Notas em Lógica Matemática

Ref. H. D. Ebbnghaus

Primavera 2022

Contents

1 Sintaxe de Linguagens de Primeira Ordem

1.1 Alfabetos

Definição 1. Um alfabeto $\mathcal{A} \neq \varnothing$ é um conjunto de símbolos. Denominamos uma sequência finita de símbolos em $\mathcal{A}$ strings ou palavras e denotamos por $\mathcal{A}^*$ o conjunto de todas elas. O comprimento ($\mathsf{len} : \mathcal{A}^* \to \mathbb{N}$) de um $\zeta \in \mathcal{A}^*$ é o número de símbolos em $\mathcal{A}$ que ocorrem em ζ. A string vazia $\square$ tq $\mathsf{len}(\square) = 0$ também é considerada uma palavra.

Nota 1. Mais a frente definiremos linguagens L e é interessante ressaltar a distinção que tem de ser feita entre a linguagem objeto e a metalinguagem, a última é utilizada

para se fazer a investigação sobre a primeira, que é o objeto de estudos, nessa formalização usaremos tanto a linguagem natural corrente quanto uma teoria dos conjuntos informalizada como metalinguagem, visto que dessa forma muitos conceitos já vistos anteriormente podem ser reciclados.

Lema 1. Se $\mathcal{A} \preceq \aleph_0$ então $\mathcal{A}^* \approx \aleph_0$.

1.2 O Alfabeto de uma Linguagem de Primeira Ordem

Definição 2. O alfabeto de uma linguagem de primeira ordem contém os símbolos:
(a) $v_0, v_1, v_2, \ldots$ (variáveis); (b) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (não, e, ou, se-então, se e somente se (sse));
(c) $\forall, \exists$ (para todo, existe);
(d) $\equiv$ (igualdade);
(e)),((parênteses);
(f) um conjunto $\mathcal{S} = ((1), (2), (3))$, possivelmente vazio, de assinaturas:
(1) $\forall n \geqslant 1$ um, possivelmente vazio, conjunto de símbolos de relações n-árias;
(2) $\forall n \geqslant 1$ um, possivelmente vazio, conjunto de símbolos de funções n-árias;
(3) $\forall n \geqslant 1$ um, possivelmente vazio, conjunto de constantes.

$\mathcal{S}$ determina uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} := \mathcal{A} \cup \mathcal{S}$

Nota 2. A partir de agora, usaremos $P, Q, R, \ldots$ **para símbolos de relações,** $f, g, h, \ldots$ **para funções,** $c, c_0, c_1, \ldots$ **para constantes e** $x, y, z, \ldots$ **para variáveis.**

1.3 Termos e Fórmulas em Linguagens de Primeira Ordem

Definição 3. Os $\mathcal{S}$-termos, elementos de $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$, são precisamente aquelas strings em $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*$ obtidas por aplicações finitas das seguintes regras:
(T1) Toda variável é um $\mathcal{S}$-termo;
(T2) Toda constante é um $\mathcal{S}$-termo;
(T3) Se $t_1, \ldots, t_n$ é um $\mathcal{S}$-termo e $f \in \mathcal{S}$ um símbolo de função n-ária então $ft_1 \ldots t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$.

Definição 4. As $\mathcal{S}$-fórmulas, elementos de $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, são precisamente aquelas strings em $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*$ obtidas por aplicações finitas das seguintes regras:
(F1) Se $t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$, então $t_1 \equiv t_2$ é uma $\mathcal{S}$-fórmula;
(F2) Se $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ e $R \in \mathcal{S}$ é um símbolo de relação n-ária, então $Rt_1 \ldots t_n \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$;
(F3) Se $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, então $\neg\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$;
(F4) Se $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, então $(\varphi * \psi) \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, com $* = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
(F5) Se $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ e x é um variável, então $\forall x\varphi, \exists x\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$.

$\mathcal{S}$-fórmulas derivadas de (F1) e (F2) são ditas atômicas e as fórmulas $\neg\varphi, (\varphi * \psi)$ com $* = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ são denominadas, respectivamente, negação de φ, conjunção, disjunção, implicação e bi-implicação.

Nota 3. Por convenção não usaremos parênteses quando não houver ambiguidade e consideremos $\wedge, \vee$ associativos à esquerda, além de terem preferência em relação ao $\rightarrow$.

Lema 2. Se $S \preceq \aleph_0$ então $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}, \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \approx \aleph_0$.

1.4 Indução no Cálculo de Termos e Fórmulas

Seja $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}^*_{\mathcal{S}}$, quando $\mathcal{Z} = \mathcal{T}^{\mathcal{S}}, \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ descrevemos uma lista de regra para sua construção que permitia a passagem de certas strings $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathcal{Z}$ para uma nova string $\zeta \in \mathcal{Z}$, podemos escrever isso esquematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\zeta_1, \ldots, \zeta_n}{\zeta}$$

Incluímos nesse esquema o caso "livre de premissas" que é quando $n = 0$. Assim podemos escrever **Definition 3.** da seguinte forma:

$$\frac{}{x}\ (T1);$$

$$\frac{}{c}\ (T2),\ \text{se } c \in \mathcal{S};$$

$$\frac{t_1, \ldots, t_n}{ft_1 \ldots t_n}\ (T3),\ \text{se } f \in \mathcal{S} \text{ e } f \text{ é n-ária.}$$

Quando definimos $\mathcal{Z}$ a partir de um cálculo $\mathfrak{C}$ podemos fazer afirmações sobre os elementos de $\mathcal{Z}$ por meio de indução sobre $\mathfrak{C}$. Para provar que todo elemento em $\mathcal{Z}$ tem uma propriedade P é suficiente mostrar que todas as fórmulas livre de premissas deriváveis gozam de P (hipótese de indução) e que toda regra em $\mathfrak{C}$ preserva P. No caso particular em que $\mathcal{Z} = \mathcal{T}^{\mathcal{S}}, \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ denominamos o procedimento de prova por indução em termos e fórmulas, respectivamente. Para provar que todo $\mathcal{S}$-termo goza de P é suficiente mostrar:

(T1)' Toda variável goza de P;
(T2)' Toda constante em $\mathcal{S}$ goza de P;
(T3)' Se $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ goza de P e $f \in \mathcal{S}$ é n-ária, então $ft_1 \ldots t_n$ também goza de P.

Para provar que toda $\mathcal{S}$-fórmula goza de P é suficiente mostrar:

(F1)' Toda $\mathcal{S}$-fórmula da forma $t_1 \equiv t_2$ goza de P;
(F2)' Toda $\mathcal{S}$-fórmula da forma $Rt_1 \ldots t_n$ goza de P;
(F3)' Se $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ goza de P, então $\neg\varphi$ também;
(F4)' Se $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ gozam de P, então $(\varphi * \psi)$, com $* = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ também;
(F5)' Se $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ goza de P e x é uma variável, então $\forall x\varphi, \exists x\varphi$ também.

Lema 3. (a) $\forall t, t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$, t não é um segmento inicial próprio de t' (i.e. $\neg\exists\zeta \neq \square$ tq $t\zeta = t'$);
(b)$\forall\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, φ não é um segmento inicial próprio de φ'.

Lema 4. (a) Se $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ e $t_1 \ldots t_n = t'_1 \ldots t'_m$ então $m = n$ e $t_i = t'_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.
(b) Se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_m \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ e $\varphi_1 \ldots \varphi'_n = \varphi'_1 \ldots \varphi'_m$ então $m = n$ e $\varphi_i = \varphi'_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Teorema 1. Todo elemento de $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ e $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ é unicamente determinado pelos seus constituintes, i.e., possui uma única decomposição.

Corolário 1. É imediato que as condições abaixo são suficientes para definir uma função f com $\mathsf{Dom}(f) = \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$:
(T1)” associar um valor a cada variável;
(T2)” associar um valor a cada constante;
(T3)” associar um valor a cada termo da forma $ft_1 \ldots t_n$ com $t_1, \ldots, t_n$ já tendo valores associados.
Como tais fórmulas são unicamente determinadas a função existe.

Definição 5. (a) A função $\mathsf{var}_{\mathcal{S}}$ (ou var) associa a cada $\mathcal{S}$-termo o conjunto das variáveis que ocorrem nele:

$$\begin{aligned} \mathsf{var}(x) &:= x \\ \mathsf{var}(c) &:= \varnothing \\ \mathsf{var}(ft_1 \ldots t_n) &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{var}(t_n). \end{aligned}$$

(b) A função SF, que associa a cada fórmula o conjunto das subfórmulas:

$$\begin{aligned} \mathsf{SF}(t_1 \equiv t_2) &:= \{t_1 \equiv t_2\} \\ \mathsf{SF}(Rt_1 \ldots t_n) &:= \{Rt_1 \ldots t_n\} \\ \mathsf{SF}(\neg\varphi) &:= \{\neg\varphi\} \cup \mathsf{SF}(\varphi) \\ \mathsf{SF}((\varphi * \psi)) &:= \{(\varphi * \psi)\} \cup \mathsf{SF}(\varphi) \cup \mathsf{SF}(\psi) \\ & \quad \text{para } * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \\ \mathsf{SF}(\forall x\varphi) &:= \{Qx\varphi\} \cup \mathsf{SF}(\varphi) \\ & \quad \text{para } Q = \forall, \exists \end{aligned}$$

1.5 Variáveis Livres e Sentenças

Definição 6. A função $\mathsf{free}(\varphi)$ que associa a cada fórmula φ o conjunto de variáveis livres nela:

$$\begin{aligned} \mathsf{free}(t_1 \equiv t_2) &:= \mathsf{var}(t_1) \cup \mathsf{var}(t_2) \\ \mathsf{free}(Pt_1 \ldots t_n) &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{var}(t_n) \\ \mathsf{free}(\neg\varphi) &:= \mathsf{free}(\varphi) \\ \mathsf{free}((\varphi * \psi)) &:= \mathsf{free}(\varphi) \cup \mathsf{free}(\psi) \\ & \quad * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \\ \mathsf{free}(Qx\varphi) &:= \mathsf{free}(\varphi) \backslash \{x\} \end{aligned}$$

Denotamos por $\mathcal{L}_n^{\mathcal{S}} := \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \wedge \mathsf{free}(\varphi) \subset \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}\}$. Portanto o conjunto de $\mathcal{S}$-sentenças é denotado por $\mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$

2 Semântica de Linguagens de Primeira Ordem

2.1 Estruturas e Interpretações

Definição 7. Uma $\mathcal{S}$-estrutura é um par $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ satisfazendo:
(a) $A \neq \varnothing$ é o domínio do discurso ou universo de $\mathfrak{A}$, representado por $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$.
(b) $\mathfrak{a}$ é uma mapeamento em $\mathcal{S}$ satisfazendo:
  (1) $\forall R \in \mathcal{S}$ símbolo de relação n-ária, $\mathfrak{a}(R) \subseteq A^n$ é uma relação em A;
  (2) $\forall f \in \mathcal{S}$ símbolo de função n-ária, $\mathfrak{a}(f) : A^n \to A$;
  (3) $\forall c \in \mathcal{S}$ constante, $\mathfrak{a}(c) \in A$.

Nota 4. Denotaremos $\mathfrak{a}(R), \mathfrak{a}(f), \mathfrak{a}(c)$ por $R^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}$, respectivamente, e uma R, f, g-estrura como sendo $\mathfrak{A} = (A, R^{\mathfrak{a}}, f^{\mathfrak{a}}, g^{\mathfrak{a}})$. Quando a estrutura estiver subtendida escreveremos somente $\mathfrak{A} = (A, R, f, g)$

Definição 8. Uma assinatura em uma $\mathcal{S}$-estrutura $\mathfrak{A}$ é um mapeamento $\gamma : \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to A$.

Definição 9. Uma $\mathcal{S}$-interpretação $\mathfrak{I}$ é um par $(\mathfrak{A}, \gamma)$ consistindo de uma $\mathcal{S}$-estrutura $\mathfrak{A}$ e uma assinatura γ em $\mathfrak{A}$.

Nota 5. Se μ é uma assinatura em $\mathfrak{B}, a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{B})$ e x é uma variável, então $\mu\frac{a}{x}$ denota a assinatura que mapeia x em a e concorda com μ em todas as outras variáveis distintas de x:

$$\mu\frac{a}{x}(y) := \begin{cases} \mu(y) & y \neq x \\ a & y = x \end{cases}$$

E para $\mathfrak{I} = (\mathfrak{B}, \mu)$ temos $\mathfrak{I}\frac{a}{x} := \left(\mathfrak{B}, \mu\frac{a}{x}\right)$.

2.2 Relação de Satisfação

Definiremos o que $\mathfrak{I}(t)$ significa, com $t \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ e $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, por indução nos termos:

Definição 10. (a) Para uma variável x, $\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$;
(b) Para uma constante $c \in \mathcal{S}$, $\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$;
(c) Para um símbolo de função n-ária $f \in \mathcal{S}$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$:

$$\mathfrak{I}(ft_1 \ldots t_n) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)).$$

Agora definiremos a relação de satisfação.

Definição 11. Para todo $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ temos:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2 & \text{sse} & \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2); \\
\mathfrak{I} \models Rt_1 \ldots t_n & \text{sse} & R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \ldots \mathfrak{I}(t_n); \\
\mathfrak{I} \models \neg\varphi & \text{sse} & \text{não ocorre } \mathfrak{I} \models \varphi; \\
\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi) & \text{sse} & \mathfrak{I} \models \varphi \text{ e } \mathfrak{I} \models \psi; \\
\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi) & \text{sse} & \mathfrak{I} \models \varphi \text{ ou } \mathfrak{I} \models \psi; \\
\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \psi) & \text{sse} & \text{se } \mathfrak{I} \models \varphi \text{ então } \mathfrak{I} \models \psi; \\
\mathfrak{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi) & \text{sse} & \mathfrak{I} \models \varphi \text{ sse } \mathfrak{I} \models \psi; \\
\mathfrak{I} \models \forall x\varphi & \text{sse} & \text{para todo } a \in A, \mathfrak{I}\dfrac{a}{x} \models \varphi; \\
\mathfrak{I} \models \exists x\varphi & \text{sse} & \text{existe um } a \in A \text{ tq } \mathfrak{I}\dfrac{a}{x} \models \varphi.
\end{array}$$

Nota 6. Dado um conjunto Φ de $\mathcal{S}$-fórmulas, dizemos que $\mathfrak{I}$ é um modelo de Φ e escrevemos $\mathfrak{I} \models \Phi$ se $\mathfrak{I} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Phi$

Seja $\mathsf{Pos}^{\mathcal{S}}$ o conjunto de S-fórmulas positivas, definimos $\mathsf{Pos}^{\mathcal{S}}$ indutivamente:

$$\frac{}{\varphi}\ \varphi \text{ é atômica}; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{(\varphi * \psi)}\ * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \quad \frac{x \quad \varphi}{Qx\varphi}\ x \text{ é uma variável}, Q = \forall, \exists.$$

Seja $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ uma $\mathcal{S}$-interpretação onde $\mathfrak{A} = (c^{\mathfrak{A}}, \mathfrak{a})$ é uma $\mathcal{S}$-estrutura. Então $\forall c \in \mathcal{S}\ \big(\mathfrak{a}(c) = c^{\mathfrak{A}}\big)$, $\forall v\ \big(\beta(v) = c^{\mathfrak{A}}\big)$, sendo v uma variável, e $\forall c\ \big(\mathfrak{I}(c) = c^{\mathfrak{A}}\big)$. Seja $\mathcal{P}(\varphi) := \mathfrak{I} \models \varphi$ provaremos por indução em fórmulas que $\mathcal{P}$ vale para todo elemento em $\mathsf{Pos}^{\mathcal{S}}$:
Hipótese de indução: $\mathcal{P}(\varphi)$ onde φ é atômica:
$\varphi = t_1 \equiv t_2$: $\mathfrak{I} \models \varphi$ sse $\mathfrak{I}(t_1) = c^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{I}(t_2)$.
$\varphi = Rt_1 \ldots t_n$: como não temos R na estrutura então é satisfeito por vacuidade.
$\varphi = (\psi * \chi)$: como pela hipótese de indução $\mathfrak{I} \models \psi$ e $\mathfrak{I} \models \chi$ então $\mathfrak{I} \models \varphi$
$\varphi = \forall x\psi$: $\mathcal{P}(\varphi)$ sse para todo $a \in A$, i.e. $c^{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$ mas $\mathfrak{I}\frac{a}{x} = (\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x}) = (\mathfrak{A}, \beta) = \mathfrak{I}$ portanto, pela hipótese de indução, $\mathfrak{I} \models \psi$ então $\mathfrak{I} \models \varphi$.
$\varphi = \exists x\varphi$: O argumento é análogo ao anterior.

2.3 A Relação de Consequência

Definição 12. Seja Φ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. φ é uma consequência de Φ (escrito $\Phi \models \varphi$) sse toda interpretação que é um modelo de Φ também é modelo de φ.

Nota 7. Se $\Phi = \{\psi\}$ escrevemos $\psi \models \varphi$ ao invés de $\{\psi\} \models \varphi$.

Definição 13. Uma fórmula φ é válida (escrito $\models \varphi$) sse $\varnothing \models \varphi$.

Assim uma fórmula é válida sse toda interpretação é um modelo dela.

Definição 14. Uma fórmula φ é satisfatível (escrito $\mathsf{Sat}(\varphi)$) sse há uma interpretação que é um modelo de φ. Para um conjunto de fórmulas Φ este é satisfatível ($\mathsf{Sat}(\Phi)$) sse existe uma interpretação que é modelo de todas as fórmulas em Φ.

Lema 5. Para todo Φ e φ

$$\Phi \models \varphi \text{ sse não é o caso que } \mathsf{Sat}(\Phi \cup \{\neg\varphi\}).$$

Em particular, φ é válida sse $\neg\varphi$ não é satisfatível.

Definição 15. Duas fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes (escrito $\varphi \models\!\dashv \psi$) sse $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$. Portanto $\varphi \models\!\dashv \psi$ sse ambas são válidas nas mesmas interpretações i.e. $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Evidentemente as seguintes fórmulas são equivalentes:

$$\begin{aligned}
\varphi \land \psi &\models\!\dashv \neg(\neg\varphi \lor \neg\psi) \\
\varphi \to \psi &\models\!\dashv \neg\varphi \lor \psi \\
\varphi \leftrightarrow \psi &\models\!\dashv \neg(\varphi \lor \psi) \lor \neg(\neg\varphi \lor \neg\psi) \\
\forall x\varphi &\models\!\dashv \neg\exists x\neg\varphi.
\end{aligned}$$

Portanto é possível definir um mapeamento $*$ por indução em fórmulas que associa a cada φ um $\varphi*$ tal que $\varphi \models\!\dashv \varphi*$ e não contém $\land, \to, \leftrightarrow, \forall$ o que diminui as provas por indução em fórmulas. O lema a seguir expressa a formulação exata do - intuitivamente claro - fato que a relação de satisfatibilidade entre uma $\mathcal{S}$-interpretação $\mathfrak{I}$ e uma $\mathcal{S}$-fórmula φ depende somente da interpretação dos $\mathcal{S}$-símbolos e das variáveis livres que ocorrem em φ.

Lema 6. Lema da Coincidência. Seja $\mathfrak{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ uma $\mathcal{S}_1$-interpretação e $\mathfrak{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ uma $\mathcal{S}_2$-interpretação tq $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_1) = \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_2)$, seja $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$:
(a) Seja t um $\mathcal{S}$-termo. Se $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ concordam nos $\mathcal{S}$-símbolos, i.e. $\kappa^{\mathfrak{A}_1} = \kappa^{\mathfrak{A}_2}$, e variáveis, i.e. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$, que ocorrem em t, então $\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_2(t)$;
(b) Seja φ uma $\mathcal{S}$-fórmula. Se $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ concordam nos $\mathcal{S}$-símbolos e nas variáveis que ocorrem livre em φ, então $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ e $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

Se $\varphi \in \mathcal{L}_n^{\mathcal{S}}$ pelo teorema acima somente os valores $a_i = \beta(v_i), i = 0, \dots, n-1$ são significantes, portanto introduzimos a seguinte notação:

Nota 8. Ao invés de $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$ escreveremos:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \dots, a_{n-1}].$$

Da mesma forma, se $\mathsf{var}(t) \subset \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ então ao invés de $\mathfrak{I}(t)$ escrevemos $t^{\mathfrak{A}}[a_0, \dots, a_{n-1}]$.

Se $n = 0$ escrevemos $\mathfrak{A} \models \varphi$ e dizemos que $\mathfrak{A}$ é um modelo de φ ou, para um conjunto de sentenças Φ, $\mathfrak{A} \models \Phi$ significa que $\mathfrak{A} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Phi$.

Definição 16. Sejam $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ conjuntos de símbolos e $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a}), \mathfrak{A}' = (A', \mathfrak{a}')$ $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ estruturas, respectivamente. Dizemos que $\mathfrak{A}$ é uma $\mathcal{S}$-redução de $\mathfrak{A}'$ (ou que $\mathfrak{A}'$ é uma $\mathcal{S}$ expansão de $\mathfrak{A}$) sse $A = A'$ e $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ concordam em $\mathcal{S}$. Denotamos por $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \mid_{\mathcal{S}}$.

Note que a definição de interpretação, satisfatilibidade e consequência se referem a um conjunto de símbolos $\mathcal{S}$ fixo. Entretanto é possível remover tal referência a partir do **Lema da Coincidência**.

Corolário 2. Φ é satisfatível com respeito a $\mathcal{S}$ sse também é com respeito a $\mathcal{S}'$.

2.4 Dois Lemas Sobre a Relação de Satisfatibilidade

Os resultados a seguir serão sobre estruturas e subestruturas isomórficas.

Definição 17. Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ $\mathcal{S}$-estruturas.
(a) Um mapeamento $\pi : \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \to \mathsf{Dom}(\mathfrak{B})$ é denominado um *isomorfismo* de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ (denotado $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) sse
(i) π é uma bijeção de $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ em $\mathsf{Dom}(\mathfrak{B})$;
(ii) Para $R, f \in \mathcal{S}$ n-árias, $c \in \mathcal{S}$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$:

$$R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_n \text{ sse } R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \dots \pi(a_n);$$

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n));$$
$$\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

(b) Estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são ditas *isomórficas* (denotado $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) sse há um isomorfismo $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

O lema a seguir mostra que sentenças de primeira ordem não conseguem distinguir estruturas isomórficas:

Lema 7. Lema do Isomorfismo. Para $\mathcal{S}$-estruturas isomórficas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ e toda $\mathcal{S}$-sentença φ:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ sse } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Corolário 3. Se $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ então para $\varphi \in \mathcal{L}_n^{\mathcal{S}}$ e $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \text{ sse } \mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$$

Estruturas isomórficas são indistinguíveis em $\mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$

Definição 18. Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ $\mathcal{S}$-estruturas. Então $\mathfrak{A}$ é dito subestrutura de $\mathfrak{B}$ (denotado $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) sse
(a) $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathsf{Dom}(\mathfrak{B})$
(b) (1) Para $R \in \mathcal{S}$ n-ário, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})^n$
(2) Para $f \in \mathcal{S}$ n-ário, $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} |_{\mathsf{Dom}(\mathfrak{A})^n}$
(3) Para $c \in \mathcal{S}$ $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Lema 8. Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ $\mathcal{S}$-estruturas tq $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e seja $\beta : \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ uma assinatura em $\mathfrak{A}$. Então para todo $\mathcal{S}$-termo t vale:

$$(\mathfrak{A}, \beta)(t) = (\mathfrak{B}, \beta)(t);$$

E para toda $\mathcal{S}$-fórmulas livre de quantificadores φ:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \text{ sse } (\mathfrak{B}, \beta) \models \varphi.$$

Definição 19. As fórmulas deriváveis no seguinte cálculo são ditas *fórmulas universais*:

$$\text{(i)} \ \frac{}{\varphi} \ \text{Se } \varphi \text{ é livre de quantificadores} \qquad \text{(ii)} \ \frac{\varphi \quad \psi}{(\varphi * \psi)} \ * = \wedge, \vee;$$

$$\text{(iii)} \ \frac{\varphi}{\forall x \varphi}.$$

Nota 9. Todas as fórmulas universais são logicamente equivalentes as da forma $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$ sendo ψ livre de quantificadores.

Lema 9. Lema da Subestrutura. Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ $\mathcal{S}$-estruturas tq $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e $\varphi \in \mathcal{L}_n^{\mathcal{S}}$ uma fórmula universal. Então para todo $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$:

$$\text{Se } \mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}], \text{ então } \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}].$$

Corolário 4. Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ então para toda sentença universal φ:

$$\text{Se } \mathfrak{B} \models \varphi, \text{ então } \mathfrak{A} \models \varphi.$$

2.5 Substituição

Definição 20.

$$x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \begin{cases} x & \text{se } x \neq x_0, \ldots, x \neq x_r \\ t_i & \text{se } x = x_i \end{cases}$$

$$c\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := c$$

$$[ft'_1 \ldots t'_n]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := ft'_1\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \ldots t'_n\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$$

$$[t'_1 \equiv t'_2]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := t'_1\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \equiv t'_2\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$$

$$[Rt'_1 \ldots t'_n]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := Rt'_1\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \ldots t'_n\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$$

$$[\neg\varphi]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \neg[\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}]$$

$$(\varphi \vee \psi)\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \left(\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \vee \psi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)$$

(h) Sejam $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s} (i_1 < \cdots < i_s)$ as variáveis x_i entre $x_0, \ldots, x_r$ tq

$$x_i \in \mathsf{free}(\exists x\varphi), x_i \neq t_i$$

com $x \neq x_{i_1}, \ldots, x \neq x_{i_s}$, então

$$[\exists x\varphi]\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} := \exists u\left[\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right]$$

Para a generalização da definição de $\mathfrak{I}\frac{a}{x}$ temos:

Definição 21. Sejam $x_0, \ldots, x_r$ distintos dois a dois e seja $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ com $a_0, \ldots, a_r \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$:

$$\beta\frac{a_0 \ldots a_r}{x_0 \ldots x_r} := \begin{cases} \beta(y) & \text{se } y \neq x_0, \ldots, y \neq x_r \\ a_i & \text{se } y = x_i \end{cases}$$

$$\mathfrak{I}\frac{a_0 \ldots a_r}{x_0 \ldots x_r} := \left(\mathfrak{A}, \beta\frac{a_0 \ldots a_r}{x_0 \ldots x_r}\right).$$

Lema 10. Lema da Substituição. (a) Para todo termo t:

$$\mathfrak{I}\left(t\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right) = \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}(t).$$

(b) Para toda fórmula φ:

$$\mathfrak{I} \models \varphi \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \text{ sse } \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r} \models \varphi.$$

Lema 11. Para toda permutação π de $\{0, \ldots, r\}$:
(a)

$$\varphi \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = \varphi \frac{t_{\pi(0)} \ldots t_{\pi(r)}}{x_{\pi(0)} \ldots x_{\pi(r)}}.$$

(b) Se $0 \leqslant i \leqslant r$ e $x_i = t_i$, então

$$\varphi \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = \varphi \frac{t_0 \ldots t_{i-1}\ t_{i+1} \ldots t_r}{x_0 \ldots x_{i-1}\ x_{i+1} \ldots x_r}.$$

(c) Para toda variável y
(i) Se $y \in \mathsf{var}\left(t \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)$, então $y \in \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant r} \mathsf{var}(\mathsf{t_i})$ ou ($y \in \mathsf{var}(t)$ e $y \neq x_0, \ldots, y \neq x_r$);
(ii) Se $y \in \mathsf{var}\left(\varphi \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right)$, então $y \in \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant r} \mathsf{var}(\mathsf{t_i})$ ou ($y \in \mathsf{var}(\varphi)$ e $y \neq x_0, \ldots, y \neq x_r$).

Corolário 5. Suponha $\mathsf{free}(\varphi) \subseteq \{x_0, \ldots, x_r\}$ distintos dois a dois.