Provas e Exercícios

Ref. H. D. Ebbnghaus

Primavera 2022

Contents

1 Sintaxe das Linguagens de Primeira Ordem

Exercício 1.3. Seja $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado. Para $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$ mostre que $\exists c \in I := [a, b]$ tq $c \notin \mathrm{Im}(\alpha)$. Conclua disso que I, e portanto $\mathbb{R}$, são incontáveis.

Proof. Seja $I_0 := [a, b]$ e defina indutivamente $I_{n+1} := I_n \backslash \{\alpha(n)\}$, obviamente $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$ forma uma sequência de intervalos encaixantes e, por estarmos em $\mathbb{R}$, vale que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$$

como $\alpha(k) \notin I_n, \forall k \leqslant n$, então, em particular, $\alpha(k) \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n, \forall k \in \mathbb{N}$, i.e., $c \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \forall c \in \mathrm{Im}(\alpha)$ $\square$

Exercício 1.4. Prove que se $M_0, M_1, \dots \preceq \aleph_0$, então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \preceq \aleph_0$$

e o utilize para provar o **Lema 1.2**.

Proof. O primeiro teorema é facilmente provável utilizando um argumento similar ao da Diagonal de Cantor: Sabemos que existe uma bijeção $\alpha_i : \mathbb{N} \to M_i, \forall i \in \mathbb{N}$, equivalente a uma sequência $\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots$ tq $M_i = \{\alpha_{in} \mid n \in \mathbb{N}\}$, construindo a matriz $a_{ij} := \alpha_{ij}$ utilizamos a diagonal para enumerar todos os elementos da matriz.

Definindo $M_n := \mathbb{A}^n$, o conjunto de strings de comprimento n, é fácil mostrar por indução que $M_i \preceq \aleph_0, \forall i \in \mathbb{N}$, com isso

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathbb{A}^* \preceq \aleph_0.$$

Como $\mathbb{A}^* \succeq \aleph_0$ pelo teorema de Schröder-Bernstein $\mathcal{A}^* \approx \aleph_0$. $\square$

Exercício 1.5. Demonstre o Teorema de Cantor: não existe $\alpha : M \to \mathcal{P}(M)$ sobrejetivo e, portanto, bijetivo.

Proof. Seja $S := \{a \in M \mid a \notin \alpha(a)\} \in \mathcal{P}(M)$, assumindo por hipótese que existe α sobrejetivo, então $\exists s \in M$ tq $\alpha(s) = S$. Se $s \in S$, por definição $s \notin \alpha(s) = S$, contradição. Se $s \notin S$, por definição $s \in \alpha(s) = S$, contradição, portanto não existe tal $s \in M$. $\square$

Exercício 4.6. (a) Seja $\mathfrak{C}_v$ o cálculo consistindo das seguintes regras:

$$\frac{}{x \quad x} \; ; \quad \frac{y \quad t_i}{y \quad ft_1 \ldots t_n} \text{ se } f \in \mathcal{S} \text{ é n-ária e } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mostre que para toda variável x e $\mathcal{S}$-termo t, $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$ sse $x \in \mathsf{var}(t)$.
(b) Dê um resultado para SF análogo ao resultado para var em (a).

Proof. (a)
(i) Se $x \in \mathsf{var}(t)$ então $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$: Se $t = x$ então $x \in \mathsf{var}(t)$ e pela 1ª regra $x\ t$ é derivável. Se $t = t_i$ e $x \in \mathsf{var}(t_i)$ então, seguindo a definição, $x \in f(t_1 \ldots t_n)$.
(ii) Se $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$ então $x \in \mathsf{var}(t)$: Se $t = x$ a primeira regra garante que $x \in \mathsf{var}(t)$. Se $t = ft_1 \ldots t_n$ então existe um $x\ t_i$ em $\mathfrak{C}_v$, como todos termos dessa forma que existem partem de uma regra sem premissa (regra 1) então $x \in \mathsf{var}(t_i)$ logo $x \in \mathsf{var}(ft_1 \ldots t_n)$.
(b) Seja o cálculo $\mathfrak{C}_a$ definido pelas regras:

$$\frac{}{t_m \doteq t_n \quad t_m \doteq t_n} \; ; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad \neg\psi} \; ; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad (\varphi * \psi)} \; * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad Qx\psi} \; Q = \forall, \exists.$$

Para todo termo t_m, t_n e toda variável x. $\varphi\ \psi$ é derivável em $\mathfrak{C}_a$ sse $\varphi \in \mathsf{SF}(\psi)$. $\square$

Exercício 4.7. Altere o cálculo de fórmulas omitindo os parênteses que delimitam as fórmulas introduzidas da forma $\varphi \square \psi$. Mostre que tais fórmulas não terão mais uma única decomposição e que SF não será mais uma função bem definida.

Proof. Pegue, por exemplo, a fórmula $\varphi := \exists x Px \wedge Qy$, podemos, utilizando o cálculo de fórmulas, construir duas derivações diferentes da mesma fórmula:

1. Px, (F2) em P e x;
2. Qy, (F2) em Q e y;
3. $Px \wedge Qy$, (F4) em (1) e (2) com $\wedge$;

4. $\exists x Px \wedge Qy$, (F5) em (3) usando $\exists$ e x.

e a outra altera somente os passos (3) e (4) para:

1. $\exists x Px$, (F5) em (1) usando $\exists$ e x;
2. $\exists x Px \wedge Qy\ x$, (F4) em (2) e (3) com $\wedge$.

Obviamente $\mathsf{SF}(\varphi) = \{\varphi, Px \wedge Qy, Qy, Px\}$ utilizando a primeira derivação e $\mathsf{SF}(\varphi) = \{\varphi, \exists x Px, Qy, Px\}$ utilizando a segunda. $\square$

Exercício 4.8. Definimos uma $\mathcal{S}$-fórmula em notação polonesa ($\mathcal{S}$-P-fórmula) como as strings em $\mathbb{A}_{\mathcal{S}}$ tq a regra (F4) é alterada pra: Se φ, ψ são $\mathcal{S}$-P-fórmulas, então também são $\square\varphi\psi$, com $\square = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Proof. Precisamos antes provar o análogo ao **Lema 4.2.(b)** para $\mathcal{S}$-P-fórmulas: para $\varphi \neq \varphi'$, φ não é um segmento inicial próprio de φ'. Se $\varphi = \wedge\chi\psi$, assuma por contradição que φ é um segmento inicial próprio de φ', i.e., existe $\zeta \neq \square$ tq $\varphi\zeta = \wedge\psi\chi = \varphi'$, mas como φ' começa com $\wedge$ este só pode ser formado a partir de (F4), portanto $\varphi = \wedge\chi'\psi'$ para algumas χ', ψ' $\mathcal{S}$-P-fórmulas. Podemos então cancelar $\wedge$ e ficar com $\chi\psi\zeta = \chi'\psi$, mas, pela hipótese de indução, se χ é um segmento próprio de χ', só pode ser o caso que $\chi = \chi'$, o mesmo vale para ψ e ψ', logo $\zeta = \square$, contradição.

Para provar o **Lema 4.3.(b)** provemos primeiro que se $\varphi_1 \ldots \varphi_n = \varphi'_1 \ldots \varphi'_n$, então $\varphi_i = \varphi'_i$ por indução. Caso base: φ_1 é segmento inicial próprio de φ'_1, pelo **Lema 4.2.(b)** temos $\varphi_1 = \varphi'_1$. Hipótese de indução: assuma que $\varphi_i = \varphi'_i$, logo podemos cancelá-lo, o que implica que φ_{i+1} é segmento inicial próprio de φ'_{i+1}, i.e., $\varphi_{i+1} = \varphi'_{i+1}$.
Seja agora $n \neq m$, assuma sem perda de generalidade que $n = m + k$ para $k > 0$, logo $\varphi_1 \ldots \varphi_n = \varphi'_1 \ldots \varphi'_n \ldots \varphi'_m$, da prova anterior temos então que $\square = \varphi'_{n+1} \ldots \varphi'_m$, contradição, logo $k = 0$.
A prova do **Lema 4.4.(b)** é trivial, basta definirmos a função SF para $\mathcal{S}$-P-fórmulas, o que é muito simples. $\square$

Exercício 4.9. Seja $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ de comprimento k, para $n \geqslant 1$. Mostre que $\exists \xi, \eta \in \mathbb{A}^*_{\mathcal{S}}$ unicamente determinados e $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ tq o comprimento de ξ é $1 \leqslant i < k$ e $t_1 \ldots t_n = \xi t \eta$.

Proof. Seja $i = \sum_{j=0}^{m} \mathsf{lng}(t_j)$ para algum $m < n$, nesse caso $t = t_{m+1}$ e $\eta = t_{m+2} \ldots t_n$ podendo ser possivelmente $\square$. Se todos os termos são constantes ou variáveis este sempre é o caso, se for uma função é possível pararmos no meio de um termo $t_m = f t'_1 \ldots t'_p$, nesse caso se ξ terminar antes de t'_q pegamos $t = t'_{q+1}$ e η como o resto. $\square$

Exercício 5.2. Mostre que o cálculo $\mathfrak{C}_{nf}$ permite derivar precisamente aquelas strings da forma x φ no qual $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ tq $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$:

$$\frac{}{x \quad t_1 \doteq t_2} \text{ Se } t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \mathsf{var}(t_1) \cup \mathsf{var}(t_2);$$

$$\frac{}{x \quad Rt_1 \ldots t_n} \text{ Se } R \in \mathcal{S} \text{ é n-ária}, t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{var}(t_n);$$

$$\frac{x \quad \varphi}{x \quad \neg\varphi}\ ; \qquad \frac{(x \quad \varphi) \quad (x \quad \psi)}{x \quad (\varphi * \psi)}\ * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \qquad \frac{}{x \quad Qx\varphi}\ ; \qquad \frac{x \quad \varphi}{x \quad Qx\varphi}\ Q = \forall, \exists;$$

Proof. ($\Rightarrow$) Fazendo indução em cada regra:
$\varphi = t_1 \doteq t_2$: por definição $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
$\varphi = Rt_1 \ldots t_n$: Também por definição $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
$\varphi = Qx\psi$ nesse caso $x \notin \mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\psi) \backslash \{x\}$;
(*) Portanto todas as fórmulas φ deriváveis com premissa livre não tem uma ocorrência livre de x.
$\varphi = \neg\psi$: Se $\neg\psi$ é derivável, então ψ também é, mas se ψ é derivável em $\mathfrak{C}_{nf}$ então, por (*), $x \notin \mathsf{free}(\psi) \rightarrow x \notin \mathsf{free}(\neg\psi)$;
$\varphi = (\psi * \chi)$: O argumento é análogo ao de cima, ambos ψ, χ tem de ser derivável e, por (*), não há ocorrência livre neles, o que implica que não há em $(\psi * \chi)$.

($\Leftarrow$) Agora assumindo $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$:
$\varphi = t_1 \doteq t_2$: então ela é derivável pela regra 1;
$\varphi = Rt_1 \ldots t_n$: então ela é derivável pela 2ª regra;
$\varphi = Qx\psi$: a última e penúltima regra garantem que é derivável;
$\varphi = \neg\psi$: então $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$, portanto a 3ª regra garante que é derivável;
$\varphi = (\psi * \chi)$: Se x não ocorre livre em φ então ela não ocorre livre em ambos, portanto a 5ª regra garante sua derivação. ☐

2 Semântica das Linguagens de Primeira Ordem

Exercício 1.4. Seja $\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ e $\beta(v_n) := 2n$ para $n \geqslant 0$. Interprete as seguintes fórmulas:
a) $\exists v_0 v_0 + v_0 \doteq v_1$;
b) $\exists v_0 v_0 \cdot v_0 \doteq v_1$;
c) $\exists v_1 v_0 \doteq v_1$;
d) $\forall v_0 \exists v_1 v_0 \doteq v_1$;
e) $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)$.

Proof. $\mathfrak{I} \vDash a)$ sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $a + a = \beta(v_1) = 2$, de fato $a = 1$ satisfaz;
$\mathfrak{I} \vDash b)$ sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $a \cdot a = 2$, obviamente a equação $x^2 = 2$ não tem solução nos naturais, portanto $\mathfrak{I} \nvDash b)$;
$\mathfrak{I} \vDash c)$ sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $0 = a$, o que é claramente verdade;
$\mathfrak{I} \vDash d)$ sse para todo $a \in \mathbb{N}$ existe um $b \in \mathbb{N}$ tq $a = b$, o que também é verdadeiro;
$\mathfrak{I} \vDash e)$ sse para todo $a, b \in \mathbb{N}$ existe um $c \in \mathbb{N}$ tq $a < c$ e $c < b$. Em particular escolhendo $b = a + 1$ temos que existe um natural c tq $a < c < a + 1$ o que é falso, portanto $\mathfrak{I} \nvDash e)$. ☐

Exercício 1.5. Seja $A \neq \varnothing$ e $A, \mathcal{S} \prec \aleph_0$ um conjunto de símbolos. Mostre que há uma quantidade finita de $\mathcal{S}$-estruturas com domínio A.

Proof. Seja $S = ((c_i)_{0\leqslant i\leqslant n_1}, (R_i)_{0\leqslant i\leqslant n_2}, (f_i)_{0\leqslant i\leqslant n_3})$ com R_i k_i-ário e f_i l_i-ário e $|A| = m$, a quantidade total de associações possíveis para cada símbolo com uma respectiva interpretação no domínio é:

$$\begin{aligned} \alpha_{R_i} &:= \{Z \mid Z \subseteq A^{k_i}\}, \quad & |\alpha_{R_i}| &= \mathcal{P}(\alpha_{R_i}) = 2^{|A^{k_i}|} = 2^{m^{k_i}} \\ \alpha_{f_i} &:= A^{\left(A^{l_i}\right)}, \quad & |\alpha_{f_i}| &= |A|^{|A^{l_i}|} = m^{\left(m^{l_i}\right)} \\ \alpha_{c_i} &:= A, \quad & |\alpha_{c_i}| &= m \end{aligned}$$

Dessa forma, como todos são finitos e a união e o produto cartesiano finito de conjuntos finitos é finito, então o total de estruturas $\mathcal{H}$ é tq:

$$\mathcal{H} := \prod \left\{ \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n_1} \alpha_{R_i}, \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n_2} \alpha_{f_i}, \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n_3} \alpha_{c_i} \right\} \prec \aleph_0.$$

□

Exercício 1.6. Para $\mathcal{S}$-estruturas $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ e $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{b})$ seja $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ a $\mathcal{S}$-estrutura com domínio $A \times B$ satisfazendo:
Para $R \in \mathcal{S}$ n-ária e $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$R^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}(a_1, b_1)\ldots(a_n, b_n) \leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}a_1\ldots a_n \wedge R^{\mathfrak{B}}b_1\ldots b_n;$$

Para $f \in \mathcal{S}$ n-ária e $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$f^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) := (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n));$$

Para $c \in \mathcal{S}$:

$$c^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}});$$

Mostre que:
(a) Se as $\mathcal{S}_{\mathsf{gr}}$-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são grupos então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também é.
(b) Se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são estruturas satisfazendo os axiomas de equivalência então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também satisfaz.
(c) Se as $\mathcal{S}_{\mathsf{ar}}$-estruturas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são corpos, então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ não é.

Proof. (a) Sejam $\mathfrak{A} = (A, \circ, e); \mathfrak{B} = (B, *, \varepsilon)$ e $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \circledast, \epsilon)$. Se $a, b, c \in \mathfrak{A}; x, y, z \in \mathfrak{B}$ e $u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

(i) $\forall u, v, w((u \circledast v) \circledast w = u \circledast (v \circledast w))$:

$$\begin{aligned} (\overbrace{(x,a)}^{u} \circledast \overbrace{(y,b)}^{v}) \circledast \overbrace{(z,c)}^{w} &= (x \circ y, a * b) \circledast (z, c) \\ &= (x \circ y \circ z, a * b * c) \\ &= (x, a) \circledast (y \circ z, b * c) \\ &= (x, a) \circledast ((y, b) \circledast (z, c)) \\ (u \circledast v) \circledast w &= u \circledast (v \circledast w). \end{aligned}$$

(ii) $\forall u \exists v (u \circledast v) = \epsilon$:

$$\begin{aligned}
(\overbrace{(x,a)}^{u} \circledast \overbrace{(y,b)}^{v}) &= \overbrace{(e,\varepsilon)}^{\epsilon} \\
(x \circ y, a * b) &= (e, \varepsilon) \\
\forall x \exists y (x \circ y = e) &\wedge \forall a \exists b (a * b = \varepsilon).
\end{aligned}$$

(iii)$\exists \epsilon \forall u (u \circledast \epsilon = u)$:

$$\begin{aligned}
(\overbrace{(x,a)}^{u} \circledast \overbrace{(e,\varepsilon)}^{\epsilon}) &= \overbrace{(x,a)}^{u} \\
(x \circ e, a \circ \varepsilon) &= (x,a) \\
\exists e \forall x (x \circ e = x) &\wedge \exists \varepsilon \forall a (a * \varepsilon = a).
\end{aligned}$$

(b) Sejam $\mathfrak{A} = (A, R); \mathfrak{B} = (B, \mathcal{R}), \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \mathscr{R})$ com $x, y, z \in \mathfrak{A}; a, b, c \in \mathfrak{B}; u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

(i) $\forall u (u \mathscr{R} u)$:

$$\begin{gathered}
\overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(x,a)}^{u} \leftrightarrow xRx \wedge a\mathcal{R}a \\
\forall x (xRx) \wedge \forall a (a\mathcal{R}a).
\end{gathered}$$

(ii) $\forall u, v (u \mathscr{R} v \leftrightarrow v \mathscr{R} u)$:

$$\begin{gathered}
\overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(y,b)}^{v} \leftrightarrow \overbrace{(y,b)}^{v} \mathscr{R} \overbrace{(x,a)}^{u} \\
xRy \wedge a\mathcal{R}b \leftrightarrow yRx \wedge b\mathcal{R}a \\
\forall x, y (xRy \leftrightarrow yRx) \wedge \forall a, b (a\mathcal{R}b \leftrightarrow b\mathcal{R}a)
\end{gathered}$$

(iii) $\forall u, v, w (u \mathscr{R} v \wedge v \mathscr{R} w \to u \mathscr{R} w)$:

$$\begin{gathered}
\overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(y,b)}^{v} \wedge \overbrace{(y,b)}^{v} \mathscr{R} \overbrace{(z,c)}^{w} \to \overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(z,c)}^{w} \\
(xRy \wedge a\mathcal{R}b) \wedge (yRz \wedge b\mathcal{R}c) \to xRz \wedge a\mathcal{R}c \\
(xRy \wedge yRz) \wedge (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \to xRz \wedge a\mathcal{R}c \\
\forall x, y, z (xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall a, b, c (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \to a\mathcal{R}c)
\end{gathered}$$

(c) Sejam $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, 0, 1); \mathfrak{B} = (B, *, \times, \overline{0}, \overline{1})$ e $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ com $x, y \in \mathfrak{A}; a, b \in \mathfrak{B}$ e $u, v \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:
Um dos axiomas é $\forall (u \neq \mathbf{0}) \exists v (u \oplus v = \mathbf{1})$:

$$\begin{aligned}
(x,a) \oplus (y,b) &= (1, \overline{1}) \\
(x \cdot y, a * b) &= (1, \overline{1})
\end{aligned}$$

Se isso é verdade então, em particular, para ou $x = 0$ ou $a = \overline{0}$ temos que $(0, b), (x, \overline{0}) \neq \mathbf{0}$, logo ambos $0, \overline{0}$ possuiriam invreso, o que é falso. □

Exercício 2.1. Mostre que para $x, y \in \{\top, \bot\}$:
a) $\dot{\to} (x, y) = \dot{\vee} (\dot{\neg} (x), y)$;
b) $\dot{\wedge} (x, y) = \dot{\neg} (\dot{\vee} (\dot{\neg} (x), \dot{\neg} (y)))$;
c) $\dot{\leftrightarrow} (x, y) = \dot{\wedge} (\dot{\to} (x, y), \dot{\to} (y, x))$.

Proof.

x	y	$\dot{\neg}(x)$	$\dot{\vee}(\dot{\neg}(x), y)$	$\dot{\rightarrow}(x,y)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

x	y	$\dot{\neg}(x)$	$\dot{\neg}(y)$	$\dot{\vee}(\dot{\neg}(x), \dot{\neg}(y))$	$\dot{\neg}(\dot{\vee}(\dot{\neg}(x), \dot{\neg}(y)))$	$\dot{\wedge}(x,y)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

x	y	$\dot{\rightarrow}(x,y)$	$\dot{\rightarrow}(y,x)$	$\dot{\wedge}(\dot{\rightarrow}(x,y), \dot{\rightarrow}(y,x))$	$\dot{\leftrightarrow}(x,y)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

□

Exercício 3.3. Seja P um símbolo de relação unária e f de função binária. Determine duas interpretações para cada fórmula uma que a satisfaça e outra que não:
a) $\forall v_1 f v_0 v_1 \doteq v_0$;
b) $\exists v_0 \forall v_1 f v_0 v_1 \doteq v_1$;
c) $\exists v_0 (P v_0 \wedge \forall v_1 P f v_0 v_1)$.

Proof. a) Seja $\mathfrak{I} = (\mathbb{N}, R, \cdot)$ tq $\beta(v_0) = 0$, então $\mathfrak{I} \vDash a)$ sse para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \cdot a = 0$, o que é fato. Entretanto para mesma interpretação com $+$ temos $a + 0 = 0$, o que não é o caso.
b) Interpretando com a mesma estrutura que em a) o que b) garante é a existência de um elemento neutro, o que é verdade. Pro caso de não satisfação basta retirarmos o elemento neutro do domínio.
c) Seja $Rx :=$ x é par para mesma estrutura $\mathfrak{I}$ com $+$, o que c) diz é que existe um x par tq para todo y, $x + y$ é par, o que é claramente falso, use, entretanto, $\cdot$ ao invés de $+$, então obviamente para todo y, xy é par se x for par. □

Exercício 3.4. Uma fórmula sem $\neg, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$ é denominada *positiva*. Prove que toda fórmula positiva é satisfatível.

Proof. Seja $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a\}$ e $\beta(v) = a$, com $R_i^{\mathfrak{A}}$ sendo o grafo da função identidade n-ária para todo i, assim como $f_i^{\mathfrak{A}} = \text{id}$ e $c_i^{\mathfrak{A}} = a$. De fato, $\mathfrak{I}(t) = a, \forall t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$. Por indução em fórmulas é claro que $\mathfrak{I} \vDash t_1 \equiv t_2$ e $\mathfrak{R} t_1 \ldots t_n$, logo também satisfaz $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \vee \psi$, o mesmo para $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$. □

Exercício 4.9. Para fórmulas arbitrárias φ, ψ, χ prove que:
a) $(\varphi \vee \psi) \vDash \chi$ sse $\varphi \vDash \chi$ e $\psi \vDash \chi$;
b) $\vDash (\varphi \rightarrow \psi)$ sse $\varphi \vDash \psi$.

Proof. a) ($\Rightarrow$) Basta provarmos que $(\varphi \vee \psi \to \chi) \vDash\Dashv ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi))$, logo

$$\begin{aligned}\varphi \vDash \chi \text{ e } \psi \vDash \chi &\text{ sse para todo } \mathfrak{I}, \text{ se } \mathfrak{I} \vDash \varphi, \text{ então } \mathfrak{I} \vDash \chi, \text{ i.e., } \mathfrak{I} \vDash (\varphi \to \chi) \text{ e, igualmente, } \mathfrak{I} \vDash (\psi \to \chi);\\ &\text{ sse } \mathfrak{I} \vDash ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi));\\ &\text{ sse } \mathfrak{I} \vDash (\varphi \vee \psi \to \chi);\\ &\text{ sse } (\varphi \vee \psi) \vDash \chi.\end{aligned}$$

b) ($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned}\varphi \vDash \psi &\text{ sse para todo } \mathfrak{I} \text{ se } \mathfrak{I} \vDash \varphi \text{ então } \mathfrak{I} \vDash \psi;\\ &\text{ sse para todo } \mathfrak{I} \vDash (\varphi \to \psi);\\ &\text{ sse } \vDash (\varphi \to \psi).\end{aligned}$$

□

Exercício 4.10. Mostre que:
(a) $\exists x \forall y \varphi \vDash \forall y \exists x \varphi$;
(b) $\forall y \exists x Rxy \nvDash \exists x \forall y Rxy$.

Proof. (a) $\mathfrak{I} \vDash \exists x \forall y \varphi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \forall y \varphi$, então em particular existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{t}{y} \vDash \varphi$ sendo $t \in A$ um termo genérico qualquer. Assim, devido a escolha arbitrária, concluímos que para todo $t \in A$ existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{t}{y} \vDash \varphi$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \forall y \exists x \varphi$.
(b) $\mathfrak{I} \vDash \forall y \exists x Rxy$ sse para todo $a \in A$ existe um $t \in A$ tq $\mathfrak{I} \vDash Rta$, mas isso não necessariamente implica que exista um t tq Rta valha para todo a.
Obs: Lembre-se que a definição de satisfatibilidade é feita na metateoria que, por mais rigorosa que seja, é justificada pela noção intuitiva que temos de cada fórmula e justificada da mesma forma. □

Exercício 4.11. Prove que para $Q = \forall, \exists$:
a) $Qx(\varphi \wedge \psi) \vDash\Dashv (Qx\varphi \wedge Qx\psi)$;
b) $Qx(\varphi \vee \psi) \vDash\Dashv (\varphi \vee Qx\psi)$, se $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
e justifique o motivo da assunção $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$.

Proof. Provarei para $Q = \forall$ porque é fácil ver que a intuição se estende pro outro caso.
a) Obviamente se para todo $a \in A$ temos $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$ e para todo $b \in A$ temos $\mathfrak{I}\frac{b}{x} \vDash \psi$, então para todo $c \in A$, $\mathfrak{I}\frac{c}{x} \vDash \varphi$ e $\mathfrak{I}\frac{c}{x} \vDash \psi$, i.e., para todo $c \in A$, $\mathfrak{I} \vDash (\varphi \wedge \psi)$, analogamente vale a volta. A justificativa se baseia no fato intuitivo de que se estamos variando pelo domínio todo de uma forma numa fórmula e de outra forma na outra, então podemos variar em ambas da mesma forma.
b) $\mathfrak{I} \vDash \forall x \varphi$ sse para todo $a \in A$, $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$, i.e., utilizamos a valoração β que interpreta x como a, mas como $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$, então $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(\varphi) = \mathfrak{I}(\varphi)$, a partir disso é fácil provar ambos b) e c). □

Exercício 4.12. Sejam φ, ψ fórmulas tais que $\varphi \vDash\Dashv \psi$. Seja χ' obtido de χ substituindo todas as subfórmulas da forma φ por ψ. Mostre que para todo $\chi, \chi \vDash\Dashv \chi'$.

Proof. Provaremos por indução em fórmulas:
Se $\chi = \varphi$ é atômica então $\mathfrak{I} \vDash \varphi$ sse, por hipótese, $\mathfrak{I} \vDash \chi' = \psi$;

se $\chi = \neg\varphi$ então $\mathfrak{I} \models \chi$ sse não vale $\mathfrak{I} \models \varphi$ sse, por hipótese, não vale $\mathfrak{I} \models \psi$, i.e., $\mathfrak{I} \models \chi' = \neg\psi$;
se $\chi = \xi \vee \varphi$ então $\mathfrak{I} \models \chi$ sse $\mathfrak{I} \models \xi$ ou $\mathfrak{I} \models \varphi$ sse, por hipótese, $\mathfrak{I} \models \xi$ ou $\mathfrak{I} \models \psi$, i.e., $\mathfrak{I} \models \chi' = \xi \vee \psi$;
se $\chi = \exists x\varphi$ então $\mathfrak{I} \models \chi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ sse, por hipótese, existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$, i.e., $\mathfrak{I} \models \chi' = \exists x\psi$.
Portanto $\chi \models\!\dashv \chi'$. □

Exercício 4.13. Prove o análogo ao **4.8.** para relação de consequência.

Proof. Pelo **Lema 4.4.** é fácil estender o caso que o conjunto é satisfatível para consequência lógica. □

Exercício 4.14. Um conjunto Φ de sentenças é dito *independente* se não há um $\varphi \in \Phi$ tq $\Phi\backslash\{\varphi\} \models \varphi$. Mostre que os conjuntos Φ_{gr} e Φ_{eq} de axiomas dos grupos e relações de equivalência são independentes.

Proof. (a) $\Phi_{\mathrm{gr}} = \{\underbrace{\forall uvw((u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w))}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall u \exists v(u \circ v = e)}_{\varphi_2}, \underbrace{\exists c \forall u(u \circ c = u)}_{\varphi_3}\}$
(i) Como φ_3 garante a existência de um elemento neutro, mas não necessariamente precisamos interpretar e como este, peguemos $(\mathbb{N}\backslash\{1\}, \cdot, 0)$, de fato esta é associativa e possui um número que se operado com qualquer outro no domínio resulta em 0, sendo este, é claro, também o 0, então $\mathfrak{I} \models \Phi_{\mathrm{gr}}\backslash\{\varphi_3\}$, mas $\mathfrak{I} \not\models \varphi_3$;
(ii) Como φ_2 garante a existência de um inverso, basta tomarmos a estrutura $(\mathbb{N}, +, 0)$ em $\mathfrak{I}$ que vale $\mathfrak{I} \models \Phi_{\mathrm{gr}}\backslash\{\varphi_2\}$, mas $\mathfrak{I} \not\models \varphi_2$;
(iii) Como φ_1 garante associatividade tomamos o operador $\circ$ como não associativo, por exemplo a estrutura $(\mathbb{Z}, -, 0)$ em $\mathfrak{I}$ garante que $\mathfrak{I} \models \Phi_{\mathrm{gr}}\backslash\{\varphi_1\}$, mas $\mathfrak{I} \not\models \varphi_1$.

(b) $\Phi_{\mathrm{eq}} = \{\underbrace{\forall a(aRa)}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall ab(aRb \leftrightarrow bRa)}_{\varphi_2}, \underbrace{\forall abc(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)}_{\varphi_3}\}$
(i) Para $\Phi_{\mathrm{eq}}\backslash\{\varphi_3\}$ basta tomar $(\mathbb{Z}, \cdot, R)$ tq aRb sse $a \cdot b \geqslant 0$. Assim ambos φ_1, φ_2 são satisfeitos, mas escolhendo $b = 0$ em φ_3 tal relação não é sempre verdade;
(ii) Para $\Phi_{\mathrm{eq}}\backslash\{\varphi_2\}$ basta tomar $(\mathbb{N}, \geqslant)$, tal qual não é simétrica;
(iii) Para $\Phi_{\mathrm{eq}}\backslash\{\varphi_1\}$ basta tomar $A = \{a\}$ e (A, R) tq $\forall a \in A(a \not R a)$. □

Exercício 4.15. (Generalização do **Exercício 1.6.**). Seja $I \neq \varnothing$, $\forall i \in I$, seja $\mathfrak{A}_i$ uma $\mathcal{S}$-estrutura. Denotaremos por $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ a $\mathcal{S}$-estrutura do produto direto das $\mathcal{S}$-estruturas $\mathfrak{A}_i$:

$$\mathsf{Dom}\left(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i\right) := \left\{g \;\middle|\; g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i), \text{ e } g(i) \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i), \forall i \in I\right\}$$

i.e., n-tuplas de todas as possíveis combinações de elementos no domínio de cada estrutura (que denotaremos por $\langle g(i) \mid i \in I\rangle$), e:
para $R \in \mathcal{S}$ n-ária e $g_1, \ldots, g_n \in \prod_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$:

$$R^{\mathfrak{A}} g_1 \ldots g_n \text{ sse } R^{\mathfrak{A}_i} g_1(i) \ldots g_n(i), \forall i \in I;$$

para $f \in \mathcal{S}$ n-ária e $g_1, \ldots, g_n \in \prod_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$:

$$f^{\mathfrak{A}}(g_1, \ldots, g_n) := \langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i)) \mid i \in I \rangle;$$

e $c^{\mathfrak{A}} := \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$ para $c \in \mathcal{S}$.
Prove que para $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ se $\mathsf{var}(t) \subseteq \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ e $g_0, \ldots, g_{n-1} \in \prod_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$, então

$$t^{\mathfrak{A}}[g_0, \ldots, g_{n-1}] = \langle t^{\mathfrak{A}_i}[g_0(i), \ldots, g_{n-1}(i)] \mid i \in I \rangle \quad (*)$$

Proof. Se $t = c$, então, por definição, $c^{\mathfrak{A}} = \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$. Se $t = x$, então, novamente por definição, $t^{\mathfrak{A}}[g_0] = g_0 = \langle g_0(i) \mid i \in I \rangle$. Provados os casos bases assuma $(*)$ como hipótese indutiva. Se $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, então $t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}})$, por hipótese para cada t_i temos $t_i^{\mathfrak{A}} = g_k$, para algum g_k, logo $t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$ que, por definição, é igual a $\langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_{i_1}(i), \ldots, g_{i_n}(i)) \mid i \in I \rangle$. □

Exercício 4.16. Fórmulas deriváveis no seguinte cálculo são denominadas fórmulas Horn:

$$\frac{}{(\neg\varphi_1 \vee \cdots \vee \neg\varphi_n \vee \varphi)}$$ Se $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ são atômicas;

$$\frac{}{\neg\varphi_0 \vee \cdots \vee \neg\varphi_n}$$ Se $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ são atômicas;

$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}\ ; \qquad \frac{\varphi}{\forall x\varphi}\ ; \qquad \frac{\varphi}{\exists x\varphi}\ .$$

Mostre que se φ é uma *sentença* Horn e se $\mathfrak{A}_i \models \varphi, \forall i \in I$, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$.

Proof. Pelo teorema anterior temos $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models (t_1 \doteq t_2)$ sse $t_1^{\mathfrak{A}} = \langle t_1^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle = t_2^{\mathfrak{A}} = \langle t_2^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$, i.e., $t_1^{\mathfrak{A}_i} = t_2^{\mathfrak{A}_i}, \forall i \in I$, então obviamente se cada $\mathfrak{A}_i$ o satisfaz, o produto direto também. É fácil estender o argumento paras outras fórmulas atômicas. Disso é fácil tirar que se todas as estruturas satisfazem negações e disjunções de fórmulas atômicas, então o produto direto também satisfaz. Provado o caso base assuma como hipótese de indução que se $\mathfrak{A}_i \models \varphi, \forall i \in I$, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$. Se $\mathfrak{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)$, então $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ e $\mathfrak{A}_i \models \psi$, por hipótese isso implica que $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$ e $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \psi$, i.e., $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)$. Da mesma forma, $\mathfrak{A}_i \models \exists x\varphi$ sse existe $a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$ tq $\mathfrak{A}_i \frac{a}{x} \models \varphi$, se em cada domínio das $\mathfrak{A}_i$ há um elemento que satisfaz, em particular pegando $a_i \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$ temos que a n-tupla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{Dom}\left(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i\right)$ também satisfaz, o argumento é análogo para $\forall x\varphi$. □

Exercício 5.9. Seja $\mathcal{S} \prec \aleph_0$ um conjunto de símbolos e $\mathfrak{A}$ uma $\mathcal{S}$-estrutura tq $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \prec \aleph_0$. Mostre que há $\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ cujos modelos são exatamente aquelas $\mathcal{S}$-estruturas isomórficas a $\mathfrak{A}$.

Proof. Construiremos $\varphi_{\mathfrak{A}}$ em função de $\mathfrak{A}$, enumere $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. Como $\mathcal{S} \prec \aleph_0$, então para especificamente $x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{Var}$ defina $\Phi := \{\varphi \mid \varphi \text{ é atômica e } \mathsf{free}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}\}$ o conjunto de $\mathcal{S}$-fórmulas atômicas com exatamente $x_1, \ldots, x_n$ como variáveis livres. Obviamente $\Phi \prec \aleph_0$, enumere portanto $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$. Defina por indução $\Psi_0 := \varnothing$ e

$$\Psi_m := \begin{cases} \Psi_{m-1} \cup \{\varphi_m\}, \text{ se } \mathfrak{A} \models \varphi_m[a_1, \ldots, a_n]; \\ \Psi_{m-1} \cup \{\neg\varphi_m\}, \text{ se } \mathfrak{A} \not\models \varphi_m[a_1, \ldots, a_n]. \end{cases}$$

com isso o conjunto

$$\Psi := \bigcup_{i=1}^{k} \Psi_i$$

tem cardinalidade igual a Φ e, portanto, é finito. Obviamente Ψ possui todas as informações necessárias para definirmos todas as funções, relações e constantes e suas dependências com os elementos do domínio, portanto toda estrutura que satisfaz Ψ terá tais propriedades, basta agora garantir que o domínio dessa nova estrutura esteja em bijeção com o de $\mathfrak{A}$, defina então:

$$\varphi_{\mathfrak{A}} := \exists x_1 \dots x_n \left(\bigwedge \Psi \wedge \forall x \left(\bigvee_{i=1}^{n} x \doteq x_i \right) \right)$$

□

Exercício 5.10. Mostre que: (a) A relação $<$ é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$, i.e., existe uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_2^{\{+,\cdot,0\}}$ tq $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \vDash \varphi[a, b] \text{ sse } a < b.$$

(b) A relação $<$ não é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, 0)$.

Proof. (a) Tome $\varphi = \exists c(\neg(c \doteq 0) \wedge (b \doteq a + c^2))$, dessa forma $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \vDash \varphi[a, b]$ sse $a < b$.
(b) Seja $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ um automorfismo em $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$ tq $\pi(a) = -a$ que é o $c \in \mathbb{R}$ tq $a + c = 0$. Para provar que π é um automorfismo precisamos:
(i) π é uma bijeção;
(ii) $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$;
(iii) $\pi(0) = 0$.
Como todos são verficados isso garante que é um automorfismo. Agora vejamos que se existe um $\varphi[a, b]$ tq $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a, b]$ sse $a < b$ então como π é estritamente decrescente, $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\pi(a), \pi(b)]$ sse $a > b$. Sabemos, também, pelo **Lema do Isomorfismo** que $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a, b]$ sse $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\pi(a), \pi(b)]$, i.e., $a < b$ sse $b < a$, o que é uma contradição, portanto não existe tal $\varphi[a, b]$ e, com isso, $<$ não é elementarmente definível. □

Exercício 5.11. Alterando o cálculo das fórmulas universais substituindo o quantificador universal em (iii) por um existencial conseguimos o cálculo de fórmulas existenciais. Prove que:
a) A negação de uma sentença universal é logicamente equivalente a uma sentença existencial, e vice versa;
b) Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e φ é uma sentença existencial, então $\mathfrak{A} \vDash \varphi \implies \mathfrak{B} \vDash \varphi$.

Proof. a) Caso base para ambas: Se φ é livre de quantificadores, obviamente $\neg\varphi$ também é, portanto se φ é uma sentença universal, $\neg\varphi$ é existencial e vice versa. Tomemos como hipótese indutiva que se φ é universal/existencial, então $\neg\varphi$ é existencial/universal. Se $\varphi = (\psi \wedge \chi)$, então $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a $\neg\psi \vee \neg\chi$, assim como para $\varphi = (\chi \vee \psi)$ temos $\neg\psi \wedge \neg\chi$, por hipótese é fácil ver que a propriedade é preservada para ambos os casos. Da mesma forma se $\varphi = \forall x \psi$, então $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a $\exists x \neg\varphi$, o caso contrário é análogo.
b) Por a) sabemos que $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a uma fórmula universal, se $\mathfrak{A} \vDash \varphi$, então $\mathfrak{A} \nvDash \neg\varphi$, pela contraposição do **Corolário 5.8.** temos que $\mathfrak{B} \nvDash \neg\varphi$, i.e., $\mathfrak{B} \vDash \varphi$. □

Exercício 6.7. Formalize as seguintes declarações usando o conjunto de símbolos de 6.2.:
a) Todo real positivo tem uma raiz quadrada positiva;
b) Se ρ é estritamente monótona, então ρ é injetiva;
c) ρ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$;
d) para todo x, se ρ é diferenciável em x, então ρ é contínua em x.

Proof. a) $\forall x \exists y(0 < y \wedge y \cdot y \doteq x)$;
b) $(\forall x \forall y(x < y \to \rho(x) < \rho(y)) \vee \forall x \forall y(x < y \to \rho(y) < \rho(x))) \to \forall x \forall y(\rho(x) \doteq \rho(y) \to x \doteq y)$;
c) $\forall u(0 < u \to \exists v(0 < v \wedge \forall x \forall y(\Delta(x, y) < v \to \Delta(\rho(x), \rho(y)) < u)))$;
d) Sejam

$$C(x) := \forall u(0 < u \to \exists v(0 < v \to \forall y(\Delta(y, x) < v \to \Delta(\rho(y), \rho(x)) < u)));$$

$$L(\ell, f(y), p) := \forall u(0 < u \to \exists v(0 < v \wedge \forall y((0 < \Delta(y, p) \wedge \Delta(y, p) < v) \to \Delta(f(y), \ell) < u).$$

Logo $\forall z(\exists w(\rho(x + y) \doteq w \cdot y + \rho(x) \wedge \exists \ell(L(\ell, w, 0))) \to C(x))$. $\square$

Exercício 6.8. Seja $S_{\text{eq}} = \{R\}$, formalize:
a) R é uma relação de equivalência com no mínimo duas classes de equivalência;
b) R é uma relação de equivalência com uma classe de equivalência contendo mais de um elemento.

Proof. a) $\bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists a \exists b(Rab \wedge \exists c(\neg Rac))$;
b) $\bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists a \exists b(Rab \wedge \neg(a \doteq b))$. $\square$

Exercício 6.9. Utilize o **Exercício 4.16.** para provar que:
a) Se para todo $i \in I$ a estrutura $\mathfrak{A}_i$ é um grupo, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ é um grupo;
b) Nem a teoria da ordem, nem a dos corpos, pode ser axiomatizada por uma sentença de Horn.

Proof. a) Seja $\mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, vale que $\mathfrak{A} \models \forall x(x \circ e \doteq x)$ sse para todo $g \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ temos $g \circ^{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{A}} = g$, i.e., $\langle g(i) \circ^{\mathfrak{A}_i} e^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle = \langle g(i) \mid i \in I \rangle$ que é igual sse $g(i) \circ^{\mathfrak{A}_i} e^{\mathfrak{A}_i} = g(i), \forall i \in I$ o que, por hipótese, é verdade. Destrinchando os axiomas de grupo desta forma é fácil mostrar que $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{gr}}$.
b) Assuma que $\varphi_{\text{fd}} = \bigwedge \Phi_{\text{fd}}$ a conjunção dos axiomas de corpos seja uma sentença Horn, pelo **Exercício 1.6.** o produto direto de duas estruturas de corpos $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ não é um corpo e, pelo **Exercício 4.16.**, deveria ser. Contradição, então φ_{fd} não é uma sentença Horn.
Igualmente se $\varphi_{\text{ord}} = \bigwedge \Phi_{\text{ord}}$ é uma sentença de Horn, então se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são estruturas de ordem, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ precisa também ser. Note que $\mathfrak{C} \models \forall xy(x < y \vee x \doteq y \vee y < x)$ sse para $x = (a, b)$ e $y = (p, q)$ temos $\forall (a, b)(p, q)((a < p \wedge b < q) \vee (a = p \wedge b = q) \vee (p < a \wedge q < b))$, entretando escolhendo $(a, b), (p, q)$ tq $a < p$ e $b > q$ temos $\mathfrak{C}$ não o satisfaz, contradição. $\square$

Exercício 6.10. $M \subseteq \mathbb{N}$ é denominado *spectrum* se há um conjunto de símbolos $\mathcal{S}$ e uma $\mathcal{S}$-sentença φ tq

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi \text{ possui um modelo com exatamente } n \text{ elementos}\}.$$

Prove que é um spectrum: a) Todo $N \subseteq \mathbb{N} \backslash \{0\}$ finito;
b) $\{n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \mid (n \equiv 0 \pmod{m}) \wedge m \geqslant 1\}$;

c) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$;
d) $\{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \mid n$ não é primo$\}$;
e) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ é primo$\}$.

Proof. a) Seja $\varphi_{\geqslant n} := \bigwedge_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \neg(v_i \doteq v_j)$, então

$$\varphi_n := \exists v_1 \ldots v_n \left(\varphi_{\geqslant n} \wedge \forall v \left(\bigvee_{i=1}^{n} v \doteq v_i\right)\right)$$

é a formalização de *há exatamente n elementos*.
Como $N < \aleph_0$ enumere $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$, logo podemos descrever $N = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_{a_i}\right\}$.
b) Pegue $\mathcal{S} = \{R\}$ e defina

$$\varphi = \bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists v_1 \ldots v_n \left(\varphi_{\geqslant n} \wedge \forall v \left(\bigvee_{i=1}^{n} Rvv_i\right)\right)$$

Isso garante não só que R seja uma relação de equivalência como que o conjunto quociente $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A})/R$ de qualquer modelo de φ terá exatamente n classes de equivalência, como todas possuem a mesma cardinalidade tem de ser possível particionar o domínio em n conjuntos diferentes, i.e., ser um múltiplo de n.
c) Seja $\mathcal{S} = \{R, f, g\}$ a ideia é formalizar ψ tq $f, g : \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \to R$, χ tq $(f(x), g(x))$ é injetivo e ξ que é sobrejetivo, i.e.:

$$\begin{aligned}
&\psi := \forall x(Rf(x) \wedge Rg(x));\\
&\chi := \forall x\forall y((f(x) = f(y) \wedge g(x) = g(y)) \to x = y);\\
&\xi := \forall x\forall y((Rx \wedge Ry) \to \exists z(f(z) = x \wedge g(z) = y)).
\end{aligned}$$

Logo, se $\mathfrak{A} \vDash \varphi := \psi \wedge \chi \wedge \xi$, então $\mathfrak{A}$ possui uma bijeção de $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ em R^2, i.e., a cardinalidade do domínio será o quadrado de um natural. Para provarmos que sempre haverá um modelo para cada quadrado perfeito contruiremos um modelo para φ. Seja $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) := \{1, \ldots, m\}$ e defina $R := \{1, \ldots, p\}$, se $f(x)$ é o quociente de $x \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ por p e $g(x)$ o resto, então $x = pf(x) + g(x)$ com f, g unicamente determinados, então para cada x no domínio existem $(f(x), g(x)) \in R^2$ e vice versa.
d) **PENDENTE**
e) $\varphi := \bigwedge \Phi_{\text{ofd}} \wedge \forall x(\neg(x \doteq x + 1) \to x < x + 1)$ garante, visto que todo corpo finito tem característica prima e, portanto, contém p^n elementos, a última restrição garante que $n = 1$. Assuma por contradição que existe $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ tq $n \neq 1$, então $\exists a \notin \mathbb{F}_p$, portanto $a \neq 0$, a vista disso temos $a < a + 1 < \cdots < a + p = a$, contradição, visto que $<$ é uma relação de ordem total. □

Exercício 7.5. Prove que:
a) Se $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A) \vDash \Pi$ e se $\sigma^A : A \to A$, dada por $\sigma^A(a) = a +^A 1^A$, então $(A, \sigma^A, 0^A) \vDash$(P1)-(P3).
b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ é caracterizada por Π até o isomorfismo.

Proof. a) Interpretemos em $\mathfrak{A}$ os 3 primeiros axiomas de Π:
(i) $\forall x(\neg x +^A 1^A \doteq 0^A)$ sse $\forall x(\neg\sigma(x) \doteq 0)$ (P1);

(ii) $\forall xy(x +^A 1^A \doteq y +^A 1^A \to x \doteq y)$ sse $\forall xy(\sigma(x) \doteq \sigma(y) \to x \doteq y)$ (P2);
(iii) $\forall X((X0^A \wedge \forall x(Xx \to Xx +^A 1^A)) \to \forall yXy)$ sse $\forall X((X0^A \wedge \forall x(Xx \to X\sigma(x))) \to \forall yXy)$ (P3).
b) Seja $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A) \models \Pi$ para $\pi : \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ definimos indutivamente:
$\pi(0) = 0^A$;
$\pi(x+1) = \pi(x) +^A 1^A$.
Demonstraremos agora que π é bijetivo:
Sobretividade: a definição garante o caso base, $0^A \in \mathsf{Im}(\pi)$. Assuma por hipótese $a = \pi(n) \in \mathsf{Im}(\pi)$, logo $a +^A 1^A = \pi(n) +^A 1^A = \pi(n) +^A \pi(1)$, por definição $a +^A 1^A = \pi(n+1) \in \mathsf{Im}(\pi)$.
Injetividade: Queremos provar que $\forall nm(n \neq m \to \pi(n) \neq \pi(m))$. Indução em n:
Caso base: $n = 0$ e $m \neq 0$, em particular, assuma sem perda de generalidade, que $m = k+1$, logo $\pi(n) = 0^A$ e $\pi(m) = \pi(k+1)$, pela primeira sentença em Π, $k+1 \neq 0$, portanto $\pi(m) = \pi(k+1) \neq \pi(0) = 0^A = \pi(n)$.
Provado o caso base assuma como hipótese de indução que $\forall m(n \neq m \to \pi(n) \neq \pi(m))$, façamos agora indução dupla, dessa vez em m:
Caso base: $m = 0$ e $n \neq 0$, em especial $n = k+1$, a prova deste é análogo ao caso base em n.
Hipótese indutiva: $n \neq m \to \pi(n) \neq \pi(m)$, sejam $n, m \neq 0$, então $n = p+1$ e $m = q+1$, se $n \neq m$, i.e., $\neg(p+1 = q+1)$, por 2 em Π, $p \neq q$ e, por hipótese, $\pi(p) \neq \pi(q)$, portanto, se $\pi(n) = \pi(p) +^A 1^A = \pi(m) = \pi(q) +^A 1^A$, também por 2 em Π temos $\pi(p) = \pi(q)$, contradição, logo $\pi(n) \neq \pi(m)$.
Se π é isomorfismo, provemos que (i) $\pi(n+m) = \pi(n) +^A \pi(m)$ e (ii) $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$:
(i)
Caso base: $\pi(m+0) = \pi(m) = \pi(m) +^A 0^A = \pi(m) +^A \pi(0)$, pela propriedade 4 em Π.
Assuma $\pi(n+m) = \pi(n) +^A \pi(m)$ como hipótese de indução:

$$\begin{aligned}
\pi(m + (n+1)) &= \pi((m+n)+1) && \text{(P5);}\\
&= \pi(m+n) +^A 1^A && \text{defin\c{c}\~ao;}\\
&= (\pi(m) +^A \pi(n)) +^A 1^A && \text{passo indutivo;}\\
&= \pi(m) +^A (\pi(n) +^A 1^A) && \text{(P5);}\\
&= \pi(m) +^A \pi(n+1) && \text{defini\c{c}\~ao.}
\end{aligned}$$

(ii)
Caso base: $\pi(m \cdot 0) = \pi(0) = \pi(m) \cdot 0^A = \pi(m) \cdot \pi(0)$, pela propriedade 6 em Π.
Assuma $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ como hipótese e indução:

$$\begin{aligned}
\pi(m \cdot (n+1)) &= \pi(m \cdot n + m) && \text{(P7);}\\
&= \pi(m \cdot n) +^A \pi(m); &&\\
&= (\pi(m) \cdot^A \pi(n)) +^A \pi(m) && \text{passo indutivo;}\\
&= \pi(m) \cdot^A (\pi(n) +^A 1^A) && \text{(P7);}\\
&= \pi(m) \cdot^A \pi(n+1) && \text{defini\c{c}\~ao.}
\end{aligned}$$

□

Exercício 8.8. Para $n \geqslant 1$ dê uma definição similar dos quantificadores "*existe no máximo n*" e "*existe exatamente n*".

Proof. *existe no máximo n* pode ser formalizado como

$$\exists v_1 \ldots v_n \forall v \left(\bigwedge_{i=1} \varphi \frac{v}{v_i} \to \bigvee_{j=1} v \doteq v_j \right)$$

enquanto que, para garantir a existência de exatamente n, restringimos as variáveis para:

$$\exists v_1 \ldots v_n \forall v \left(\bigwedge_{x,y \in \{1,\ldots,n\}} \neg v_x \doteq v_u \wedge \bigwedge_{i=1} \varphi \frac{v}{v_i} \to \bigvee_{j=1} v \doteq v_j \right)$$

□

Exercício 8.9. Sejam P e f binária e $x := v_0, y := v_1, u := v_2, v := v_3$ e $w := v_4$. Mostre, usando a **Definição 8.2.** que:
a) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ u\ u}{x\ y\ v} = \exists xy(Pxu \wedge Pyu)$;
b) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv}{u\ \ v} = \exists xy(Pxv \wedge Pyfuv)$;
c) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ x\ fuv}{x\ u\ \ v} = \exists wy(Pwx \wedge Pyfuv)$;
d) $(\forall x \exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists ufuu \doteq x)\frac{x\ fxy}{x\ \ u} = \forall v \exists w(Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists ufuu \doteq x$.

Proof. a)

$$\begin{aligned}
\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ u\ u}{x\ y\ v} &= \exists x \left(\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ u\ x}{y\ v\ x} \right); \\
&= \exists xy \left(Pxu\frac{u\ x\ y}{v\ x\ y} \wedge Pyv\frac{u\ x\ y}{v\ x\ y} \right); \\
&= \exists xy(Pxu \wedge Pyu).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv}{u\ \ v} &= \exists x \left(\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv\ x}{u\ \ v\ \ x} \right); \\
&= \exists xy \left(Pxu\frac{v\ fuv\ x\ y}{u\ \ v\ \ x\ y} \wedge Pyv\frac{v\ fuv\ x\ y}{u\ \ v\ \ x\ y} \right); \\
&= \exists xy(Pxv \wedge Pyfuv).
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ x\ fuv}{x\ u\ \ v} &= \exists w \left(\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{x\ fuv\ w}{u\ \ v\ \ x} \right); \\
&= \exists wy \left(Pxu\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y} \wedge Pyv\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y} \right); \\
&= \exists wy(Pwx \wedge Pyfuv).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
(\forall x \exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists ufuu \doteq x)\frac{x\ fxy}{x\ \ u} &= \forall v \left(\exists y(Pxy \wedge Pxu)\frac{fxy\ v}{u\ \ x} \right) \vee \exists ufuu\frac{x\ u}{x\ u} \doteq x\frac{x\ u}{x\ u}; \\
&= \forall v \exists w \left(\left(Pxy\frac{fxy\ v\ w}{u\ \ x\ y} \wedge Pxu\frac{fxy\ v\ w}{u\ \ x\ y} \right) \vee \exists ufuu \doteq x \right); \\
&= \forall v \exists w((Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists ufuu \doteq x).
\end{aligned}$$

□

Exercício 8.10. Mostre que se $x_0, \ldots, x_r \notin \bigcup_{i=0}^{r} \mathsf{var}(t_i)$, então

$$\varphi \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \models\!\!\!\dashv \forall x_0 \ldots x_r \left(\bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i \to \varphi \right).$$

Proof. Assuma que $(*)$ $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(t) = \mathfrak{I}(t)$ se $x \notin \mathsf{var}(t)$ e que $(+)$ $\varphi \to (\psi \to \chi) \models\!\!\!\dashv (\varphi \wedge \psi) \to \chi$, então:
Caso base: $r = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0}{x_0} \text{ sse } & \mathfrak{I}\frac{t_0}{x_0} \models \varphi; && \text{lema da substituição}\\
& \text{sse para todo } a \in A, \text{ se } a = \mathfrak{I}(t_0), \text{ então } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0} \models \varphi;\\
& \text{sse para todo } a \in A, \text{ se } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0}(x_0) = \mathfrak{I}\frac{a}{x_0}(t_0), \text{ então } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0} \models \varphi; && \text{por } (*)\\
& \text{sse para todo } a \in A, \text{ se } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0} \models x_0 \doteq t_0, \text{ então } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0} \models \varphi;\\
& \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_0(x_0 \doteq t_0 \to \varphi).
\end{aligned}$$

Hipótese de indução: assuma que vale o enunciado para r

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t_0 \ldots t_{r+1}}{x_0 \ldots x_{r+1}} \text{ sse } & \mathfrak{I} \models \left(\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)\frac{t_{r+1}}{x_{r+1}};\\
& \text{sse } \mathfrak{I}\frac{t_{r+1}}{x_{r+1}} \models \varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}; && \text{lema da substituição}\\
& \text{sse } \mathfrak{I}\frac{t_{r+1}}{x_{r+1}} \models \forall x_0 \ldots x_r \left(\bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i \to \varphi\right); \text{ hipótese de indução}\\
& \text{sse para todo } a \in A, \text{ se } \mathfrak{I}\frac{a}{x_{r+1}} \models x_{r+1} \doteq t_{r+1}, \text{ então } \mathfrak{I}\frac{t_{r+1}}{x_{r+1}} \models \varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r};\\
& \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_{r+1}\left(x_{r+1} \doteq t_{r+1} \to \forall x_0 \ldots x_r \left(\bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i \to \varphi\right)\right);\\
& \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_0 \ldots x_{r+1}\left(x_{r+1} \doteq t_{r+1} \to \left(\bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i \to \varphi\right)\right);\\
& \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_0 \ldots x_{r+1}\left(\left(x_{r+1} \doteq t_{r+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i\right) \to \varphi\right); \text{ por } (+);\\
& \text{sse } \mathfrak{I} \models \forall x_0 \ldots x_{r+1}\left(\bigwedge_{i=0}^{r+1} x_i \doteq t_i \to \varphi\right).
\end{aligned}$$

$(*)$: Se $t = v_0$ uma variável qualquer, como $x \notin \mathsf{var}(t)$ temos $x \neq v_0$, portanto $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(t) = \mathfrak{I}(t)$ e se $t = c$ obviamente também. Assuma que valha $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(t) = \mathfrak{I}(t)$, então $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(ft_1 \ldots t_n) = f^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}\frac{a}{x}(t_1) \ldots \mathfrak{I}\frac{a}{x}(t_n) = f^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n) = \mathfrak{I}(ft_1 \ldots t_n)$, pela hipótese de indução.

(+):

$$\begin{aligned}\varphi \to (\psi \to \chi) &\vDash\Dashv \neg\varphi \vee (\psi \to \chi);\\ &\vDash\Dashv \neg\varphi \vee \neg\psi \vee \chi;\\ &\vDash\Dashv \neg(\varphi \wedge \psi) \vee \chi;\\ &\vDash\Dashv (\varphi \wedge \psi) \to \chi.\end{aligned}$$

□

Exercício 8.11. Formalize um cálculo que derive strings exatamente da forma:

$$tx_0 \ldots x_r t_0 \ldots t_r t\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \text{ ou } \varphi x_0 \ldots x_r t_0 \ldots t_r \varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}.$$

Proof. Da mesma forma que criamos o cálculo para outras regras de formação, como termos e fórmulas, basta repetir o mesmo para a definição de substituição.
Para o cálculo de substituição de termos:

$$\frac{}{x\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ x} \text{ Se } x \neq x_0, \ldots, x_r; \qquad \frac{x\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ t_i}{} \text{ Se } x = x_1;$$

$$\frac{}{c\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ c} \text{ Se } c \in \mathcal{S};$$

$$\frac{t_1'\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ s_1 \quad \ldots \quad t_n'\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ s_n}{ft_1' \ldots t_n'\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ fs_1 \ldots s_n} \text{ Se } f \in \mathcal{S}, \text{ n-ária.}$$

Para o cálculo de substituição de fórmulas:

$$\frac{t_1'\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ s_1 \quad t_2'\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ s_2}{t_1' \doteq t_2'\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ s_1 \doteq s_2};$$

$$\frac{t_1'\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ s_1 \quad \ldots \quad t_n'\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ s_n}{Rt_1' \ldots t_n'\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ Rs_1 \ldots s_n} \text{ Se } R \in \mathcal{S}, \text{ n-ária;}$$

$$\frac{\varphi\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ \psi}{\neg\varphi\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ \neg\psi}; \quad \frac{\varphi\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ \chi \quad \psi\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ \xi}{\varphi \vee \psi\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ \chi \vee \xi}.$$

$x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ $(i_1 < \cdots < i_s)$ são as variáveis em $x_0, \ldots, x_r$ tq $x_i \in \mathsf{free}(\exists x\varphi)$, $x_i \neq t_i$ e $x \neq x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$

$$\frac{\varphi\ x_{i_1} \ldots x_{i_s} x\ t_{i_1} \ldots t_{i_s} u\ \psi}{\exists x\varphi\ x_0 \ldots x_r\ t_0 \ldots t_r\ \exists u\psi}$$

onde $u = x$ se $x \notin \mathsf{free}(t_{i_1}, \ldots, t_{i_s})$, caso contrário u é a primeira variável $v_0, v_1, \cdots \notin \mathsf{var}(\varphi, t_{i_1}, \ldots, t_{i_s})$.

□

3 Cálculo de Sequentes

Exercício 2.7. Analise quais das regras abaixo estão corretas:

$$\dfrac{\Gamma\ \varphi_1\ \psi_1 \qquad \Gamma\ \varphi_2\ \psi_2}{\Gamma\ (\varphi_1 \lor \varphi_2)\ (\psi_1 \lor \psi_2)}\ (i); \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi_1\ \psi_1 \qquad \Gamma\ \varphi_2\ \psi_2}{\Gamma\ (\varphi_1 \lor \varphi_2)\ (\psi_1 \land \psi_2)}\ (ii).$$

Proof. Provemos primeiro que (i) é correta:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi_1\ \psi_1}{\Gamma\ \varphi_2\ (\psi_1 \lor \psi_2)}\ (\lor\mathbf{S}) \quad \dfrac{\Gamma\ \varphi_2\ \psi_2}{\Gamma\ \varphi_2\ (\psi_1 \lor \psi_2)}\ (\lor\mathbf{S})}{\Gamma\ (\varphi_1 \lor \varphi_2)\ (\psi_1 \lor \psi_2)}\ (\lor\mathbf{A})$$

Agora que (ii) não é correta: Note que se $\Gamma\varphi_1 \vDash \psi_1$ e $\Gamma\varphi_2 \vDash \psi_2$, então se $\mathfrak{I}$ satisfaz $\Gamma(\varphi_1 \lor \varphi_2)$ temos que $\mathfrak{I} \vDash \varphi_1$ ou $\mathfrak{I} \vDash \varphi_2$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \psi_1$ ou $\mathfrak{I} \vDash \psi_2$, portanto não necessariamente $\mathfrak{I} \vDash (\psi_1 \land \psi_2)$, portanto este não é correto. Um argumento análogo também serve como prova para (i). □

Exercício 3.6. Derive as seguintes regras:

$$\dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \neg\neg\varphi}\ (\text{a1}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \neg\neg\varphi}{\Gamma\ \varphi}\ (\text{a2}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi \quad \Gamma\ \psi}{\Gamma\ (\varphi \land \psi)}\ (\text{b})$$

$$\dfrac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ (\varphi \to \psi)}\ (\text{c}) \qquad \dfrac{\Gamma\ (\varphi \land \psi)}{\Gamma\ \varphi}\ (\text{d1}) \qquad \dfrac{\Gamma\ (\varphi \land \psi)}{\Gamma\ \psi}\ (\text{d2})$$

Proof. a1):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \neg\neg\neg\varphi\ \neg\neg\neg\varphi}\ (\mathbf{Assm})}{\Gamma\ \neg\neg\neg\varphi\ \neg\varphi}\ (\text{a2}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \neg\neg\neg\varphi\ \varphi}\ (\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\neg\varphi}\ (\mathbf{Ctr})$$

a2):

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\varphi}\ (\mathbf{Assm}) \quad \dfrac{\Gamma\ \neg\neg\varphi}{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\neg\varphi}\ (\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \varphi}\ (\mathbf{Ctr})$$

b):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\psi}\ (\mathbf{Assm}) \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \psi\ \varphi}\ (\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi}\ (\mathbf{Cp})}{\Gamma\ (\neg\varphi \lor \neg\psi)\ \neg\psi}\ (\lor\mathbf{A})}{\Gamma\ \neg\neg\psi\ \neg(\neg\varphi \lor \neg\psi)}\ (\mathbf{Cp}) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma\ \psi}{\Gamma\ (\neg\varphi \lor \neg\psi)\ \psi}\ (\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg(\neg\varphi \lor \neg\psi)}\ (\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \neg(\neg\varphi \lor \neg\psi) \equiv (\varphi \land \psi)}\ (\mathbf{PC})$$

c):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\varphi}\ (\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \neg\psi\ (\neg\varphi \lor \psi)}\ (\lor\mathbf{S}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \psi\ \psi}\ (\mathbf{Assm})}{\Gamma\ \psi\ (\neg\varphi \lor \psi)}\ (\lor\mathbf{S})}{\Gamma\ (\neg\varphi \lor \psi) \equiv (\varphi \to \psi)}\ (\mathbf{Pc})$$

d1) e d2) (basta comutá-los):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\varphi}\,(\mathbf{Assm})}{\Gamma\ \neg\varphi\ (\neg\varphi \vee \neg\psi)}\,(\vee\mathbf{S})}{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)\ \neg\neg\varphi}\,(\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)\ \varphi}\,(a2) \qquad \Gamma\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}{\Gamma\ \varphi}\,(\mathbf{Ch})$$

$\square$

Exercício 4.5. Analise quais das regras abaixo estão corretas:

$$\dfrac{\varphi\ \psi}{\exists x\varphi\ \exists x\psi}\,(i); \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ \forall x\varphi\ \exists x\psi}\,(ii); \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{fy}{x}}{\Gamma\ \forall x\varphi}\,(iii).$$

Proof. (i): Sabemos que $\varphi \vDash \psi$, um modelo $\mathfrak{I} \vDash \exists x\varphi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$, o que, por hipótese, implica que $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \psi$, i.e., se $\mathfrak{I} \vDash \exists x\varphi$, então $\mathfrak{I} \vDash \exists x\psi$, portanto $\exists x\varphi \vDash \exists x\psi$.
(ii): Assumindo que $\Gamma\varphi \vDash \psi$, um modelo $\mathfrak{I}$ satisfaz $\Gamma\forall x\varphi$ sse para todo $a \in A$ vale que $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$, o que, por hipótese, implica que $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \psi$. Então, em particular, existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \psi$, i.e., $\Gamma\forall x\varphi \vDash \exists x\psi$.
(iii): Temos $\Gamma \vDash \varphi\frac{fy}{x}$, se $\mathfrak{I} \vDash \Gamma$, então, por hipótese, $\mathfrak{I} \vDash \varphi\frac{fy}{x}$, como há uma instância em que vale φ, pela regra de introdução do existencial no sucedente temos que $\mathfrak{I} \vDash \exists x\varphi$, mas obviamente isso não é o bastante para concluir que $\mathfrak{I} \vDash \forall x\varphi$. $\square$

Exercício 5.5. Derive as seguintes regras:

$$\dfrac{\Gamma\ \forall x\varphi}{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}}\,(\text{a1}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \forall x\varphi}{\Gamma\ \varphi}\,(\text{a2}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}\ \psi}{\Gamma\ \forall x\varphi\ \psi}\,(\text{b1})$$

$$\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma\ \forall x\varphi}\,(\text{b2})\text{ se } y \notin \mathsf{free}(\Gamma\forall x\varphi) \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ \forall x\varphi\ \psi}\,(\text{b3}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \forall x\varphi}\,(\text{b4})$$

Proof. a1) e a2) (a2 é uma instância de a1 para $t = x$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi\frac{t}{x}\ \varphi\frac{t}{x}}\,(\mathbf{Assm})}{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}\ \varphi\frac{t}{x}}\,(\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}\ (\exists x\neg\varphi \vee \varphi\frac{t}{x})}\,(\vee\mathbf{S}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi\frac{t}{x}\ \neg\varphi\frac{t}{x}}\,(\mathbf{Assm})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{t}{x}\ \neg\varphi\frac{t}{x}}\,(\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{t}{x}\ \exists x\neg\varphi}\,(\exists\mathbf{S})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{t}{x}\ (\exists x\neg\varphi \vee \varphi\frac{t}{x})}\,(\vee\mathbf{S})}{\Gamma\ \exists x\neg\varphi \vee \varphi\frac{t}{x} \equiv \forall x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}}\,(\mathbf{PC}) \qquad \Gamma\ \forall x\varphi}{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}}\,(\mathbf{Mp})$$

b1) e b3) (b3 é uma instância de b1 para $t = x$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}\ \psi}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\varphi\frac{t}{x}}\,(\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \neg\psi\ \exists x\neg\varphi}\,(\exists\mathbf{S})}{\Gamma\ (\neg\exists x\neg\varphi)\ \neg\neg\psi)}\,(\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \forall x\varphi\ \psi \equiv \neg\exists x\neg\varphi\ \psi}\,(\text{a2})$$

b2) e b4) (b4 é uma instância de b2 para $y = x$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma\ \chi\ \varphi\frac{y}{x}}\ (\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{y}{x}\ \neg\chi}\ (\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \exists x\neg\varphi\ \neg\chi}\ (\exists\mathbf{A})}{\Gamma\ \neg\neg\chi\ \neg\exists x\neg\varphi}\ (\mathbf{Cp}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma\ \neg\chi\ \varphi\frac{y}{x}}\ (\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{y}{x}\ \neg\neg\chi}\ (\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \exists x\neg\varphi\ \neg\neg\chi}\ (\exists\mathbf{A})}{\Gamma\ \neg\neg\neg\chi\ \neg\exists x\neg\varphi}\ (\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi}\ (\mathbf{PC})$$

escolha χ tq $y \notin \mathsf{free}(\Gamma\exists x\varphi\chi)$ para utilizar $(\exists\mathbf{A})$. □

Exercício 7.8. Defina $(\exists\forall)$ como a regra:

$$\overline{\Gamma\ \exists x\varphi\ \forall x\varphi}$$

a) Determine quando $(\exists\forall)$ é uma regra derivável;
b) Seja $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + (\exists\forall)$, para $\mathfrak{S}$ o cálculo de sequentes. Todo sequente é derivável em $\mathfrak{S}'$?

Proof. a) Um modelo $\mathfrak{I}$ satisfaz $\Gamma\exists x\varphi$ sse há um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$, mas, como dito anteriormente, um elemento satisfazer não é condição suficiente para que todos satisfaçam. À vista disso $\Gamma\exists x\varphi \models \forall x\varphi$ quando $\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$. Portanto a validez de $(\exists\forall)$ é contingente, mas esta com certeza não é correta.
b) Sim, escolhendo um φ específico tq $\exists x\varphi$, mas $\neg\forall x\varphi$, temos:

$$\dfrac{\overline{\exists x\varphi\ \forall x\varphi}\ (\exists\forall)}{\vdots}$$
$$\dfrac{\psi \wedge \neg\psi}{\chi}\ (\mathbf{Ctr'})$$

e, portanto, $\vdash \chi$ para um χ arbitrário. Note que uma confusão comum é a de que $\mathfrak{S}'$ não necessariamente deriva uma contradição. Alguém poderia argumentar que, embora possamos provar que este deriva uma contradição, esta só é feita instanciando um φ específico e, portanto, o conjunto de fórmulas que derivaria uma contradição, não o cálculo. Acontece que o cálculo é único, suas regras seriam como "axiomas esquema" onde todos os sequentes deriváveis são justamente as instâncias destes, já que φ é uma metavariável, então derivar $\perp$ a partir de uma instância não gera um problema. □

4 O Teorema da Completude

Exercício 1.12. a) Seja $\mathcal{S} = \{R\}$ com R unário e $\Phi := \{\exists x Rx\} \cup \{\neg Ry \mid y \in \mathsf{Var}\}$. Mostre que:
- $\mathsf{Sat}(\Phi)$ e, portanto, $\mathsf{Con}(\Phi)$;
- Para nenhum $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ vale $\Phi \vdash Rt$;
- Se $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ é um modelo de Φ, então $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \backslash \{\mathfrak{I}(t) \mid t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}\} \neq \varnothing$.

b) Seja $\mathcal{S} = \{R\}$ com R unário e $x, y \in \mathsf{Var}$ com $x \neq y$. Para $\Phi = \{Rx \vee Ry\}$ mostre que:
- $\Phi \not\models Rx$ e $\Phi \not\models \neg Rx$, i.e., Φ não é completo sobre negação;
- $\mathfrak{I}^{\Phi} \not\models \Phi$.

Proof. a) Basta primeiro acharmos um modelo para Φ, seja $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\beta(v_i) := c \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}), \forall i \in \mathbb{N}$ e $R^{\mathfrak{A}} = \{a\}$. Então $\mathfrak{I} \models \neg Ry$ sse não vale que $\mathfrak{I}(R)\beta(y) = R^{\mathfrak{A}}c$, o que é satisfeito, visto que $R^{\mathfrak{A}} = \{a\}$. Além disso, $\mathfrak{I} \models \exists x Rx$, pois existe $a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models Rx$. Logo $\mathsf{Sat}(\Phi)$ e, por consequência, $\mathsf{Con}(\Phi)$.
De fato, para nenhum $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ vale $\Phi \vdash Rt$, como não há símbolos de função, então $\mathcal{T}^{\mathcal{S}} = \mathsf{Var}$, assuma que $\Phi \vdash Rx$, mas x é uma variável, então em particular $\neg Rx \in \Phi$, logo $\Phi \vdash Rx$ e $\Phi \vdash \neg Rx$, contradição, pois Φ é consistente.
Assuma que $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \backslash \{\mathfrak{I}(x) \mid x \in \mathsf{Var}\} = \varnothing$, logo $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \subseteq \{\mathfrak{I}(x) \mid x \in \mathsf{Var}\}$, segue-se disso que, como $\forall x \in \mathsf{Var}$ vale $\neg Rx$, então $\forall a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ temos $\neg Ra$, i.e., não existe $b \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ tq Rb, então $\mathfrak{I}$ não é modelo de Φ, contradição.
b) $\mathfrak{I}$ é modelo de Φ sse $\mathfrak{I} \models Rx$ ou $\mathfrak{I} \models Ry$, obviamente existem modelos $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ tq o primeiro satisfaz Rx e o segundo não, mas satisfaz Ry. Assuma que $\Phi \vdash Rx$, por correção $\Phi \models Rx$, o que é uma contradição, devido a existência de $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$, da mesma forma $\Phi \nvdash \neg Rx$. Como Φ não prova algo da forma $t_1 \doteq t_2$ as classes de equivalência possuem somente um elemento, então $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}^\Phi) = \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$. Como $R^\Phi = \{t \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}^\Phi) \mid \Phi \vdash Rt\}$ e Φ não deriva algo da forma Rt, então $R^\Phi = \varnothing$. Sabemos que $\mathfrak{I}^\Phi \models \Phi$ sse $\mathfrak{I}^\Phi \models Rx$ ou $\mathfrak{I}^\Phi \vdash Ry$, como não vale nenhum dos dois, então $\mathfrak{I}^\Phi \not\models \Phi$. □

Exercício 1.13. Fixe um conjunto de símbolos $\mathcal{S}$. Considere $\mathfrak{I}^\Phi$ para $\mathsf{Inc}(\Phi)$. $\mathfrak{I}^\Phi$ depende da escolha do conjunto inconsistente Φ?

Proof. Não, note que se Φ é inconsistente então ele deriva qualquer fórmula, em particular para todos $t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ temos $\Phi \vdash t_1 \doteq t_2$, logo o domínio de $\mathfrak{I}^\Phi$ consistente somente de uma classe de equivalência sempre que $\mathsf{Inc}(\Phi)$, independendo da escolha das fórmulas em Φ. □

Exercício 2.5. Seja $\mathcal{S}$ arbitrário e $\Phi = \{v_0 \doteq t \mid t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}\} \cup \{\exists v_0 v_1 \neg(v_0 \doteq v_1)\}$. Mostre que $\mathsf{Con}(\Phi)$ e que não há $\Psi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ tq $\Phi \subseteq \Psi$ e Ψ contém testemunhas.

Proof. Escolha β e a interpretação das funções e constantes tais que $\mathfrak{I}(t) = a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}), \forall t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$. Além disso seja $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a, b\}$ com $a \neq b$, portanto $\mathfrak{I} \models \Phi$, i.e., $\mathsf{Sat}(\Phi)$, logo $\mathsf{Con}(\Phi)$. Assuma agora que existe tal Ψ do enunciado. Como $\mathsf{Con}(\Phi)$ e ele contém testemunhas pelo **Lema 1.9.** c) (que pode ser usado sem a hipótese de que Φ é completo sobre negação, visto que não é necessário pra prova de c)) $\Phi \vdash \exists v_0 v_1 \neg(v_0 \doteq v_1)$ sse $\Phi \vdash \neg(t_1 \doteq t_2)$. Pela regra de substituição é possível provar também que $\Phi \vdash t_1 \doteq t_2$, i.e. $\mathsf{Inc}(\Phi)$, contradição, logo não existe tal Ψ. □

5 O Teorema de Löwenheim-Skolem e o Teorema da Compacidade

Exercício 1.3. Mostre que todo conjunto de fórmulas Φ tq $\Phi \geq \aleph_0$ é satisfatível sobre um domínio contável.

Proof. É um corolário direto do **Teorema de Löwenheim, Skolem, e Tarski** cuja prova se segue da junção entre a versão descendente e ascendente do **Teorema de Löwenheim-Skolem**, que é provada após o exercício, portanto não daremos aqui. Do teorema ascendente existe um modelo de

Φ com cardinalidade no mínimo $\aleph_0$ e, pelo descendente, um modelo com cardinalidade no máximo $\aleph_0$, portanto existe um com exatamente a cardinalidade $\aleph_0$. $\square$

Exercício 2.5. Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de símbolos. Para todo conjunto de $\mathcal{S}$-sentenças Φ satisfatível seja $\mathfrak{A}_\Phi$ uma $\mathcal{S}$-estrutura tq $\mathfrak{A}_\Phi \vDash \Phi$. Além disso seja $\Sigma := \{\mathfrak{A}_\Phi \mid \Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}, \mathsf{Sat}(\Phi)\}$, e para toda $\mathcal{S}$-sentença φ defina $X_\varphi := \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi\}$. Mostre que:
a) O sistema $\{X_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}\}$ é uma base para uma topologia em Σ;
b) Todo conjunto X_φ é fechado;
c) Use o Teorema da Compacidade para mostrar que toda cobertura aberta de Σ tem uma sub-cobertura finita, portanto Σ é (quasi-)compacta.

Proof. d) **PENDENTE** $\square$

Exercício 3.7. Seja $\mathfrak{K}$ uma classe de estruturas Δ-elementar. Mostre que a classe $\mathfrak{K}^\infty$ de estruturas em $\mathfrak{K}$ com domínio infinito também é Δ-elementar.

Proof. Defina $\Psi := \{\varphi_{\geqslant n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sendo $\varphi_{\geqslant n}$ o mesmo do **Exercício 6.10.**. Como $\mathfrak{K}$ é elementar podemos descrevê-lo por $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$, basta então pegarmos $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi \cup \Psi$ que esta será justamente a classe dos modelos de $\mathfrak{K}$ cujo domínio é infinito. $\square$

Exercício 3.8. Se $\mathfrak{K}$ é uma classe de $\mathcal{S}$-estruturas, $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ e $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$, então Φ é denominado um *sistema de axiomas* para $\mathfrak{K}$, mostre que:
a) $\mathfrak{K}$ é elementar sse existe um sistema de axiomas finito para $\mathfrak{K}$;
b) Se $\mathfrak{K}$ é elementar e $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$, então existe $\Phi_0 \subseteq \Phi$ tq $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi_0$.

Proof. a) ($\Rightarrow$) Se $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\varphi$ é elementar, trivialmente existe tal $\Phi = \{\varphi\}$ finito.
($\Leftarrow$) Se existe $\Phi \prec \aleph_0$ tq $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$ basta tomar $\varphi := \bigwedge \Phi$, como Φ é finito, então φ é uma fórmula finita, logo $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\varphi$, i.e., é elementar.
b) Seja φ tq $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\varphi$, como $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$, então $\Phi \vDash\Dashv \varphi$, por completude $\Phi \vdash \varphi$. Obviamente o sequente $\varphi_1 \ldots \varphi_n \varphi$ em Φ para derivar φ é finito, seja então $\Phi_0 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, como $\Phi_0 \vdash \varphi$ por correção $\Phi_0 \vDash \varphi$. Além disso $\varphi \vDash \Phi \vDash \Phi_0$, i.e., $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi_0 = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\varphi = \mathfrak{K}$. $\square$

Exercício 3.9. Sejam $\mathfrak{K}$ e $\mathfrak{K}_1$ classes de $\mathcal{S}$-estruturas tq $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}$. Seja também $\mathfrak{K}_2 := \mathfrak{K}\backslash\mathfrak{K}_1$ e considere $\mathfrak{K}$ elementar e $\mathfrak{K}_1$ Δ-elementar, prove que:
a)

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1 \text{ é elementar } & \text{ sse } \mathfrak{K}_2 \text{ é } \Delta\text{-elementar;} \\ & \text{ sse } \mathfrak{K}_2 \text{ é elementar;} \end{aligned}$$

b) Conclua que a classe de corpos de característica prima não é Δ-elementar.

Proof. $\square$

Exercício 3.10. $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ é dito independente se nenhum $\varphi \in \Phi$ é tq $\Phi \backslash \{\varphi\} \vdash \varphi$, mostre que:
a) Todo $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ tq $\Phi \prec \aleph_0$ tem um $\Phi_0 \subseteq \Phi$ independente tq $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi_0$;
b) Se $\mathcal{S} \preceq \aleph_0$, então toda classe de $\mathcal{S}$-estruturas Δ-elementar tem um sistema de axiomas independente.

Proof. a) O caso que Φ é independente é trivial, seja portanto Φ não independente. Como Φ é finito enumere $\Phi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ e defina recursivamente: $\Psi_0 = \Phi$ e

$$\Psi_n = \begin{cases} \Psi_{n-1} \backslash \{\varphi_{n-1}\}, \text{ se } \Psi_{n-1} \backslash \{\varphi_{n-1}\} \vdash \varphi_{n-1}; \\ \Psi_{n-1}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Seja então $\Psi := \bigcup_{i=0}^{n} \Psi_i = \Phi_0 \subseteq \Phi$, como Φ é finito, Ψ também é. É fácil mostrar por indução na definiçao que Ψ é independente, além disso como $\Psi \subseteq \Phi$, então $\Phi \models \Psi$, i.e., $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Psi \subseteq \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$. Além disso para todo $\varphi_i \in \Phi$ se $\Psi \vdash \varphi_i$, então, por definição de Ψ, $\Phi \vdash \varphi_i$, por correção $\Psi \models \Phi$ e, portanto, $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi \subseteq \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Psi$, o que implica que $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Psi = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$. □

Exercício 3.11. Seja $\Phi \prec \aleph_0$ um sistema de axiomas para espaços vetorias expresso em termos de $\mathcal{S} = \{\underline{F}, \underline{V}, +, \cdot, 0, 1, \circ, e, *\}$, prove que:
a) Para todo n a classe dos espaços vetoriais n-dimensionais é elementar;
b) A classe de espaços vetoriais de dimensão infinita é Δ-elementar;
c) A classe de espaços vetoriais de dimensão finita não é Δ-elementar.

Proof. □

Exercício 4.8. Mostre que se uma $\mathcal{S}_{\text{ar}}$-sentença φ é válida em todos os corpos ordenados não arquimedianos, então φ é válida em todos os corpos ordenados.

Proof. □

Exercício 4.9. Seja a $\mathcal{S}_{\text{ar}}$-estrutura $\mathfrak{A}$ um modelo de $\mathsf{Th}(\mathfrak{N})$. Seja a relação binária $<^{\mathfrak{A}}$ definida em $A = \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ como: $\forall a, b \in A$

$$a <^{\mathfrak{A}} b \text{ sse } a \neq b \text{ e existe um } c \in A \text{ tq } a +^{\mathfrak{A}} c = b$$

Mostre que $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}}) \models \mathsf{Th}(\mathfrak{N})$.