

Provas e Exercícios

Ref. H. D. Ebbnghaus

Primavera 2022

Contents

1	Sintaxe das Linguagens de Primeira Ordem	1
2	Semântica das Linguagens de Primeira Ordem	4
3	Cálculo de Sequentes	17

1 Sintaxe das Linguagens de Primeira Ordem

Exercício 1.3. Seja $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dado. Para $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$ mostre que $\exists c \in I := [a, b]$ tq $c \notin \text{Im}(\alpha)$. Conclua disso que I , e portanto \mathbb{R} , são incontáveis.

Proof. Seja $I_0 := [a, b]$ e defina indutivamente $I_{n+1} := I_n \setminus \{\alpha(n)\}$, obviamente $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$ forma uma sequência de intervalos encaixantes e, por estarmos em \mathbb{R} , vale que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

como $\alpha(k) \notin I_n, \forall k \leq n$, então, em particular, $\alpha(k) \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n, \forall k \in \mathbb{N}$, i.e., $c \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \forall c \in \text{Im}(\alpha)$ \square

Exercício 1.4. Prove que se $M_0, M_1, \dots \leq \aleph_0$, então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \leq \aleph_0$$

e o utilize para provar o **Lema 1.2**.

Proof. O primeiro teorema é facilmente provável utilizando um argumento similar ao da Diagonal de Cantor: Sabemos que existe uma bijeção $\alpha_i : \mathbb{N} \rightarrow M_i, \forall i \in \mathbb{N}$, equivalente a uma sequência $\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots$ tq $M_i = \{\alpha_{in} \mid n \in \mathbb{N}\}$, construindo a matriz $a_{ij} := \alpha_{ij}$ utilizamos a diagonal para enumerar todos os elementos da matriz.

Definindo $M_n := \mathbb{A}^n$, o conjunto de strings de comprimento n , é fácil mostrar por indução que $M_i \leq \aleph_0, \forall i \in \mathbb{N}$, com isso

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathbb{A}^* \leq \aleph_0.$$

Como $\mathbb{A}^* \geq \aleph_0$ pelo teorema de Schröder-Bernstein $\mathcal{A}^* \approx \aleph_0$. \square

Exercício 1.5. Demonstre o Teorema de Cantor: não existe $\alpha : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ sobrejetivo e, portanto, bijetivo.

Proof. Seja $S := \{a \in M \mid a \notin \alpha(a)\} \in \mathcal{P}(M)$, assumindo por hipótese que existe α sobrejetivo, então $\exists s \in M$ tq $\alpha(s) = S$. Se $s \in S$, por definição $s \notin \alpha(s) = S$, contradição. Se $s \notin S$, por definição $s \in \alpha(s) = S$, contradição, portanto não existe tal $s \in M$. \square

Exercício 4.6. (a) Seja \mathfrak{C}_v o cálculo consistindo das seguintes regras:

$$\frac{}{x \quad x} ; \quad \frac{y \quad t_i}{y \quad ft_1 \dots t_n} \text{ se } f \in \mathcal{S} \text{ é n-ária e } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Mostre que para toda variável x e \mathcal{S} -termo t , $x \ t$ é derivável em \mathfrak{C}_v sse $x \in \text{var}(t)$.

(b) Dê um resultado para SF análogo ao resultado para var em (a).

Proof. (a)

(i) Se $x \in \text{var}(t)$ então $x \ t$ é derivável em \mathfrak{C}_v : Se $t = x$ então $x \in \text{var}(t)$ e pela 1ª regra $x \ t$ é derivável. Se $t = t_i$ e $x \in \text{var}(t_i)$ então, seguindo a definição, $x \in f(t_1 \dots t_n)$.

(ii) Se $x \ t$ é derivável em \mathfrak{C}_v então $x \in \text{var}(t)$: Se $t = x$ a primeira regra garante que $x \in \text{var}(t)$. Se $t = ft_1 \dots t_n$ então existe um $x \ t_i$ em \mathfrak{C}_v , como todos termos dessa forma que existem partem de uma regra sem premissa (regra 1) então $x \in \text{var}(t_i)$ logo $x \in \text{var}(ft_1 \dots t_n)$.

(b) Seja o cálculo \mathfrak{C}_a definido pelas regras:

$$\frac{}{t_m \doteq t_n \quad t_m \doteq t_n} ; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad \neg \psi} ; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad (\varphi * \psi)} \quad * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad Qx\psi} \quad Q = \forall, \exists.$$

Para todo termo t_m, t_n e toda variável x . $\varphi \ \psi$ é derivável em \mathfrak{C}_a sse $\varphi \in \text{SF}(\psi)$. \square

Exercício 4.7. Altere o cálculo de fórmulas omitindo os parênteses que delimitam as fórmulas introduzidas da forma $\varphi \ \psi$. Mostre que tais fórmulas não terão mais uma única decomposição e que SF não será mais uma função bem definida.

Proof. Pegue, por exemplo, a fórmula $\varphi := \exists x Px \wedge Qy$, podemos, utilizando o cálculo de fórmulas, construir duas derivações diferentes da mesma fórmula:

1. Px , (F2) em P e x ;
2. Qy , (F2) em Q e y ;
3. $Px \wedge Qy$, (F4) em (1) e (2) com \wedge ;
4. $\exists x Px \wedge Qy$, (F5) em (3) usando \exists e x .

e a outra altera somente os passos (3) e (4) para:

1. $\exists xPx$, (F5) em (1) usando \exists e x ;
2. $\exists xPx \wedge Qy x$, (F4) em (2) e (3) com \wedge .

Obviamente $\text{SF}(\varphi) = \{\varphi, Px \wedge Qy, Qy, Px\}$ utilizando a primeira derivação e $\text{SF}(\varphi) = \{\varphi, \exists xPx, Qy, Px\}$ utilizando a segunda. \square

Exercício 4.8. Definimos uma \mathcal{S} -fórmula em notação polonesa (\mathcal{S} - P -fórmula) como as strings em $\mathbb{A}_{\mathcal{S}}$ tq a regra (F4) é alterada pra: Se φ, ψ são \mathcal{S} - P -fórmulas, então também são $\square\varphi\psi$, com $\square = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Proof. Precisamos antes provar o análogo ao **Lema 4.2.(b)** para \mathcal{S} - P -fórmulas: para $\varphi \neq \varphi'$, φ não é um segmento inicial próprio de φ' . Se $\varphi = \wedge\chi\psi$, assuma por contradição que φ é um segmento inicial próprio de φ' , i.e., existe $\zeta \neq \square$ tq $\varphi\zeta = \wedge\psi\chi = \varphi'$, mas como φ' começa com \wedge este só pode ser formado a partir de (F4), portanto $\varphi = \wedge\chi'\psi'$ para algumas χ', ψ' \mathcal{S} - P -fórmulas. Podemos então cancelar \wedge e ficar com $\chi\psi\zeta = \chi'\psi$, mas, pela hipótese de indução, se χ é um segmento próprio de χ' , só pode ser o caso que $\chi = \chi'$, o mesmo vale para ψ e ψ' , logo $\zeta = \square$, contradição.

Para provar o **Lema 4.3.(b)** provemos primeiro que se $\varphi_1 \dots \varphi_n = \varphi'_1 \dots \varphi'_n$, então $\varphi_i = \varphi'_i$ por indução. Caso base: φ_1 é segmento inicial próprio de φ'_1 , pelo **Lema 4.2.(b)** temos $\varphi_1 = \varphi'_1$. Hipótese de indução: assuma que $\varphi_i = \varphi'_i$, logo podemos cancelá-lo, o que implica que φ_{i+1} é segmento inicial próprio de φ'_{i+1} , i.e., $\varphi_{i+1} = \varphi'_{i+1}$.

Seja agora $n \neq m$, assuma sem perda de generalidade que $n = m + k$ para $k > 0$, logo $\varphi_1 \dots \varphi_n = \varphi'_1 \dots \varphi'_n \dots \varphi'_m$, da prova anterior temos então que $\square = \varphi'_{n+1} \dots \varphi'_m$, contradição, logo $k = 0$.

A prova do **Lema 4.4.(b)** é trivial, basta definirmos a função SF para \mathcal{S} - P -fórmulas, o que é muito simples. \square

Exercício 4.9. Seja $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ de comprimento k , para $n \geq 1$. Mostre que $\exists \xi, \eta \in \mathbb{A}_{\mathcal{S}}^*$ unicamente determinados e $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ tq o comprimento de ξ é $1 \leq i < k$ e $t_1 \dots t_n = \xi t \eta$.

Proof. Seja $i = \sum_{j=0}^m \text{lng}(t_j)$ para algum $m < n$, nesse caso $t = t_{m+1}$ e $\eta = t_{m+2} \dots t_n$ podendo ser possivelmente \square . Se todos os termos são constantes ou variáveis este sempre é o caso, se for uma função é possível pararmos no meio de um termo $t_m = ft'_1 \dots t'_p$, nesse caso se ξ terminar antes de t'_q pegamos $t = t'_{q+1}$ e η como o resto. \square

Exercício 5.2. Mostre que o cálculo \mathfrak{C}_{nf} permite derivar precisamente aquelas strings da forma x no qual $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ tq $x \notin \text{free}(\varphi)$:

$$\frac{}{x \quad t_1 \doteq t_2} \text{ Se } t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2);$$

$$\frac{}{x \quad Rt_1 \dots t_n} \text{ Se } R \in \mathcal{S} \text{ é n-ária, } t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{var}(t_n);$$

$$\frac{x \quad \varphi}{x \quad \neg \varphi}; \quad \frac{(x \quad \varphi) \quad (x \quad \psi)}{x \quad (\varphi * \psi)} * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \quad \frac{}{x \quad Qx\varphi}; \quad \frac{x \quad \varphi}{x \quad Qx\varphi} Q = \forall, \exists;$$

Proof. (\Rightarrow) Fazendo indução em cada regra:

$\varphi = t_1 \doteq t_2$: por definição $x \notin \text{free}(\varphi)$;

$\varphi = Rt_1 \dots t_n$: Também por definição $x \notin \text{free}(\varphi)$;

$\varphi = Qx\psi$ nesse caso $x \notin \text{free}(\varphi) = \text{free}(\psi) \setminus \{x\}$;

(*) Portanto todas as fórmulas φ deriváveis com premissa livre não tem uma ocorrência livre de x .

$\varphi = \neg\psi$: Se $\neg\psi$ é derivável, então ψ também é, mas se ψ é derivável em \mathfrak{C}_{nf} então, por (*), $x \notin \text{free}(\psi) \rightarrow x \notin \text{free}(\neg\psi)$;

$\varphi = (\psi * \chi)$: O argumento é análogo ao de cima, ambos ψ, χ tem de ser derivável e, por (*), não há ocorrência livre neles, o que implica que não há em $(\psi * \chi)$.

(\Leftarrow) Agora assumindo $x \notin \text{free}(\varphi)$:

$\varphi = t_1 \doteq t_2$: então ela é derivável pela regra 1;

$\varphi = Rt_1 \dots t_n$: então ela é derivável pela 2ª regra;

$\varphi = Qx\psi$: a última e penúltima regra garantem que é derivável;

$\varphi = \neg\psi$: então $x \notin \text{free}(\varphi)$, portanto a 3ª regra garante que é derivável;

$\varphi = (\psi * \chi)$: Se x não ocorre livre em φ então ela não ocorre livre em ambos, portanto a 5ª regra garante sua derivação. \square

2 Semântica das Linguagens de Primeira Ordem

Exercício 1.4. Seja $\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ e $\beta(v_n) := 2n$ para $n \geq 0$. Interprete as seguintes fórmulas:

a) $\exists v_0 v_0 + v_0 \doteq v_1$;

b) $\exists v_0 v_0 \cdot v_0 \doteq v_1$;

c) $\exists v_1 v_0 \doteq v_1$;

d) $\forall v_0 \exists v_1 v_0 \doteq v_1$;

e) $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)$.

Proof. $\mathfrak{I} \models a$) sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $a + a = \beta(v_1) = 2$, de fato $a = 1$ satisfaz;

$\mathfrak{I} \models b$) sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $a \cdot a = 2$, obviamente a equação $x^2 = 2$ não tem solução nos naturais, portanto $\mathfrak{I} \not\models b$);

$\mathfrak{I} \models c$) sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $0 = a$, o que é claramente verdade;

$\mathfrak{I} \models d$) sse para todo $a \in \mathbb{N}$ existe um $b \in \mathbb{N}$ tq $a = b$, o que também é verdadeiro;

$\mathfrak{I} \models e$) sse para todo $a, b \in \mathbb{N}$ existe um $c \in \mathbb{N}$ tq $a < c$ e $c < b$. Em particular escolhendo $b = a + 1$ temos que existe um natural c tq $a < c < a + 1$ o que é falso, portanto $\mathfrak{I} \not\models e$). \square

Exercício 1.5. Seja $A \neq \emptyset$ e $A, \mathcal{S} < \aleph_0$ um conjunto de símbolos. Mostre que há uma quantidade finita de \mathcal{S} -estruturas com domínio A .

Proof. Seja $S = ((c_i)_{0 \leq i \leq n_1}, (R_i)_{0 \leq i \leq n_2}, (f_i)_{0 \leq i \leq n_3})$ e $|A| = m$, a quantidade total de associações

possíveis para cada elemento é:

$$\begin{aligned}\alpha_{R_i} &:= \{Z \mid Z \subseteq A^n\}, & |\alpha_{R_i}| &= \mathcal{P}(\alpha_{R_i}) = 2^m \\ \alpha_{f_i} &:= A^{(A^n)}, & |\alpha_{f_i}| &= |A|^{|A^n|} = m^{(m^n)} \\ \alpha_{c_i} &:= (A^n)^{A^n}, & |\alpha_{c_i}| &= |(A^n)|^{|A^n|} = (m^{n \cdot m^n})\end{aligned}$$

Dessa forma, como todos são finitos e a união finita de conjuntos finitos é finita então o total de estruturas \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} := \bigcup \left\{ \bigcup_{0 \leq i \leq n_1} \alpha_{R_i}, \bigcup_{0 \leq i \leq n_2} \alpha_{f_i}, \bigcup_{0 \leq i \leq n_3} \alpha_{c_i} \right\} < \aleph_0.$$

□

Exercício 1.6. Para \mathcal{S} -estruturas $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ e $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{b})$ seja $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ a \mathcal{S} -estrutura com domínio $A \times B$ satisfazendo:

Para $R \in \mathcal{S}$ n -ária e $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$R^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}(a_1, b_1) \dots (a_n, b_n) \leftrightarrow R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_n \wedge R^{\mathfrak{B}} b_1 \dots b_n;$$

Para $f \in \mathcal{S}$ n -ária e $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$f^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) := (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_n));$$

Para $c \in \mathcal{S}$:

$$c^{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}});$$

Mostre que:

- (a) Se as \mathcal{S}_{gr} -estruturas \mathfrak{A} e \mathfrak{B} são grupos então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também é.
- (b) Se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são estruturas satisfazendo os axiomas de equivalência então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também satisfaz.
- (c) Se as \mathcal{S}_{ar} -estruturas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são corpos, então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ não é.

Proof. (a) Sejam $\mathfrak{A} = (A, \circ, e)$; $\mathfrak{B} = (B, *, \varepsilon)$ e $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \otimes, \epsilon)$. Se $a, b, c \in \mathfrak{A}$; $x, y, z \in \mathfrak{B}$ e $u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

- (i) $\forall u, v, w ((u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w))$:

$$\begin{aligned}\overbrace{(x, a)}^u \otimes \overbrace{(y, b)}^v &\otimes \overbrace{(z, c)}^w = (x \circ y, a * b) \otimes (z, c) \\ &= (x \circ y \circ z, a * b * c) \\ &= (x, a) \otimes (y \circ z, b * c) \\ &= (x, a) \otimes ((y, b) \otimes (z, c)) \\ (u \otimes v) \otimes w &= u \otimes (v \otimes w).\end{aligned}$$

- (ii) $\forall u \exists v (u \otimes v) = \epsilon$:

$$\begin{aligned}\overbrace{(x, a)}^u \otimes \overbrace{(y, b)}^v &= \overbrace{(e, \varepsilon)}^\epsilon \\ (x \circ y, a * b) &= (e, \varepsilon) \\ \forall x \exists y (x \circ y = e) \wedge \forall a \exists b (a * b = \varepsilon).\end{aligned}$$

(iii) $\exists \epsilon \forall u (u \circ \epsilon = u)$:

$$\begin{aligned} \overbrace{(x, a)}^u \circ \overbrace{(e, \epsilon)}^\epsilon &= \overbrace{(x, a)}^u \\ (x \circ e, a \circ \epsilon) &= (x, a) \\ \exists e \forall x (x \circ e = x) \wedge \exists \epsilon \forall a (a \circ \epsilon = a). \end{aligned}$$

(b) Sejam $\mathfrak{A} = (A, R)$; $\mathfrak{B} = (B, \mathcal{R})$, $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \mathcal{R})$ com $x, y, z \in \mathfrak{A}$; $a, b, c \in \mathfrak{B}$; $u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

(i) $\forall u (u \mathcal{R} u)$:

$$\begin{aligned} \overbrace{(x, a)}^u \mathcal{R} \overbrace{(x, a)}^u &\leftrightarrow xRx \wedge a\mathcal{R}a \\ \forall x (xRx) \wedge \forall a (a\mathcal{R}a). \end{aligned}$$

(ii) $\forall u, v (u \mathcal{R} v \leftrightarrow v \mathcal{R} u)$:

$$\begin{aligned} \overbrace{(x, a)}^u \mathcal{R} \overbrace{(y, b)}^v &\leftrightarrow \overbrace{(y, b)}^v \mathcal{R} \overbrace{(x, a)}^u \\ xRy \wedge a\mathcal{R}b &\leftrightarrow yRx \wedge b\mathcal{R}a \\ \forall x, y (xRy \leftrightarrow yRx) \wedge \forall a, b (a\mathcal{R}b \leftrightarrow b\mathcal{R}a) \end{aligned}$$

(iii) $\forall u, v, w (u \mathcal{R} v \wedge v \mathcal{R} w \rightarrow u \mathcal{R} w)$:

$$\begin{aligned} \overbrace{(x, a)}^u \mathcal{R} \overbrace{(y, b)}^v \wedge \overbrace{(y, b)}^v \mathcal{R} \overbrace{(z, c)}^w &\rightarrow \overbrace{(x, a)}^u \mathcal{R} \overbrace{(z, c)}^w \\ (xRy \wedge a\mathcal{R}b) \wedge (yRz \wedge b\mathcal{R}c) &\rightarrow xRz \wedge a\mathcal{R}c \\ (xRy \wedge yRz) \wedge (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) &\rightarrow xRz \wedge a\mathcal{R}c \\ \forall x, y, z (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz) \wedge \forall a, b, c (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \rightarrow a\mathcal{R}c) \end{aligned}$$

(c) Sejam $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, 0, 1)$; $\mathfrak{B} = (B, *, \times, \bar{0}, \bar{1})$ e $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ com $x, y \in \mathfrak{A}$; $a, b \in \mathfrak{B}$ e $u, v \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

Um dos axiomas é $\forall (u \neq \mathbf{0}) \exists v (u \oplus v = \mathbf{1})$:

$$\begin{aligned} (x, a) \oplus (y, b) &= (1, \bar{1}) \\ (x \cdot y, a * b) &= (1, \bar{1}) \end{aligned}$$

Se isso é verdade então, em particular, para ou $x = 0$ ou $a = \bar{0}$ temos que $(0, b), (x, \bar{0}) \neq \mathbf{0}$, logo ambos $0, \bar{0}$ possuiriam inverso, o que é falso. \square

Exercício 2.1. Mostre que para $x, y \in \{\top, \perp\}$:

- a) $\dot{\rightarrow} (x, y) = \dot{\vee} (\dot{\neg} (x), y)$;
- b) $\dot{\wedge} (x, y) = \dot{\neg} (\dot{\vee} (\dot{\neg} (x), \dot{\neg} (y)))$;
- c) $\dot{\leftrightarrow} (x, y) = \dot{\wedge} (\dot{\rightarrow} (x, y), \dot{\rightarrow} (y, x))$.

Proof.

x	y	$\dot{\neg} (x)$	$\dot{\vee} (\dot{\neg} (x), y)$	$\dot{\rightarrow} (x, y)$
\top	\top	\perp	\top	\top
\top	\perp	\perp	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\top	\top
\perp	\perp	\top	\top	\top

x	y	$\dot{\rightarrow}(x)$	$\dot{\rightarrow}(y)$	$\dot{\vee}(\dot{\rightarrow}(x), \dot{\rightarrow}(y))$	$\dot{\rightarrow}(\dot{\vee}(\dot{\rightarrow}(x), \dot{\rightarrow}(y)))$	$\dot{\wedge}(x, y)$
\top	\top	\perp	\perp	\perp	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\perp	\top	\top	\top	\perp	\perp

x	y	$\dot{\rightarrow}(x, y)$	$\dot{\rightarrow}(y, x)$	$\dot{\wedge}(\dot{\rightarrow}(x, y), \dot{\rightarrow}(y, x))$	$\dot{\leftrightarrow}(x, y)$
\top	\top	\top	\top	\top	\top
\top	\perp	\perp	\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top	\perp	\perp	\perp
\perp	\perp	\top	\top	\top	\top

□

Exercício 3.3. Seja P um símbolo de relação unária e f de função binária. Determine duas interpretações para cada fórmula uma que a satisfaça e outra que não:

- $\forall v_1 f v_0 v_1 \dot{=} v_0$;
- $\exists v_0 \forall v_1 f v_0 v_1 \dot{=} v_1$;
- $\exists v_0 (P v_0 \wedge \forall v_1 P f v_0 v_1)$.

Proof. a) Seja $\mathfrak{I} = (\mathbb{N}, R, \cdot)$ tq $\beta(v_0) = 0$, então $\mathfrak{I} \models a$ sse para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \cdot a = 0$, o que é fato. Entretanto para mesma interpretação com $+$ temos $a + 0 = 0$, o que não é o caso.

b) Interpretando com a mesma estrutura que em a) o que b) garante é a existência de um elemento neutro, o que é verdade. Pro caso de não satisfação basta retirarmos o elemento neutro do domínio.

c) Seja $Rx := x$ é par para mesma estrutura \mathfrak{I} com $+$, o que c) diz é que existe um x par tq para todo y , $x + y$ é par, o que é claramente falso, use, entretanto, \cdot ao invés de $+$, então obviamente para todo y , xy é par se x for par. □

Exercício 3.4. Uma fórmula sem \neg, \rightarrow e \leftrightarrow é denominada *positiva*. Prove que toda fórmula positiva é satisfatível.

Proof. Seja $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\text{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a\}$ e $\beta(v) = a$, com $R_i^{\mathfrak{A}}$ sendo o grafo da função identidade n -ária para todo i , assim como $f_i^{\mathfrak{A}} = \text{id}$ e $c_i^{\mathfrak{A}} = a$. De fato, $\mathfrak{I}(t) = a, \forall t \in \mathcal{T}^S$. Por indução em fórmulas é claro que $\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$ e $\mathfrak{I} \models t_1 \dots t_n$, logo também satisfaz $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \vee \psi$, o mesmo para $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$. □

Exercício 4.9. Para fórmulas arbitrárias φ, ψ, χ prove que:

- $(\varphi \vee \psi) \models \chi$ sse $\varphi \models \chi$ e $\psi \models \chi$;
- $\models (\varphi \rightarrow \psi)$ sse $\varphi \models \psi$.

Proof. a) (\Rightarrow) Basta provarmos que $(\varphi \vee \psi \rightarrow \chi) \models ((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi))$, logo

$\varphi \models \chi$ e $\psi \models \chi$ sse para todo \mathfrak{I} , se $\mathfrak{I} \models \varphi$, então $\mathfrak{I} \models \chi$, i.e., $\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \chi)$ e, igualmente, $\mathfrak{I} \models (\psi \rightarrow \chi)$;

sse $\mathfrak{I} \models ((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi))$;

sse $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi)$;

sse $(\varphi \vee \psi) \models \chi$.

b) (\Leftarrow)

$\varphi \models \psi$ sse para todo \mathcal{I} se $\mathcal{I} \models \varphi$ então $\mathcal{I} \models \psi$;
sse para todo $\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)$;
sse $\models (\varphi \rightarrow \psi)$.

□

Exercício 4.10. Mostre que:

- (a) $\exists x \forall y \varphi \models \forall y \exists x \varphi$;
(b) $\forall y \exists x Rxy \not\models \exists x \forall y Rxy$.

Proof. (a) $\mathcal{I} \models \exists x \forall y \varphi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathcal{I}_x^a \models \forall y \varphi$, então em particular existe um $a \in A$ tq $\mathcal{I}_x^a \models \varphi$ sendo $t \in A$ um termo genérico qualquer. Assim, devido a escolha arbitrária, concluímos que para todo $t \in A$ existe um $a \in A$ tq $\mathcal{I}_x^a \models \varphi$, i.e., $\mathcal{I} \models \forall y \exists x \varphi$.

(b) $\mathcal{I} \models \forall y \exists x Rxy$ sse para todo $a \in A$ existe um $t \in A$ tq $\mathcal{I} \models Rta$, mas isso não necessariamente implica que exista um t tq Rta valha para todo a .

Obs: Lembre-se que a definição de satisfatibilidade é feita na metateoria que, por mais rigorosa que seja, é justificada pela noção intuitiva que temos de cada fórmula e justificada da mesma forma. □

Exercício 4.11. Prove que para $Q = \forall, \exists$:

- a) $Qx(\varphi \wedge \psi) \models (Qx\varphi \wedge Qx\psi)$;
b) $Qx(\varphi \vee \psi) \models (\varphi \vee Qx\psi)$, se $x \notin \text{free}(\varphi)$;
e justifique o motivo da assunção $x \notin \text{free}(\varphi)$.

Proof. Provarei para $Q = \forall$ porque é fácil ver que a intuição se estende pro outro caso.

a) Obviamente se para todo $a \in A$ temos $\mathcal{I}_x^a \models \varphi$ e para todo $b \in A$ temos $\mathcal{I}_x^b \models \psi$, então para todo $c \in A$, $\mathcal{I}_x^c \models \varphi$ e $\mathcal{I}_x^c \models \psi$, i.e., para todo $c \in A$, $\mathcal{I} \models (\varphi \wedge \psi)$, analogamente vale a volta. A justificativa se baseia no fato intuitivo de que se estamos variando pelo domínio todo de uma forma numa fórmula e de outra forma na outra, então podemos variar em ambas da mesma forma.

b) $\mathcal{I} \models \forall x \varphi$ sse para todo $a \in A$, $\mathcal{I}_x^a \models \varphi$, i.e., utilizamos a valoração β que interpreta x como a , mas como $x \notin \text{free}(\varphi)$, então $\mathcal{I}_x^a(\varphi) = \mathcal{I}(\varphi)$, a partir disso é fácil provar ambos b) e c). □

Exercício 4.12. Sejam φ, ψ fórmulas tais que $\varphi \models \psi$. Seja χ' obtido de χ substituindo todas as subfórmulas da forma φ por ψ . Mostre que para todo $\chi, \chi \models \chi'$.

Proof. Provaremos por indução em fórmulas:

Se $\chi = \varphi$ é atômica então $\mathcal{I} \models \varphi$ sse, por hipótese, $\mathcal{I} \models \chi' = \psi$;

se $\chi = \neg \varphi$ então $\mathcal{I} \models \chi$ sse não vale $\mathcal{I} \models \varphi$ sse, por hipótese, não vale $\mathcal{I} \models \psi$, i.e., $\mathcal{I} \models \chi' = \neg \psi$;

se $\chi = \xi \vee \varphi$ então $\mathcal{I} \models \chi$ sse $\mathcal{I} \models \xi$ ou $\mathcal{I} \models \varphi$ sse, por hipótese, $\mathcal{I} \models \xi$ ou $\mathcal{I} \models \psi$, i.e., $\mathcal{I} \models \chi' = \xi \vee \psi$;

se $\chi = \exists x \varphi$ então $\mathcal{I} \models \chi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathcal{I}_x^a \models \varphi$ sse, por hipótese, existe um $a \in A$ tq $\mathcal{I}_x^a \models \psi$, i.e., $\mathcal{I} \models \chi' = \exists x \psi$.

Portanto $\chi \models \chi'$. □

Exercício 4.13. Prove o análogo ao 4.8. para relação de consequência.

Proof. Pelo **Lema 4.4.** é fácil estender o caso que o conjunto é satisfável para consequência lógica. \square

Exercício 4.14. Um conjunto Φ de sentenças é dito *independente* se não há um $\varphi \in \Phi$ tq $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Mostre que os conjuntos Φ_{gr} e Φ_{eq} de axiomas dos grupos e relações de equivalência são independentes.

Proof. (a) $\Phi_{\text{gr}} = \{\underbrace{\forall uvw((u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w))}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall u \exists v(u \circ v = e)}_{\varphi_2}, \underbrace{\exists c \forall u(u \circ c = u)}_{\varphi_3}\}$

(i) Como φ_3 garante a existência de um elemento neutro, mas não necessariamente precisamos interpretar e como este, peguemos $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \cdot, 0)$, de fato esta é associativa e possui um número que se operado com qualquer outro no domínio resulta em 0, sendo este, é claro, também o 0, então $\mathcal{I} \models \Phi_{\text{gr}} \setminus \{\varphi_3\}$, mas $\mathcal{I} \not\models \varphi_3$;

(ii) Como φ_2 garante a existência de um inverso, basta tomarmos a estrutura $(\mathbb{N}, +, 0)$ em \mathcal{I} que vale $\mathcal{I} \models \Phi_{\text{gr}} \setminus \{\varphi_2\}$, mas $\mathcal{I} \not\models \varphi_2$;

(iii) Como φ_1 garante associatividade tomamos o operador \circ como não associativo, por exemplo a estrutura $(\mathbb{Z}, -, 0)$ em \mathcal{I} garante que $\mathcal{I} \models \Phi_{\text{gr}} \setminus \{\varphi_1\}$, mas $\mathcal{I} \not\models \varphi_1$.

(b) $\Phi_{\text{eq}} = \{\underbrace{\forall a(aRa)}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall ab(aRb \leftrightarrow bRa)}_{\varphi_2}, \underbrace{\forall abc(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)}_{\varphi_3}\}$

(i) Para $\Phi_{\text{eq}} \setminus \{\varphi_3\}$ basta tomar (\mathbb{Z}, \cdot, R) tq aRb sse $a \cdot b \geq 0$. Assim ambos φ_1, φ_2 são satisfeitos, mas escolhendo $b = 0$ em φ_3 tal relação não é sempre verdade;

(ii) Para $\Phi_{\text{eq}} \setminus \{\varphi_2\}$ basta tomar (\mathbb{N}, \geq) , tal qual não é simétrica;

(iii) Para $\Phi_{\text{eq}} \setminus \{\varphi_1\}$ basta tomar $A = \{a\}$ e (A, R) tq $\forall a \in A(a \not R a)$. \square

Exercício 4.15. (Generalização do **Exercício 1.6.**). Seja $I \neq \emptyset, \forall i \in I$, seja \mathfrak{A}_i uma \mathcal{S} -estrutura. Denotaremos por $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ a \mathcal{S} -estrutura do produto direto das \mathcal{S} -estruturas \mathfrak{A}_i :

$$\text{Dom} \left(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \right) := \left\{ g \mid g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \text{Dom}(\mathfrak{A}_i), \text{ e } g(i) \in \text{Dom}(\mathfrak{A}_i), \forall i \in I \right\}$$

i.e., n-tuplas de todas as possíveis combinações de elementos no domínio de cada estrutura (que denotaremos por $\langle g(i) \mid i \in I \rangle$), e:

para $R \in \mathcal{S}$ n-ária e $g_1, \dots, g_n \in \prod_{i \in I} \text{Dom}(\mathfrak{A}_i)$:

$$R^{\mathfrak{A}} g_1 \dots g_n \text{ sse } R^{\mathfrak{A}_i} g_1(i) \dots g_n(i), \forall i \in I;$$

para $f \in \mathcal{S}$ n-ária e $g_1, \dots, g_n \in \prod_{i \in I} \text{Dom}(\mathfrak{A}_i)$:

$$f^{\mathfrak{A}}(g_1, \dots, g_n) := \langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \dots, g_n(i)) \mid i \in I \rangle;$$

e $c^{\mathfrak{A}} := \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$ para $c \in \mathcal{S}$.

Prove que para $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ se $\text{var}(t) \subseteq \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e $g_0, \dots, g_{n-1} \in \prod_{i \in I} \text{Dom}(\mathfrak{A}_i)$, então

$$t^{\mathfrak{A}}[g_0, \dots, g_{n-1}] = \langle t^{\mathfrak{A}_i}[g_0(i), \dots, g_{n-1}(i)] \mid i \in I \rangle \quad (*)$$

Proof. Se $t = c$, então, por definição, $c^{\mathfrak{A}} = \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$. Se $t = x$, então, novamente por definição, $t^{\mathfrak{A}}[g_0] = g_0 = \langle g_0(i) \mid i \in I \rangle$. Provados os casos bases assuma (*) como hipótese indutiva. Se $t = f(t_1, \dots, t_n)$, então $t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}})$, por hipótese para cada t_i temos $t_i^{\mathfrak{A}} = g_k$, para algum g_k , logo $t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(g_{i_1}, \dots, g_{i_n})$ que, por definição, é igual a $\langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_{i_1}(i), \dots, g_{i_n}(i)) \mid i \in I \rangle$. \square

Exercício 4.16. Fórmulas deriváveis no seguinte cálculo são denominadas fórmulas Horn:

$$\frac{}{(\neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n \vee \varphi)} \text{ Se } n \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi \text{ são atômicas;}$$

$$\frac{}{\neg\varphi_0 \vee \dots \vee \neg\varphi_n} \text{ Se } n \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi_0, \dots, \varphi_n \text{ são atômicas;}$$

$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)} ; \quad \frac{\varphi}{\forall x \varphi} ; \quad \frac{\varphi}{\exists x \varphi} .$$

Mostre que se φ é uma *sentença* Horn e se $\mathfrak{A}_i \models \varphi, \forall i \in I$, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$.

Proof. Pelo teorema anterior temos $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models (t_1 \doteq t_2)$ sse $t_1^{\mathfrak{A}} = \langle t_1^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle = t_2^{\mathfrak{A}} = \langle t_2^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$, i.e., $t_1^{\mathfrak{A}_i} = t_2^{\mathfrak{A}_i}, \forall i \in I$, então obviamente se cada \mathfrak{A}_i o satisfaz, o produto direto também. É fácil estender o argumento para outras fórmulas atômicas. Disso é fácil tirar que se todas as estruturas satisfazem negações e disjunções de fórmulas atômicas, então o produto direto também satisfaz.

Provado o caso base assuma como hipótese de indução que se $\mathfrak{A}_i \models \varphi, \forall i \in I$, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$. Se $\mathfrak{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)$, então $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ e $\mathfrak{A}_i \models \psi$, por hipótese isso implica que $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$ e $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \psi$, i.e., $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)$. Da mesma forma, $\mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi$ sse existe $a \in \text{Dom}(\mathfrak{A}_i)$ tq $\mathfrak{A}_i \models \varphi$, se em cada domínio das \mathfrak{A}_i há um elemento que satisfaz, em particular pegando $a_i \in \text{Dom}(\mathfrak{A}_i)$ temos que a n -tupla $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Dom}(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i)$ também satisfaz, o argumento é análogo para $\forall x \varphi$. \square

Exercício 5.9. Seja $\mathcal{S} < \aleph_0$ um conjunto de símbolos e \mathfrak{A} uma \mathcal{S} -estrutura tq $\text{Dom}(\mathfrak{A}) < \aleph_0$. Mostre que há $\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ cujos modelos são exatamente aquelas \mathcal{S} -estruturas isomórficas a \mathfrak{A} .

Proof. Construiremos $\varphi_{\mathfrak{A}}$ em função de \mathfrak{A} , enumere $\text{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Como $\mathcal{S} < \aleph_0$, então para especificamente $x_1, \dots, x_n \in \text{Var}$ defina $\Phi := \{\varphi \mid \varphi \text{ é atômica e } \text{free}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}\}$ o conjunto de \mathcal{S} -fórmulas atômicas com exatamente x_1, \dots, x_n como variáveis livres. Obviamente $\Phi < \aleph_0$, enumere portanto $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$. Defina por indução $\Psi_0 := \emptyset$ e

$$\Psi_m := \begin{cases} \Psi_{m-1} \cup \{\varphi_m\}, & \text{se } \mathfrak{A} \models \varphi_m[a_1, \dots, a_n]; \\ \Psi_{m-1} \cup \{\neg\varphi_m\}, & \text{se } \mathfrak{A} \not\models \varphi_m[a_1, \dots, a_n]. \end{cases}$$

com isso o conjunto

$$\Psi := \bigcup_{i=1}^k \Psi_i$$

tem cardinalidade igual a Φ e, portanto, é finito. Obviamente Ψ possui todas as informações necessárias para definirmos todas as funções, relações e constantes e suas dependências com os elementos do domínio, portanto toda estrutura que satisfaz Ψ terá tais propriedades, basta agora garantir que o domínio dessa nova estrutura esteja em bijeção com o de \mathfrak{A} , defina então:

$$\varphi_{\mathfrak{A}} := \exists x_1 \dots x_n \left(\bigwedge \Psi \wedge \forall x \left(\bigvee_{i=1}^n x \doteq x_i \right) \right)$$

□

Exercício 5.10. Mostre que: (a) A relação $<$ é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$, i.e., existe uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_2^{\{+, \cdot, 0\}}$ tq $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \models \varphi[a, b] \text{ sse } a < b.$$

(b) A relação $<$ não é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, 0)$.

Proof. (a) Tome $\varphi = \exists c(\neg(c \doteq 0) \wedge (b \doteq a + c^2))$, dessa forma $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \models \varphi[a, b]$ sse $a < b$.

(b) Seja $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ um automorfismo em $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$ tq $\pi(a) = -a$ que é o $c \in \mathbb{R}$ tq $a + c = 0$. Para provar que π é um automorfismo precisamos:

(i) π é uma bijeção;

(ii) $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$;

(iii) $\pi(0) = 0$.

Como todos são verificados isso garante que é um automorfismo. Agora vejamos que se existe um $\varphi[a, b]$ tq $\mathfrak{A} \models \varphi[a, b]$ sse $a < b$ então como π é estritamente decrescente, $\mathfrak{A} \models \varphi[\pi(a), \pi(b)]$ sse $a > b$. Sabemos, também, pelo **Lema do Isomorfismo** que $\mathfrak{A} \models \varphi[a, b]$ sse $\mathfrak{A} \models \varphi[\pi(a), \pi(b)]$, i.e., $a < b$ sse $b < a$, o que é uma contradição, portanto não existe tal $\varphi[a, b]$ e, com isso, $<$ não é elementarmente definível. □

Exercício 5.11. Alterando o cálculo das fórmulas universais substituindo o quantificador universal em (iii) por um existencial conseguimos o cálculo de fórmulas existenciais. Prove que:

a) A negação de uma sentença universal é logicamente equivalente a uma sentença existencial, e vice versa;

b) Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e φ é uma sentença existencial, então $\mathfrak{A} \models \varphi \implies \mathfrak{B} \models \varphi$.

Proof. a) Caso base para ambas: Se φ é livre de quantificadores, obviamente $\neg\varphi$ também é, portanto se φ é uma sentença universal, $\neg\varphi$ é existencial e vice versa. Tomemos como hipótese indutiva que se φ é universal/existencial, então $\neg\varphi$ é existencial/universal. Se $\varphi = (\psi \wedge \chi)$, então $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a $\neg\psi \vee \neg\chi$, assim como para $\varphi = (\chi \vee \psi)$ temos $\neg\psi \wedge \neg\chi$, por hipótese é fácil ver que a propriedade é preservada para ambos os casos. Da mesma forma se $\varphi = \forall x\psi$, então $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a $\exists x\neg\psi$, o caso contrário é análogo.

b) Por a) sabemos que $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a uma fórmula universal, se $\mathfrak{A} \models \varphi$, então $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi$, pela contraposição do **Corolário 5.8.** temos que $\mathfrak{B} \not\models \neg\varphi$, i.e., $\mathfrak{B} \models \varphi$. □

Exercício 6.7. Formalize as seguintes declarações usando o conjunto de símbolos de 6.2.:

a) Todo real positivo tem uma raiz quadrada positiva;

b) Se ρ é estritamente monótona, então ρ é injetiva;

c) ρ é uniformemente contínua em \mathbb{R} ;

d) para todo x , se ρ é diferenciável em x , então ρ é contínua em x .

Proof. a) $\forall x\exists y(0 < y \wedge y \cdot y \doteq x)$;

b) $(\forall x\forall y(x < y \rightarrow \rho(x) < \rho(y)) \vee \forall x\forall y(x < y \rightarrow \rho(y) < \rho(x))) \rightarrow \forall x\forall y(\rho(x) \doteq \rho(y) \rightarrow x \doteq y)$;

- c) $\forall u(0 < u \rightarrow \exists v(0 < v \wedge \forall x \forall y(\Delta(x, y) < v \rightarrow \Delta(\rho(x), \rho(y)) < u)))$;
d) Sejam

$$C(x) := \forall u(0 < u \rightarrow \exists v(0 < v \rightarrow \forall y(\Delta(y, x) < v \rightarrow \Delta(\rho(y), \rho(x)) < u)));$$

$$L(\ell, f(y), p) := \forall u(0 < u \rightarrow \exists v(0 < v \wedge \forall y((0 < \Delta(y, p) \wedge \Delta(y, p) < v) \rightarrow \Delta(f(y), \ell) < u)).$$

Logo $\forall z(\exists w(\rho(x + y) \doteq w \cdot y + \rho(x) \wedge \exists \ell(L(\ell, w, 0))) \rightarrow C(x))$. \square

Exercício 6.8. Seja $S_{\text{eq}} = \{R\}$, formalize:

- a) R é uma relação de equivalência com no mínimo duas classes de equivalência;
b) R é uma relação de equivalência com uma classe de equivalência contendo mais de um elemento.

Proof. a) $\bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists a \exists b(Rab \wedge \exists c(\neg Rac))$;

b) $\bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists a \exists b(Rab \wedge \neg(a \doteq b))$. \square

Exercício 6.9. Utilize o **Exercício 4.16.** para provar que:

- a) Se para todo $i \in I$ a estrutura \mathfrak{A}_i é um grupo, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ é um grupo;
b) Nem a teoria da ordem, nem a dos corpos, pode ser axiomatizada por uma sentença de Horn.

Proof. a) Seja $\mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, vale que $\mathfrak{A} \models \forall x(x \circ e \doteq x)$ sse para todo $g \in \text{Dom}(\mathfrak{A})$ temos $g \circ^{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{A}} = g$, i.e., $\langle g(i) \circ^{\mathfrak{A}_i} e^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle = \langle g(i) \mid i \in I \rangle$ que é igual sse $g(i) \circ^{\mathfrak{A}_i} e^{\mathfrak{A}_i} = g(i)$, $\forall i \in I$ o que, por hipótese, é verdade. Destrinchando os axiomas de grupo desta forma é fácil mostrar que $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{gr}}$.

b) Assuma que $\varphi_{\text{fd}} = \bigwedge \Phi_{\text{fd}}$ a conjunção dos axiomas de corpos seja uma sentença Horn, pelo **Exercício 1.6.** o produto direto de duas estruturas de corpos $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ não é um corpo e, pelo **Exercício 4.16.**, deveria ser. Contradição, então φ_{fd} não é uma sentença Horn.

Igualmente se $\varphi_{\text{ord}} = \bigwedge \Phi_{\text{ord}}$ é uma sentença de Horn, então se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são estruturas de ordem, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ precisa também ser. Note que $\mathfrak{C} \models \forall xy(x < y \vee x \doteq y \vee y < x)$ sse para $x = (a, b)$ e $y = (p, q)$ temos $\forall(a, b)(p, q)((a < p \wedge b < q) \vee (a = p \wedge b = q) \vee (p < a \wedge q < b))$, entretanto escolhendo $(a, b), (p, q)$ tq $a < p$ e $b > q$ temos \mathfrak{C} não o satisfaz, contradição. \square

Exercício 6.10. $M \subseteq \mathbb{N}$ é denominado *spectrum* se há um conjunto de símbolos \mathcal{S} e uma \mathcal{S} -sentença φ tq

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi \text{ possui um modelo com exatamente } n \text{ elementos}\}.$$

Prove que é um spectrum: a) Todo $N \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ finito;

b) $\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid (n \equiv 0 \pmod{m}) \wedge m \geq 1\}$;

c) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$;

d) $\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid n \text{ não é primo}\}$;

e) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é primo}\}$.

Proof. a) Seja $\varphi_{\geq n} := \bigwedge_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \neg(v_i \doteq v_j)$, então

$$\varphi_n := \exists v_1 \dots v_n \left(\varphi_{\geq n} \wedge \forall v \left(\bigvee_{i=1}^n v \doteq v_i \right) \right)$$

é a formalização de *há exatamente n elementos*.

Como $N < \aleph_0$ enumere $N = \{a_1, \dots, a_n\}$, logo podemos descrever $N = \{n \in \mathbb{N} \mid \bigvee_{i=1}^n \varphi_{a_i}\}$.

b) Pegue $\mathcal{S} = \{R\}$ e defina

$$\varphi = \bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists v_1 \dots v_n \left(\varphi_{\geq n} \wedge \forall v \left(\bigvee_{i=1}^n Rvv_i \right) \right)$$

Isso garante não só que R seja uma relação de equivalência como que o conjunto quociente $\text{Dom}(\mathfrak{A})/R$ de qualquer modelo de φ terá exatamente n classes de equivalência, como todas possuem a mesma cardinalidade tem de ser possível particionar o domínio em n conjuntos diferentes, i.e., ser um múltiplo de n .

c) Seja $\mathcal{S} = \{R, f, g\}$ a ideia é formalizar ψ tq $f, g : \text{Dom}(\mathfrak{A}) \rightarrow R$, χ tq $(f(x), g(x))$ é injetivo e ξ que é sobrejetivo, i.e.:

$$\begin{aligned} \psi &:= \forall x (Rf(x) \wedge Rg(x)); \\ \chi &:= \forall x \forall y ((f(x) = f(y) \wedge g(x) = g(y)) \rightarrow x = y); \\ \xi &:= \forall x \forall y ((Rx \wedge Ry) \rightarrow \exists z (f(z) = x \wedge g(z) = y)). \end{aligned}$$

Logo, se $\mathfrak{A} \models \varphi := \psi \wedge \chi \wedge \xi$, então \mathfrak{A} possui uma bijeção de $\text{Dom}(\mathfrak{A})$ em R^2 , i.e., a cardinalidade do domínio será o quadrado de um natural. Para provarmos que sempre haverá um modelo para cada quadrado perfeito construiremos um modelo para φ . Seja $\text{Dom}(\mathfrak{A}) := \{1, \dots, m\}$ e defina $R := \{1, \dots, p\}$, se $f(x)$ é o quociente de $x \in \text{Dom}(\mathfrak{A})$ por p e $g(x)$ o resto, então $x = pf(x) + g(x)$ com f, g unicamente determinados, então para cada x no domínio existem $(f(x), g(x)) \in R^2$ e vice versa.

d) **PENDENTE**

e) $\varphi := \bigwedge \Phi_{\text{ofd}} \wedge \forall x (\neg(x \dot{=} x + 1) \rightarrow x < x + 1)$ garante, visto que todo corpo finito tem característica prima e, portanto, contém p^n elementos, a última restrição garante que $n = 1$. Assuma por contradição que existe $\mathfrak{A} \models \varphi$ tq $n \neq 1$, então $\exists a \notin \mathbb{F}_p$, portanto $a \neq 0$, a vista disso temos $a < a + 1 < \dots < a + p = a$, contradição, visto que $<$ é uma relação de ordem total. \square

Exercício 7.5. Prove que:

a) Se $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A) \models \Pi$ e se $\sigma^A : A \rightarrow A$, dada por $\sigma^A(a) = a +^A 1^A$, então $(A, \sigma^A, 0^A) \models (\text{P1})-(\text{P3})$.

b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ é caracterizada por Π até o isomorfismo.

Proof. a) Interpretamos em \mathfrak{A} os 3 primeiros axiomas de Π :

- (i) $\forall x (\neg x +^A 1^A \dot{=} 0^A)$ sse $\forall x (\neg \sigma(x) \dot{=} 0)$ (P1);
- (ii) $\forall xy (x +^A 1^A \dot{=} y +^A 1^A \rightarrow x \dot{=} y)$ sse $\forall xy (\sigma(x) \dot{=} \sigma(y) \rightarrow x \dot{=} y)$ (P2);
- (iii) $\forall X ((X 0^A \wedge \forall x (Xx \rightarrow Xx +^A 1^A)) \rightarrow \forall y Xy)$ sse $\forall X ((X 0^A \wedge \forall x (Xx \rightarrow X\sigma(x))) \rightarrow \forall y Xy)$ (P3).

b) Seja $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A) \models \Pi$ para $\pi : \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ definimos indutivamente:

$$\pi(0) = 0^A;$$

$$\pi(x + 1) = \pi(x) +^A 1^A.$$

Demonstraremos agora que π é bijetivo:

Sobrejetividade: a definição garante o caso base, $0^A \in \text{Im}(\pi)$. Assuma por hipótese $a = \pi(n) \in \text{Im}(\pi)$, logo $a +^A 1^A = \pi(n) +^A 1^A = \pi(n) +^A \pi(1)$, por definição $a +^A 1^A = \pi(n + 1) \in \text{Im}(\pi)$.

Injetividade: Queremos provar que $\forall nm (n \neq m \rightarrow \pi(n) \neq \pi(m))$. Indução em n :

Caso base: $n = 0$ e $m \neq 0$, em particular, assuma sem perda de generalidade, que $m = k + 1$, logo $\pi(n) = 0^A$ e $\pi(m) = \pi(k + 1)$, pela primeira sentença em Π , $k + 1 \neq 0$, portanto $\pi(m) = \pi(k + 1) \neq \pi(0) = 0^A = \pi(n)$.

Provado o caso base assuma como hipótese de indução que $\forall m(n \neq m \rightarrow \pi(n) \neq \pi(m))$, façamos agora indução dupla, dessa vez em m :

Caso base: $m = 0$ e $n \neq 0$, em especial $n = k + 1$, a prova deste é análogo ao caso base em n .

Hipótese indutiva: $n \neq m \rightarrow \pi(n) \neq \pi(m)$, sejam $n, m \neq 0$, então $n = p + 1$ e $m = q + 1$, se $n \neq m$, i.e., $\neg(p + 1 = q + 1)$, por 2 em Π , $p \neq q$ e, por hipótese, $\pi(p) \neq \pi(q)$, portanto, se $\pi(n) = \pi(p) +^A 1^A = \pi(m) = \pi(q) +^A 1^A$, também por 2 em Π temos $\pi(p) = \pi(q)$, contradição, logo $\pi(n) \neq \pi(m)$.

Se π é isomorfismo, provemos que (i) $\pi(n + m) = \pi(n) +^A \pi(m)$ e (ii) $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$:

(i)

Caso base: $\pi(m + 0) = \pi(m) = \pi(m) +^A 0^A = \pi(m) +^A \pi(0)$, pela propriedade 4 em Π .

Assuma $\pi(n + m) = \pi(n) +^A \pi(m)$ como hipótese de indução:

$$\begin{aligned} \pi(m + (n + 1)) &= \pi((m + n) + 1) && \text{(P5);} \\ &= \pi(m + n) +^A 1^A && \text{definição;} \\ &= (\pi(m) +^A \pi(n)) +^A 1^A && \text{passo indutivo;} \\ &= \pi(m) +^A (\pi(n) +^A 1^A) && \text{(P5);} \\ &= \pi(m) +^A \pi(n + 1) && \text{definição.} \end{aligned}$$

(ii)

Caso base: $\pi(m \cdot 0) = \pi(0) = \pi(m) \cdot 0^A = \pi(m) \cdot \pi(0)$, pela propriedade 6 em Π .

Assuma $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ como hipótese e indução:

$$\begin{aligned} \pi(m \cdot (n + 1)) &= \pi(m \cdot n + m) && \text{(P7);} \\ &= \pi(m \cdot n) +^A \pi(m); \\ &= (\pi(m) \cdot^A \pi(n)) +^A \pi(m) && \text{passo indutivo;} \\ &= \pi(m) \cdot^A (\pi(n) +^A 1^A) && \text{(P7);} \\ &= \pi(m) \cdot^A \pi(n + 1) && \text{definição.} \end{aligned}$$

□

Exercício 8.8. Para $n \geq 1$ dê uma definição similar dos quantificadores "existe no máximo n " e "existe exatamente n ".

Proof. existe no máximo n pode ser formalizado como

$$\exists v_1 \dots v_n \forall v \left(\bigwedge_{i=1}^n \varphi \frac{v}{v_i} \rightarrow \bigvee_{j=1}^n v \doteq v_j \right)$$

enquanto que, para garantir a existência de exatamente n , restringimos as variáveis para:

$$\exists v_1 \dots v_n \forall v \left(\bigwedge_{x,y \in \{1, \dots, n\}} \neg v_x \doteq v_u \wedge \bigwedge_{i=1}^n \varphi \frac{v}{v_i} \rightarrow \bigvee_{j=1}^n v \doteq v_j \right)$$

□

Exercício 8.9. Sejam P e f binária e $x := v_0, y := v_1, u := v_2, v := v_3$ e $w := v_4$. Mostre, usando a **Definição 8.2.** que:

- a) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv) \frac{u \ u \ u}{x \ y \ v} = \exists xy(Pxu \wedge Pyu)$;
b) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv) \frac{v \ fuv}{u \ v} = \exists xy(Pxv \wedge Pyfuv)$;
c) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv) \frac{u \ x \ fuv}{x \ u \ v} = \exists wy(Pwx \wedge Pyfuv)$;
d) $(\forall x \exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists ufuu \doteq x) \frac{x \ fxy}{x \ u} = \forall v \exists w(Pvw \wedge Pvfx y) \vee \exists ufuu \doteq x$.

Proof. a)

$$\begin{aligned} \exists xy(Pxu \wedge Pyv) \frac{u \ u \ u}{x \ y \ v} &= \exists x \left(\exists y(Pxu \wedge Pyv) \frac{u \ u \ x}{y \ v \ x} \right); \\ &= \exists xy \left(Pxu \frac{u \ x \ y}{v \ x \ y} \wedge Pyv \frac{u \ x \ y}{v \ x \ y} \right); \\ &= \exists xy(Pxu \wedge Pyu). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \exists xy(Pxu \wedge Pyv) \frac{v \ fuv}{u \ v} &= \exists x \left(\exists y(Pxu \wedge Pyv) \frac{v \ fuv \ x}{u \ v \ x} \right); \\ &= \exists xy \left(Pxu \frac{v \ fuv \ x \ y}{u \ v \ x \ y} \wedge Pyv \frac{v \ fuv \ x \ y}{u \ v \ x \ y} \right); \\ &= \exists xy(Pxv \wedge Pyfuv). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \exists xy(Pxu \wedge Pyv) \frac{u \ x \ fuv}{x \ u \ v} &= \exists w \left(\exists y(Pxu \wedge Pyv) \frac{x \ fuv \ w}{u \ v \ x} \right); \\ &= \exists wy \left(Pxu \frac{x \ fuv \ w \ y}{u \ v \ x \ y} \wedge Pyv \frac{x \ fuv \ w \ y}{u \ v \ x \ y} \right); \\ &= \exists wy(Pwx \wedge Pyfuv). \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} (\forall x \exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists ufuu \doteq x) \frac{x \ fxy}{x \ u} &= \forall v \left(\exists y(Pxy \wedge Pxu) \frac{fxy \ v}{u \ x} \right) \vee \exists ufuu \frac{x \ u}{x \ u} \doteq x \frac{x \ u}{x \ u}; \\ &= \forall v \exists w \left(\left(Pxy \frac{fxy \ v \ w}{u \ x \ y} \wedge Pxu \frac{fxy \ v \ w}{u \ x \ y} \right) \vee \exists ufuu \doteq x \right); \\ &= \forall v \exists w((Pvw \wedge Pvfx y) \vee \exists ufuu \doteq x). \end{aligned}$$

□

Exercício 8.10. Mostre que se $x_0, \dots, x_r \notin \bigcup_{i=0}^r \text{var}(t_i)$, então

$$\varphi \frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \models \forall x_0 \dots x_r \left(\bigwedge_{i=0}^r x_i \doteq t_i \rightarrow \varphi \right).$$

Proof. Assuma que (*) $\mathfrak{I}_x^a(t) = \mathfrak{I}(t)$ se $x \notin \text{var}(t)$ e que (+) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \models (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$, então:
Caso base: $r = 0$, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \models \varphi \frac{t_0}{x_0} \text{ sse } \mathfrak{I} \frac{t_0}{x_0} \models \varphi; & \quad \text{lema da substituição} \\ \text{sse para todo } a \in A, \text{ se } a = \mathfrak{I}(t_0), \text{ então } \mathfrak{I} \frac{a}{x_0} \models \varphi; \\ \text{sse para todo } a \in A, \text{ se } \mathfrak{I} \frac{a}{x_0}(x_0) = \mathfrak{I} \frac{a}{x_0}(t_0), \text{ então } \mathfrak{I} \frac{a}{x_0} \models \varphi; & \quad \text{por (*)} \\ \text{sse para todo } a \in A, \text{ se } \mathfrak{I} \frac{a}{x_0} \models x_0 \doteq t_0, \text{ então } \mathfrak{I} \frac{a}{x_0} \models \varphi; \\ \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_0(x_0 \doteq t_0 \rightarrow \varphi). \end{aligned}$$

Hipótese de indução: assuma que vale o enunciado para r

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \models \varphi \frac{t_0 \dots t_{r+1}}{x_0 \dots x_{r+1}} \text{ sse } \mathfrak{I} \models \left(\varphi \frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \right) \frac{t_{r+1}}{x_{r+1}}; \\ \text{sse } \mathfrak{I} \frac{t_{r+1}}{x_{r+1}} \models \varphi \frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}; & \quad \text{lema da substituição} \\ \text{sse } \mathfrak{I} \frac{t_{r+1}}{x_{r+1}} \models \forall x_0 \dots x_r \left(\bigwedge_{i=0}^r x_i \doteq t_i \rightarrow \varphi \right); & \quad \text{hipótese de indução} \\ \text{sse para todo } a \in A, \text{ se } \mathfrak{I} \frac{a}{x_{r+1}} \models x_{r+1} \doteq t_{r+1}, \text{ então } \mathfrak{I} \frac{t_{r+1}}{x_{r+1}} \models \varphi \frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}; \\ \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_{r+1} \left(x_{r+1} \doteq t_{r+1} \rightarrow \forall x_0 \dots x_r \left(\bigwedge_{i=0}^r x_i \doteq t_i \rightarrow \varphi \right) \right); \\ \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_0 \dots x_{r+1} \left(x_{r+1} \doteq t_{r+1} \rightarrow \left(\bigwedge_{i=0}^r x_i \doteq t_i \rightarrow \varphi \right) \right); \\ \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_0 \dots x_{r+1} \left(\left(x_{r+1} \doteq t_{r+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^r x_i \doteq t_i \right) \rightarrow \varphi \right); & \quad \text{por (+);} \\ \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_0 \dots x_{r+1} \left(\bigwedge_{i=0}^{r+1} x_i \doteq t_i \rightarrow \varphi \right). \end{aligned}$$

(*): Se $t = v_0$ uma variável qualquer, como $x \notin \text{var}(t)$ temos $x \neq v_0$, portanto $\mathfrak{I}_x^a(t) = \mathfrak{I}(t)$ e se $t = c$ obviamente também. Assuma que valha $\mathfrak{I}_x^a(t) = \mathfrak{I}(t)$, então $\mathfrak{I}_x^a(ft_1 \dots t_n) = f^{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_x^a(t_1) \dots \mathfrak{I}_x^a(t_n) = f^{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_n) = \mathfrak{I}(ft_1 \dots t_n)$, pela hipótese de indução.

(+):

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) & \models \neg \varphi \vee (\psi \rightarrow \chi); \\ & \models \neg \varphi \vee \neg \psi \vee \chi; \\ & \models \neg(\varphi \wedge \psi) \vee \chi; \\ & \models (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi. \end{aligned}$$

□

Exercício 8.11. Formalize um cálculo que derive strings exatamente da forma:

$$tx_0 \dots x_r t_0 \dots t_r \frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \text{ ou } \varphi x_0 \dots x_r t_0 \dots t_r \varphi \frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}.$$

Proof. Da mesma forma que criamos o cálculo para outras regras de formação, como termos e fórmulas, basta repetir o mesmo para a definição de substituição.

Para o cálculo de substituição de termos:

$$\frac{}{x \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ x} \text{ Se } x \neq x_0, \dots, x_r; \quad \frac{x \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ t_i}{x \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ t_i} \text{ Se } x = x_i;$$

$$\frac{}{c \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ c} \text{ Se } c \in \mathcal{S};$$

$$\frac{t'_1 \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ s_1 \quad \dots \quad t'_n \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ s_n}{f t'_1 \dots t'_n \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ f s_1 \dots s_n} \text{ Se } f \in \mathcal{S}, \text{ n-ária.}$$

Para o cálculo de substituição de fórmulas:

$$\frac{t'_1 \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ s_1 \quad t'_2 \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ s_2}{t'_1 \doteq t'_2 \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ s_1 \doteq s_2};$$

$$\frac{t'_1 \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ s_1 \quad \dots \quad t'_n \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ s_n}{R t'_1 \dots t'_n \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ R s_1 \dots s_n} \text{ Se } R \in \mathcal{S}, \text{ n-ária;}$$

$$\frac{\varphi \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ \psi}{\neg \varphi \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ \neg \psi}; \quad \frac{\varphi \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ \chi \quad \psi \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ \xi}{\varphi \vee \psi \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ \chi \vee \xi}.$$

$x_{i_1} \dots x_{i_s}$ ($i_1 < \dots < i_s$) são as variáveis em x_0, \dots, x_r tq $x_i \in \text{free}(\exists x \varphi)$, $x_i \neq t_i$ e $x \neq x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$

$$\frac{\varphi \ x_{i_1} \dots x_{i_s} \ x \ t_{i_1} \dots t_{i_s} \ u \ \psi}{\exists x \varphi \ x_0 \dots x_r \ t_0 \dots t_r \ \exists u \psi}$$

onde $u = x$ se $x \notin \text{free}(t_{i_1}, \dots, t_{i_s})$, caso contrário u é a primeira variável $v_0, v_1, \dots \notin \text{var}(\varphi, t_{i_1}, \dots, t_{i_s})$. \square

3 Cálculo de Sequentes

Exercício 2.7. Analise quais das regras abaixo estão corretas:

$$\frac{\Gamma \ \varphi_1 \ \psi_1 \quad \Gamma \ \varphi_2 \ \psi_2}{\Gamma \ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \ (\psi_1 \vee \psi_2)} (i); \quad \frac{\Gamma \ \varphi_1 \ \psi_1 \quad \Gamma \ \varphi_2 \ \psi_2}{\Gamma \ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \ (\psi_1 \wedge \psi_2)} (ii).$$

Proof. Provemos primeiro que (i) é correta:

$$\frac{\frac{\Gamma \ \varphi_1 \ \psi_1}{\Gamma \ \varphi_2 \ (\psi_1 \vee \psi_2)} (\vee \mathbf{S}) \quad \frac{\Gamma \ \varphi_2 \ \psi_2}{\Gamma \ \varphi_2 \ (\psi_1 \vee \psi_2)} (\vee \mathbf{S})}{\Gamma \ (\varphi_1 \vee \varphi_2) \ (\psi_1 \vee \psi_2)} (\vee \mathbf{A})$$

Agora que (ii) não é correta: Note que se $\Gamma \varphi_1 \models \psi_1$ e $\Gamma \varphi_2 \models \psi_2$, então se \mathfrak{I} satisfaz $\Gamma(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ temos que $\mathfrak{I} \models \varphi_1$ ou $\mathfrak{I} \models \varphi_2$, i.e., $\mathfrak{I} \models \psi_1$ ou $\mathfrak{I} \models \psi_2$, portanto não necessariamente $\mathfrak{I} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$, portanto este não é correto. Um argumento análogo também serve como prova para (i). \square

Exercício 3.6. Derive as seguintes regras:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\Gamma \varphi}{\Gamma \neg\neg\varphi} \text{ (a1)} & \frac{\Gamma \neg\neg\varphi}{\Gamma \varphi} \text{ (a2)} & \frac{\Gamma \varphi \quad \Gamma \psi}{\Gamma (\varphi \wedge \psi)} \text{ (b)} \\ \frac{\Gamma \varphi \quad \Gamma \psi}{\Gamma (\varphi \rightarrow \psi)} \text{ (c)} & \frac{\Gamma (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \varphi} \text{ (d1)} & \frac{\Gamma (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \psi} \text{ (d2)} \end{array}$$

Proof. a1):

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \neg\neg\neg\varphi \neg\neg\neg\varphi}}{\Gamma \neg\neg\neg\varphi \neg\varphi} \text{ (Assm)} \quad \frac{\Gamma \varphi}{\Gamma \neg\neg\neg\varphi \varphi} \text{ (Ant)}}{\Gamma \neg\neg\varphi} \text{ (Ctr)}$$

a2):

$$\frac{\overline{\Gamma \neg\varphi \neg\varphi} \text{ (Assm)} \quad \frac{\Gamma \neg\neg\varphi}{\Gamma \neg\varphi \neg\neg\varphi} \text{ (Ant)}}{\Gamma \varphi} \text{ (Ctr)}$$

b):

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \neg\psi \neg\psi} \text{ (Assm)} \quad \frac{\frac{\Gamma \varphi}{\Gamma \psi \varphi} \text{ (Ant)}}{\Gamma \neg\varphi \neg\psi} \text{ (Cp)}}{\Gamma (\neg\varphi \vee \neg\psi) \neg\psi} \text{ (Cp)} \quad \frac{\Gamma \psi}{\Gamma (\neg\varphi \vee \neg\psi) \psi} \text{ (Ant)}}{\Gamma \neg\psi \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)} \text{ (PC)} \\ \Gamma \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv (\varphi \wedge \psi)$$

c):

$$\frac{\frac{\Gamma \varphi \quad \Gamma \psi}{\Gamma \neg\psi \neg\varphi} \text{ (Cp)} \quad \frac{\overline{\Gamma \psi \psi} \text{ (Assm)}}{\Gamma \psi (\neg\varphi \vee \psi)} \text{ (vS)}}{\Gamma \neg\psi (\neg\varphi \vee \psi)} \text{ (vS)} \\ \Gamma \neg\psi (\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \text{ (Pc)}$$

d1) e d2) (basta comutá-los):

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \neg\varphi \neg\varphi} \text{ (Assm)}}{\Gamma \neg\varphi (\neg\varphi \vee \neg\psi)} \text{ (vS)} \quad \frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \neg\neg\varphi}{\Gamma \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \varphi} \text{ (a2)}}{\Gamma \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)} \text{ (Ch)}$$

□

Exercício 4.5. Analise quais das regras abaixo estão corretas:

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\exists x \varphi \exists x \psi} \text{ (i);} \quad \frac{\Gamma \varphi \quad \psi}{\Gamma \forall x \varphi \exists x \psi} \text{ (ii);} \quad \frac{\Gamma \varphi \frac{fy}{x}}{\Gamma \forall x \varphi} \text{ (iii).}$$

Proof. (i): Sabemos que $\varphi \models \psi$, um modelo $\mathcal{I} \models \exists x\varphi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathcal{I}_x^a \models \varphi$, o que, por hipótese, implica que $\mathcal{I}_x^a \models \psi$, i.e., se $\mathcal{I} \models \exists x\varphi$, então $\mathcal{I} \models \exists x\psi$, portanto $\exists x\varphi \models \exists x\psi$.

(ii): Assumindo que $\Gamma\varphi \models \psi$, um modelo \mathcal{I} satisfaz $\Gamma\forall x\varphi$ sse para todo $a \in A$ vale que $\mathcal{I}_x^a \models \varphi$, o que, por hipótese, implica que $\mathcal{I}_x^a \models \psi$. Então, em particular, existe um $a \in A$ tq $\mathcal{I}_x^a \models \psi$, i.e., $\Gamma\forall x\varphi \models \exists x\psi$.

(iii): Temos $\Gamma \models \varphi \frac{fy}{x}$, se $\mathcal{I} \models \Gamma$, então, por hipótese, $\mathcal{I} \models \varphi \frac{fy}{x}$, como há uma instância em que vale φ , pela regra de introdução do existencial no sucedente temos que $\mathcal{I} \models \exists x\varphi$, mas obviamente isso não é o bastante para concluir que $\mathcal{I} \models \forall x\varphi$. \square

Exercício 5.5. Derive as seguintes regras:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\Gamma \forall x\varphi}{\Gamma \varphi \frac{t}{x}} \text{ (a1)} & \frac{\Gamma \forall x\varphi}{\Gamma \varphi} \text{ (a2)} & \frac{\Gamma \varphi \frac{t}{x} \psi}{\Gamma \forall x\varphi \psi} \text{ (b1)} \\ \\ \frac{\Gamma \varphi \frac{y}{x}}{\Gamma \forall x\varphi} \text{ (b2) se } y \notin \text{free}(\Gamma\forall x\varphi) & \frac{\Gamma \varphi \psi}{\Gamma \forall x\varphi \psi} \text{ (b3)} & \frac{\Gamma \varphi}{\Gamma \forall x\varphi} \text{ (b4)} \end{array}$$

Proof. a1) e a2) (a2 é uma instância de a1 para $t = x$):

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{\varphi \frac{t}{x} \varphi \frac{t}{x}} \text{ (Assm)}}{\Gamma \varphi \frac{t}{x} \varphi \frac{t}{x}} \text{ (Ant)}}{\Gamma \varphi \frac{t}{x} (\exists x\neg\varphi \vee \varphi \frac{t}{x})} \text{ (}\forall\text{S)}}{\Gamma \neg\varphi \frac{t}{x} (\exists x\neg\varphi \vee \varphi \frac{t}{x})} \text{ (PC)} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\neg\varphi \frac{t}{x} \neg\varphi \frac{t}{x}} \text{ (Assm)}}{\Gamma \neg\varphi \frac{t}{x} \neg\varphi \frac{t}{x}} \text{ (Ant)}}{\Gamma \neg\varphi \frac{t}{x} \exists x\neg\varphi} \text{ (}\exists\text{S)}}{\Gamma \neg\varphi \frac{t}{x} (\exists x\neg\varphi \vee \varphi \frac{t}{x})} \text{ (}\forall\text{S)}} \quad \frac{\Gamma \neg\varphi \frac{t}{x} (\exists x\neg\varphi \vee \varphi \frac{t}{x})}{\Gamma \exists x\neg\varphi \vee \varphi \frac{t}{x} \equiv \forall x\varphi \rightarrow \varphi \frac{t}{x}} \text{ (MP)} \quad \frac{\Gamma \forall x\varphi}{\Gamma \varphi \frac{t}{x}}$$

b1) e b3) (b3 é uma instância de b1 para $t = x$):

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \varphi \frac{t}{x} \psi}{\Gamma \neg\psi \neg\varphi \frac{t}{x}} \text{ (Cp)}}{\Gamma \neg\psi \exists x\neg\varphi} \text{ (}\exists\text{S)}}{\Gamma (\neg\exists x\neg\varphi) \neg\neg\psi} \text{ (Cp)} \quad \frac{\Gamma (\neg\exists x\neg\varphi) \neg\neg\psi}{\Gamma \forall x\varphi \psi \equiv \neg\exists x\neg\varphi \psi} \text{ (a2)}$$

b2) e b4) (b4 é uma instância de b2 para $y = x$):

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma \varphi \frac{y}{x}}{\Gamma \chi \varphi \frac{y}{x}} \text{ (Ant)}}{\Gamma \neg\varphi \frac{y}{x} \neg\chi} \text{ (Cp)}}{\Gamma \exists x\neg\varphi \neg\chi} \text{ (}\exists\text{A)}}{\Gamma \neg\neg\chi \neg\exists x\neg\varphi} \text{ (Cp)} \quad \frac{\frac{\frac{\Gamma \varphi \frac{y}{x}}{\Gamma \neg\chi \varphi \frac{y}{x}} \text{ (Ant)}}{\Gamma \neg\varphi \frac{y}{x} \neg\neg\chi} \text{ (Cp)}}{\Gamma \exists x\neg\varphi \neg\neg\chi} \text{ (}\exists\text{A)}}{\Gamma \neg\neg\chi \neg\exists x\neg\varphi} \text{ (Cp)} \quad \frac{\Gamma \neg\neg\chi \neg\exists x\neg\varphi}{\Gamma \forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi} \text{ (PC)}$$

escolha χ tq $y \notin \text{free}(\Gamma\exists x\varphi\chi)$ para utilizar (A). \square

Exercício 7.8. Defina $(\exists\forall)$ como a regra:

$$\overline{\Gamma \exists x\varphi \forall x\varphi}$$

- a) Determine quando $(\exists\forall)$ é uma regra derivável;
b) Seja $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + (\exists\forall)$, para \mathfrak{S} o cálculo de sequentes. Todo sequente é derivável em \mathfrak{S}' ?

Proof. a) Um modelo \mathfrak{I} satisfaz $\Gamma\exists x\varphi$ sse há um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}_x^a \models \varphi$, mas, como dito anteriormente, um elemento satisfazer não é condição suficiente para que todos satisfaçam. À vista disso $\Gamma\exists x\varphi \models \forall x\varphi$ quando $\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$. Portanto a validez de $(\exists\forall)$ é contingente, mas esta com certeza não é correta.
b) Sim, escolhendo um φ específico tq $\exists x\varphi$, mas $\neg\forall x\varphi$, temos:

$$\frac{\overline{\exists x\varphi \forall x\varphi} \quad (\exists\forall)}{\vdots} \quad \frac{\psi \wedge \neg\psi}{\chi} \quad (\mathbf{Ctr'})$$

e, portanto, $\vdash \chi$ para um χ arbitrário. Note que uma confusão comum é a de que \mathfrak{S}' não necessariamente deriva uma contradição. Alguém poderia argumentar que, embora possamos provar que este deriva uma contradição, esta só é feita instanciando um φ específico e, portanto, o conjunto de fórmulas que derivaria uma contradição, não o cálculo. Acontece que o cálculo é único, suas regras seriam como "axiomas esquema" onde todos os sequentes deriváveis são justamente as instâncias destes, já que φ é uma metavariável, então derivar \perp a partir de uma instância não gera um problema. \square

Exercício 1.12. Seja $S = \{R\}$ com R unário e $\Phi := \{\exists xRx\} \cup \{\neg Ry \mid y \in \text{Var}\}$. Mostre que:

- $\text{Sat}(\Phi)$ e, portanto, $\text{Con}(\Phi)$;
- Para nenhum $t \in \mathcal{T}^S$ vale $\Phi \vdash Rt$;
- Se $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ é um modelo de Φ , então $\text{Dom}(\mathfrak{A}) \setminus \{\mathfrak{I}(t) \mid t \in \mathcal{T}^S\} \neq \emptyset$.