Provas e Exercícios

Ref. H. D. Ebbnghaus

Primavera 2022

Contents

1 Sintaxe das Linguagens de Primeira Ordem

Exercício 1.3. Seja $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado. Para $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$ mostre que $\exists c \in I := [a, b]$ tq $c \notin \text{Im}(\alpha)$. Conclua disso que I, e portanto $\mathbb{R}$, são incontáveis.

Proof. Seja $I_0 := [a, b]$ e defina indutivamente $I_{n+1} := I_n \backslash \{\alpha(n)\}$, obviamente $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$ forma uma sequência de intervalos encaixantes e, por estarmos em $\mathbb{R}$, vale que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$$

como $\alpha(k) \notin I_n, \forall k \leqslant n$, então, em particular, $\alpha(k) \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n, \forall k \in \mathbb{N}$, i.e., $c \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \forall c \in \text{Im}(\alpha)$ □

Exercício 1.4. Prove que se $M_0, M_1, \dots \preceq \aleph_0$, então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \preceq \aleph_0$$

e o utilize para provar o **Lema 1.2**.

Proof. O primeiro teorema é facilmente provável utilizando um argumento similar ao da Diagonal de Cantor: Sabemos que existe uma bijeção $\alpha_i : \mathbb{N} \to M_i, \forall i \in \mathbb{N}$, equivalente a uma sequência $\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots$ tq $M_i = \{\alpha_{in} \mid n \in \mathbb{N}\}$, construindo a matriz $a_{ij} := \alpha_{ij}$ utilizamos a diagonal para enumerar todos os elementos da matriz.

Definindo $M_n := \mathbb{A}^n$, o conjunto de strings de comprimento n, é fácil mostrar por indução que $M_i \preceq \aleph_0, \forall i \in \mathbb{N}$, com isso

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathbb{A}^* \preceq \aleph_0.$$

Como $\mathbb{A}^* \succeq \aleph_0$ pelo teorema de Schröder-Bernstein $\mathcal{A}^* \approx \aleph_0$. □

Exercício 1.5. Demonstre o Teorema de Cantor: não existe $\alpha : M \to \mathcal{P}(M)$ sobrejetivo e, portanto, bijetivo.

Proof. Seja $S := \{a \in M \mid a \notin \alpha(a)\} \in \mathcal{P}(M)$, assumindo por hipótese que existe α sobrejetivo, então $\exists s \in M$ tq $\alpha(s) = S$. Se $s \in S$, por definição $s \notin \alpha(s) = S$, contradição. Se $s \notin S$, por definição $s \in \alpha(s) = S$, contradição, portanto não existe tal $s \in M$. $\square$

Exercício 4.6. (a) Seja $\mathfrak{C}_v$ o cálculo consistindo das seguintes regras:

$$\frac{}{x \quad x}\ ; \quad \frac{y \quad t_i}{y \quad ft_1 \ldots t_n} \text{ se } f \in \mathcal{S} \text{ é n-ária e } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mostre que para toda variável x e $\mathcal{S}$-termo t, $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$ sse $x \in \mathsf{var}(t)$.
(b) Dê um resultado para SF análogo ao resultado para var em (a).

Proof. (a)
(i) Se $x \in \mathsf{var}(t)$ então $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$: Se $t = x$ então $x \in \mathsf{var}(t)$ e pela 1ª regra $x\ t$ é derivável. Se $t = t_i$ e $x \in \mathsf{var}(t_i)$ então, seguindo a definição, $x \in f(t_1 \ldots t_n)$.
(ii) Se $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$ então $x \in \mathsf{var}(t)$: Se $t = x$ a primeira regra garante que $x \in \mathsf{var}(t)$. Se $t = ft_1 \ldots t_n$ então existe um $x\ t_i$ em $\mathfrak{C}_v$, como todos termos dessa forma que existem partem de uma regra sem premissa (regra 1) então $x \in \mathsf{var}(t_i)$ logo $x \in \mathsf{var}(ft_1 \ldots t_n)$.
(b) Seja o cálculo $\mathfrak{C}_a$ definido pelas regras:

$$\frac{}{t_m \doteq t_n \quad t_m \doteq t_n}\ ; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad \neg\psi}\ ; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad (\varphi * \psi)} * = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow; \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \quad Qx\psi}\ Q = \forall, \exists.$$

Para todo termo t_m, t_n e toda variável x. $\varphi\ \psi$ é derivável em $\mathfrak{C}_a$ sse $\varphi \in \mathsf{SF}(\psi)$. $\square$

Exercício 4.7. Altere o cálculo de fórmulas omitindo os parênteses que delimitam as fórmulas introduzidas da forma $\varphi \,\square\, \psi$. Mostre que tais fórmulas não terão mais uma única decomposição e que SF não será mais uma função bem definida.

Proof. Pegue, por exemplo, a fórmula $\varphi := \exists x Px \wedge Qy$, podemos, utilizando o cálculo de fórmulas, construir duas derivações diferentes da mesma fórmula:

1. Px, (F2) em P e x;
2. Qy, (F2) em Q e y;
3. $Px \wedge Qy$, (F4) em (1) e (2) com $\wedge$;
4. $\exists x Px \wedge Qy$, (F5) em (3) usando $\exists$ e x.

e a outra altera somente os passos (3) e (4) para:

1. $\exists x Px$, (F5) em (1) usando $\exists$ e x;

2. $\exists x Px \wedge Qy\ x$, (F4) em (2) e (3) com $\wedge$.

Obviamente $\mathsf{SF}(\varphi) = \{\varphi, Px \wedge Qy, Qy, Px\}$ utilizando a primeira derivação e $\mathsf{SF}(\varphi) = \{\varphi, \exists x Px, Qy, Px\}$ utilizando a segunda. $\square$

Exercício 4.8. Definimos uma $\mathcal{S}$-fórmula em notação polonesa ($\mathcal{S}$-P-fórmula) como as strings em $\mathbb{A}_{\mathcal{S}}$ tq a regra (F4) é alterada pra: Se φ, ψ são $\mathcal{S}$-P-fórmulas, então também são $\square\varphi\psi$, com $\square = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Proof. Precisamos antes provar o análogo ao **Lema 4.2.(b)** para $\mathcal{S}$-P-fórmulas: para $\varphi \neq \varphi'$, φ não é um segmento inicial próprio de φ'. Se $\varphi = \wedge\chi\psi$, assuma por contradição que φ é um segmento inicial próprio de φ', i.e., existe $\zeta \neq \square$ tq $\varphi\zeta = \wedge\psi\chi = \varphi'$, mas como φ' começa com $\wedge$ este só pode ser formado a partir de (F4), portanto $\varphi = \wedge\chi'\psi'$ para algumas χ', ψ' $\mathcal{S}$-P-fórmulas. Podemos então cancelar $\wedge$ e ficar com $\chi\psi\zeta = \chi'\psi$, mas, pela hipótese de indução, se χ é um segmento próprio de χ', só pode ser o caso que $\chi = \chi'$, o mesmo vale para ψ e ψ', logo $\zeta = \square$, contradição.

Para provar o **Lema 4.3.(b)** provemos primeiro que se $\varphi_1 \dots \varphi_n = \varphi'_1 \dots \varphi'_n$, então $\varphi_i = \varphi'_i$ por indução. Caso base: φ_1 é segmento inicial próprio de φ'_1, pelo **Lema 4.2.(b)** temos $\varphi_1 = \varphi'_1$. Hipótese de indução: assuma que $\varphi_i = \varphi'_i$, logo podemos cancelá-lo, o que implica que φ_{i+1} é segmento inicial próprio de φ'_{i+1}, i.e., $\varphi_{i+1} = \varphi'_{i+1}$.
Seja agora $n \neq m$, assuma sem perda de generalidade que $n = m + k$ para $k > 0$, logo $\varphi_1 \dots \varphi_n = \varphi'_1 \dots \varphi'_n \dots \varphi'_m$, da prova anterior temos então que $\square = \varphi'_{n+1} \dots \varphi'_m$, contradição, logo $k = 0$.
A prova do **Lema 4.4.(b)** é trivial, basta definirmos a função SF para $\mathcal{S}$-P-fórmulas, o que é muito simples. $\square$

Exercício 4.9. Seja $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ de comprimento k, para $n \geqslant 1$. Mostre que $\exists \xi, \eta \in \mathbb{A}^*_{\mathcal{S}}$ unicamente determinados e $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ tq o comprimento de ξ é $1 \leqslant i < k$ e $t_1 \dots t_n = \xi t \eta$.

Proof. Seja $i = \sum_{j=0}^{m} \mathsf{lng}(t_j)$ para algum $m < n$, nesse caso $t = t_{m+1}$ e $\eta = t_{m+2} \dots t_n$ podendo ser possivelmente $\square$. Se todos os termos são constantes ou variáveis este sempre é o caso, se for uma função é possível pararmos no meio de um termo $t_m = f t'_1 \dots t'_p$, nesse caso se ξ terminar antes de t'_q pegamos $t = t'_{q+1}$ e η como o resto. $\square$

Exercício 5.2. Mostre que o cálculo $\mathfrak{C}_{nf}$ permite derivar precisamente aquelas strings da forma x φ no qual $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ tq $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$:

$$\frac{}{x \quad t_1 \doteq t_2} \text{ Se } t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \mathsf{var}(t_1) \cup \mathsf{var}(t_2);$$

$$\frac{}{x \quad Rt_1 \dots t_n} \text{ Se } R \in \mathcal{S} \text{ é n-ária}, t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{var}(t_n);$$

$$\frac{x \quad \varphi}{x \quad \neg\varphi}\ ; \qquad \frac{(x \quad \varphi) \quad (x \quad \psi)}{x \quad (\varphi * \psi)}\ * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \qquad \frac{}{x \quad Qx\varphi}\ ; \qquad \frac{x \quad \varphi}{x \quad Qx\varphi}\ Q = \forall, \exists;$$

Proof. ($\Rightarrow$) Fazendo indução em cada regra:
$\varphi = t_1 \doteq t_2$: por definição $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
$\varphi = Rt_1 \ldots t_n$: Também por definição $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
$\varphi = Qx\psi$ nesse caso $x \notin \mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\psi)\backslash\{x\}$;
(*) Portanto todas as fórmulas φ deriváveis com premissa livre não tem uma ocorrência livre de x.
$\varphi = \neg\psi$: Se $\neg\psi$ é derivável, então ψ também é, mas se ψ é derivável em $\mathfrak{C}_{nf}$ então, por (*), $x \notin \mathsf{free}(\psi) \to x \notin \mathsf{free}(\neg\psi)$;
$\varphi = (\psi * \chi)$: O argumento é análogo ao de cima, ambos ψ, χ tem de ser derivável e, por (*), não há ocorrência livre neles, o que implica que não há em $(\psi * \chi)$.

($\Leftarrow$) Agora assumindo $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$:
$\varphi = t_1 \doteq t_2$: então ela é derivável pela regra 1;
$\varphi = Rt_1 \ldots t_n$: então ela é derivável pela 2ª regra;
$\varphi = Qx\psi$: a última e penúltima regra garantem que é derivável;
$\varphi = \neg\psi$: então $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$, portanto a 3ª regra garante que é derivável;
$\varphi = (\psi * \chi)$: Se x não ocorre livre em φ então ela não ocorre livre em ambos, portanto a 5ª regra garante sua derivação. □

2 Semântica das Linguagens de Primeira Ordem

Exercício 1.4. Seja $\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ e $\beta(v_n) := 2n$ para $n \geqslant 0$. Interprete as seguintes fórmulas:
a) $\exists v_0 v_0 + v_0 \doteq v_1$;
b) $\exists v_0 v_0 \cdot v_0 \doteq v_1$;
c) $\exists v_1 v_0 \doteq v_1$;
d) $\forall v_0 \exists v_1 v_0 \doteq v_1$;
e) $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)$.

Proof. $\mathfrak{I} \models a)$ sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $a + a = \beta(v_1) = 2$, de fato $a = 1$ satisfaz;
$\mathfrak{I} \models b)$ sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $a \cdot a = 2$, obviamente a equação $x^2 = 2$ não tem solução nos naturais, portanto $\mathfrak{I} \not\models b)$;
$\mathfrak{I} \models c)$ sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $0 = a$, o que é claramente verdade;
$\mathfrak{I} \models d)$ sse para todo $a \in \mathbb{N}$ existe um $b \in \mathbb{N}$ tq $a = b$, o que também é verdadeiro;
$\mathfrak{I} \models e)$ sse para todo $a, b \in \mathbb{N}$ existe um $c \in \mathbb{N}$ tq $a < c$ e $c < b$. Em particular escolhendo $b = a + 1$ temos que existe um natural c tq $a < c < a + 1$ o que é falso, portanto $\mathfrak{I} \not\models e)$. □

Exercício 1.5. Seja $A \neq \varnothing$ e $A, \mathcal{S} \prec \aleph_0$ um conjunto de símbolos. Mostre que há uma quantidade finita de $\mathcal{S}$-estruturas com domínio A.

Proof. Seja $S = ((c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_1}, (R_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_2}, (f_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_3})$ e $|A| = m$, a quantidade total de associações possíveis para cada elemento é:

$$\begin{aligned}\alpha_{R_i} &:= \{Z \mid Z \subseteq A^n\}, \quad |\alpha_{R_i}| = \mathcal{P}(\alpha_{R_i}) = 2^m \\ \alpha_{f_i} &:= A^{(A^n)}, \quad |\alpha_{f_i}| = |A|^{|A^n|} = m^{(m^n)} \\ \alpha_{c_i} &:= (A^n)^{A^n}, \quad |\alpha_{c_i}| = |\,(A^n)\,|^{|A^n|} = \left(m^{n\cdot m^n}\right)\end{aligned}$$

Dessa forma, como todos são finitos e a união finita de conjuntos finitos é finita então o total de estruturas $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} := \bigcup \left\{ \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n_1} \alpha_{R_i}, \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n_2} \alpha_{f_i}, \bigcup_{0\leqslant i\leqslant n_3} \alpha_{c_i} \right\} \prec \aleph_0.$$

□

Exercício 1.6. Para $\mathcal{S}$-estruturas $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ e $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{b})$ seja $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ a $\mathcal{S}$-estrutura com domínio $A \times B$ satisfazendo:
Para $R \in \mathcal{S}$ n-ária e $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$R^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}(a_1, b_1) \ldots (a_n, b_n) \leftrightarrow R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_n \wedge R^{\mathfrak{B}} b_1 \ldots b_n;$$

Para $f \in \mathcal{S}$ n-ária e $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$f^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) := (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n));$$

Para $c \in \mathcal{S}$:

$$c^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}});$$

Mostre que:
(a) Se as $\mathcal{S}_{\mathsf{gr}}$-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são grupos então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também é.
(b) Se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são estruturas satisfazendo os axiomas de equivalência então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também satisfaz.
(c) Se as $\mathcal{S}_{\mathsf{ar}}$-estruturas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são corpos, então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ não é.

Proof. (a) Sejam $\mathfrak{A} = (A, \circ, e); \mathfrak{B} = (B, *, \varepsilon)$ e $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \circledast, \epsilon)$. Se $a, b, c \in \mathfrak{A}; x, y, z \in \mathfrak{B}$ e $u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

(i) $\forall u, v, w((u \circledast v) \circledast w = u \circledast (v \circledast w))$:

$$\begin{aligned}(\overbrace{(x, a)}^{u} \circledast \overbrace{(y, b)}^{v}) \circledast \overbrace{(z, c)}^{w} &= (x \circ y, a * b) \circledast (z, c) \\ &= (x \circ y \circ z, a * b * c) \\ &= (x, a) \circledast (y \circ z, b * c) \\ &= (x, a) \circledast ((y, b) \circledast (z, c)) \\ (u \circledast v) \circledast w &= u \circledast (v \circledast w).\end{aligned}$$

(ii) $\forall u \exists v (u \circledast v) = \epsilon$:

$$\begin{aligned}(\overbrace{(x, a)}^{u} \circledast \overbrace{(y, b)}^{v}) &= \overbrace{(e, \varepsilon)}^{\epsilon} \\ (x \circ y, a * b) &= (e, \varepsilon) \\ \forall x \exists y (x \circ y = e) &\wedge \forall a \exists b (a * b = \varepsilon).\end{aligned}$$

(iii)$\exists\epsilon\forall u(u \circledast \epsilon = u)$:

$$\big(\overbrace{(x,a)}^{u} \circledast \overbrace{(e,\varepsilon)}^{\epsilon}\big) = \overbrace{(x,a)}^{u}$$
$$(x \circ e, a \circ \varepsilon) = (x,a)$$
$$\exists e\forall x(x \circ e = x) \wedge \exists\varepsilon\forall a(a * \varepsilon = a).$$

(b) Sejam $\mathfrak{A} = (A, R); \mathfrak{B} = (B, \mathcal{R}), \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \mathscr{R})$ com $x, y, z \in \mathfrak{A}; a, b, c \in \mathfrak{B}; u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

(i) $\forall u(u \mathscr{R} u)$:

$$\overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(x,a)}^{u} \leftrightarrow xRx \wedge a\mathcal{R}a$$
$$\forall x(xRx) \wedge \forall a(a\mathcal{R}a).$$

(ii) $\forall u, v(u\mathscr{R}v \leftrightarrow v\mathscr{R}u)$:

$$\overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(y,b)}^{v} \leftrightarrow \overbrace{(y,b)}^{v} \mathscr{R} \overbrace{(x,a)}^{u}$$
$$xRy \wedge a\mathcal{R}b \leftrightarrow yRx \wedge b\mathcal{R}a$$
$$\forall x, y(xRy \leftrightarrow yRx) \wedge \forall a, b(a\mathcal{R}b \leftrightarrow b\mathcal{R}a)$$

(iii) $\forall u, v, w(u\mathscr{R}v \wedge v\mathscr{R}w \to u\mathscr{R}w)$:

$$\overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(y,b)}^{v} \wedge \overbrace{(y,b)}^{v} \mathscr{R} \overbrace{(z,c)}^{w} \to \overbrace{(x,a)}^{u} \mathscr{R} \overbrace{(z,c)}^{w}$$
$$(xRy \wedge a\mathcal{R}b) \wedge (yRz \wedge b\mathcal{R}c) \to xRz \wedge a\mathcal{R}c$$
$$(xRy \wedge yRz) \wedge (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \to xRz \wedge a\mathcal{R}c$$
$$\forall x, y, z(xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall a, b, c(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \to a\mathcal{R}c)$$

(c) Sejam $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, 0, 1); \mathfrak{B} = (B, *, \times, \overline{0}, \overline{1})$ e $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ com $x, y \in \mathfrak{A}; a, b \in \mathfrak{B}$ e $u, v \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

Um dos axiomas é $\forall(u \neq \mathbf{0})\exists v(u \oplus v = \mathbf{1})$:

$$(x,a) \oplus (y,b) = (1, \overline{1})$$
$$(x \cdot y, a * b) = (1, \overline{1})$$

Se isso é verdade então, em particular, para ou $x = 0$ ou $a = \overline{0}$ temos que $(0, b), (x, \overline{0}) \neq \mathbf{0}$, logo ambos $0, \overline{0}$ possuiriam invreso, o que é falso. $\square$

Exercício 2.1. Mostre que para $x, y \in \{\top, \bot\}$:
a) $\dot{\to}(x, y) = \dot{\vee}(\dot{\neg}(x), y)$;
b) $\dot{\wedge}(x, y) = \dot{\neg}(\dot{\vee}(\dot{\neg}(x), \dot{\neg}(y)))$;
c) $\dot{\leftrightarrow}(x, y) = \dot{\wedge}(\dot{\to}(x, y), \dot{\to}(y, x))$.

Proof.

x	y	$\dot{\neg}(x)$	$\dot{\vee}(\dot{\neg}(x), y)$	$\dot{\to}(x, y)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

x	y	$\dot{\neg}(x)$	$\dot{\neg}(y)$	$\dot{\vee}(\dot{\neg}(x), \dot{\neg}(y))$	$\dot{\neg}(\dot{\vee}(\dot{\neg}(x), \dot{\neg}(y)))$	$\dot{\wedge}(x, y)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

x	y	$\dot{\rightarrow}(x, y)$	$\dot{\rightarrow}(y, x)$	$\dot{\wedge}(\dot{\rightarrow}(x, y), \dot{\rightarrow}(y, x))$	$\dot{\leftrightarrow}(x, y)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

□

Exercício 3.3. Seja P um símbolo de relação unária e f de função binária. Determine duas interpretações para cada fórmula uma que a satisfaça e outra que não:
a) $\forall v_1 f v_0 v_1 \doteq v_0$;
b) $\exists v_0 \forall v_1 f v_0 v_1 \doteq v_1$;
c) $\exists v_0 (P v_0 \wedge \forall v_1 P f v_0 v_1)$.

Proof. a) Seja $\mathfrak{I} = (\mathbb{N}, R, \cdot)$ tq $\beta(v_0) = 0$, então $\mathfrak{I} \models a)$ sse para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \cdot a = 0$, o que é fato. Entretanto para mesma interpretação com $+$ temos $a + 0 = 0$, o que não é o caso.
b) Interpretando com a mesma estrutura que em a) o que b) garante é a existência de um elemento neutro, o que é verdade. Pro caso de não satisfação basta retirarmos o elemento neutro do domínio.
c) Seja $Rx :=$ x é par para mesma estrutura $\mathfrak{I}$ com $+$, o que c) diz é que existe um x par tq para todo y, $x + y$ é par, o que é claramente falso, use, entretanto, $\cdot$ ao invés de $+$, então obviamente para todo y, xy é par se x for par. □

Exercício 3.4. Uma fórmula sem $\neg, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$ é denominada *positiva*. Prove que toda fórmula positiva é satisfatível.

Proof. Seja $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a\}$ e $\beta(v) = a$, com $R_i^{\mathfrak{A}}$ sendo o grafo da função identidade n-ária para todo i, assim como $f_i^{\mathfrak{A}} = \mathrm{id}$ e $c_i^{\mathfrak{A}} = a$. De fato, $\mathfrak{I}(t) = a, \forall t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$. Por indução em fórmulas é claro que $\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$ e $\mathfrak{R} t_1 \dots t_n$, logo também satisfaz $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \vee \psi$, o mesmo para $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$. □

Exercício 4.9. Para fórmulas arbitrárias φ, ψ, χ prove que:
a) $(\varphi \vee \psi) \models \chi$ sse $\varphi \models \chi$ e $\psi \models \chi$;
b) $\models (\varphi \rightarrow \psi)$ sse $\varphi \models \psi$.

Proof. a) ($\Rightarrow$) Basta provarmos que $(\varphi \vee \psi \rightarrow \chi) \models\!\!\!\dashv ((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi))$, logo

$\varphi \models \chi$ e $\psi \models \chi$ sse para todo $\mathfrak{I}$, se $\mathfrak{I} \models \varphi$, então $\mathfrak{I} \models \chi$, i.e., $\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \chi)$ e, igualmente, $\mathfrak{I} \models (\psi \rightarrow \chi)$;
sse $\mathfrak{I} \models ((\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi))$;
sse $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi)$;
sse $(\varphi \vee \psi) \models \chi$.

b) ($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned}\varphi \vDash \psi &\text{ sse para todo } \mathfrak{I} \text{ se } \mathfrak{I} \vDash \varphi \text{ então } \mathfrak{I} \vDash \psi;\\ &\text{ sse para todo } \mathfrak{I} \vDash (\varphi \to \psi);\\ &\text{ sse } \vDash (\varphi \to \psi).\end{aligned}$$

□

Exercício 4.10. Mostre que:
(a) $\exists x \forall y \varphi \vDash \forall y \exists x \varphi$;
(b) $\forall y \exists x Rxy \nvDash \exists x \forall y Rxy$.

Proof. (a) $\mathfrak{I} \vDash \exists x \forall y \varphi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \forall y \varphi$, então em particular existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{t}{y} \vDash \varphi$ sendo $t \in A$ um termo genérico qualquer. Assim, devido a escolha arbitrária, concluímos que para todo $t \in A$ existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{t}{y} \vDash \varphi$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \forall y \exists x \varphi$.
(b) $\mathfrak{I} \vDash \forall y \exists x Rxy$ sse para todo $a \in A$ existe um $t \in A$ tq $\mathfrak{I} \vDash Rta$, mas isso não necessariamente implica que exista um t tq Rta valha para todo a.
Obs: Lembre-se que a definição de satisfatibilidade é feita na metateoria que, por mais rigorosa que seja, é justificada pela noção intuitiva que temos de cada fórmula e justificada da mesma forma. □

Exercício 4.11. Prove que para $Q = \forall, \exists$:
a) $Qx(\varphi \wedge \psi) \vDash\dashv (Qx\varphi \wedge Qx\psi)$;
b) $Qx(\varphi \vee \psi) \vDash\dashv (\varphi \vee Qx\psi)$, se $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
e justifique o motivo da assunção $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$.

Proof. Provarei para $Q = \forall$ porque é fácil ver que a intuição se estende pro outro caso.
a) Obviamente se para todo $a \in A$ temos $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$ e para todo $b \in A$ temos $\mathfrak{I}\frac{b}{x} \vDash \psi$, então para todo $c \in A$, $\mathfrak{I}\frac{c}{x} \vDash \varphi$ e $\mathfrak{I}\frac{c}{x} \vDash \psi$, i.e., para todo $c \in A$, $\mathfrak{I} \vDash (\varphi \wedge \psi)$, analogamente vale a volta. A justificativa se baseia no fato intuitivo de que se estamos variando pelo domínio todo de uma forma numa fórmula e de outra forma na outra, então podemos variar em ambas da mesma forma.
b) $\mathfrak{I} \vDash \forall x \varphi$ sse para todo $a \in A$, $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$, i.e., utilizamos a valoração β que interpreta x como a, mas como $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$, então $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(\varphi) = \mathfrak{I}(\varphi)$, a partir disso é fácil provar ambos b) e c). □

Exercício 4.12. Sejam φ, ψ fórmulas tais que $\varphi \vDash\dashv \psi$. Seja χ' obtido de χ substituindo todas as subfórmulas da forma φ por ψ. Mostre que para todo $\chi, \chi \vDash\dashv \chi'$.

Proof. Provaremos por indução em fórmulas:
Se $\chi = \varphi$ é atômica então $\mathfrak{I} \vDash \varphi$ sse, por hipótese, $\mathfrak{I} \vDash \chi' = \psi$;
se $\chi = \neg\varphi$ então $\mathfrak{I} \vDash \chi$ sse não vale $\mathfrak{I} \vDash \varphi$ sse, por hipótese, não vale $\mathfrak{I} \vDash \psi$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \chi' = \neg\psi$;
se $\chi = \xi \vee \varphi$ então $\mathfrak{I} \vDash \chi$ sse $\mathfrak{I} \vDash \xi$ ou $\mathfrak{I} \vDash \varphi$ sse, por hipótese, $\mathfrak{I} \vDash \xi$ ou $\mathfrak{I} \vDash \psi$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \chi' = \xi \vee \psi$;
se $\chi = \exists x \varphi$ então $\mathfrak{I} \vDash \chi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$ sse, por hipótese, existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \psi$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \chi' = \exists x \psi$.
Portanto $\chi \vDash\dashv \chi'$. □

Exercício 4.13. Prove o análogo ao **4.8.** para relação de consequência.

Proof. Pelo **Lema 4.4.** é fácil estender o caso que o conjunto é satisfatível para consequência lógica. □

Exercício 4.14. Um conjunto Φ de sentenças é dito *independente* se não há um $\varphi \in \Phi$ tq $\Phi\backslash\{\varphi\} \models \varphi$. Mostre que os conjuntos Φ_{gr} e Φ_{eq} de axiomas dos grupos e relações de equivalência são independentes.

Proof. (a) $\Phi_{\text{gr}} = \{\underbrace{\forall uvw((u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w))}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall u \exists v(u \circ v = e)}_{\varphi_2}, \underbrace{\exists c \forall u(u \circ c = u)}_{\varphi_3}\}$
(i) Como φ_3 garante a existência de um elemento neutro, mas não necessariamente precisamos interpretar e como este, peguemos $(\mathbb{N}\backslash\{1\}, \cdot, 0)$, de fato esta é associativa e possui um número que se operado com qualquer outro no domínio resulta em 0, sendo este, é claro, também o 0, então $\mathfrak{I} \models \Phi_{\text{gr}}\backslash\{\varphi_3\}$, mas $\mathfrak{I} \not\models \varphi_3$;
(ii) Como φ_2 garante a existência de um inverso, basta tomarmos a estrutura $(\mathbb{N}, +, 0)$ em $\mathfrak{I}$ que vale $\mathfrak{I} \models \Phi_{\text{gr}}\backslash\{\varphi_2\}$, mas $\mathfrak{I} \not\models \varphi_2$;
(iii) Como φ_1 garante associatividade tomamos o operador $\circ$ como não associativo, por exemplo a estrutura $(\mathbb{Z}, -, 0)$ em $\mathfrak{I}$ garante que $\mathfrak{I} \models \Phi_{\text{gr}}\backslash\{\varphi_1\}$, mas $\mathfrak{I} \not\models \varphi_1$.

(b) $\Phi_{\text{eq}} = \{\underbrace{\forall a(aRa)}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall ab(aRb \leftrightarrow bRa)}_{\varphi_2}, \underbrace{\forall abc(aRb \wedge bRc \to aRc)}_{\varphi_3}\}$
(i) Para $\Phi_{\text{eq}}\backslash\{\varphi_3\}$ basta tomar $(\mathbb{Z}, \cdot, R)$ tq aRb sse $a \cdot b \geqslant 0$. Assim ambos φ_1, φ_2 são satisfeitos, mas escolhendo $b = 0$ em φ_3 tal relação não é sempre verdade;
(ii) Para $\Phi_{\text{eq}}\backslash\{\varphi_2\}$ basta tomar $(\mathbb{N}, \geqslant)$, tal qual não é simétrica;
(iii) Para $\Phi_{\text{eq}}\backslash\{\varphi_1\}$ basta tomar $A = \{a\}$ e (A, R) tq $\forall a \in A(a \not{R} a)$. □

Exercício 4.15. (Generalização do **Exercício 1.6.**). Seja $I \neq \varnothing$, $\forall i \in I$, seja $\mathfrak{A}_i$ uma $\mathcal{S}$-estrutura. Denotaremos por $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ a $\mathcal{S}$-estrutura do produto direto das $\mathcal{S}$-estruturas $\mathfrak{A}_i$:

$$\mathsf{Dom}\left(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i\right) := \left\{g \;\middle|\; g : I \to \bigcup_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i), \text{ e } g(i) \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i), \forall i \in I\right\}$$

i.e., n-tuplas de todas as possíveis combinações de elementos no domínio de cada estrutura (que denotaremos por $\langle g(i) \mid i \in I \rangle$), e:
para $R \in \mathcal{S}$ n-ária e $g_1, \ldots, g_n \in \prod_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$:

$$R^{\mathfrak{A}} g_1 \ldots g_n \text{ sse } R^{\mathfrak{A}_i} g_1(i) \ldots g_n(i), \forall i \in I;$$

para $f \in \mathcal{S}$ n-ária e $g_1, \ldots, g_n \in \prod_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$:

$$f^{\mathfrak{A}}(g_1, \ldots, g_n) := \langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i)) \mid i \in I \rangle;$$

e $c^{\mathfrak{A}} := \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$ para $c \in \mathcal{S}$.
Prove que para $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ se $\mathsf{var}(t) \subseteq \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ e $g_0, \ldots, g_{n-1} \in \prod_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$, então

$$t^{\mathfrak{A}}[g_0, \ldots, g_{n-1}] = \langle t^{\mathfrak{A}_i}[g_0(i), \ldots, g_{n-1}(i)] \mid i \in I \rangle \quad (*)$$

Proof. Se $t = c$, então, por definição, $c^{\mathfrak{A}} = \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$. Se $t = x$, então, novamente por definição, $t^{\mathfrak{A}}[g_0] = g_0 = \langle g_0(i) \mid i \in I \rangle$. Provados os casos bases assuma $(*)$ como hipótese indutiva. Se $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, então $t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}})$, por hipótese para cada t_i temos $t_i^{\mathfrak{A}} = g_k$, para algum g_k, logo $t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$ que, por definição, é igual a $\langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_{i_1}(i), \ldots, g_{i_n}(i)) \mid i \in I \rangle$. $\square$

Exercício 4.16. Fórmulas deriváveis no seguinte cálculo são denominadas fórmulas Horn:

$$\frac{}{(\neg\varphi_1 \vee \cdots \vee \neg\varphi_n \vee \varphi)} \text{ Se } n \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi \text{ são atômicas;}$$

$$\frac{}{\neg\varphi_0 \vee \cdots \vee \neg\varphi_n} \text{ Se } n \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi_0, \ldots, \varphi_n \text{ são atômicas;}$$

$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}\ ; \quad \frac{\varphi}{\forall x \varphi}\ ; \quad \frac{\varphi}{\exists x \varphi}\ .$$

Mostre que se φ é uma *sentença* Horn e se $\mathfrak{A}_i \models \varphi, \forall i \in I$, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$.

Proof. Pelo teorema anterior temos $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models (t_1 \doteq t_2)$ sse $t_1^{\mathfrak{A}} = \langle t_1^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle = t_2^{\mathfrak{A}} = \langle t_2^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$, i.e., $t_1^{\mathfrak{A}_i} = t_2^{\mathfrak{A}_i}, \forall i \in I$, então obviamente se cada $\mathfrak{A}_i$ o satisfaz, o produto direto também. É fácil estender o argumento paras outras fórmulas atômicas. Disso é fácil tirar que se todas as estruturas satisfazem negações e disjunções de fórmulas atômicas, então o produto direto também satisfaz. Provado o caso base assuma como hipótese de indução que se $\mathfrak{A}_i \models \varphi, \forall i \in I$, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$. Se $\mathfrak{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)$, então $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ e $\mathfrak{A}_i \models \psi$, por hipótese isso implica que $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$ e $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \psi$, i.e., $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)$. Da mesma forma, $\mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi$ sse existe $a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$ tq $\mathfrak{A}_i \frac{a}{x} \models \varphi$, se em cada domínio das $\mathfrak{A}_i$ há um elemento que satisfaz, em particular pegando $a_i \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$ temos que a n-tupla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{Dom}\left(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i\right)$ também satisfaz, o argumento é análogo para $\forall x \varphi$. $\square$

Exercício 5.9. Seja $\mathcal{S} \prec \aleph_0$ um conjunto de símbolos e $\mathfrak{A}$ uma $\mathcal{S}$-estrutura tq $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \prec \aleph_0$. Mostre que há $\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ cujos modelos são exatamente aquelas $\mathcal{S}$-estruturas isomórficas a $\mathfrak{A}$.

Proof. Construiremos $\varphi_{\mathfrak{A}}$ em função de $\mathfrak{A}$, enumere $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. Como $\mathcal{S} \prec \aleph_0$, então para especificamente $x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{Var}$ defina $\Phi := \{\varphi \mid \varphi \text{ é atômica e } \mathsf{free}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}\}$ o conjunto de $\mathcal{S}$-fórmulas atômicas com exatamente $x_1, \ldots, x_n$ como variáveis livres. Obviamente $\Phi \prec \aleph_0$, enumere portanto $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$. Defina por indução $\Psi_0 := \varnothing$ e

$$\Psi_m := \begin{cases} \Psi_{m-1} \cup \{\varphi_m\}, \text{ se } \mathfrak{A} \models \varphi_m[a_1, \ldots, a_n]; \\ \Psi_{m-1} \cup \{\neg\varphi_m\}, \text{ se } \mathfrak{A} \not\models \varphi_m[a_1, \ldots, a_n]. \end{cases}$$

com isso o conjunto

$$\Psi := \bigcup_{i=1}^{k} \Psi_i$$

tem cardinalidade igual a Φ e, portanto, é finito. Obviamente Ψ possui todas as informações necessárias para definirmos todas as funções, relações e constantes e suas dependências com os elementos do domínio, portanto toda estrutura que satisfaz Ψ terá tais propriedades, basta agora garantir que o domínio dessa nova estrutura esteja em bijeção com o de $\mathfrak{A}$, defina então:

$$\varphi_{\mathfrak{A}} := \exists x_1 \ldots x_n \left(\bigwedge \Psi \wedge \forall x \left(\bigvee_{i=1}^{n} x \doteq x_i \right) \right)$$

$\square$

Exercício 5.10. Mostre que: (a) A relação $<$ é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$, i.e., existe uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_2^{\{+,\cdot,0\}}$ tq $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \vDash \varphi[a, b] \text{ sse } a < b.$$

(b) A relação $<$ não é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, 0)$.

Proof. (a) Tome $\varphi = \exists c(\neg(c \doteq 0) \wedge (b \doteq a + c^2))$, dessa forma $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \vDash \varphi[a, b]$ sse $a < b$.
(b) Seja $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ um automorfismo em $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$ tq $\pi(a) = -a$ que é o $c \in \mathbb{R}$ tq $a + c = 0$. Para provar que π é um automorfismo precisamos:
(i) π é uma bijeção;
(ii) $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$;
(iii) $\pi(0) = 0$.
Como todos são verficados isso garante que é um automorfismo. Agora vejamos que se existe um $\varphi[a, b]$ tq $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a, b]$ sse $a < b$ então como π é estritamente decrescente, $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\pi(a), \pi(b)]$ sse $a > b$. Sabemos, também, pelo **Lema do Isomorfismo** que $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a, b]$ sse $\mathfrak{A} \vDash \varphi[\pi(a), \pi(b)]$, i.e., $a < b$ sse $b < a$, o que é uma contradição, portanto não existe tal $\varphi[a, b]$ e, com isso, $<$ não é elementarmente definível. $\square$

Exercício 5.11. Alterando o cálculo das fórmulas universais substituindo o quantificador universal em (iii) por um existencial conseguimos o cálculo de fórmulas existenciais. Prove que:
a) A negação de uma sentença universal é logicamente equivalente a uma sentença existencial, e vice versa;
b) Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e φ é uma sentença existencial, então $\mathfrak{A} \vDash \varphi \implies \mathfrak{B} \vDash \varphi$.

Proof. a) Caso base para ambas: Se φ é livre de quantificadores, obviamente $\neg\varphi$ também é, portanto se φ é uma sentença universal, $\neg\varphi$ é existencial e vice versa. Tomemos como hipótese indutiva que se φ é universal/existencial, então $\neg\varphi$ é existencial/universal. Se $\varphi = (\psi \wedge \chi)$, então $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a $\neg\psi \vee \neg\chi$, assim como para $\varphi = (\chi \vee \psi)$ temos $\neg\psi \wedge \neg\chi$, por hipótese é fácil ver que a propriedade é preservada para ambos os casos. Da mesma forma se $\varphi = \forall x\psi$, então $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a $\exists x\neg\varphi$, o caso contrário é análogo.
b) Por a) sabemos que $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a uma fórmula universal, se $\mathfrak{A} \vDash \varphi$, então $\mathfrak{A} \nvDash \neg\varphi$, pela contraposição do **Corolário 5.8.** temos que $\mathfrak{B} \nvDash \neg\varphi$, i.e., $\mathfrak{B} \vDash \varphi$. $\square$

Exercício 6.7. Formalize as seguintes declarações usando o conjunto de símbolos de 6.2.:
a) Todo real positivo tem uma raiz quadrada positiva;
b) Se ρ é estritamente monótona, então ρ é injetiva;
c) ρ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$;
d) para todo x, se ρ é diferenciável em x, então ρ é contínua em x.

Proof. a) $\forall x\exists y(0 < y \wedge y \cdot y \doteq x)$;
b) $(\forall x\forall y(x < y \to \rho(x) < \rho(y)) \vee \forall x\forall y(x < y \to \rho(y) < \rho(x))) \to \forall x\forall y(\rho(x) \doteq \rho(y) \to x \doteq y)$;

c) $\forall u(0 < u \to \exists v(0 < v \to \forall x \forall y(\Delta(x,y) < v \to \Delta(\rho(x),\rho(y)) < u)));$
d) Sejam

$$C(x) := \forall u(0 < u \to \exists v(0 < v \to \forall y(\Delta(y,x) < v \to \Delta(\rho(y),\rho(x)) < u)));$$

$$L(\ell, f(y), p) := \forall u(0 < u \to \exists v(0 < v \to \forall y((0 < \Delta(y,p) \wedge \Delta(y,p) < v) \to \Delta(f(y),\ell) < u).$$

Logo $\forall z(\exists w(\rho(x+y) \doteq w \cdot y + \rho(x) \wedge \exists \ell(L(\ell, w, 0))) \to C(x)).$ ☐

Exercício 6.8. Seja $S_{\text{eq}} = \{R\}$, formalize:
a) R é uma relação de equivalência com no mínimo duas classes de equivalência;
b) R é uma relação de equivalência com uma classe de equivalência contendo mais de um elemento.

Proof. a) $\bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists a \exists b(Rab \wedge \exists c(\neg Rac));$
b) $\bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists a \exists b(Rab \wedge \neg(a \doteq b)).$ ☐

Exercício 6.9. Utilize o **Exercício 4.16.** para provar que:
a) Se para todo $i \in I$ a estrutura $\mathfrak{A}_i$ é um grupo, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ é um grupo;
b) Nem a teoria da ordem, nem a dos corpos, pode ser axiomatizada por uma sentença de Horn.

Proof. a) Seja $\mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, vale que $\mathfrak{A} \models \forall x(x \circ e \doteq x)$ sse para todo $g \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ temos $g \circ^{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{A}} = g$, i.e., $\langle g(i) \circ^{\mathfrak{A}_i} e^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle = \langle g(i) \mid i \in I \rangle$ que é igual sse $g(i) \circ^{\mathfrak{A}_i} e^{\mathfrak{A}_i} = g(i), \forall i \in I$ o que, por hipótese, é verdade. Destrinchando os axiomas de grupo desta forma é fácil mostrar que $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{gr}}$.
b) Assuma que $\varphi_{\text{fd}} = \bigwedge \Phi_{\text{fd}}$ a conjunção dos axiomas de corpos seja uma sentença Horn, pelo **Exercício 1.6.** o produto direto de duas estruturas de corpos $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ não é um corpo e, pelo **Exercício 4.16.**, deveria ser. Contradição, então φ_{fd} não é uma sentença Horn.
Igualmente se $\varphi_{\text{ord}} = \bigwedge \Phi_{\text{ord}}$ é uma sentença de Horn, então se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são estruturas de ordem, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ precisa também ser. Note que $\mathfrak{C} \models \forall xy(x < y \vee x \doteq y \vee y < x)$ sse para $x = (a,b)$ e $y = (p,q)$ temos $\forall (a,b)(p,q)((a < p \wedge b < q) \vee (a = p \wedge b = q) \vee (p < a \wedge q < b))$, entretando escolhendo $(a,b),(p,q)$ tq $a < p$ e $b > q$ temos $\mathfrak{C}$ não o satisfaz, contradição. ☐

Exercício 6.10. $M \subseteq \mathbb{N}$ é denominado *spectrum* se há um conjunto de símbolos $\mathcal{S}$ e uma $\mathcal{S}$-sentença φ tq

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi \text{ possui um modelo com exatamente } n \text{ elementos}\}.$$

Prove que é um spectrum: a) Todo $N \subseteq \mathbb{N}\backslash\{0\}$ finito;
b) $\{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \mid (n \equiv 0 \pmod{m}) \wedge m \geqslant 1\}$;
c) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$;
d) $\{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \mid n \text{ não é primo}\}$;
e) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é primo}\}$.

Proof. Seja $\varphi_{\geqslant n} := \bigwedge_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \neg(v_i \doteq v_j)$, então

$$\varphi_n := \exists v_1 \ldots v_n \left(\varphi_{\geqslant n} \wedge \forall v \left(\bigvee_{i=1}^{n} v \doteq v_i\right)\right)$$

é a formalização de há exatamente n elementos.
a) Como $N \prec \aleph_0$ enumere $N = \{a_1, \dots, a_n\}$, logo podemos descrever $N = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_{a_i}\right\}$.
b) Pegue $\mathcal{S} = \{R\}$ e defina

$$\varphi = \bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists v_1 \dots v_m \left(\varphi_{\geqslant m} \wedge \forall v \left(\bigvee_{i=1}^{m} Rvv_i\right)\right)$$

Isso garante não só que R é uma relação de equivalência como garante que o conjunto quociente $\mathfrak{A}/R$ de qualquer modelo de φ terá exatamente m classes de equivalência, como todas possuem a mesma cardinalidade tem de ser possível particionar o domínio em m conjuntos diferentes, i.e., ser um múltiplo de m.
c) Seja $\mathcal{S} = \{R, f, g\}$ a ideia é formalizar ψ tq $f, g : \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \to R$, χ tq $(f(x), g(x))$ é injetivo e ξ que é sobrejetivo, i.e.:

$$\begin{aligned}
&\psi := \forall x(Rf(x) \wedge Rg(x));\\
&\chi := \forall x \forall y((f(x) = f(y) \wedge g(x) = g(y)) \to x = y);\\
&\xi := \forall x \forall y((Rx \wedge Ry) \to \exists z(f(z) = x \wedge g(z) = y)).
\end{aligned}$$

Logo, se $\mathfrak{A} \models \varphi := \psi \wedge \chi \wedge \xi$, então $\mathfrak{A}$ possui uma bijeção de $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ em R^2, i.e., a cardinalidade do domínio será o quadrado de um natural. Para provarmos que sempre haverá um modelo para cada quadrado perfeito contruiremos um modelo para φ. Seja $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) := \{1, \dots, m\}$ e defina $R := \{1, \dots, p\}$, se $f(x)$ é o quociente de $x \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ por p e $g(x)$ o resto, então $x = pf(x) + g(x)$ com f, g unicamente determinados, então para cada x no domínio existem $(f(x), g(x)) \in R^2$ e vice versa.
d)
e) $\varphi := \bigwedge \Phi_{\text{ofd}} \wedge \forall x(\neg(x \doteq x{+}1) \to x < x{+}1)$ garante, visto que todo corpo finito tem característica prima e, portanto, contém p^n elementos, a última restrição garante que $n = 1$. Seja $\mathfrak{A} \models \varphi$ cujo domínio tem p elementos. Assuma por contradição que existe $\mathfrak{B} \models \varphi$ tq $n \neq 1$, então $\exists a \notin \mathbb{F}_p$, portanto $a \neq 0$, a vista disso temos $a < a + 1 < \cdots < a + p = a$, contradição, visto que $<$ é uma relação de ordem total. □

Exercício 7.5. Prove que:
a) Se $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A) \models \Pi$ e se $\sigma^A : A \to A$, dada por $\sigma^A(a) = a +^A 1^A$, então $(A, \sigma^A, 0^A) \models$(P1)-(P3).
b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ é caracterizada por Π até o isomorfismo.

Proof. a) Interpretemos em $\mathfrak{A}$ os 3 primeiros axiomas de Π:
(i) $\forall x(\neg x +^A 1^A \doteq 0^A)$ sse $\forall x(\neg \sigma(x) \doteq 0)$ (P1);
(ii) $\forall xy(x +^A 1^A \doteq y +^A 1^A \to x \doteq y)$ sse $\forall xy(\sigma(x) \doteq \sigma(y) \to x \doteq y)$ (P2);
(iii) $\forall X((X0^A \wedge \forall x(Xx \to Xx +^A 1^A)) \to \forall y Xy)$ sse $\forall X((X0^A \wedge \forall x(Xx \to X\sigma(x))) \to \forall y Xy)$ (P3).
b) Seja $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A) \models \Pi$ para $\pi : \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ definimos indutivamente:
$\pi(0) = 0^A$;
$\pi(x + 1) = \pi(x) +^A 1^A$.
Demonstraremos agora que π é bijetivo:
Sobretividade: a definição garante o caso base, $0^A \in \mathsf{Im}(\pi)$. Assuma por hipótese $a = \pi(n) \in \mathsf{Im}(\pi)$, logo $a +^A 1^A = \pi(n) +^A 1^A = \pi(n) +^A \pi(1)$, por definição $a +^A 1^A = \pi(n + 1) \in \mathsf{Im}(\pi)$.

Injetividade: Queremos provar que $\forall nm(n \neq m \to \pi(n) \neq \pi(m))$. Indução em n:
Caso base: $n = 0$ e $m \neq 0$, em particular, assuma sem perda de generalidade, que $m = k+1$, logo $\pi(n) = 0^A$ e $\pi(m) = \pi(k+1)$, pela primeira sentença em Π, $k+1 \neq 0$, portanto $\pi(m) = \pi(k+1) \neq \pi(0) = 0^A = \pi(n)$.
Provado o caso base assuma como hipótese de indução que $\forall m(n \neq m \to \pi(n) \neq \pi(m))$, façamos agora indução dupla, dessa vez em m:
Caso base: $m = 0$ e $n \neq 0$, em especial $n = k+1$, a prova deste é análogo ao caso base em n.
Hipótese indutiva: $n \neq m \to \pi(n) \neq \pi(m)$, sejam $n, m \neq 0$, então $n = p+1$ e $m = q+1$, se $n \neq m$, i.e., $\neg(p+1 = q+1)$, por 2 em Π, $p \neq q$ e, por hipótese, $\pi(p) \neq \pi(q)$, portanto, se $\pi(n) = \pi(p) +^A 1^A = \pi(m) = \pi(q) +^A 1^A$, também por 2 em Π temos $\pi(p) = \pi(q)$, contradição, logo $\pi(n) \neq \pi(m)$.
Se π é isomorfismo, provemos que (i) $\pi(n+m) = \pi(n) +^A \pi(m)$ e (ii) $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$:
(i)
Caso base: $\pi(m+0) = \pi(m) = \pi(m) +^A 0^A = \pi(m) +^A \pi(0)$, pela propriedade 4 em Π.
Assuma $\pi(n+m) = \pi(n) +^A \pi(m)$ como hipótese de indução:

$$\begin{aligned}
\pi(m+(n+1)) &= \pi((m+n)+1) && \text{(P5);}\\
&= \pi(m+n) +^A 1^A && \text{definção;}\\
&= (\pi(m) +^A \pi(n)) +^A 1^A && \text{passo indutivo;}\\
&= \pi(m) +^A (\pi(n) +^A 1^A) && \text{(P5);}\\
&= \pi(m) +^A \pi(n+1) && \text{definição.}
\end{aligned}$$

(ii)
Caso base: $\pi(m \cdot 0) = \pi(0) = \pi(m) \cdot 0^A = \pi(m) \cdot \pi(0)$, pela propriedade 6 em Π.
Assuma $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ como hipótese e indução:

$$\begin{aligned}
\pi(m \cdot (n+1)) &= \pi(m \cdot n + m) && \text{(P7);}\\
&= \pi(m \cdot n) +^A \pi(m); && \\
&= (\pi(m) \cdot^A \pi(n)) +^A \pi(m) && \text{passo indutivo;}\\
&= \pi(m) \cdot^A (\pi(n) +^A 1^A) && \text{(P7);}\\
&= \pi(m) \cdot^A \pi(n+1) && \text{definição.}
\end{aligned}$$

□

Exercício 8.8. Para $n \geqslant 1$ dê uma definição similar dos quantificadores "*existe ao menos n*" e "*existe exatamente n*".

Proof. □

Exercício 8.9. Sejam P e f binária e $x := v_0, y := v_1, u := v_2, v := v_3$ e $w := v_4$. Mostre, usando a **Definição 8.2.** que:
a) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ u\ u}{x\ y\ v} = \exists xy(Pxu \wedge Pyu)$;
b) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv}{u\ \ v} = \exists xy(Pxv \wedge Pyfuv)$;
c) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ x\ fuv}{x\ u\ \ v} = \exists wy(Pwx \wedge Pyfuv)$;
d) $(\forall x \exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists ufuu \doteq x)\frac{x\ fxy}{x\ \ u} = \forall v \exists w(Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists ufuu \doteq x$.

Proof. $\square$

Exercício 8.10. Mostre que se $x_0, \dots, x_r \notin \bigcup_{i=0}^{r} \mathsf{var}(t_i)$, então

$$\varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \models\!\!\dashv \forall x_0 \dots x_r (\bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i \to \varphi).$$

Proof. $\square$

Exercício 8.11. Formalize um cálculo que derive strings exatamente da forma:

$$t x_0 \dots x_r t_0 \dots t_r t\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \text{ ou } \varphi x_0 \dots x_r t_0 \dots t_r \varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}.$$

Proof. $\square$

3 Cálculo de Sequentes

Exercício 2.7. Analise quais das regras abaixo estão corretas:
$\dfrac{\Gamma\ \varphi_1\ \psi_1 \qquad \Gamma\ \varphi_2\ \psi_2}{\Gamma\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)\ (\psi_1 \vee \psi_2)}\ (i); \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi_1\ \psi_1 \qquad \Gamma\ \varphi_2\ \psi_2}{\Gamma\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)\ (\psi_1 \wedge \psi_2)}\ (ii).$

Proof. $\square$
