seguintes regras:

$$\frac{}{x \quad x} \; ; \quad \frac{y \quad t_i}{y \quad ft_1 \dots t_n} \text{ se } f \in \mathcal{S} \text{ é n-ária e } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Mostre que para toda variável x e $\mathcal{S}$-termo t, $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$ sse $x \in \mathsf{var}(t)$.
(b) Dê um resultado para SF análogo ao resultado para var em (a).

Proof. (a)
(i) Se $x \in \mathsf{var}(t)$ então $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$: Se $t = x$ então $x \in \mathsf{var}(t)$ e pela 1^{a} regra $x\ t$ é derivável. Se $t = t_i$ e $x \in \mathsf{var}(t_i)$ então, seguindo a definição, $x \in f(t_1 \dots t_n)$.
(ii) Se $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$ então $x \in \mathsf{var}(t)$: Se $t = x$ a primeira regra garante que $x \in \mathsf{var}(t)$. Se $t = ft_1 \dots t_n$ então existe um $x\ t_i$ em $\mathfrak{C}_v$, como todos termos dessa forma que existem partem de uma regra sem premissa (regra 1) então $x \in \mathsf{var}(t_i)$ logo $x \in \mathsf{var}(ft_1 \dots t_n)$.
(b) Seja o cálculo $\mathfrak{C}_a$ definido pelas regras:

$$\frac{}{t_m \equiv t_n \quad t_m \equiv t_n} \; ; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad \neg\psi} \; ; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad (\varphi * \psi)} \; * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad Qx\psi} \; Q = \forall, \exists.$$

Para todo termo t_m, t_n e toda variável x. $\varphi\ \psi$ é derivável em $\mathfrak{C}_a$ sse $\varphi \in \mathsf{SF}(\psi)$. $\square$

Exercício 3. Mostre que o cálculo $\mathfrak{C}_{nf}$ permite derivar precisamente aquelas strings da forma $x\ \varphi$ no qual $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ tq $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$:

$$\frac{}{x \quad t_1 \equiv t_2} \text{ Se } t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \mathsf{var}(t_1) \cup \mathsf{var}(t_2);$$

$$\frac{}{x \quad Rt_1 \dots t_n} \text{ Se } R \in \mathcal{S} \text{ é n-ária}, t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{var}(t_n);$$

$$\frac{x \quad \varphi}{x \quad \neg\varphi} \; ; \quad \frac{(x \quad \varphi) \quad (x \quad \psi)}{x \quad (\varphi * \psi)} \; * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \quad \frac{}{x \quad Qx\varphi} \; ; \quad \frac{x \quad \varphi}{x \quad Qx\varphi} \; Q = \forall, \exists;$$

Proof. ($\Rightarrow$) Fazendo indução em cada regra:
$\varphi = t_1 \equiv t_2$: por definição $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
$\varphi = Rt_1 \dots t_n$: Também por definição $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
$\varphi = Qx\psi$ nesse caso $x \notin \mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\psi) \backslash \{x\}$;
(*) Portanto todas as fórmulas φ deriváveis com premissa livre não tem uma ocorrência livre de x.
$\varphi = \neg\psi$: Se $\neg\psi$ é derivável, então ψ também é, mas se ψ é derivável em $\mathfrak{C}_{nf}$ então, por (*), $x \notin \mathsf{free}(\psi) \rightarrow x \notin \mathsf{free}(\neg\psi)$;
$\varphi = (\psi * \chi)$: O argumento é análogo ao de cima, ambos ψ, χ tem de ser derivável e, por (*), não há ocorrência livre neles, o que implica que não há em $(\psi * \chi)$.

($\Leftarrow$) Agora assumindo $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$:

$\varphi = t_1 \equiv t_2$: então ela é derivável pela regra 1;
$\varphi = Rt_1 \ldots t_n$: então ela é derivável pela $2^{\underline{a}}$ regra;
$\varphi = Qx\psi$: a última e penúltima regra garantem que é derivável;
$\varphi = \neg\psi$: então $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$, portanto a $3^{\underline{a}}$ regra garante que é derivável;
$\varphi = (\psi * \chi)$: Se x não ocorre livre em φ então ela não ocorre livre em ambos, portanto a $5^{\underline{a}}$ regra garante sua derivação. □

2 Semântica de Linguagens de Primeira Ordem

Exercício 4. Seja $A \neq \varnothing$ e $A, \mathcal{S} \prec \aleph_0$ um conjunto de símbolos. Mostre que há uma quantidade finita de $\mathcal{S}$-estruturas com domínio A.

Proof. Seja $S = ((c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_1}, (R_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_2}, (f_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_3})$ e $|A| = m$, a quantidade total de associações possíveis pra cada elemento é:

$$\begin{aligned} \alpha_{R_i} &:= \{Z \mid Z \subseteq A^n\}, \quad & |\alpha_{R_i}| &= \mathcal{P}(\alpha_{R_i}) = 2^m \\ \alpha_{f_i} &:= A^{(A^n)}, \quad & |\alpha_{f_i}| &= |A|^{|A^n|} = m^{(m^n)} \\ \alpha_{c_i} &:= (A^n)^{A^n}, \quad & |\alpha_{c_i}| &= |\,(A^n)\,|^{|A^n|} = \left(m^{n \cdot m^n}\right) \end{aligned}$$

Dessa forma, como todos são finitos e a união finita de conjuntos finitos é finita então o total de estruturas $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} := \bigcup \left\{ \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n_1} \alpha_{R_i}, \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n_2} \alpha_{f_i}, \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n_3} \alpha_{c_i} \right\} \prec \aleph_0.$$

□

Exercício 5. Para $\mathcal{S}$-estruturas $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ e $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{b})$ seja $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ a $\mathcal{S}$-estrutura com domínio $A \times B$ satisfazendo:
Para $R \in \mathcal{S}$ n-ária e $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$R^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}(a_1, b_1) \ldots (a_n, b_n) \leftrightarrow R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_n \wedge R^{\mathfrak{B}} b_1 \ldots b_n;$$

Para $f \in \mathcal{S}$ n-ária e $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$f^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) := (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n));$$

Para $c \in \mathcal{S}$:

$$c^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}});$$

Mostre que:
(a) Se as $\mathcal{S}_{\mathsf{gr}}$-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são grupos então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também é.
(b) Se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são estruturas satisfazendo os axiomas de equivalência então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também satisfaz.
(c) Se as $\mathcal{S}_{\mathsf{ar}}$-estruturas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são corpos, então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também é.

Proof. (a) Sejam $\mathfrak{A} = (A, \circ, e); \mathfrak{B} = (B, *, \varepsilon)$ e $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \circledast, \epsilon)$. Se $a, b, c \in \mathfrak{A}; x, y, z \in \mathfrak{B}$ e $u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

(i) $\forall u, v, w((u \circledast v) \circledast w = u \circledast (v \circledast w))$:

$$\begin{aligned}
(\overbrace{(x,a)}^{u} \circledast \overbrace{(y,b)}^{v}) \circledast \overbrace{(z,c)}^{w} &= (x \circ y, a * b) \circledast (z,c) \\
&= (x \circ y \circ z, a * b * c) \\
&= (x,a) \circledast (y \circ z, b * c) \\
&= (x,a) \circledast ((y,b) \circledast (z,c)) \\
(u \circledast v) \circledast w &= u \circledast (v \circledast w).
\end{aligned}$$

(ii) $\forall u \exists v (u \circledast v) = \epsilon$:

$$\begin{gathered}
(\overbrace{(x,a)}^{u} \circledast \overbrace{(y,b)}^{v}) = \overbrace{(e,\varepsilon)}^{\epsilon} \\
(x \circ y, a * b) = (e, \varepsilon) \\
\forall x \exists y (x \circ y = e) \wedge \forall a \exists b (a * b = \varepsilon).
\end{gathered}$$

(iii)$\exists \epsilon \forall u (u \circledast \epsilon = u)$:

$$\begin{gathered}
(\overbrace{(x,a)}^{u} \circledast \overbrace{(e,\varepsilon)}^{\epsilon}) = \overbrace{(x,a)}^{u} \\
(x \circ e, a \circ \varepsilon) = (x, a) \\
\exists e \forall x (x \circ e = x) \wedge \exists \varepsilon \forall a (a * \varepsilon = a).
\end{gathered}$$

(b) Sejam $\mathfrak{A} = (A, R); \mathfrak{B} = (B, \mathcal{R}), \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \mathscr{R})$ com $x, y, z \in \mathfrak{A}; a, b, c \in \mathfrak{B}; u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

(i) $\forall u (u \mathscr{R} u)$:

$$\begin{gathered}
\overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(x,a)}^{u} \leftrightarrow xRx \wedge a\mathcal{R}a \\
\forall x (xRx) \wedge \forall a (a\mathcal{R}a).
\end{gathered}$$

(ii) $\forall u, v (u \mathscr{R} v \leftrightarrow v \mathscr{R} u)$:

$$\begin{gathered}
\overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(y,b)}^{v} \leftrightarrow \overbrace{(y,b)}^{v} \mathscr{R} \overbrace{(x,a)}^{u} \\
xRy \wedge a\mathcal{R}b \leftrightarrow yRx \wedge b\mathcal{R}a \\
\forall x, y (xRy \leftrightarrow yRx) \wedge \forall a, b (a\mathcal{R}b \leftrightarrow b\mathcal{R}a)
\end{gathered}$$

(iii) $\forall u, v, w (u \mathscr{R} v \wedge v \mathscr{R} w \rightarrow u \mathscr{R} w)$:

$$\begin{gathered}
\overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(y,b)}^{v} \wedge \overbrace{(y,b)}^{v} \mathscr{R} \overbrace{(z,c)}^{w} \rightarrow \overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(z,c)}^{w} \\
(xRy \wedge a\mathcal{R}b) \wedge (yRz \wedge b\mathcal{R}c) \rightarrow xRz \wedge a\mathcal{R}c \\
(xRy \wedge yRz) \wedge (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \rightarrow xRz \wedge a\mathcal{R}c \\
\forall x, y, z (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz) \wedge \forall a, b, c (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \rightarrow a\mathcal{R}c)
\end{gathered}$$

(c) Sejam $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, 0, 1); \mathfrak{B} = (B, *, \times, \overline{0}, \overline{1})$ e $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ com $x, y \in \mathfrak{A}; a, b \in \mathfrak{B}$ e $u, v \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

Um dos axiomas é $\forall(u \neq \mathbf{0})\exists v(u \oplus v = \mathbf{1})$:

$$\begin{aligned}(x, a) \oplus (y, b) &= (1, \overline{1})\\ (x \cdot y, a * b) &= (1, \overline{1})\end{aligned}$$

Se isso é verdade então, em particular, para ou $x = 0$ ou $a = \overline{0}$ temos que $(0, b), (x, \overline{0}) \neq \mathbf{0}$, logo ambos $0, \overline{0}$ possuiriam invreso, o que é falso. □

Lema 5. Para todo Φ e φ

$$\Phi \models \varphi \text{ sse não é o caso que } \mathsf{Sat}(\Phi \cup \{\neg\varphi\}).$$

Em particular, φ é válida sse $\neg\varphi$ não é satisfatível.

Proof. $\Phi \models \varphi$
sse toda interpretação que é modelo de Φ também é de φ
sse não há uma interpretação que é modelo de Φ, mas não de φ
sse não há uma interpretação que é modelo de $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$
sse não é o caso que $\mathsf{Sat}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$. □

Lema 6. Lema da Coincidência. Seja $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ uma $\mathcal{S}_1$-interpretação e $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ uma $\mathcal{S}_2$-interpretação tq $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_1) = \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_2)$, seja $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$:
(a) Seja t um $\mathcal{S}$-termo. Se $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ concordam nos $\mathcal{S}$-símbolos, i.e. $\kappa^{\mathfrak{A}_1} = \kappa^{\mathfrak{A}_2}$, e variáveis, i.e. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$, que ocorrem em t, então $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$;
(b) Seja φ uma $\mathcal{S}$-fórmula. Se $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ concordam nos $\mathcal{S}$-símbolos e nas variáveis que ocorrem livre em φ, então $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ e $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

Proof. (a) Por indução nos $\mathcal{S}$-termos.
$t = x$: Por hipótese $\beta_1 = \beta_2$ portanto $\mathfrak{I}_1(t) = \beta_1(t) = \beta_2(t) = \mathfrak{I}_2(t)$;
$t = c$: Também por hipótese $\mathfrak{I}_2(t) = c^{\mathfrak{A}_1} = c^{\mathfrak{A}_2} = \mathfrak{I}_2(t)$.
$t = ft_1 \dots t_n$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1(ft_1 \dots t_n) &= f^{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{I}_1(t_1), \dots, \mathfrak{I}_1(t_n))\\ &= f^{\mathfrak{A}_2}(\mathfrak{I}_2(t_1), \dots, \mathfrak{I}_2(t_n))\\ &= \mathfrak{I}_2(ft_1 \dots t_n).\end{aligned}$$

(b) Por indução nas $\mathcal{S}$-fórmulas.
$\varphi = Rt_1 \dots t_n$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1(Rt_1 \dots t_n) &= R^{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{I}_1(t_1) \dots \mathfrak{I}_1(t_n)\\ &= R^{\mathfrak{A}_2}\mathfrak{I}_2(t_1) \dots \mathfrak{I}_2(t_n)\\ &= \mathfrak{I}_2(Rt_1 \dots t_n).\end{aligned}$$

$\varphi = t_1 \equiv t_2$: O argumento é análogo.
$\varphi = \neg\psi$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1 \models \neg\psi &\text{ sse não vale } \mathfrak{I}_1 \models \psi\\ &\text{ sse não vale } \mathfrak{I}_2 \models \psi\\ &\text{ sse } \mathfrak{I}_2 \models \neg\psi.\end{aligned}$$

$\varphi = (\psi \vee \chi)$: O argumento é análogo.
$\varphi = \exists x\psi$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_1 \models \exists x\varphi &\text{ sse existe um } a \in A \text{ tq } \mathfrak{I}_1\frac{a}{x} \models \psi\\ &\text{sse existe um } a \in A \text{ tq } \mathfrak{I}_2\frac{a}{x} \models \psi\\ &\text{sse } \mathfrak{I}_2 \models \exists x\varphi.\end{aligned}$$

□

Corolário 1. Φ é satisfatível com respeito a $\mathcal{S}$ sse também é com respeito a $\mathcal{S}'$.

Proof. ($\Rightarrow$) Seja $\mathfrak{I}' = (\mathfrak{A}', \beta')$ uma $\mathcal{S}'$-interpretação tq $\mathfrak{I}' \models \Phi$, pelo **Lema da Coincidência** a $\mathcal{S}$-interpretação $(\mathfrak{A}' |_{\mathcal{S}}, \beta')$ é um modelo de Φ.
($\Leftarrow$) Se $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ é uma $\mathcal{S}$-interpretação tq $\mathfrak{I} \models \Phi$, então escolhemos $\mathfrak{A}'$ uma $\mathcal{S}'$-estrutura tq $\mathfrak{A}' |_{\mathcal{S}} = \mathfrak{A}$. Pelo **Lema da Coincidência** a $\mathcal{S}'$-interpretação $(\mathfrak{A}', \beta)$ é modelo de Φ. □

Exercício 6. Para fórmulas arbitrárias φ, ψ, χ prove que:
$\models (\varphi \to \psi)$ sse $\varphi \models \psi$.

Proof.

$$\begin{aligned}\varphi \models \psi &\text{ sse para todo } \mathfrak{I} \text{ se } \mathfrak{I} \models \varphi \text{ então } \mathfrak{I} \models \psi\\ &\text{sse para todo } \mathfrak{I} \models (\varphi \to \psi)\\ &\text{sse } \models (\varphi \to \psi).\end{aligned}$$

□

Exercício 7. Mostre que:
(a) $\exists x\forall y\varphi \models \forall y\exists x\varphi$;
(b) $\forall y\exists xRxy \not\models \exists x\forall yRxy$.

Proof. (a) $\mathfrak{I} \models \exists x\forall y\varphi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \forall y\varphi$, então em particular existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{t}{y} \models \varphi$ sendo $t \in A$ um termo genérico qualquer. Assim, devido a escolha arbitrária, concluímos que para todo $t \in A$ existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{t}{y} \models \varphi\frac{t}{y}$, i.e., $\mathfrak{I} \models \forall y\exists x\varphi$.
(b) $\mathfrak{I} \models \forall y\exists xRxy$ sse para todo $a \in A$ existe um $t \in A$ tq $\mathfrak{I} \models Rta$, mas isso não necessariamente implica que exista um t tq Rta valha para todo a. □

Exercício 8. Sejam φ, ψ fórmulas tais que $\varphi \models\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\mid \psi$. Seja χ' obtido de χ substituindo todas as subfórmulas da forma φ por ψ. Mostre que para todo $\chi, \chi \models\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\mid \chi'$.

Proof. Provaremos por indução em fórmulas:
Se $\chi = \varphi$ é atômica então $\mathfrak{I} \models \varphi$ sse, por hipótese, $\mathfrak{I} \models \chi' = \psi$.
Se $\chi = \neg\varphi$ então $\mathfrak{I} \models \chi$ sse não vale $\mathfrak{I} \models \varphi$ sse, por hipótese, não vale $\mathfrak{I} \models \psi$ sse $\mathfrak{I} \models \chi' = \neg\psi$.
Se $\chi = \xi \vee \varphi$ então $\mathfrak{I} \models \chi$ sse $\mathfrak{I} \models \xi$ ou $\mathfrak{I} \models \varphi$ sse, por hipótese, $\mathfrak{I} \models \xi$ ou $\mathfrak{I} \models \psi$ sse $\mathfrak{I} \models \chi' = \xi \vee \psi$.

Se $\chi = \exists x\varphi$ então $\mathfrak{I} \models \chi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ sse, por hipótese, existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$ sse $\mathfrak{I} \models \chi' = \exists x\psi$.
Portanto $\chi \models\dashv \chi'$. $\square$

Exercício 9. $\Phi \models \varphi$ em $\mathcal{S}$ sse $\Phi \models \varphi$ em $\mathcal{S}'$.

Proof. $\Phi \models \varphi$ sse existe uma $\mathcal{S}$-interpretação $\mathfrak{I}$ tq sempre que $\mathfrak{I} \models \Phi$ temos que $\mathfrak{I} \models \varphi$. Entretanto, pelo **Corolário 2.** $\mathfrak{I} \models \Phi$ sse para $\mathfrak{I}'$, uma $\mathcal{S}'$-interpretação, $\mathfrak{I}' \models \Phi$ e, por hipótese, $\mathfrak{I}' \models \varphi$. $\square$

Exercício 10. Um conjunto Φ de sentenças é dito *independente* se não há um $\varphi \in \Phi$ tq $\Phi \backslash \{\varphi\} \models \varphi$. Mostre que os conjuntos Φ_{gr} e Φ_{eq} de axiomas dos grupos e relações de equivalência são independentes.

Proof. (a) $\Phi_{\text{gr}} = \{\underbrace{\forall u, v, w((u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w))}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall u \exists v(u \circ v = e)}_{\varphi_2}, \underbrace{\exists c \forall u(u \circ c = u)}_{\varphi_3}\}$

(i) Assuma $\Phi_{\text{gr}} \backslash \{\varphi_3\} \models \varphi_3$, como φ_3 dita a existência de um elemento neutro basta tomarmos por exemplo $(\mathbb{Z}, +)$, mas interpretar c em φ_3 como um $n \neq 0$. Assim $\mathfrak{I} \models \Phi_{\text{gr}} \backslash \{\varphi_3\}$, mas $\mathfrak{I} \not\models \varphi_3$.

(ii) Assuma $\Phi_{\text{gr}} \backslash \{\varphi_2\} \models \varphi_2$, como φ_2 garante a existência de um inverso, basta tomarmos a estrutura $(\mathbb{N}, +)$ em $\mathfrak{I}$ que vale $\mathfrak{I} \models \Phi_{\text{gr}} \backslash \{\varphi_2\}$, mas $\mathfrak{I} \not\models \varphi_2$.

(iii) Assuma $\Phi_{\text{gr}} \backslash \{\varphi_1\} \models \varphi_1$, como φ_1 garante associatividade tomamos o operador $\circ$ como não associativo, por exemplo a estrutura $(\mathbb{Z}, -)$ em $\mathfrak{I}$ garante que $\mathfrak{I} \models \Phi_{\text{gr}} \backslash \{\varphi_1\}$, mas $\mathfrak{I} \not\models \varphi_1$.

(b) $\Phi_{\text{eq}} = \{\underbrace{\forall a(aRa)}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall a, b(aRb \leftrightarrow bRa)}_{\varphi_2}, \underbrace{\forall a, b, c(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)}_{\varphi_3}\}$

(i) Para $\Phi_{\text{eq}} \backslash \{\varphi_3\}$ basta tomar $(\mathbb{Z}, \cdot, R)$ tq aRb sse $a \cdot b \geqslant 0$. Assim ambos φ_1, φ_2 são satisfeitos, mas escolhendo $b = 0$ em φ_3 tal relação não é sempre verdade.

(ii) Para $\Phi_{\text{eq}} \backslash \{\varphi_2\}$ basta tomar $(\mathbb{N}, \geqslant)$, tal qual não é simétrica.

(iii) Para $\Phi_{\text{eq}} \backslash \{\varphi_1\}$ basta tomar $A = \{a\}$ e (A, R) tq $\forall a \in A(a \not R a)$. $\square$

Lema 7. Lema do Isomorfismo. Para $\mathcal{S}$-estruturas isomórficas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ e toda $\mathcal{S}$-sentença φ:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ sse } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Proof. Para toda assinatura β em $\mathfrak{A}$ associamos a assinatura $\beta^\pi := \pi \circ \beta$ em $\mathfrak{B}$, e para as interpretações correspondentes $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ e $\mathfrak{I}^\pi = (\mathfrak{B}, \beta^\pi)$ mostraremos:
(i) Para todo $\mathcal{S}$-termo t: $\pi(\mathfrak{I}(t)) = \mathfrak{I}^\pi(t)$.
(ii) Para toda $\mathcal{S}$-fórmula φ: $\mathfrak{I} \models \varphi$ sse $\mathfrak{I}^\pi \models \varphi$.

Ambos os (i) e (ii) são fáceis de se provar por indução em termos e fórmulas, respectivamente.

Trataremos dos casos mais simples apenas:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} \vDash t_1 \equiv t_2 &\text{ sse } \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2);\\ &\text{ sse } \pi(\mathfrak{I}(t_1)) = \pi(\mathfrak{I}(t_2)) \text{ já que } \pi \text{ é injetiva;}\\ &\text{ sse } \mathfrak{I}^\pi(t_1) = \mathfrak{I}^\pi(t_2);\\ &\text{ sse } \mathfrak{I}^\pi \vDash t_1 \equiv t_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} \vDash Rt_1 \dots t_n &\text{ sse } R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1)\dots\mathfrak{I}(t_n);\\ &\text{ sse } R^{\mathfrak{B}}\pi(\mathfrak{I}(t_1))\dots\pi(\mathfrak{I}(t_n));\\ &\text{ sse } R^{\mathfrak{B}}\mathfrak{I}^\pi(t_1)\dots\mathfrak{I}^\pi(t_n);\\ &\text{ sse } \mathfrak{I}^\pi \vDash Rt_1\dots t_n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} \vDash \neg\psi &\text{ sse não vale } \mathfrak{I} \vDash \psi;\\ &\text{ sse não vale } \mathfrak{I}^\pi \vDash \psi;\\ &\text{ sse } \mathfrak{I}^\pi \vDash \neg\psi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} \vDash \exists x\psi &\text{ sse existe um } a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \text{ tq } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \psi;\\ &\text{ sse existe um } a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \text{ tq } (\mathfrak{I}\frac{a}{x})^\pi \vDash \psi;\\ &\text{ sse existe um } a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \text{ tq } \mathfrak{I}^\pi\frac{\pi(a)}{x} \vDash \psi;\\ &\text{ sse existe um } b \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \text{ tq } \mathfrak{I}\frac{b}{x} \vDash \psi \text{ já que } \pi \text{ é sobrejetivo;}\\ &\text{ sse } \mathfrak{I}^\pi \vDash \exists x\psi.\end{aligned}$$

□

Exercício 11. Mostre que: (a) A relação $<$ é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$, i.e., existe uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_2^{\{+,\cdot,0\}}$ tq $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \vDash \varphi[a, b] \text{ sse } a < b.$$

(b) A relação $<$ não é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, 0)$.

Proof. (a) Tome $\varphi = \exists c(\neg(c = 0) \wedge (b = a + c^2))$, dessa forma $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \vDash \varphi[a, b]$ sse $a < b$.

(b) Seja $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ um automorfismo em $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$ tq $\pi(a) = -a$ que é o $c \in \mathbb{R}$ tq $a + c = 0$.
Para provar que π é um automorfismo precisamos:
(i) π é uma bijeção;
(ii) $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$;
(iii) $\pi(0) = 0$.
Como todos são verficados isso garante que é um automorfismo. Agora vejamos que se existe um $\varphi[a, b]$ tq $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a, b]$ sse $a < b$ então como π é estritamente decrescente, $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\pi(a), \pi(b)]$ sse $a > b$. Sabemos, também, pelo **Lema do Isomorfismo** que $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a, b]$ sse $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\pi(a), \pi(b)]$, i.e., $a < b$ sse $b < a$, o que é uma contradição, portanto não existe tal $\varphi[a, b]$ e, com isso, $<$ não é elementarmente definível. □