Provas e Exercícios

Ref. Mathematical Logic - H. D. Ebbinghaus

Primavera 2022

Contents

Parte A

2 Sintaxe das Linguagens de Primeira Ordem

Exercício 1.3. Seja $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado. Para $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$ mostre que $\exists c \in I := [a, b]$ tq $c \notin \mathrm{Im}(\alpha)$. Conclua disso que I, e portanto $\mathbb{R}$, são incontáveis.

Proof. Seja $I_0 := [a, b]$ e defina recursivamente $I_{n+1} := I_n \backslash \{\alpha(n)\}$, obviamente $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \ldots$ forma uma sequência de intervalos encaixantes e, por se tratar de $\mathbb{R}$, vale a propiedade dos intervalos encaixantes:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \varnothing.$$

Como $\alpha(n) \notin I_k, \forall k > n$, então, em particular, $\alpha(n) \notin \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i, \forall n \in \mathbb{N}$, i.e., existe um $c \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ tq $c \neq \alpha(n), \forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $c \notin \mathrm{Im}(\alpha)$. Como para cada α eu consigo construir um c em $\mathbb{R}$ tq α não associa nenhum real a ele, então não existe uma bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. $\square$

Exercício 1.4. Prove que se $M_0, M_1, \cdots \preceq \aleph_0$, então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \preceq \aleph_0$$

e o utilize para provar o **Lema 1.2**.

Proof. Para provarmos que a união infinita é no máximo contável basta acharmos uma enumeração, i.e., uma função bijetora de $\mathbb{N}$ para tal conjunto. Para simplificar o argumento assuma $M_n \approx \mathbb{N}, \forall n \geqslant 0$, se vale para uma sequência de conjuntos infinitos, obviamente vale para o caso em que alguns são finitos. Como M_n é equipotente a $\mathbb{N}$, seja $\pi^n : \mathbb{N} \to M_n$ tal bijeção, seja então a "matriz" infinita definida por $a_{ij} = \pi^i(j)$, é possível construir uma bijeção $\alpha : \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ a partir das diagonais: iniciando com a_{00}, indo de a_{01} até a_{10}, de a_{02} até a_{20}, e assim por diante.

Definindo $M_n := \prod_{i=0}^{n} \mathbb{A}$, o conjunto de strings de comprimento n, é fácil mostrar que o produto cartesiano finito de conjuntos no máximo contáveis é no máximo contável, com isso, pelo teorema anterior

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathbb{A}^* \preceq \aleph_0.$$

Como $\mathbb{A}^*$ é no mínimo infinito, i.e., $\mathbb{A}^* \succeq \aleph_0$, visto que é possível associar a cada string de comprimento n um natural, pelo Teorema de Schröder-Bernstein $\mathbb{A}^* \approx \aleph_0$. $\square$

Exercício 1.5. Demonstre o Teorema de Cantor: não existe $\alpha : M \to \mathcal{P}(M)$ sobrejetivo e, portanto, bijetivo.

Proof. Seja $S := \{a \in M \mid a \notin \alpha(a)\} \in \mathcal{P}(M)$, assumindo por hipótese que existe α sobrejetivo, então $\exists s \in M$ tq $\alpha(s) = S$. Se $s \in S$, por definição $s \notin \alpha(s) = S$, contradição. Se $s \notin S = \alpha(s)$, por definição $s \in S$, contradição, portanto não existe tal bijeção. Essa demonstração é conhecida como Argumento da Diagonal de Cantor. $\square$

Exercício 4.6. (a) Seja $\mathfrak{C}_v$ o cálculo consistindo das seguintes regras:

$$\frac{}{x \quad x} \ ; \quad \frac{y \quad t_i}{y \quad ft_1 \ldots t_n} \ \text{se } f \in \mathcal{S} \text{ é } n\text{-ária e } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

a) Mostre que para toda variável x e $\mathcal{S}$-termo t, $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$ sse $x \in \mathsf{var}(t)$.
b) Dê um resultado para SF análogo ao resultado para var em a).

Proof. a)
($\Leftarrow$) Se $x \in \mathsf{var}(t)$ então $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$: Caso base: se t é uma variável, então $x = t$ e, obviamente, $x \in \mathsf{var}(t)$. Indução nas regras: se t não for uma variável e $x \in \mathsf{var}(t)$, então $x \in \mathsf{var}(ft_1 \dots t \dots t_n)$.
($\Rightarrow$) Se $x\ t$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$ então $x \in \mathsf{var}(t)$: Se $t = x$ a primeira regra garante que $x \in \mathsf{var}(t)$. Se $t = ft_1 \dots t_n$ então $x\ t_i$ é derivável em $\mathfrak{C}_v$ para algum $1 \leqslant i \leqslant n$, caso t_i seja da forma $ft'_1 \dots t'_m$ novamente, basta repetirmos o argumento, quando t for x voltamos ao primeiro caso.

b) Seja o cálculo $\mathfrak{C}_a$ definido pelas regras:

$$\frac{}{t_m \doteq t_n \quad t_m \doteq t_n}\ ; \quad \frac{}{Rt_1 \dots t_n \quad Rt_1 \dots t_n}\ ; \quad \frac{\Gamma \quad \psi}{\Gamma\ \neg\psi \quad \neg\psi}\ ;$$

$$\frac{\Gamma\ \varphi \quad \psi}{\Gamma\ (\varphi * \psi) \quad (\varphi * \psi)}\ * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \quad \frac{\Gamma \quad \psi}{\Gamma\ Qx\psi \quad Qx\psi}\ Q = \forall, \exists.$$

Para todo termo t_m, t_n e toda variável x. $\Gamma\ \psi$ é derivável em $\mathfrak{C}_a$ sse $\bigcup \Gamma = \mathsf{SF}(\psi)$. □

Exercício 4.7. Altere o cálculo de fórmulas omitindo os parênteses que delimitam as fórmulas introduzidas da forma $\varphi \square \psi$. Mostre que tais fórmulas não terão mais uma única decomposição e que SF não será mais uma função bem definida.

Proof. Pegue, por exemplo, a fórmula $\varphi := \exists x Px \wedge Qy$, podemos, utilizando o cálculo de fórmulas, construir duas derivações diferentes da mesma fórmula:

1. Px, (F2) em P e x;
2. Qy, (F2) em Q e y;
3. $Px \wedge Qy$, (F4) em (1) e (2) com $\wedge$;
4. $\exists x Px \wedge Qy$, (F5) em (3) usando $\exists$ e x.

e a outra altera somente os passos (3) e (4) para:

1. $\exists x Px$, (F5) em (1) usando $\exists$ e x;
2. $\exists x Px \wedge Qy\ x$, (F4) em (2) e (3) com $\wedge$.

Obviamente $\mathsf{SF}(\varphi) = \{\varphi, Px \wedge Qy, Qy, Px\}$ utilizando a primeira derivação e
$\mathsf{SF}(\varphi) = \{\varphi, \exists x Px, Qy, Px\}$ utilizando a segunda. □

Exercício 4.8. Definimos uma $\mathcal{S}$-fórmula em notação polonesa ($\mathcal{S}$-P-fórmula) como as strings em $\mathbb{A}_{\mathcal{S}}$ tq a regra (F4) é alterada para: Se φ, ψ são $\mathcal{S}$-P-fórmulas, então também são $\square\varphi\psi$, com $\square = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Proof. Precisamos antes provar o análogo ao **Lema 4.2.(b)** para $\mathcal{S}$-P-fórmulas: para $\varphi \neq \varphi'$, φ não é um segmento inicial próprio de φ'. Se $\varphi = \wedge\chi\psi$, assuma por contradição que φ é um segmento inicial próprio de φ', i.e., existe $\zeta \neq \square$ tq $\varphi\zeta = \wedge\psi\chi = \varphi'$, mas como φ' começa com $\wedge$ este só pode ser formado a partir de (F4), portanto $\varphi = \wedge\chi'\psi'$ para algumas χ', ψ' $\mathcal{S}$-P-fórmulas. Podemos então cancelar $\wedge$ e ficar com $\chi\psi\zeta = \chi'\psi$, mas, pela hipótese de indução, se χ é um segmento próprio de χ', só pode ser o caso que $\chi = \chi'$, o mesmo vale para ψ e ψ', logo $\zeta = \square$, contradição. Para provar o **Lema 4.3.(b)** provemos primeiro que se $\varphi_1 \ldots \varphi_n = \varphi'_1 \ldots \varphi'_n$, então $\varphi_i = \varphi'_i$ por indução. Caso base: φ_1 é segmento inicial próprio de φ'_1, pelo **Lema 4.2.(b)** temos $\varphi_1 = \varphi'_1$. Hipótese de indução: assuma que $\varphi_i = \varphi'_i$, logo podemos cancelá-lo, o que implica que φ_{i+1} é segmento inicial próprio de φ'_{i+1}, i.e., $\varphi_{i+1} = \varphi'_{i+1}$.
Seja agora $n \neq m$, assuma sem perda de generalidade que $n = m + k$ para $k > 0$, logo $\varphi_1 \ldots \varphi_n = \varphi'_1 \ldots \varphi'_n \ldots \varphi'_m$, da prova anterior temos então que $\square = \varphi'_{n+1} \ldots \varphi'_m$, contradição, logo $k = 0$.
A prova do **Lema 4.4.(b)** é trivial, basta definirmos a função SF para $\mathcal{S}$-P-fórmulas, o que é muito simples. ☐

Exercício 4.9. Seja $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ de comprimento k, para $n \geqslant 1$. Mostre que $\exists \xi, \eta \in \mathbb{A}^*_{\mathcal{S}}$ unicamente determinados e $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ tq o comprimento de ξ é $1 \leqslant i < k$ e $t_1 \ldots t_n = \xi t \eta$.

Proof. Seja $i = \sum_{j=0}^{m} \mathsf{lng}(t_j)$ para algum $m < n$, nesse caso $t = t_{m+1}$ e $\eta = t_{m+2} \ldots t_n$ podendo ser possivelmente $\square$. Se todos os termos são constantes ou variáveis, este sempre é o caso, se for uma função é possível pararmos no meio de um termo $t_m = ft'_1 \ldots t'_p$, nesse caso se ξ terminar antes de t'_q pegamos $t = t'_{q+1}$ e η como o resto. ☐

Exercício 5.2. Mostre que o cálculo $\mathfrak{C}_{nf}$ permite derivar precisamente aquelas strings da forma $x\ \varphi$ no qual $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ tq $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$:

$$\frac{}{x \quad t_1 \doteq t_2} \text{ Se } t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \mathsf{var}(t_1) \cup \mathsf{var}(t_2);$$

$$\frac{}{x \quad Rt_1 \ldots t_n} \text{ Se } R \in \mathcal{S} \text{ é n-ária}, t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \text{ e } x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{var}(t_n);$$

$$\frac{x \quad \varphi}{x \quad \neg\varphi}\ ; \qquad \frac{(x \quad \varphi) \quad (x \quad \psi)}{x \quad (\varphi * \psi)}\ * = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow; \qquad \frac{}{x \quad Qx\varphi}\ ; \qquad \frac{x \quad \varphi}{x \quad Qx\varphi}\ Q = \forall, \exists;$$

Proof. ($\Rightarrow$) Fazendo indução em cada regra:
$\varphi = t_1 \doteq t_2$: por definição $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
$\varphi = Rt_1 \ldots t_n$: Também por definição $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
$\varphi = Qx\psi$ nesse caso $x \notin \mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\psi) \backslash \{x\}$;
(*) Portanto todas as fórmulas φ deriváveis com premissa livre não tem uma ocorrência livre de x.
$\varphi = \neg\psi$: Se $\neg\psi$ é derivável, então ψ também é, mas se ψ é derivável em $\mathfrak{C}_{nf}$ então, por (*), $x \notin \mathsf{free}(\psi) \rightarrow x \notin \mathsf{free}(\neg\psi)$;
$\varphi = (\psi * \chi)$: O argumento é análogo ao de cima, ambos ψ, χ tem de ser derivável e, por (*), não há ocorrência livre neles, o que implica que não há em $(\psi * \chi)$.

($\Leftarrow$) Agora assumindo $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$:
$\varphi = t_1 \doteq t_2$: então ela é derivável pela regra 1;
$\varphi = Rt_1 \dots t_n$: então ela é derivável pela $2^{\underline{a}}$ regra;
$\varphi = Qx\psi$: a última e penúltima regra garantem que é derivável;
$\varphi = \neg\psi$: então $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$, portanto a $3^{\underline{a}}$ regra garante que é derivável;
$\varphi = (\psi * \chi)$: Se x não ocorre livre em φ então ela não ocorre livre em ambos, portanto a $5^{\underline{a}}$ regra garante sua derivação. $\square$

3 Semântica das Linguagens de Primeira Ordem

Exercício 1.4. Seja $\mathfrak{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ e $\beta(v_n) := 2n$ para $n \geqslant 0$. Interprete as seguintes fórmulas:
a) $\exists v_0 v_0 + v_0 \doteq v_1$;
b) $\exists v_0 v_0 \cdot v_0 \doteq v_1$;
c) $\exists v_1 v_0 \doteq v_1$;
d) $\forall v_0 \exists v_1 v_0 \doteq v_1$;
e) $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)$.

Proof. $\mathfrak{I} \models a)$ sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $a + a = \beta(v_1) = 2$, de fato $a = 1$ satisfaz;
$\mathfrak{I} \models b)$ sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $a \cdot a = 2$, obviamente a equação $x^2 = 2$ não tem solução nos naturais, portanto $\mathfrak{I} \not\models b)$;
$\mathfrak{I} \models c)$ sse há um $a \in \mathbb{N}$ tq $0 = a$, o que é claramente verdade;
$\mathfrak{I} \models d)$ sse para todo $a \in \mathbb{N}$ existe um $b \in \mathbb{N}$ tq $a = b$, o que também é verdadeiro;
$\mathfrak{I} \models e)$ sse para todo $a, b \in \mathbb{N}$ existe um $c \in \mathbb{N}$ tq $a < c$ e $c < b$. Em particular escolhendo $b = a + 1$ temos que existe um natural c tq $a < c < a + 1$ o que é falso, portanto $\mathfrak{I} \not\models e)$. $\square$

Exercício 1.5. Seja $A \neq \varnothing$ e $A, \mathcal{S} \prec \aleph_0$ um conjunto de símbolos. Mostre que há uma quantidade finita de $\mathcal{S}$-estruturas com domínio A.

Proof. Seja $S = ((c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_1}, (R_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_2}, (f_i)_{0 \leqslant i \leqslant n_3})$ com R_i k_i-ário e f_i l_i-ário e $|A| = m$. A quantidade total de associações possíveis para cada símbolo com uma respectiva interpretação no domínio é:

$$\begin{aligned} \alpha_{R_i} &:= \{Z \mid Z \subseteq A^{k_i}\}, \quad |\alpha_{R_i}| = |\mathcal{P}(\alpha_{R_i})| = 2^{|A^{k_i}|} = 2^{m^{k_i}} \\ \alpha_{f_i} &:= A^{(A^{l_i})}, \quad |\alpha_{f_i}| = |A|^{|A^{l_i}|} = m^{(m^{l_i})} \\ \alpha_{c_i} &:= A, \quad |\alpha_{c_i}| = m \end{aligned}$$

Dessa forma, como todos são finitos e a união e o produto cartesiano finito de conjuntos finitos é finito, então o conjunto total $\mathcal{H}$ de estruturas não isomórficas dois a dois é tq:

$$\mathcal{H} := \prod \left\{ \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n_1} \alpha_{R_i}, \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n_2} \alpha_{f_i}, \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n_3} \alpha_{c_i} \right\} \prec \aleph_0.$$

$\square$

Exercício 1.6. Para $\mathcal{S}$-estruturas $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ e $\mathfrak{B} = (B, \mathfrak{b})$ seja $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ a $\mathcal{S}$-estrutura com domínio $A \times B$ satisfazendo:
Para $R \in \mathcal{S}$ n-ária e $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$R^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}(a_1, b_1) \ldots (a_n, b_n) \leftrightarrow R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_n \wedge R^{\mathfrak{B}} b_1 \ldots b_n;$$

Para $f \in \mathcal{S}$ n-ária e $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$:

$$f^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) := (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n));$$

Para $c \in \mathcal{S}$:

$$c^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}});$$

Mostre que:
(a) Se as $\mathcal{S}_{\mathsf{gr}}$-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são grupos então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também é.
(b) Se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são estruturas satisfazendo os axiomas de equivalência então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ também satisfaz.
(c) Se as $\mathcal{S}_{\mathsf{ar}}$-estruturas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são corpos, então $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ não é.

Proof. (a) Sejam $\mathfrak{A} = (A, \circ, e); \mathfrak{B} = (B, *, \varepsilon)$ e $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \circledast, \epsilon)$. Se $a, b, c \in \mathfrak{A}; x, y, z \in \mathfrak{B}$ e $u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

(i) $\forall u, v, w((u \circledast v) \circledast w = u \circledast (v \circledast w))$:

$$\begin{aligned}
(\overbrace{(x, a)}^{u} \circledast \overbrace{(y, b)}^{v}) \circledast \overbrace{(z, c)}^{w} &= (x \circ y, a * b) \circledast (z, c) \\
&= (x \circ y \circ z, a * b * c) \\
&= (x, a) \circledast (y \circ z, b * c) \\
&= (x, a) \circledast ((y, b) \circledast (z, c)) \\
(u \circledast v) \circledast w &= u \circledast (v \circledast w).
\end{aligned}$$

(ii) $\forall u \exists v (u \circledast v) = \epsilon$:

$$\begin{aligned}
(\overbrace{(x, a)}^{u} \circledast \overbrace{(y, b)}^{v}) &= \overbrace{(e, \varepsilon)}^{\epsilon} \\
(x \circ y, a * b) &= (e, \varepsilon) \\
\forall x \exists y (x \circ y = e) &\wedge \forall a \exists b (a * b = \varepsilon).
\end{aligned}$$

(iii)$\exists \epsilon \forall u (u \circledast \epsilon = u)$:

$$\begin{aligned}
(\overbrace{(x, a)}^{u} \circledast \overbrace{(e, \varepsilon)}^{\epsilon}) &= \overbrace{(x, a)}^{u} \\
(x \circ e, a \circ \varepsilon) &= (x, a) \\
\exists e \forall x (x \circ e = x) &\wedge \exists \varepsilon \forall a (a * \varepsilon = a).
\end{aligned}$$

(b) Sejam $\mathfrak{A} = (A, R); \mathfrak{B} = (B, \mathcal{R}), \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = (A \times B, \mathscr{R})$ com $x, y, z \in \mathfrak{A}; a, b, c \in \mathfrak{B}; u, v, w \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$:

(i) $\forall u(u\mathscr{R}u)$:

$$\overbrace{(x,a)}^{u}\,\mathscr{R}\,\overbrace{(x,a)}^{u} \leftrightarrow xRx \wedge a\mathcal{R}a$$
$$\forall x(xRx) \wedge \forall a(a\mathcal{R}a).$$

(ii) $\forall u,v(u\mathscr{R}v \leftrightarrow v\mathscr{R}u)$:

$$\overbrace{(x,a)}^{u}\,\mathscr{R}\,\overbrace{(y,b)}^{v} \leftrightarrow \overbrace{(y,b)}^{v}\,\mathscr{R}\,\overbrace{(x,a)}^{u}$$
$$xRy \wedge a\mathcal{R}b \leftrightarrow yRx \wedge b\mathcal{R}a$$
$$\forall x,y(xRy \leftrightarrow yRx) \wedge \forall a,b(a\mathcal{R}b \leftrightarrow b\mathcal{R}a)$$

(iii) $\forall u,v,w(u\mathscr{R}v \wedge v\mathscr{R}w \to u\mathscr{R}w)$:

$$\overbrace{(x,a)}^{u}\,\mathscr{R}\,\overbrace{(y,b)}^{v} \wedge \overbrace{(y,b)}^{v}\,\mathscr{R}\,\overbrace{(z,c)}^{w} \to \overbrace{(x,a)}^{u}\,\mathscr{R}\,\overbrace{(z,c)}^{w}$$
$$(xRy \wedge a\mathcal{R}b) \wedge (yRz \wedge b\mathcal{R}c) \to xRz \wedge a\mathcal{R}c$$
$$(xRy \wedge yRz) \wedge (a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \to xRz \wedge a\mathcal{R}c$$
$$\forall x,y,z(xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \forall a,b,c(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \to a\mathcal{R}c)$$

(c) Sejam $\mathfrak{A} = (A,+,\cdot,0,1)$; $\mathfrak{B} = (B,*,\times,\overline{0},\overline{1})$ e $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B} = (A\times B,\oplus,\odot,\mathbf{0},\mathbf{1})$ com $x,y \in \mathfrak{A}$; $a,b \in \mathfrak{B}$ e $u,v \in \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$:
Um dos axiomas é $\forall(u \neq \mathbf{0})\exists v(u \oplus v = \mathbf{1})$:

$$(x,a) \oplus (y,b) = (1,\overline{1})$$
$$(x\cdot y, a*b) = (1,\overline{1})$$

Se isso é verdade então, em particular, para ou $x = 0$ ou $a = \overline{0}$ temos que $(0,b),(x,\overline{0}) \neq \mathbf{0}$, logo ambos $0,\overline{0}$ possuiriam invreso, o que é falso. $\square$

Exercício 2.1. Mostre que para $x,y \in \{\top,\bot\}$:
a) $\dot{\to}(x,y) = \dot{\vee}(\dot{\neg}(x),y)$;
b) $\dot{\wedge}(x,y) = \dot{\neg}(\dot{\vee}(\dot{\neg}(x),\dot{\neg}(y)))$;
c) $\dot{\leftrightarrow}(x,y) = \dot{\wedge}(\dot{\to}(x,y),\dot{\to}(y,x))$.

Proof.

x	y	$\dot{\neg}(x)$	$\dot{\vee}(\dot{\neg}(x),y)$	$\dot{\to}(x,y)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

x	y	$\dot{\neg}(x)$	$\dot{\neg}(y)$	$\dot{\vee}(\dot{\neg}(x),\dot{\neg}(y))$	$\dot{\neg}(\dot{\vee}(\dot{\neg}(x),\dot{\neg}(y)))$	$\dot{\wedge}(x,y)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

x	y	$\dot{\to}(x,y)$	$\dot{\to}(y,x)$	$\dot{\wedge}(\dot{\to}(x,y),\dot{\to}(y,x))$	$\dot{\leftrightarrow}(x,y)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

$\square$

Exercício 3.3. Seja P um símbolo de relação unária e f de função binária. Determine duas interpretações para cada fórmula uma que a satisfaça e outra que não:
a) $\forall v_1 f v_0 v_1 \doteq v_0$;
b) $\exists v_0 \forall v_1 f v_0 v_1 \doteq v_1$;
c) $\exists v_0 (P v_0 \wedge \forall v_1 P f v_0 v_1)$.

Proof. a) Seja $\mathfrak{I} = (\mathbb{N}, R, \cdot)$ tq $\beta(v_0) = 0$, então $\mathfrak{I} \vDash a)$ sse para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \cdot n = 0$, o que é fato. Entretanto para mesma interpretação com $+$ temos $n + 0 = 0$, o que não é o caso.

b) Interpretando com a mesma estrutura que em a) o que b) garante é a existência de um elemento neutro, o que é verdade. Pro caso de não satisfação basta retirarmos o elemento neutro do domínio.

c) Seja $Px := x$ é par, para mesma estrutura $\mathfrak{I}$ com $+$, o que c) diz é que existe um x par tq para todo y, $x + y$ é par, o que é claramente falso, use, entretanto, $\cdot$ ao invés de $+$, então obviamente para todo y, xy é par se x for par. $\square$

Exercício 3.4. Uma fórmula sem $\neg, \to$ e $\leftrightarrow$ é denominada *positiva*. Prove que toda fórmula positiva é satisfatível.

Proof. Uma fórmula φ é satisfatível se existe um modelo que a satisfaça, seja então $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a\}$ e $\beta(v) = a$, com $R_i^{\mathfrak{A}}$ sendo o grafo da função identidade n-ária para todo i, assim como $f_i^{\mathfrak{A}} = \text{id}$ e $c_i^{\mathfrak{A}} = a$. De fato, $\mathfrak{I}(t) = a, \forall t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$. Por indução em fórmulas é claro que $\mathfrak{I} \vDash t_1 \equiv t_2$ e $Rt_1 \ldots t_n$, logo também satisfaz $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \vee \psi$, o mesmo para $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$. $\square$

Exercício 4.9. Para fórmulas arbitrárias φ, ψ, χ prove que:
a) $(\varphi \vee \psi) \vDash \chi$ sse $\varphi \vDash \chi$ e $\psi \vDash \chi$;
b) $\vDash (\varphi \to \psi)$ sse $\varphi \vDash \psi$.

Proof. a)

$$\begin{aligned}
\varphi \vDash \chi \text{ e } \psi \vDash \chi &\text{ sse para todo } \mathfrak{I}, \text{ se } \mathfrak{I} \vDash \varphi, \text{ então } \mathfrak{I} \vDash \chi \text{ e se } \mathfrak{I} \vDash \psi, \text{ então } \mathfrak{I} \vDash \chi; \\
&\text{ sse se } \mathfrak{I} \vDash \varphi \text{ ou } \mathfrak{I} \vDash \psi, \text{ então } \mathfrak{I} \vDash \chi; \\
&\text{ sse } (\varphi \vee \psi) \vDash \chi.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \varphi \vDash \psi &\text{ sse para todo } \mathfrak{I} \text{ se } \mathfrak{I} \vDash \varphi \text{ então } \mathfrak{I} \vDash \psi; \\ &\text{ sse para todo } \mathfrak{I} \vDash (\varphi \to \psi); \\ &\text{ sse } \vDash (\varphi \to \psi). \end{aligned}$$

$\square$

Exercício 4.10. Mostre que:
(a) $\exists x \forall y \varphi \vDash \forall y \exists x \varphi$;
(b) $\forall y \exists x Rxy \nvDash \exists x \forall y Rxy$.

Proof. (a) $\mathfrak{I} \vDash \exists x \forall y \varphi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \forall y \varphi$, então em particular existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{t}{y} \vDash \varphi$ sendo $t \in A$ um termo genérico qualquer. Assim, devido a escolha arbitrária, concluímos que para todo $t \in A$ existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x}\frac{t}{y} \vDash \varphi$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \forall y \exists x \varphi$.

(b) $\mathfrak{I} \vDash \forall y \exists x Rxy$ sse para todo $a \in A$ existe um $t \in A$ tq $\mathfrak{I} \vDash Rta$, mas isso não necessariamente implica que exista um t tq Rta valha para todo a. $\square$

Obs: Lembre-se que a definição de satisfatibilidade é feita na metateoria que, por mais rigorosa que seja, é justificada pela noção intuitiva que temos de cada fórmula e verificada da mesma forma.

Exercício 4.11. Prove que para $Q = \forall, \exists$:
a) $Qx(\varphi \wedge \psi) \vDash\dashv (Qx\varphi \wedge Qx\psi)$;
b) $Qx(\varphi \vee \psi) \vDash\dashv (\varphi \vee Qx\psi)$, se $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$;
c) justifique o motivo da assunção $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$.

Proof. Provarei para $Q = \forall$ porque é fácil ver que a intuição se estende pro outro caso.
a) Obviamente se para todo $a \in A$ temos $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$ e para todo $b \in A$ temos $\mathfrak{I}\frac{b}{x} \vDash \psi$, então para todo $c \in A$, $\mathfrak{I}\frac{c}{x} \vDash \varphi$ e $\mathfrak{I}\frac{c}{x} \vDash \psi$, i.e., para todo $c \in A$, $\mathfrak{I} \vDash (\varphi \wedge \psi)$, analogamente vale a volta. A justificativa se baseia no fato intuitivo de que se estamos variando pelo domínio todo de uma forma numa fórmula e de outra forma na outra, então podemos variar em ambas da mesma forma.

b) $\mathfrak{I} \vDash \forall x \varphi$ sse para todo $a \in A$, $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$, i.e., utilizamos a valoração β que interpreta x como a, mas como $x \notin \mathsf{free}(\varphi)$, então $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(\varphi) = \mathfrak{I}(\varphi)$, a partir disso é fácil provar ambos b) e c). $\square$

Exercício 4.12. Sejam φ, ψ fórmulas tais que $\varphi \vDash\dashv \psi$. Seja χ' obtido de χ substituindo todas as subfórmulas da forma φ por ψ. Mostre que para todo $\chi, \chi \vDash\dashv \chi'$.

Proof. Provaremos por indução em fórmulas:
Se $\chi = \varphi$ é atômica então $\mathfrak{I} \vDash \varphi$ sse, por hipótese, $\mathfrak{I} \vDash \chi' = \psi$;

se $\chi = \neg\varphi$ então $\mathfrak{I} \vDash \chi$ sse não vale $\mathfrak{I} \vDash \varphi$ sse, por hipótese, não vale $\mathfrak{I} \vDash \psi$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \chi' = \neg\psi$;
se $\chi = \xi \vee \varphi$ então $\mathfrak{I} \vDash \chi$ sse $\mathfrak{I} \vDash \xi$ ou $\mathfrak{I} \vDash \varphi$ sse, por hipótese, $\mathfrak{I} \vDash \xi$ ou $\mathfrak{I} \vDash \psi$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \chi' = \xi \vee \psi$;
se $\chi = \exists x\varphi$ então $\mathfrak{I} \vDash \chi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$ sse, por hipótese, existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \psi$, i.e., $\mathfrak{I} \vDash \chi' = \exists x\psi$.
Portanto $\chi \vDash\dashv \chi'$. □

Exercício 4.13. Prove o análogo ao **4.8.** para relação de consequência.

Proof. Pelo **Lema 4.4.** é fácil estender o caso que o conjunto é satisfatível para consequência lógica. □

Exercício 4.14. Um conjunto Φ de sentenças é dito *independente* se não há um $\varphi \in \Phi$ tq $\Phi\backslash\{\varphi\} \vDash \varphi$. Mostre que os conjuntos Φ_{gr} e Φ_{eq} de axiomas dos grupos e relações de equivalência são independentes.

Proof. (a) $\Phi_{\text{gr}} = \{\underbrace{\forall uvw((u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w))}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall u\exists v(u \circ v = e)}_{\varphi_2}, \underbrace{\exists c\forall u(u \circ c = u)}_{\varphi_3}\}$
(i) Como φ_3 garante a existência de um elemento neutro, mas não necessariamente precisamos interpretar e como este, peguemos $(\mathbb{N}\backslash\{1\}, \cdot, 0)$, de fato esta é associativa e possui um número que se operado com qualquer outro no domínio resulta em 0, sendo este, é claro, também o 0, então $\mathfrak{I} \vDash \Phi_{\text{gr}}\backslash\{\varphi_3\}$, mas $\mathfrak{I} \nvDash \varphi_3$;
(ii) Como φ_2 garante a existência de um inverso, basta tomarmos a estrutura $(\mathbb{N}, +, 0)$ em $\mathfrak{I}$ que vale $\mathfrak{I} \vDash \Phi_{\text{gr}}\backslash\{\varphi_2\}$, mas $\mathfrak{I} \nvDash \varphi_2$;
(iii) Como φ_1 garante associatividade tomamos o operador $\circ$ como não associativo, por exemplo a estrutura $(\mathbb{Z}, -, 0)$ em $\mathfrak{I}$ garante que $\mathfrak{I} \vDash \Phi_{\text{gr}}\backslash\{\varphi_1\}$, mas $\mathfrak{I} \nvDash \varphi_1$.

(b) $\Phi_{\text{eq}} = \{\underbrace{\forall a(aRa)}_{\varphi_1}, \underbrace{\forall ab(aRb \leftrightarrow bRa)}_{\varphi_2}, \underbrace{\forall abc(aRb \wedge bRc \to aRc)}_{\varphi_3}\}$
(i) Para $\Phi_{\text{eq}}\backslash\{\varphi_3\}$ basta tomar $(\mathbb{Z}, \cdot, R)$ tq aRb sse $a \cdot b \geqslant 0$. Assim ambos φ_1, φ_2 são satisfeitos, mas escolhendo $b = 0$ em φ_3 tal relação não é sempre verdade;
(ii) Para $\Phi_{\text{eq}}\backslash\{\varphi_2\}$ basta tomar $(\mathbb{N}, \geqslant)$, tal qual não é simétrica;
(iii) Para $\Phi_{\text{eq}}\backslash\{\varphi_1\}$ basta tomar $A = \{a\}$ e (A, R) tq $\forall a \in A(a\not{R}a)$. □

Exercício 4.15. (Generalização do **Exercício 1.6.**). Seja $I \neq \varnothing$, $\forall i \in I$, seja $\mathfrak{A}_i$ uma $\mathcal{S}$-estrutura. Denotaremos por $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ a $\mathcal{S}$-estrutura do produto direto das $\mathcal{S}$-estruturas $\mathfrak{A}_i$:

$$\mathsf{Dom}\left(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i\right) := \left\{g \;\middle|\; g : I \to \bigcup_{i\in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i), \text{ e } g(i) \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i), \forall i \in I\right\}$$

i.e., n-tuplas de todas as possíveis combinações de elementos no domínio de cada estrutura (que denotaremos por $\langle g(i) \mid i \in I\rangle$), e:
para $R \in \mathcal{S}$ n-ária e $g_1, \ldots, g_n \in \prod_{i\in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$:

$$R^{\mathfrak{A}} g_1 \ldots g_n \text{ sse } R^{\mathfrak{A}_i} g_1(i) \ldots g_n(i), \forall i \in I;$$

para $f \in \mathcal{S}$ n-ária e $g_1, \ldots, g_n \in \prod_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$:

$$f^{\mathfrak{A}}(g_1, \ldots, g_n) := \langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i)) \mid i \in I \rangle;$$

e $c^{\mathfrak{A}} := \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$ para $c \in \mathcal{S}$.
Prove que para $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ se $\mathsf{var}(t) \subseteq \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ e $g_0, \ldots, g_{n-1} \in \prod_{i \in I} \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$, então

$$t^{\mathfrak{A}}[g_0, \ldots, g_{n-1}] = \langle t^{\mathfrak{A}_i}[g_0(i), \ldots, g_{n-1}(i)] \mid i \in I \rangle \quad (*)$$

Proof. Se $t = c$, então, por definição, $c^{\mathfrak{A}} = \langle c^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$. Se $t = x$, então, novamente por definição, $t^{\mathfrak{A}}[g_0] = g_0 = \langle g_0(i) \mid i \in I \rangle$. Provados os casos bases assuma $(*)$ como hipótese indutiva. Se $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, então $t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}})$, por hipótese para cada t_i temos $t_i^{\mathfrak{A}} = g_k$, para algum g_k, logo $t^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$ que, por definição, é igual a $\langle f^{\mathfrak{A}_i}(g_{i_1}(i), \ldots, g_{i_n}(i)) \mid i \in I \rangle$. $\square$

Obs: Esse exercício captura a essência e os primeiros passos para introduzir o que os teoristas dos modelos chamam de *Ultraprodutos* e *Ultrapowers* (cuja tradução seria algo como ultrapotências) que são extremamente importantes para a construção de modelos não-padronizados como os hiper-reais. Além disso nos providencia uma ferramenta extremamente útil para provar que determinadas classes de estruturas não são elementares, o Teorema de Łoś–Tarski, mas que infelizmente o Ebbinghaus não trata no livro dele.

Exercício 4.16. Fórmulas deriváveis no seguinte cálculo são denominadas fórmulas Horn:

$$\frac{}{(\neg\varphi_1 \vee \cdots \vee \neg\varphi_n \vee \varphi)} \text{ Se } n \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi \text{ são atômicas;}$$

$$\frac{}{\neg\varphi_0 \vee \cdots \vee \neg\varphi_n} \text{ Se } n \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi_0, \ldots, \varphi_n \text{ são atômicas;}$$

$$\frac{\varphi, \psi}{(\varphi \wedge \psi)}\ ; \qquad \frac{\varphi}{\forall x \varphi}\ ; \qquad \frac{\varphi}{\exists x \varphi}\ .$$

Mostre que se φ é uma *sentença* Horn e se $\mathfrak{A}_i \models \varphi, \forall i \in I$, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$.

Proof. Pelo teorema anterior temos $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models (t_1 \doteq t_2)$ sse $t_1^{\mathfrak{A}} = \langle t_1^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle = t_2^{\mathfrak{A}} = \langle t_2^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle$, i.e., $t_1^{\mathfrak{A}_i} = t_2^{\mathfrak{A}_i}, \forall i \in I$, então obviamente se cada $\mathfrak{A}_i$ o satisfaz, o produto direto também. É fácil estender o argumento paras outras fórmulas atômicas. Disso é fácil tirar que se todas as estruturas satisfazem negações e disjunções de fórmulas atômicas, então o produto direto também satisfaz.
Provado o caso base assuma como hipótese de indução que se $\mathfrak{A}_i \models \varphi, \forall i \in I$, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$. Se $\mathfrak{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)$, então $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ e $\mathfrak{A}_i \models \psi$, por hipótese isso implica que $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \varphi$ e $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models \psi$, i.e., $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)$. Da mesma forma, $\mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi$ sse existe $a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$ tq $\mathfrak{A}_i \frac{a}{x} \models \varphi$, se em cada domínio das $\mathfrak{A}_i$ há um elemento que satisfaz, em particular pegando $a_i \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_i)$ temos que a n-tupla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{Dom}\left(\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i\right)$ também satisfaz, o argumento é análogo para $\forall x \varphi$. $\square$

Exercício 5.9. Seja $\mathcal{S} < \aleph_0$ um conjunto de símbolos e $\mathfrak{A}$ uma $\mathcal{S}$-estrutura tq $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) < \aleph_0$. Mostre que há $\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ cujos modelos são exatamente aquelas $\mathcal{S}$-estruturas isomórficas a $\mathfrak{A}$.

Proof. Construiremos $\varphi_{\mathfrak{A}}$ em função de $\mathfrak{A}$, enumere $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. Como $\mathcal{S} < \aleph_0$, então para especificamente $x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{Var}$ defina $\Phi := \{\varphi \mid \varphi \text{ é atômica e } \mathsf{free}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}\}$ o conjunto de $\mathcal{S}$-fórmulas atômicas com exatamente $x_1, \ldots, x_n$ como variáveis livres. Obviamente $\Phi < \aleph_0$, enumere portanto $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$. Defina por indução $\Psi_0 := \varnothing$ e

$$\Psi_m := \begin{cases} \Psi_{m-1} \cup \{\varphi_m\}, \text{ se } \mathfrak{A} \models \varphi_m[a_1, \ldots, a_n]; \\ \Psi_{m-1} \cup \{\neg\varphi_m\}, \text{ se } \mathfrak{A} \not\models \varphi_m[a_1, \ldots, a_n]. \end{cases}$$

com isso o conjunto

$$\Psi := \bigcup_{i=1}^{k} \Psi_i$$

tem cardinalidade igual a Φ e, portanto, é finito. Obviamente Ψ possui todas as informações necessárias para definirmos todas as funções, relações e constantes e suas dependências com os elementos do domínio, portanto toda estrutura que satisfaz Ψ terá tais propriedades, basta agora garantir que o domínio dessa nova estrutura esteja em bijeção com o de $\mathfrak{A}$, defina então:

$$\varphi_{\mathfrak{A}} := \exists x_1 \ldots x_n \left(\bigwedge \Psi \wedge \forall x \left(\bigvee_{i=1}^{n} x \doteq x_i \right) \right)$$

□

Exercício 5.10. Mostre que: (a) A relação $<$ é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$, i.e., existe uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_2^{\{+,\cdot,0\}}$ tq $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \models \varphi[a, b] \text{ sse } a < b.$$

(b) A relação $<$ não é elementarmente definível em $(\mathbb{R}, +, 0)$.

Proof. (a) Tome $\varphi = \exists c(\neg(c \doteq 0) \wedge (b \doteq a + c^2))$, dessa forma $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \models \varphi[a, b]$ sse $a < b$.

(b) Seja $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ um automorfismo em $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$ tq $\pi(a) = -a$ que é o $c \in \mathbb{R}$ tq $a + c = 0$.
Para provar que π é um automorfismo precisamos:
(i) π é uma bijeção;
(ii) $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$;
(iii) $\pi(0) = 0$.
Como todos são verficados isso garante que é um automorfismo. Agora vejamos que se existe um $\varphi[a, b]$ tq $\mathfrak{A} \models \varphi[a, b]$ sse $a < b$ então como π é estritamente decrescente, $\mathfrak{A} \models \varphi[\pi(a), \pi(b)]$ sse $a > b$. Sabemos, também, pelo **Lema do Isomorfismo** que $\mathfrak{A} \models \varphi[a, b]$ sse $\mathfrak{A} \models \varphi[\pi(a), \pi(b)]$, i.e., $a < b$ sse $b < a$, o que é uma contradição, portanto não existe tal $\varphi[a, b]$ e, com isso, $<$ não é elementarmente definível. □

Exercício 5.11. Alterando o cálculo das fórmulas universais substituindo o quantificador universal em (iii) por um existencial conseguimos o cálculo de fórmulas existenciais. Prove que:
a) A negação de uma sentença universal é logicamente equivalente a uma sentença existencial, e vice versa;
b) Se $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e φ é uma sentença existencial, então $\mathfrak{A} \models \varphi \implies \mathfrak{B} \models \varphi$.

Proof. a) Caso base para ambas: Se φ é livre de quantificadores, obviamente $\neg\varphi$ também é, portanto se φ é uma sentença universal, $\neg\varphi$ é existencial e vice versa. Tomemos como hipótese indutiva que se φ é universal/existencial, então $\neg\varphi$ é existencial/universal. Se $\varphi = (\psi \wedge \chi)$, então $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a $\neg\psi \vee \neg\chi$, assim como para $\varphi = (\chi \vee \psi)$ temos $\neg\psi \wedge \neg\chi$, por hipótese é fácil ver que a propriedade é preservada para ambos os casos. Da mesma forma se $\varphi = \forall x\psi$, então $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a $\exists x\neg\varphi$, o caso contrário é análogo.

b) Por a) sabemos que $\neg\varphi$ é logicamente equivalente a uma fórmula universal, se $\mathfrak{A} \models \varphi$, então $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi$, pela contraposição do **Corolário 5.8.** temos que $\mathfrak{B} \not\models \neg\varphi$, i.e., $\mathfrak{B} \models \varphi$. □

Exercício 6.7. Formalize as seguintes declarações usando o conjunto de símbolos de 6.2.:
a) Todo real positivo tem uma raiz quadrada positiva;
b) Se ρ é estritamente monótona, então ρ é injetiva;
c) ρ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$;
d) para todo x, se ρ é diferenciável em x, então ρ é contínua em x.

Proof. a) $\forall x\exists y(0 < y \wedge y \cdot y \doteq x)$;

b) $(\forall x\forall y(x < y \to \rho(x) < \rho(y)) \vee \forall x\forall y(x < y \to \rho(y) < \rho(x))) \to \forall x\forall y(\rho(x) \doteq \rho(y) \to x \doteq y)$;

c) $\forall u(0 < u \to \exists v(0 < v \wedge \forall x\forall y(\Delta(x, y) < v \to \Delta(\rho(x), \rho(y)) < u)))$;

d) Sejam

$$C(x) := \forall u(0 < u \to \exists v(0 < v \to \forall y(\Delta(y, x) < v \to \Delta(\rho(y), \rho(x)) < u)));$$

$$L(\ell, f(y), p) := \forall u(0 < u \to \exists v(0 < v \wedge \forall y((0 < \Delta(y, p) \wedge \Delta(y, p) < v) \to \Delta(f(y), \ell) < u).$$

Logo $\forall z(\exists w(\rho(x + y) \doteq w \cdot y + \rho(x) \wedge \exists\ell(L(\ell, w, 0))) \to C(x))$. □

Exercício 6.8. Seja $S_{\text{eq}} = \{R\}$, formalize:
a) R é uma relação de equivalência com no mínimo duas classes de equivalência;
b) R é uma relação de equivalência com uma classe de equivalência contendo mais de um elemento.

Proof. a) $\bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists a\exists b(Rab \wedge \exists c(\neg Rac))$;

b) $\bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists a\exists b(Rab \wedge \neg(a \doteq b))$. □

Exercício 6.9. Utilize o **Exercício 4.16.** para provar que:
a) Se para todo $i \in I$ a estrutura $\mathfrak{A}_i$ é um grupo, então $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ é um grupo;
b) Nem a teoria da ordem, nem a dos corpos, pode ser axiomatizada por uma sentença de Horn.

Proof. a) Seja $\mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, vale que $\mathfrak{A} \models \forall x (x \circ e \doteq x)$ sse para todo $g \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ temos $g \circ^{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{A}} = g$, i.e., $\langle g(i) \circ^{\mathfrak{A}_i} e^{\mathfrak{A}_i} \mid i \in I \rangle = \langle g(i) \mid i \in I \rangle$ que é igual sse $g(i) \circ^{\mathfrak{A}_i} e^{\mathfrak{A}_i} = g(i), \forall i \in I$ o que, por hipótese, é verdade. Destrinchando os axiomas de grupo desta forma é fácil mostrar que $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{gr}}$.

b) Assuma que $\varphi_{\text{fd}} = \bigwedge \Phi_{\text{fd}}$ a conjunção dos axiomas de corpos seja uma sentença Horn, pelo **Exercício 1.6.** o produto direto de duas estruturas de corpos $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ não é um corpo e, pelo **Exercício 4.16.**, deveria ser. Contradição, então φ_{fd} não é uma sentença Horn.
Igualmente se $\varphi_{\text{ord}} = \bigwedge \Phi_{\text{ord}}$ é uma sentença de Horn, então se $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ são estruturas de ordem, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ precisa também ser. Note que $\mathfrak{C} \models \forall xy (x < y \vee x \doteq y \vee y < x)$ sse para $x = (a, b)$ e $y = (p, q)$ temos $\forall (a, b)(p, q)((a < p \wedge b < q) \vee (a = p \wedge b = q) \vee (p < a \wedge q < b))$, entretando escolhendo $(a, b), (p, q)$ tq $a < p$ e $b > q$ temos $\mathfrak{C}$ não o satisfaz, contradição. □

Exercício 6.10. $M \subseteq \mathbb{N}$ é denominado *spectrum* se há um conjunto de símbolos $\mathcal{S}$ e uma $\mathcal{S}$-sentença φ tq

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi \text{ possui um modelo com exatamente } n \text{ elementos}\}.$$

Prove que é um spectrum: a) Todo $N \subseteq \mathbb{N} \backslash \{0\}$ finito;
b) $\{n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \mid (n \equiv 0 \pmod{m}) \wedge m \geqslant 1\}$;
c) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$;
d) $\{n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \mid n \text{ não é primo}\}$;
e) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é primo}\}$.

Proof. a) Seja $\varphi_{\geqslant n} := \bigwedge_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \neg(v_i \doteq v_j)$, então

$$\varphi_n := \exists v_1 \dots v_n \left(\varphi_{\geqslant n} \wedge \forall v \left(\bigvee_{i=1}^{n} v \doteq v_i \right) \right)$$

é a formalização de *há exatamente n elementos*.
Como $N \prec \aleph_0$ enumere $N = \{a_1, \dots, a_n\}$, logo podemos descrever $N = \left\{k \in \mathbb{N} \mid \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_{a_i}\right\}$.

b) Pegue $\mathcal{S} = \{R\}$ e defina

$$\varphi = \bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists v_1 \dots v_n \left(\varphi_{\geqslant n} \wedge \forall v \left(\bigvee_{i=1}^{n} R v v_i \right) \right)$$

Isso garante não só que R seja uma relação de equivalência como que o conjunto quociente $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A})/R$ de qualquer modelo de φ terá exatamente n classes de equivalência, como todas possuem a mesma cardinalidade tem de ser possível particionar o domínio em n conjuntos diferentes, i.e., ser um múltiplo de n.

c) Seja $\mathcal{S} = \{R, f, g\}$ a ideia é formalizar ψ tq $f, g : \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \to R$, χ tq $(f(x), g(x))$ é injetivo e ξ que é sobrejetivo, i.e.:

$$\psi := \forall x(Rf(x) \wedge Rg(x));$$
$$\chi := \forall x \forall y((f(x) = f(y) \wedge g(x) = g(y)) \to x = y);$$
$$\xi := \forall x \forall y((Rx \wedge Ry) \to \exists z(f(z) = x \wedge g(z) = y)).$$

Logo, se $\mathfrak{A} \vDash \varphi := \psi \wedge \chi \wedge \xi$, então $\mathfrak{A}$ possui uma bijeção de $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ em R^2, i.e., a cardinalidade do domínio será o quadrado de um natural. Para provarmos que sempre haverá um modelo para cada quadrado perfeito contruiremos um modelo para φ. Seja $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) := \{1, \ldots, m\}$ e defina $R := \{1, \ldots, p\}$, se $f(x)$ é o quociente de $x \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ por p e $g(x)$ o resto, então $x = pf(x) + g(x)$ com f, g unicamente determinados, então para cada x no domínio existem $(f(x), g(x)) \in R^2$ e vice versa.

d) **PENDENTE**

e) $\varphi := \bigwedge \Phi_{\text{ofd}} \wedge \forall x(\neg(x \doteq x + 1) \to x < x + 1)$ garante, visto que todo corpo finito tem característica prima e, portanto, contém p^n elementos, a última restrição garante que $n = 1$. Assuma por contradição que existe $\mathfrak{A} \vDash \varphi$ tq $n \neq 1$, então $\exists a \notin \mathbb{F}_p$, portanto $a \neq 0$, a vista disso temos $a < a + 1 < \cdots < a + p = a$, contradição, visto que $<$ é uma relação de ordem total. $\square$

Exercício 7.5. Prove que:
a) Se $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A) \vDash \Pi$ e se $\sigma^A : A \to A$, dada por $\sigma^A(a) = a +^A 1^A$, então $(A, \sigma^A, 0^A) \vDash$(P1)-(P3).
b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ é caracterizada por Π até o isomorfismo.

Proof. a) Interpretemos em $\mathfrak{A}$ os 3 primeiros axiomas de Π:
(i) $\forall x(\neg x +^A 1^A \doteq 0^A)$ sse $\forall x(\neg \sigma(x) \doteq 0)$ (P1);
(ii) $\forall xy(x +^A 1^A \doteq y +^A 1^A \to x \doteq y)$ sse $\forall xy(\sigma(x) \doteq \sigma(y) \to x \doteq y)$ (P2);
(iii) $\forall X((X0^A \wedge \forall x(Xx \to Xx +^A 1^A)) \to \forall yXy)$ sse $\forall X((X0^A \wedge \forall x(Xx \to X\sigma(x))) \to \forall yXy)$ (P3).

b) Seja $\mathfrak{A} = (A, +^A, \cdot^A, 0^A, 1^A) \vDash \Pi$ para $\pi : \mathfrak{N} \cong \mathfrak{A}$ definimos indutivamente:
$\pi(0) = 0^A$;
$\pi(x + 1) = \pi(x) +^A 1^A$.
Demonstraremos agora que π é bijetivo:
Sobretividade: a definição garante o caso base, $0^A \in \mathsf{Im}(\pi)$. Assuma por hipótese $a = \pi(n) \in \mathsf{Im}(\pi)$, logo $a +^A 1^A = \pi(n) +^A 1^A = \pi(n) +^A \pi(1)$, por definição $a +^A 1^A = \pi(n + 1) \in \mathsf{Im}(\pi)$.
Injetividade: Queremos provar que $\forall nm(n \neq m \to \pi(n) \neq \pi(m))$. Indução em n:
Caso base: $n = 0$ e $m \neq 0$, em particular, assuma sem perda de generalidade, que $m = k + 1$, logo $\pi(n) = 0^A$ e $\pi(m) = \pi(k + 1)$, pela primeira sentença em Π, $k + 1 \neq 0$, portanto $\pi(m) = \pi(k + 1) \neq \pi(0) = 0^A = \pi(n)$.
Provado o caso base assuma como hipótese de indução que $\forall m(n \neq m \to \pi(n) \neq \pi(m))$, façamos agora indução dupla, dessa vez em m:
Caso base: $m = 0$ e $n \neq 0$, em especial $n = k + 1$, a prova deste é análogo ao caso base em n.
Hipótese indutiva: $n \neq m \to \pi(n) \neq \pi(m)$, sejam $n, m \neq 0$, então $n = p + 1$ e $m = q + 1$, se

$n \neq m$, i.e., $\neg(p+1 = q+1)$, por 2 em Π, $p \neq q$ e, por hipótese, $\pi(p) \neq \pi(q)$, portanto, se $\pi(n) = \pi(p) +^A 1^A = \pi(m) = \pi(q) +^A 1^A$, também por 2 em Π temos $\pi(p) = \pi(q)$, contradição, logo $\pi(n) \neq \pi(m)$.
Se π é isomorfismo, provemos que (i) $\pi(n+m) = \pi(n) +^A \pi(m)$ e (ii) $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$:
(i)
Caso base: $\pi(m+0) = \pi(m) = \pi(m) +^A 0^A = \pi(m) +^A \pi(0)$, pela propriedade 4 em Π.
Assuma $\pi(n+m) = \pi(n) +^A \pi(m)$ como hipótese de indução:

$$\begin{aligned}
\pi(m+(n+1)) &= \pi((m+n)+1) && \text{(P5);}\\
&= \pi(m+n) +^A 1^A && \text{definção;}\\
&= (\pi(m) +^A \pi(n)) +^A 1^A && \text{passo indutivo;}\\
&= \pi(m) +^A (\pi(n) +^A 1^A) && \text{(P5);}\\
&= \pi(m) +^A \pi(n+1) && \text{definição.}
\end{aligned}$$

(ii)
Caso base: $\pi(m \cdot 0) = \pi(0) = \pi(m) \cdot 0^A = \pi(m) \cdot \pi(0)$, pela propriedade 6 em Π.
Assuma $\pi(n \cdot m) = \pi(n) \cdot^A \pi(m)$ como hipótese e indução:

$$\begin{aligned}
\pi(m \cdot (n+1)) &= \pi(m \cdot n + m) && \text{(P7);}\\
&= \pi(m \cdot n) +^A \pi(m); &&\\
&= (\pi(m) \cdot^A \pi(n)) +^A \pi(m) && \text{passo indutivo;}\\
&= \pi(m) \cdot^A (\pi(n) +^A 1^A) && \text{(P7);}\\
&= \pi(m) \cdot^A \pi(n+1) && \text{definição.}
\end{aligned}$$

□

Exercício 8.8. Para $n \geqslant 1$ dê uma definição similar dos quantificadores "*existe no máximo n*" e "*existe exatamente n*".

Proof. existe no máximo n pode ser formalizado como

$$\exists v_1 \dots v_n \forall v \left(\bigwedge_{i=1} \varphi \frac{v}{v_i} \to \bigvee_{j=1} v \doteq v_j \right)$$

enquanto que, para garantir a existência de exatamente n, restringimos as variáveis para:

$$\exists v_1 \dots v_n \forall v \left(\bigwedge_{x,y \in \{1,\dots,n\}} \neg v_x \doteq v_u \wedge \bigwedge_{i=1} \varphi \frac{v}{v_i} \to \bigvee_{j=1} v \doteq v_j \right)$$

□

Exercício 8.9. Sejam P e f binária e $x := v_0, y := v_1, u := v_2, v := v_3$ e $w := v_4$. Mostre, usando a **Definição 8.2.** que:
a) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ u\ u}{x\ y\ v} = \exists xy(Pxu \wedge Pyu)$;
b) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv}{u\ \ v} = \exists xy(Pxv \wedge Pyfuv)$;
c) $\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ x\ fuv}{x\ u\ \ v} = \exists wy(Pwx \wedge Pyfuv)$;
d) $(\forall x\exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists ufuu \doteq x)\frac{x\ fxy}{x\ \ u} = \forall v\exists w(Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists ufuu \doteq x$.

Proof. a)

$$\begin{aligned}\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ u\ u}{x\ y\ v} &= \exists x\left(\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ u\ x}{y\ v\ x}\right);\\ &= \exists xy\left(Pxu\frac{u\ x\ y}{v\ x\ y} \wedge Pyv\frac{u\ x\ y}{v\ x\ y}\right);\\ &= \exists xy(Pxu \wedge Pyu).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv}{u\ \ v} &= \exists x\left(\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv\ x}{u\ \ v\ \ x}\right);\\ &= \exists xy\left(Pxu\frac{v\ fuv\ x\ y}{u\ \ v\ \ x\ y} \wedge Pyv\frac{v\ fuv\ x\ y}{u\ \ v\ \ x\ y}\right);\\ &= \exists xy(Pxv \wedge Pyfuv).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\exists xy(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ x\ fuv}{x\ u\ \ v} &= \exists w\left(\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{x\ fuv\ w}{u\ \ v\ \ x}\right);\\ &= \exists wy\left(Pxu\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y} \wedge Pyv\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y}\right);\\ &= \exists wy(Pwx \wedge Pyfuv).\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}(\forall x\exists y(Pxy \wedge Pxu) \vee \exists ufuu \doteq x)\frac{x\ fxy}{x\ \ u} &= \forall v\left(\exists y(Pxy \wedge Pxu)\frac{fxy\ v}{u\ \ x}\right) \vee \exists ufuu\frac{x\ u}{x\ u} \doteq x\frac{x\ u}{x\ u};\\ &= \forall v\exists w\left(\left(Pxy\frac{fxy\ v\ w}{u\ \ x\ y} \wedge Pxu\frac{fxy\ v\ w}{u\ \ x\ y}\right) \vee \exists ufuu \doteq x\right);\\ &= \forall v\exists w((Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists ufuu \doteq x).\end{aligned}$$

□

Exercício 8.10. Mostre que se $x_0, \ldots, x_r \notin \bigcup_{i=0}^r \mathsf{var}(t_i)$, então

$$\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} \models\!\dashv \forall x_0 \ldots x_r\left(\bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i \to \varphi\right).$$

Proof. Assuma que $(*)$ $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(t) = \mathfrak{I}(t)$ se $x \notin \mathsf{var}(t)$ e que $(+)$ $\varphi \to (\psi \to \chi) \vDash\Dashv (\varphi \wedge \psi) \to \chi$, então:
Caso base: $r = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \vDash \varphi\frac{t_0}{x_0} &\text{ sse } \mathfrak{I}\frac{t_0}{x_0} \vDash \varphi; && \text{lema da substituição}\\
&\text{sse para todo } a \in A, \text{ se } a = \mathfrak{I}(t_0), \text{ então } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0} \vDash \varphi;\\
&\text{sse para todo } a \in A, \text{ se } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0}(x_0) = \mathfrak{I}\frac{a}{x_0}(t_0), \text{ então } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0} \vDash \varphi; && \text{por } (*)\\
&\text{sse para todo } a \in A, \text{ se } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0} \vDash x_0 \doteq t_0, \text{ então } \mathfrak{I}\frac{a}{x_0} \vDash \varphi;\\
&\text{sse } \mathfrak{I} \vDash \forall x_0(x_0 \doteq t_0 \to \varphi).
\end{aligned}$$

Hipótese de indução: assuma que vale o enunciado para r

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \vDash \varphi\frac{t_0 \dots t_{r+1}}{x_0 \dots x_{r+1}} &\text{ sse } \mathfrak{I} \vDash \left(\varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}\right)\frac{t_{r+1}}{x_{r+1}};\\
&\text{sse } \mathfrak{I}\frac{t_{r+1}}{x_{r+1}} \vDash \varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}; && \text{lema da substituição}\\
&\text{sse } \mathfrak{I}\frac{t_{r+1}}{x_{r+1}} \vDash \forall x_0 \dots x_r\left(\bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i \to \varphi\right); \text{ hipótese de indução}\\
&\text{sse para todo } a \in A, \text{ se } \mathfrak{I}\frac{a}{x_{r+1}} \vDash x_{r+1} \doteq t_{r+1}, \text{ então } \mathfrak{I}\frac{t_{r+1}}{x_{r+1}} \vDash \varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r};\\
&\text{sse } \mathfrak{I} \vDash \forall x_{r+1}\left(x_{r+1} \doteq t_{r+1} \to \forall x_0 \dots x_r\left(\bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i \to \varphi\right)\right);\\
&\text{sse } \mathfrak{I} \vDash \forall x_0 \dots x_{r+1}\left(x_{r+1} \doteq t_{r+1} \to \left(\bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i \to \varphi\right)\right);\\
&\text{sse } \mathfrak{I} \vDash \forall x_0 \dots x_{r+1}\left(\left(x_{r+1} \doteq t_{r+1} \wedge \bigwedge_{i=0}^{r} x_i \doteq t_i\right) \to \varphi\right); \text{ por } (+);\\
&\text{sse } \mathfrak{I} \vDash \forall x_0 \dots x_{r+1}\left(\bigwedge_{i=0}^{r+1} x_i \doteq t_i \to \varphi\right).
\end{aligned}$$

$(*)$: Se $t = v_0$ uma variável qualquer, como $x \notin \mathsf{var}(t)$ temos $x \neq v_0$, portanto $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(t) = \mathfrak{I}(t)$ e se $t = c$ obviamente também. Assuma que valha $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(t) = \mathfrak{I}(t)$, então $\mathfrak{I}\frac{a}{x}(ft_1 \dots t_n) = f^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}\frac{a}{x}(t_1) \dots \mathfrak{I}\frac{a}{x}(t_n) = f^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_n) = \mathfrak{I}(ft_1 \dots t_n)$, pela hipótese de indução.
$(+)$:

$$\begin{aligned}
\varphi \to (\psi \to \chi) &\vDash\Dashv \neg\varphi \vee (\psi \to \chi);\\
&\vDash\Dashv \neg\varphi \vee \neg\psi \vee \chi;\\
&\vDash\Dashv \neg(\varphi \wedge \psi) \vee \chi;\\
&\vDash\Dashv (\varphi \wedge \psi) \to \chi.
\end{aligned}$$

□

Exercício 8.11. Formalize um cálculo que derive strings exatamente da forma:

$$tx_0 \dots x_r t_0 \dots t_r t \frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \text{ ou } \varphi x_0 \dots x_r t_0 \dots t_r \varphi \frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}.$$

Proof. Da mesma forma que criamos o cálculo para outras regras de formação, como termos e fórmulas, basta repetir o mesmo para a definição de substituição.
Para o cálculo de substituição de termos:

$$\frac{}{x\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ x} \text{ Se } x \neq x_0, \dots, x_r; \qquad \frac{x\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ t_i}{} \text{ Se } x = x_1;$$

$$\frac{}{c\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ c} \text{ Se } c \in \mathcal{S};$$

$$\frac{t'_1\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ s_1 \quad \dots \quad t'_n\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ s_n}{ft'_1 \dots t'_n\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ fs_1 \dots s_n} \text{ Se } f \in \mathcal{S}, \text{ n-ária.}$$

Para o cálculo de substituição de fórmulas:

$$\frac{t'_1\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ s_1 \quad t'_2\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ s_2}{t'_1 \doteq t'_2\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ s_1 \doteq s_2};$$

$$\frac{t'_1\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ s_1 \quad \dots \quad t'_n\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ s_n}{Rt'_1 \dots t'_n\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ Rs_1 \dots s_n} \text{ Se } R \in \mathcal{S}, \text{ n-ária;}$$

$$\frac{\varphi\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ \psi}{\neg\varphi\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ \neg\psi}; \quad \frac{\varphi\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ \chi \quad \psi\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ \xi}{\varphi \vee \psi\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ \chi \vee \xi}.$$

$x_{i_1} \dots x_{i_s}$ $(i_1 < \dots < i_s)$ são as variáveis em $x_0, \dots, x_r$ tq $x_i \in \mathsf{free}(\exists x\varphi)$, $x_i \neq t_i$ e $x \neq x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$

$$\frac{\varphi\ x_{i_1} \dots x_{i_s} x\ t_{i_1} \dots t_{i_s} u\ \psi}{\exists x\varphi\ x_0 \dots x_r\ t_0 \dots t_r\ \exists u\psi}$$

onde $u = x$ se $x \notin \mathsf{free}(t_{i_1}, \dots, t_{i_s})$, caso contrário u é a primeira variável $v_0, v_1, \dots \notin \mathsf{var}(\varphi, t_{i_1}, \dots, t_{i_s})$.
□

4 Cálculo de Sequentes

Exercício 2.7. Analise quais das regras abaixo estão corretas:

$$\frac{\Gamma\ \varphi_1\ \psi_1 \qquad \Gamma\ \varphi_2\ \psi_2}{\Gamma\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)\ (\psi_1 \vee \psi_2)}\ (i); \qquad \frac{\Gamma\ \varphi_1\ \psi_1 \qquad \Gamma\ \varphi_2\ \psi_2}{\Gamma\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)\ (\psi_1 \wedge \psi_2)}\ (ii).$$

Proof. Provemos primeiro que (i) é correta:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi_1\ \psi_1}{\Gamma\ \varphi_2\ (\psi_1 \vee \psi_2)}\,(\vee\mathbf{S}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi_2\ \psi_2}{\Gamma\ \varphi_2\ (\psi_1 \vee \psi_2)}\,(\vee\mathbf{S})}{\Gamma\ (\varphi_1 \vee \varphi_2)\ (\psi_1 \vee \psi_2)}\,(\vee\mathbf{A})$$

Agora que (ii) não é correta: Note que se $\Gamma\varphi_1 \models \psi_1$ e $\Gamma\varphi_2 \models \psi_2$, então se $\mathfrak{I}$ satisfaz $\Gamma(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ temos que $\mathfrak{I} \models \varphi_1$ ou $\mathfrak{I} \models \varphi_2$, i.e., $\mathfrak{I} \models \psi_1$ ou $\mathfrak{I} \models \psi_2$, portanto não necessariamente $\mathfrak{I} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$, portanto este não é correto. Um argumento análogo também serve como prova para (i). ☐

Exercício 3.6. Derive as seguintes regras:

$$\dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \neg\neg\varphi}\,(\text{a1}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \neg\neg\varphi}{\Gamma\ \varphi}\,(\text{a2}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi \quad \Gamma\ \psi}{\Gamma\ (\varphi \wedge \psi)}\,(\text{b})$$

$$\dfrac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ (\varphi \to \psi)}\,(\text{c}) \qquad \dfrac{\Gamma\ (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma\ \varphi}\,(\text{d1}) \qquad \dfrac{\Gamma\ (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma\ \psi}\,(\text{d2})$$

Proof. a1):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \neg\neg\neg\varphi\ \neg\neg\neg\varphi}\,(\mathbf{Assm})}{\Gamma\ \neg\neg\neg\varphi\ \neg\varphi}\,(\text{a2}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \neg\neg\neg\varphi\ \varphi}\,(\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\neg\varphi}\,(\mathbf{Ctr})$$

a2):

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\varphi}\,(\mathbf{Assm}) \qquad \dfrac{\Gamma\ \neg\neg\varphi}{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\neg\varphi}\,(\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \varphi}\,(\mathbf{Ctr})$$

b):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\psi}\,(\mathbf{Assm}) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \psi\ \varphi}\,(\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi}\,(\mathbf{Cp})}{\Gamma\ (\neg\varphi \vee \neg\psi)\ \neg\psi}\,(\vee\mathbf{A})}{\Gamma\ \neg\neg\psi\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}\,(\mathbf{Cp}) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma\ \psi}{\Gamma\ (\neg\varphi \vee \neg\psi)\ \psi}\,(\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}\,(\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv (\varphi \wedge \psi)}\,(\mathbf{PC})$$

c):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\varphi}\,(\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \neg\psi\ (\neg\varphi \vee \psi)}\,(\vee\mathbf{S}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \psi\ \psi}\,(\mathbf{Assm})}{\Gamma\ \psi\ (\neg\varphi \vee \psi)}\,(\vee\mathbf{S})}{\Gamma\ (\neg\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi \to \psi)}\,(\mathbf{Pc})$$

d1) e d2) (basta comutá-los):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\varphi}\,(\mathbf{Assm})}{\Gamma\ \neg\varphi\ (\neg\varphi \vee \neg\psi)}\,(\vee\mathbf{S})}{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)\ \neg\neg\varphi}\,(\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)\ \varphi}\,(a2) \qquad \Gamma\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}{\Gamma\ \varphi}\,(\mathbf{Ch})$$

$\square$

Exercício 4.5. Analise quais das regras abaixo estão corretas:

$$\frac{\varphi\ \psi}{\exists x\varphi\ \exists x\psi}\ (i);\qquad \frac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ \forall x\varphi\ \exists x\psi}\ (ii);\qquad \frac{\Gamma\ \varphi\frac{fy}{x}}{\Gamma\ \forall x\varphi}\ (iii).$$

Proof. (i): Sabemos que $\varphi \vDash \psi$, um modelo $\mathfrak{I} \vDash \exists x\varphi$ sse existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$, o que, por hipótese, implica que $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \psi$, i.e., se $\mathfrak{I} \vDash \exists x\varphi$, então $\mathfrak{I} \vDash \exists x\psi$, portanto $\exists x\varphi \vDash \exists x\psi$.
(ii): Assumindo que $\Gamma\varphi \vDash \psi$, um modelo $\mathfrak{I}$ satisfaz $\Gamma\forall x\varphi$ sse para todo $a \in A$ vale que $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \varphi$, o que, por hipótese, implica que $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \psi$. Então, em particular, existe um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \vDash \psi$, i.e., $\Gamma\forall x\varphi \vDash \exists x\psi$.
(iii): Temos $\Gamma \vDash \varphi\frac{fy}{x}$, se $\mathfrak{I} \vDash \Gamma$, então, por hipótese, $\mathfrak{I} \vDash \varphi\frac{fy}{x}$, como há uma instância em que vale φ, pela regra de introdução do existencial no sucedente temos que $\mathfrak{I} \vDash \exists x\varphi$, mas obviamente isso não é o bastante para concluir que $\mathfrak{I} \vDash \forall x\varphi$. $\square$

Exercício 5.5. Derive as seguintes regras:

$$\frac{\Gamma\ \forall x\varphi}{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}}\ \text{(a1)}\qquad \frac{\Gamma\ \forall x\varphi}{\Gamma\ \varphi}\ \text{(a2)}\qquad \frac{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}\ \psi}{\Gamma\ \forall x\varphi\ \psi}\ \text{(b1)}$$

$$\frac{\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma\ \forall x\varphi}\ \text{(b2) se } y \notin \mathsf{free}(\Gamma\forall x\varphi)\qquad \frac{\Gamma\ \varphi\ \psi}{\Gamma\ \forall x\varphi\ \psi}\ \text{(b3)}\qquad \frac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \forall x\varphi}\ \text{(b4)}$$

Proof. a1) e a2) (a2 é uma instância de a1 para $t = x$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi\frac{t}{x}\ \varphi\frac{t}{x}}(\textbf{Assm})}{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}\ \varphi\frac{t}{x}}(\textbf{Ant})}{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}\ (\exists x\neg\varphi \vee \varphi\frac{t}{x})}(\vee\textbf{S}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi\frac{t}{x}\ \neg\varphi\frac{t}{x}}(\textbf{Assm})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{t}{x}\ \neg\varphi\frac{t}{x}}(\textbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{t}{x}\ \exists x\neg\varphi}(\exists\textbf{S})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{t}{x}\ (\exists x\neg\varphi \vee \varphi\frac{t}{x})}(\vee\textbf{S})}{\Gamma\ \exists x\neg\varphi \vee \varphi\frac{t}{x} \equiv \forall x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}}(\textbf{PC}) \quad \Gamma\ \forall x\varphi}{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}}(\textbf{Mp})$$

b1) e b3) (b3 é uma instância de b1 para $t = x$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}\ \psi}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\varphi\frac{t}{x}}(\textbf{Cp})}{\Gamma\ \neg\psi\ \exists x\neg\varphi}(\exists\textbf{S})}{\Gamma\ (\neg\exists x\neg\varphi)\ \neg\neg\psi)}(\textbf{Cp})}{\Gamma\ \forall x\varphi\ \psi \equiv \neg\exists x\neg\varphi\ \psi}\text{(a2)}$$

b2) e b4) (b4 é uma instância de b2 para $y = x$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma\ \chi\ \varphi\frac{y}{x}}\ (\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{y}{x}\ \neg\chi}\ (\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \exists x\neg\varphi\ \neg\chi}\ (\exists\mathbf{A})}{\Gamma\ \neg\neg\chi\ \neg\exists x\neg\varphi}\ (\mathbf{Cp}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma\ \neg\chi\ \varphi\frac{y}{x}}\ (\mathbf{Ant})}{\Gamma\ \neg\varphi\frac{y}{x}\ \neg\neg\chi}\ (\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \exists x\neg\varphi\ \neg\neg\chi}\ (\exists\mathbf{A})}{\Gamma\ \neg\neg\neg\chi\ \neg\exists x\neg\varphi}\ (\mathbf{Cp})}{\Gamma\ \forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi}\ (\mathbf{PC})$$

escolha χ tq $y \notin \mathsf{free}(\Gamma\exists x\varphi\chi)$ para utilizar $(\exists\mathbf{A})$. □

Exercício 7.8. Defina $(\exists\forall)$ como a regra:

$$\overline{\Gamma\ \exists x\varphi\ \forall x\varphi}$$

a) Determine quando $(\exists\forall)$ é uma regra derivável;
b) Seja $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + (\exists\forall)$, para $\mathfrak{S}$ o cálculo de sequentes. Todo sequente é derivável em $\mathfrak{S}'$?

Proof. a) Um modelo $\mathfrak{I}$ satisfaz $\Gamma\exists x\varphi$ sse há um $a \in A$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$, mas, como dito anteriormente, um elemento satisfazer não é condição suficiente para que todos satisfaçam. À vista disso $\Gamma\exists x\varphi \models \forall x\varphi$ quando $\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$. Portanto a validez de $(\exists\forall)$ é contingente, mas esta com certeza não é correta.

b) Sim, escolhendo um φ específico tq $\exists x\varphi$, mas $\neg\forall x\varphi$, temos:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x\varphi\ \forall x\varphi}\ (\exists\forall)}{\vdots}}{\dfrac{\psi \wedge \neg\psi}{\chi}\ (\mathbf{Ctr'})}$$

e, portanto, $\vdash \chi$ para um χ arbitrário. Note que uma confusão comum é a de que $\mathfrak{S}'$ não necessariamente deriva uma contradição. Alguém poderia argumentar que, embora possamos provar que este deriva uma contradição, esta só é feita instanciando um φ específico e, portanto, o conjunto de fórmulas que derivaria uma contradição, não o cálculo. Acontece que o cálculo é único, suas regras seriam como "axiomas esquema" onde todos os sequentes deriváveis são justamente as instâncias destes, já que φ é uma metavariável, então derivar $\perp$ a partir de uma instância não gera um problema. □

5 O Teorema da Completude

Exercício 1.12. a) Seja $\mathcal{S} = \{R\}$ com R unário e $\Phi := \{\exists xRx\} \cup \{\neg Ry \mid y \in \mathsf{Var}\}$. Mostre que:
- $\mathsf{Sat}(\Phi)$ e, portanto, $\mathsf{Con}(\Phi)$;
- Para nenhum $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ vale $\Phi \vdash Rt$;
- Se $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ é um modelo de Φ, então $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A})\backslash\{\mathfrak{I}(t) \mid t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}\} \neq \varnothing$.

b) Seja $\mathcal{S} = \{R\}$ com R unário e $x, y \in \mathsf{Var}$ com $x \neq y$. Para $\Phi = \{Rx \vee Ry\}$ mostre que:
- $\Phi \nvdash Rx$ e $\Phi \nvdash \neg Rx$, i.e., Φ não é completo sobre negação;
- $\mathfrak{I}^{\Phi} \not\models \Phi$.

Proof. a) Basta primeiro acharmos um modelo para Φ, seja $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ tq $\beta(v_i) := c \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}), \forall i \in \mathbb{N}$ e $R^{\mathfrak{A}} = \{a\}$. Então $\mathfrak{I} \models \neg Ry$ sse não vale que $\mathfrak{I}(R)\beta(y) = R^{\mathfrak{A}}c$, o que é satisfeito, visto que $R^{\mathfrak{A}} = \{a\}$. Além disso, $\mathfrak{I} \models \exists x Rx$, pois existe $a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ tq $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models Rx$. Logo $\mathsf{Sat}(\Phi)$ e, por consequência, $\mathsf{Con}(\Phi)$.
De fato, para nenhum $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ vale $\Phi \vdash Rt$, como não há símbolos de função, então $\mathcal{T}^{\mathcal{S}} = \mathsf{Var}$, assuma que $\Phi \vdash Rx$, mas x é uma variável, então em particular $\neg Rx \in \Phi$, logo $\Phi \vdash Rx$ e $\Phi \vdash \neg Rx$, contradição, pois Φ é consistente.
Assuma que $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \backslash \{\mathfrak{I}(x) \mid x \in \mathsf{Var}\} = \varnothing$, logo $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \subseteq \{\mathfrak{I}(x) \mid x \in \mathsf{Var}\}$, segue-se disso que, como $\forall x \in \mathsf{Var}$ vale $\neg Rx$, então $\forall a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ temos $\neg Ra$, i.e., não existe $b \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ tq Rb, então $\mathfrak{I}$ não é modelo de Φ, contradição.

b) $\mathfrak{I}$ é modelo de Φ sse $\mathfrak{I} \models Rx$ ou $\mathfrak{I} \models Ry$, obviamente existem modelos $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ tq o primeiro satisfaz Rx e o segundo não, mas satisfaz Ry. Assuma que $\Phi \vdash Rx$, por correção $\Phi \models Rx$, o que é uma contradição, devido a existência de $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$, da mesma forma $\Phi \nvdash \neg Rx$. Como Φ não prova algo da forma $t_1 \doteq t_2$ as classes de equivalência possuem somente um elemento, então $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}^{\Phi}) = \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$. Como $R^{\Phi} = \{t \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}^{\Phi}) \mid \Phi \vdash Rt\}$ e Φ não deriva algo da forma Rt, então $R^{\Phi} = \varnothing$. Sabemos que $\mathfrak{I}^{\Phi} \models \Phi$ sse $\mathfrak{I}^{\Phi} \models Rx$ ou $\mathfrak{I}^{\Phi} \vdash Ry$, como não vale nenhum dos dois, então $\mathfrak{I}^{\Phi} \not\models \Phi$. □

Exercício 1.13. Fixe um conjunto de símbolos $\mathcal{S}$. Considere $\mathfrak{I}^{\Phi}$ para $\mathsf{Inc}(\Phi)$. $\mathfrak{I}^{\Phi}$ depende da escolha do conjunto inconsistente Φ?

Proof. Não, note que se Φ é inconsistente então ele deriva qualquer fórmula, em particular para todos $t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ temos $\Phi \vdash t_1 \doteq t_2$, logo o domínio de $\mathfrak{I}^{\Phi}$ consistente somente de uma classe de equivalência sempre que $\mathsf{Inc}(\Phi)$, independendo da escolha das fórmulas em Φ. □

Exercício 2.5. Seja $\mathcal{S}$ arbitrário e $\Phi = \{v_0 \doteq t \mid t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}\} \cup \{\exists v_0 v_1 \neg(v_0 \doteq v_1)\}$. Mostre que $\mathsf{Con}(\Phi)$ e que não há $\Psi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ tq $\Phi \subseteq \Psi$ e Ψ contém testemunhas.

Proof. Escolha β e a interpretação das funções e constantes tais que $\mathfrak{I}(t) = a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}), \forall t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$. Além disso seja $\mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) = \{a, b\}$ com $a \neq b$, portanto $\mathfrak{I} \models \Phi$, i.e., $\mathsf{Sat}(\Phi)$, logo $\mathsf{Con}(\Phi)$. Assuma agora que existe tal Ψ do enunciado. Como $\mathsf{Con}(\Phi)$ e ele contém testemunhas pelo **Lema 1.9.** c) (que pode ser usado sem a hipótese de que Φ é completo sobre negação, visto que não é necessário para prova de c)) $\Phi \vdash \exists v_0 v_1 \neg(v_0 \doteq v_1)$ sse $\Phi \vdash \neg(t_1 \doteq t_2)$. Pela regra de substituição é possível provar também que $\Phi \vdash t_1 \doteq t_2$, i.e. $\mathsf{Inc}(\Phi)$, contradição, logo não existe tal Ψ. □

6 O Teorema de Löwenheim-Skolem e o Teorema da Compacidade

Exercício 1.3. Mostre que todo conjunto de fórmulas Φ tq $\Phi \geq \aleph_0$ é satisfatível sobre um domínio contável.

Proof. É um corolário direto do **Teorema de Löwenheim, Skolem, e Tarski** cuja prova se segue da junção entre a versão descendente e ascendente do **Teorema de Löwenheim-Skolem**, que é provada após o exercício, portanto não daremos aqui. Do teorema ascendente existe um modelo de Φ com cardinalidade no mínimo $\aleph_0$ e, pelo descendente, um modelo com cardinalidade no máximo $\aleph_0$, portanto existe um com exatamente a cardinalidade $\aleph_0$. □

Exercício 2.5. Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de símbolos. Para todo conjunto de $\mathcal{S}$-sentenças Φ satisfatível seja $\mathfrak{A}_\Phi$ uma $\mathcal{S}$-estrutura tq $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Além disso seja $\Sigma := \{\mathfrak{A}_\Phi \mid \Phi \subseteq \mathcal{L}_0^\mathcal{S}, \mathsf{Sat}(\Phi)\}$, e para toda $\mathcal{S}$-sentença φ defina $X_\varphi := \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$. Mostre que:
a) O sistema $\{X_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}_0^\mathcal{S}\}$ é uma base para uma topologia em Σ;
b) Todo conjunto X_φ é fechado;
c) Use o Teorema da Compacidade para mostrar que toda cobertura aberta de Σ tem uma sub-cobertura finita, portanto Σ é (quasi-)compacta.

Proof. **PENDENTE** □

Exercício 3.7. Seja $\mathfrak{K}$ uma classe de estruturas Δ-elementar. Mostre que a classe $\mathfrak{K}^\infty$ de estruturas em $\mathfrak{K}$ com domínio infinito também é Δ-elementar.

Proof. Defina $\Psi := \{\varphi_{\geqslant n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sendo $\varphi_{\geqslant n}$ o mesmo do **Exercício 6.10.**. Como $\mathfrak{K}$ é elementar podemos descrevê-lo por $\mathsf{Mod}^\mathcal{S}\Phi$, basta então pegarmos $\mathsf{Mod}^\mathcal{S}\Phi \cup \Psi$ que esta será justamente a classe dos modelos de $\mathfrak{K}$ cujo domínio é infinito. □

Exercício 3.8. Se $\mathfrak{K}$ é uma classe de $\mathcal{S}$-estruturas, $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^\mathcal{S}$ e $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^\mathcal{S}\Phi$, então Φ é denominado um *sistema de axiomas* para $\mathfrak{K}$, mostre que:
a) $\mathfrak{K}$ é elementar sse existe um sistema de axiomas finito para $\mathfrak{K}$;
b) Se $\mathfrak{K}$ é elementar e $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^\mathcal{S}\Phi$, então existe $\Phi_0 \subseteq \Phi$ tq $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^\mathcal{S}\Phi_0$.

Proof. a) ($\Rightarrow$) Se $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^\mathcal{S}\varphi$ é elementar, trivialmente existe tal $\Phi = \{\varphi\}$ finito.
($\Leftarrow$) Se existe $\Phi < \aleph_0$ tq $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^\mathcal{S}\Phi$ basta tomar $\varphi := \bigwedge \Phi$, como Φ é finito, então φ é uma fórmula finita, logo $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^\mathcal{S}\varphi$, i.e., é elementar.

b) Seja φ tq $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^\mathcal{S}\varphi$, como $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^\mathcal{S}\Phi$, então $\Phi \models\dashv \varphi$, por completude $\Phi \vdash \varphi$. Obviamente o sequente $\varphi_1 \dots \varphi_n \varphi$ em Φ para derivar φ é finito, seja então $\Phi_0 = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, como $\Phi_0 \vdash \varphi$ por correção $\Phi_0 \models \varphi$. Além disso $\varphi \models \Phi \models \Phi_0$, i.e., $\mathsf{Mod}^\mathcal{S}\Phi_0 = \mathsf{Mod}^\mathcal{S}\varphi = \mathfrak{K}$. □

Exercício 3.9. Sejam $\mathfrak{K}$ e $\mathfrak{K}_1$ classes de $\mathcal{S}$-estruturas tq $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}$. Seja também $\mathfrak{K}_2 := \mathfrak{K} \backslash \mathfrak{K}_1$ e considere $\mathfrak{K}$ elementar e $\mathfrak{K}_1$ Δ-elementar, prove que:
a)

$$\mathfrak{K}_1 \text{ é elementar } \overset{(1)}{\text{sse}} \ \mathfrak{K}_2 \text{ é } \Delta\text{-elementar;}$$
$$\overset{(2)}{\text{sse}} \ \mathfrak{K}_2 \text{ é elementar;}$$

b) Conclua que a classe de corpos de característica prima não é Δ-elementar.

Proof. a)(2)($\Rightarrow$) $\Rightarrow$ (1)($\Rightarrow$) Seja $\mathfrak{K}_1 = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\varphi)$ e $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\psi)$, como $\mathfrak{K}_2 := \mathfrak{K} \backslash \mathfrak{K}_1$ basta tomarmos $\chi := \psi \wedge \neg\varphi$ que teremos $\mathfrak{K}_2 = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\chi)$, o que é fácil provar, portanto $\mathfrak{K}_2$ é elementar e, por consequência, é também Δ-elementar.
(1)($\Leftarrow$) Seja $\mathfrak{K}_1 = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\Phi_1)$, $\mathfrak{K}_2 = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\Phi_2)$ e $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\varphi)$. Como $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K} \backslash \mathfrak{K}_1$, então $\mathsf{Inc}(\Phi_1 \cup \Phi_2)$, por compacidade existe um $\Phi_0 \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$ finito tq $\mathsf{Inc}(\Phi_0)$, seja, portanto, $\Psi := \Phi_2 \cap \Phi_0$, como $\Phi_0 \subseteq \Phi_1 \cup \Psi$ e este é inconsistente, então $\Phi_1 \cup \Psi$ também é. Como Ψ é finito é possível definir

$$\psi := \left(\bigvee_{\chi \in \Psi} \neg\chi \right) \wedge \varphi$$

Basta agora provar que $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\psi) = \mathfrak{K}_1$:
($\Rightarrow$) Se $\mathfrak{A} \in \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\psi)$, i.e., $\mathfrak{A} \models \psi$, então $\mathfrak{A} \models \varphi$, portanto $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$, além disso $\mathfrak{A} \models \chi$ para algum $\chi \in \Psi$, logo $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{K}_2$, i.e., $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}_1$.
($\Leftarrow$) Se $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}_1$, então $\mathfrak{A} \in \mathfrak{K}$, i.e., $\mathfrak{A} \models \varphi$. Além disso $\mathfrak{A} \models \Phi_1$, logo $\mathfrak{A} \not\models \Psi$, visto que $\mathsf{Inc}(\Phi_1 \cup \Psi)$, então existe um $\chi \in \Psi$ tq $\mathfrak{A} \not\models \chi$, ou melhor, $\mathfrak{A} \models \neg\chi$, portanto $\mathfrak{A} \models \psi$ e $\mathfrak{A} \in \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\psi)$.
(2)($\Leftarrow$) Note que $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} \backslash \mathfrak{K}_2$, utilizando a mesma estratégia que nos primeiros casos temos que $\mathfrak{K}_1 = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}(\psi \wedge \neg\varphi)$, para ψ e φ as caracterizações de $\mathfrak{K}$ e $\mathfrak{K}_2$, respectivamente.

b) Utilizando a primeira parte do exercício seja $\mathfrak{K}$ a classe dos corpos, tomando φ_F a conjunção de todos os axiomas de corpo temos que $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}_{\text{ar}}}\varphi_F$ sendo esta, portanto, elementar. Seja também $\mathfrak{K}_1$ a classe de corpos cuja característica é 0, como explicitado em **3.2.** $\mathfrak{K}_1$ é Δ-elementar, mas pelo **Teorema 3.3.** este não é elementar. Note que tais condições satisfazem as hipóteses de a) e $\mathfrak{K}_2$ são todos os corpos cuja característica é prima, visto que todo corpo ou possui característica 0 ou prima. Como $\mathfrak{K}_2$ Δ-elementar implica $\mathfrak{K}_1$ elementar, por contraposição $\mathfrak{K}_1$ não elementar implica $\mathfrak{K}_2$ não Δ-elementar, visto que o antecedente é verdadeiro, então a classe de corpos de característica prima não é Δ-elementar. □

Exercício 3.10. $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ é dito independente se nenhum $\varphi \in \Phi$ é tq $\Phi \backslash \{\varphi\} \vdash \varphi$, mostre que:
a) Todo $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ tq $\Phi \prec \aleph_0$ tem um $\Phi_0 \subseteq \Phi$ independente tq $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi_0$;
b) Se $\mathcal{S} \preceq \aleph_0$, então toda classe de $\mathcal{S}$-estruturas Δ-elementar tem um sistema de axiomas independente.

Proof. a) O caso que Φ é independente é trivial, seja portanto Φ não independente. Como Φ é finito enumere $\Phi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ e defina recursivamente: $\Psi_0 := \Phi$ e

$$\Psi_k = \begin{cases} \Psi_{k-1} \backslash \{\varphi_{k-1}\}, \text{ se } \Psi_{k-1} \backslash \{\varphi_{k-1}\} \vdash \varphi_{k-1}; \\ \Psi_{k-1}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Seja então $\Psi := \Psi_{n+1} = \Phi_0 \subseteq \Phi$, como Φ é finito, Ψ também é. Segue diretamente da definição que Ψ é independente e $\Psi \vdash \varphi_i$, para $i = 0, \dots, n$, portanto $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Psi = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$.

b) Seja $\mathfrak{K}$ tal estrutura, o caso em que $\mathfrak{K}$ é elementar é trivial, pelo **Exercício 3.8.** a) há Φ finito tal que $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$ e procedemos com a independência como em a). Assuma portanto $\mathfrak{K}$ não elementar, como $\mathcal{S} \preceq \aleph_0$, então $\mathcal{L}_0^{\mathcal{S}} \approx \aleph_0$ e como $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$, então $\Phi \approx \aleph_0$. Enumeremos portanto Φ como $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ e definimos recursivamente $\Psi_0 := \Phi$ e

$$\Psi_k = \begin{cases} \Psi_{k-1} \backslash \{\varphi_{k-1}\}, \text{ se } \Psi_{k-1} \backslash \{\varphi_{k-1}\} \vdash \varphi_{k-1}; \\ \Psi_{k-1}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Dessa forma $\Psi := \bigcap_{i=0}^{\infty} \Psi_i = \Phi_0 \subseteq \Phi$ é independente por definição e tal que $\Psi \vdash \varphi_i, \forall i \geqslant 0$, portanto $\mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Psi = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi$. $\square$

Exercício 3.11. Seja $\Phi \prec \aleph_0$ um sistema de axiomas para espaços vetorias expresso em termos de $\mathcal{S} = \{\underline{F}, \underline{V}, +, \cdot, 0, 1, \circ, e, *\}$, prove que:
a) Para todo n a classe dos espaços vetoriais n-dimensionais é elementar;
b) A classe de espaços vetoriais de dimensão infinita é Δ-elementar;
c) A classe de espaços vetoriais de dimensão finita não é Δ-elementar.

Proof. a) Seja φ_F a conjunção dos axiomas de um espaço vetorial. Para provar que a classe $\mathfrak{K}$ dos espaços vetoriais n-dimensionais é elementar, basta construirmos $\varphi_{n\text{-Dim}}$ tq $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\varphi_{n\text{-Dim}}$. Adotaremos

$$\exists v_1 \dots v_n \in X\varphi := \exists v_1 \dots v_n(Xv_1 \wedge \cdots \wedge Xv_n \to \varphi) \text{ e } a_1, \dots, a_n \neq x := \neg(a_1 \doteq x \vee \cdots \vee a_n \doteq x)$$

temos então que $\varphi_{n-\text{Dim}}$ pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} \varphi &:= \bigwedge_{i,j \in \{1,\dots,n\}} v_i \neq v_j; \\ \psi &:= \forall a_1, \dots, a_n \in \underline{F}(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \to a_1, \dots, a_n \neq 0) \\ \chi &:= \forall u \in \underline{V} \exists b_1, \dots, b_n \in \underline{F}(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \doteq u) \\ \varphi_{n-\text{Dim}} &:= \exists v_1 \dots v_n \in \underline{V}\, (\varphi \wedge \psi \wedge \chi) \end{aligned}$$

onde φ expressa que existem n vetores distintos, ψ que estes são linearmente independentes e χ que todo vetor pode ser escrito como uma combinação linear destes.

b) Seja $\varphi_{n\text{-Dim}}$ a caracterização dos espaços n-dimensionais em a). Portanto

$$\Phi_{\text{inf}} := \{\neg\varphi_{n\text{-Dim}} \mid n \geqslant 0\}$$

é tq $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{inf}}$ sse $\mathfrak{A}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita, logo a classe $\mathfrak{K}$ de corpos de dimensão infinita é tq $\mathfrak{K} = \mathsf{Mod}^{\mathcal{S}}\Phi_{\text{inf}}$, i.e., é Δ-elementar.

c) Assuma por contradição que exista Φ_{fin} tq $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{fin}}$ sse $\mathfrak{A}$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Mostraremos que existe um espaço vetorial de dimensão infinita que também satisfaz Φ_{fin}:

$$\Psi := \Phi_{\text{fin}} \cup \Phi_{\text{inf}}$$

obviamente todo modelo de Ψ, além de possuir dimensão infinita, também é um modelo de Φ_{fin}, basta mostrarmos que $\mathsf{Sat}(\Psi)$. Note que para todo $\Psi_0 \subseteq \Psi$ finito existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\Psi_0 \subseteq \Phi_{\text{fin}} \cup \{\neg\varphi_{n\text{-Dim}} \mid n_0 \geqslant n \geqslant 0\}$ é satisfatível, visto que, por a), sempre há um espaço vetorial de dimensão maior que n_0 que, obviamente, é finito. Pelo Teorema da Compacidade como todo subconjunto finito de Ψ é satisfatível, então também é Ψ, i.e., existe um modelo de Φ_{fin} cuja dimensão é infinita, contradição. $\square$

Exercício 4.8. Mostre que se uma $\mathcal{S}_{\text{ar}}$-sentença φ é válida em todos os corpos ordenados não arquimedianos, então φ é válida em todos os corpos ordenados.

Proof. Basicamente, se existe tal φ então a classe dos corpos ordenados não-arquimedianos é elementar. Assuma portanto, por contradição, que a classe $\mathfrak{K}_1$ de corpos ordenados não arquimedianos seja elementar. Temos então que $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é a classe dos corpos ordenados. $\mathbb{F}$ é elementar e $\mathfrak{K}_1$ é, por hipótese, elementar. Então, pelo **Exercício 3.9.**, seu complementar $\mathfrak{K}_2$ de corpos ordenados arquimedianos teria de ser elementar, o que é uma contradição, visto o **Teorema 4.5.** que prova que $\mathfrak{K}_2$ não é Δ-elementar. $\square$

Exercício 4.9. Seja a $\mathcal{S}_{\text{ar}}$-estrutura $\mathfrak{A}$ um modelo de $\mathsf{Th}(\mathfrak{N})$. Seja a relação binária $<^{\mathfrak{A}}$ definida em $A = \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$ como: $\forall a, b \in A$

$$a <^{\mathfrak{A}} b \text{ sse } a \neq b \text{ e existe um } c \in A \text{ tq } a +^{\mathfrak{A}} c \doteq b$$

Mostre que $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}}) \models \mathsf{Th}(\mathfrak{N}^<)$.

Proof. Como $\mathfrak{A} \models \mathsf{Th}(\mathfrak{N})$ e $\mathfrak{N}^<$ é a aritmética, mas com a relação de ordem estrita usual, basta mostrarmos que $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}})$ satisfaz os axiomas de ordem Φ_{ord}:
i) $\forall x(\neg x < x)$: sua satisfação segue diretamente da definição, visto que $a \neq b$.
ii) $\forall xyz((x < y \wedge y < z) \to x < z)$: se existem c_1, c_2 tais que $x + c_1 \doteq y$ e $y + c_2 \doteq z$, então $x + (c_1 + c_2) \doteq z$, portanto $x < z$, visto que $c_1 + c_2 \in A$.
iii) $\forall xy(x < y \vee x \doteq y \vee y < x)$: se $x \doteq y$ a condição é satisfeita, caso contrário ambos diferem por um natural, i.e., $x < y$ ou $y < x$, o que também é simples verificar pela definição. $\square$

Exercício 4.10. Se $(\mathfrak{A}, \beta) \models \mathsf{Th}(\mathfrak{N})$ e se $a, b \in A := \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})$, a é dito ser um divisor de b (escrito $a \mid b$) se existe um $c \in A$ tq $a \cdot^{A} c = b$. Seja Q um conjunto de números primos. Mostre que existe um modelo $\mathfrak{A}$ da aritmética tq existe um $a \in A$ cujos divisores primos são só os membros de Q, i.e., para todo primo p:

$$\underbrace{1^A + \cdots + 1^A}_{p \text{ vezes}} \mid a \text{ sse } p \in Q.$$

Conclua que há, no mínimo, tantos modelos contáveis não isomórficos dois a dois da aritmética quanto subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Proof. Seja $\mathbb{P}$ o conjunto dos números primos. Considere

$$\Phi_Q = \{p \mid x : p \in Q\} \cup \{p \nmid x : p \in \mathbb{P} \backslash Q\} \cup \mathsf{Th}(\mathfrak{N}).$$

Note que para todo $\Phi_0 \subseteq \Phi_Q$ finito existe tal elemento $\beta(x)$ no domínio da estrutura $(\mathfrak{A}, \beta)$, basta pegarmos o produto dos elementos de $Q_0 \subseteq Q$. Como todo subconjunto finito é satisfatível, pelo Teorema da Compacidade Φ_Q também é e, portanto, para todo Q conjunto de números primos existe um modelo $\mathfrak{A}$ da aritmética satisfazendo os critérios da questão.
Provamos então que, para certos conjuntos $Q \subseteq \mathbb{P}$, com $\beta(x) = a$ associado a Q (denotaremos por a_Q), existe um modelo $\mathfrak{A}_Q \models \Phi_Q$ tq $a_Q \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_Q)$ e valendo a propriedade que se $Q_0 \neq Q_1$, então $\mathfrak{A}_{Q_0} \not\cong \mathfrak{A}_{Q_1}$. Seja $A_n := \{p_{n^m} : m \in \mathbb{Z}^+\}$, sendo p_n o n-ésimo primo. Obviamente $A_{p_0} \cap A_{p_1} = \varnothing$, para p_0, p_1 primos distintos. Como existem uma quantidade infinita contável de primos, então o mesmo vale para a quantidade de conjuntos com contáveis infinitos elementos cuja diferença é vazia. À vista, disso, defina $Q_n := A_{p_n}$, basta provarmos agora que se $n \neq m$, então $\mathfrak{A}_{Q_n} \not\cong \mathfrak{A}_{Q_m}$. Provamos no começo que tal $\mathfrak{A}_{Q_n}$ existe, peguemos, portanto, o menor desses modelos como fora feito no **Teorema 4.7.** do livro. Assim, para $a_{Q_n} \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_{Q_n})$, nunca será possível atingir algum $a_{Q_m} \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}_{\mathsf{Q_m}})$, com $m \neq n$, somente multiplicando a_{Q_n} por algum elemento no domínio da estrutura ou somando, visto que ambos, Q_n e Q_m, possuem infinitos primos distintos, e os únicos números não padrões de cada qual são os gerador por a_{Q_n} e a_{Q_m}, respectivamente, sendo impossível um ser gerado pelo outro, logo os modelos são não isomórficos. $\square$

Exercício 4.11. Seja $\mathfrak{A} = (A, <^A)$ uma ordenação parcialmente definida. Dizemos que $<^A$ tem uma cadeia descendente infinita se existem $a_0, a_1, \dots \in \mathsf{field} <^A$ tq $\cdots <^A a_1 <^A a_0$. Prove que:
a) $(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}})$ não possui nenhuma cadeia descendente infinita; por outro lado, se $\mathfrak{A}$ é um modelo não standard de $\mathsf{Th}(\mathfrak{N})$, então $(A, <^A)$ contém uma cadeia descendente infinta.
b) Seja $< \in \mathcal{S}$ e $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$. Assuma que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $\mathfrak{A} \models \Phi$ tq $(A, <^A)$ é uma ordenação parcialmente definida e $\mathsf{field} <^A$ contém no mínimo m elementos. Então existe também $\mathfrak{B} \models \Phi$ tq $(B, <^B)$ é uma ordenação parcialmente definida contendo uma cadeia descendente infinita.

Proof. a) Para um modelo standard da aritmética, $\mathsf{field} <^{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$. Assuma por contradição que existam $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{N}$ tq $\cdots <^{\mathbb{N}} a_1 <^{\mathbb{N}} a_0$. Como $\{a_0, a_1, \dots\} \approx \aleph_0$, então existe uma bijeção $f : \{a_0, a_1, \dots\} \to \mathbb{N}$, como em ambas a relação de ordem é a mesma e em $\{a_0, a_1, \dots\}$ o maior elemento é a_0, então seria possível encontrar $f(a_0)$ o maior elemento em $\mathbb{N}$, contradição, visto que $\mathbb{N}$ não possui maior elemento.
Em um modelo não-standard, como o gerado pelo Teorema da Compacidade, existe um a maior que todo natural canônico, i.e., $a, a-1, \dots \in \mathsf{field} <^A$ tq $\cdots <^A a-1 <^A a$.

b) Seja $\Psi := \Phi \cup \{a_i, a_{i+1} \in \mathsf{field} < \wedge a_{i+1} < a_i \mid i \geqslant 0\}$, obviamente um modelo de Ψ possui uma cadeia descendente infinita, basta mostrarmos portanto que $\mathsf{Sat}(\Psi)$. Note que para todo subconjunto finito $\Psi_0 \subseteq \Psi$ existe n_0 tq $\Phi \cup \{a_i, a_{i+1} \in \mathsf{field} < \wedge a_{i+1} < a_i \mid n_0 \geqslant i \geqslant 0\}$, por hipótese, há uma ordenação parcialmente definida com n_0 elementos, i.e., $\mathsf{Sat}(\Psi_0)$. Segue-se portanto do Teorema da Compacidade que Ψ também é satisfatível. □

7 O Escopo da Lógica de Primeira Ordem

Exercício 4.4. Um leitor que ficou confuso com a discussão deste capítulo diz: "Agora estou completamente confuso. Como a ZFC pode ser usada como base para a lógica de primeira ordem, uma vez que a última era necessária para construir a ZFC?" Ajude tal leitor a sair de seu dilema.

Proof. O problema na aparente circularidade aqui é gerada pelo fato de que a ZFC não é estritamente necessária como base para a construção da lógica de primeira ordem, poderíamos usar, na realidade, qualquer outro sistema expressivo o suficiente para definir a lógica de primeira ordem sem nenhum problema. □

8 Interpretações Sintáticas e Formas Normais

Exercício 2.4. Sejam $U, V \notin \mathcal{S}$ símbolos de relação unária distintos e $(\mathfrak{A}, U^A, V^A)$ uma $\mathcal{S} \cup \{U, V\}$-estrutura tq U^A, V^A são $\mathcal{S}$-fechados em $\mathfrak{A}$ e $U^A \subseteq V^A$. Mostre que para $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$

$$(\mathfrak{A}, U^A, V^A) \models ([\varphi^V]^U \leftrightarrow \varphi^U)$$

.

Proof. A intuição aqui é que falar em $\mathfrak{A}$ sobre U é o mesmo que falar em V sobre U (em $\mathfrak{A}$), visto que $U^A \subseteq V^A$. Como ψ^P definido na prova do Lema da Relativização só altera o quantificador, então a relativização em V substitui $\exists x\psi$ em φ por $\exists x(Vx \wedge \psi^V)$, relativizando para U agora temos que $\exists x(Ux \wedge Vx \wedge [\psi^V]^U)$, como $Ux \wedge Vx$ é o mesmo que Ux, visto que $U^A \subseteq V^A$, então é notório que se a estrutura satisfaz φ^U ela também satisfaz $[\varphi^V]^U$, e vice versa, i.e., $(\mathfrak{A}, U^A, V^A) \models ([\varphi^V]^U \leftrightarrow \varphi^U)$. □

Exercício 2.5. Sejam $<$ e $\leqslant$ dois símbolos de relação binária. Mostre que para todo $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\{<\}}$ existe um $\psi \in \mathcal{L}_0^{\{\leqslant\}}$, e para todo $\psi \in \mathcal{L}_0^{\{\leqslant\}}$ existe um $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\{<\}}$ tq a) e b), respectivamente, valem:
a) Uma ordenação $(A, <^A)$ satisfaz φ sse a ordenação correspondente $(A, \leqslant^A)$ no sentido de "$\leqslant$" satisfaz ψ.
b) Uma ordenação $(A, \leqslant^A)$ no sentido de "$\leqslant$" satisfaz ψ sse a ordenação correspondente $(A, <^A)$ satisfaz φ.

Proof. a) Como $\Phi'_{\text{ord}} := \Phi_{\text{ord}} \cup \{\forall xy(x \leqslant y \leftrightarrow (x < y \vee x \doteq y))\}$ então ambos são intercambiáveis e, portanto, possuem mesmo poder expressivo. Para falarmos de $\{<\}$ em $\{\leqslant\}$ façamos a interpretação sintática $I : \{<, \{<\}\} \to \mathcal{L}^{\{\leqslant\}}$ definida para $\{<\}$ como a identidade $\varphi_{\{<\}}(v_0) := v_0 \doteq v_0$ e para $<$ como $\varphi_<(x, y) := x \leqslant y \wedge \neg(x \doteq y)$, pelo Teorema da Interpretação Sintática a cada fórmula $\varphi \in \mathcal{L}^<$ podemos associar uma $\varphi^I \in \mathcal{L}^\leqslant$ tq

$$(A, <^A) \models \varphi \text{ sse } (A, \leqslant^A) \models \psi := \varphi^I.$$

b) Para fazer o mesmo invertendo os papéis basta construirmos $I : \{\leqslant, \{\leqslant\}\} \to \mathcal{L}^{\{<\}}$ como a identidade para $\{\leqslant\}$ e $\varphi_\leqslant(x, y) := x < y \vee x \doteq y$, logo

$$(A, \leqslant^A) \models \psi \text{ sse } (A, <^A) \models \varphi := \psi^I.$$

□

Exercício 2.6. Na discussão de grupos, a partir do enunciado do **Teorema 2.2.**, troque os papéis de Φ_{grp} e Φ_{g}.

Proof. Basta definirmos a interpretação sintática $I : \mathcal{S}_{\text{g}} \cup \{\mathcal{S}_{\text{g}}\} \to \mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\text{grp}}}$ tq $\varphi_{\mathcal{S}_{\text{g}}}(x) := x \doteq x$ e $\varphi_\circ(x, y, z) := x \circ y \doteq z$, i.e., como a identidade. Portanto se uma $\mathcal{S}_{\text{grp}}$-estrutura $(A, \circ^A, {}^{-1^A}, e^A)$ é um grupo, então $\mathfrak{A}^{-I} = (A, \circ^A)$ e para toda $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\text{g}}}$ temos

$$\mathfrak{A}^{-I} \models \varphi \text{ sse } \mathfrak{A} \models \varphi^I$$

□

Exercício 2.7. a) Dê uma interpretação sintática I de $\mathcal{S}_{\text{ar}}$ em $\mathcal{S}_{\text{ar}}$ tq

$$\text{para todo } \varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\text{ar}}} : (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi \text{ sse } (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi^I$$

. b) Prove o análogo à a) obtido trocando o papel de $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}$.

Proof. definimos $I : \mathcal{S}_{\text{ar}} \cup \{\mathcal{S}_{\text{ar}}\} \to \mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\text{ar}}}$ tq

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{ar}} &\mapsto \varphi_{\mathcal{S}_{\text{ar}}}(v_0) := \exists xyzw(x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \doteq v_0);\\
+ &\mapsto \varphi_+(x, y, z) := x + y \doteq z;\\
\cdot &\mapsto \varphi_\cdot(x, y, z) := x \cdot y \doteq z;\\
0 &\mapsto \varphi_0(x) := x \doteq 0;\\
1 &\mapsto \varphi_1(x) := x \doteq 1.
\end{aligned}$$

como $\varphi_{\mathcal{S}_{\text{ar}}}[a]$ sse $a \in \mathbb{N}$, então $A^{-I} = \mathbb{N}$ e todas as outras definições são identidades, logo

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)^{-I} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi \text{ sse } (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi^I$$

PENDENTE □

Exercício 2.8. Prove o **Teorema 1.3.** usando o **Teorema 2.2.** a partir de uma interpretação sintática adequada.

Proof. Seja $\mathcal{S}^r$ o conjunto de símbolos relacionais de $\mathcal{S}$, provemos a partir do Teorema da Interpretação Sintática que para $\psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, existe um $\psi^r \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}^r}$ tq $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$ sse $(\mathfrak{A}^r, \beta) \models \psi^r$. Seja portanto a interpretação sintática $I : \mathcal{S} \cup \{\mathcal{S}\} \to \mathcal{L}^{\mathcal{S}^r}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\mapsto \varphi_{\mathcal{S}}(v_0) := v_0 \doteq v_0; \\ R &\mapsto \varphi_R(v_0, \ldots, v_{n-1}) := Rv_0 \ldots v_{n-1}; \\ f &\mapsto \varphi_f(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n) := Fv_0 \ldots v_{n-1}v_n; \\ c &\mapsto \varphi_c(v_0) := Cv_0. \end{aligned}$$

Por definição obviamente $\mathfrak{A}^r \models \Phi_I$. Como $\mathfrak{A}^r \models \varphi_{\mathcal{S}}[a]$ para todo $a \in A$, então $A^{-I} = A$, além disso

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{A}^{-I}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a_n &\text{ sse } \mathfrak{A}^r \models \varphi_f[a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n] \\ &\text{ sse } F^{\mathfrak{A}^r} a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n \\ &\text{ sse } f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a_n. \end{aligned}$$

portanto $f^{\mathfrak{A}^{-I}} = f^{\mathfrak{A}}$, o mesmo ocorre com os símbolos de relação e constante, i.e., $\mathfrak{A}^{-I} = \mathfrak{A}$, denotemos ψ^I por ψ^r, então, pelo Teorema da Interpretação Sintática

$$(\mathfrak{A}^r, \beta) \models \psi^I = \psi^r \text{ sse } (\mathfrak{A}^{-I}, \beta) = (\mathfrak{A}, \beta) \models \psi.$$

□

Exercício 3.3. Generalize o **Teorema 3.2.** para o caso com mais (possivelmente infinitas muitas) definições de novos símbolos.

Proof. Seja $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ e $\{s_i \mid i \in X\}$ novos símbolos com δ_{s_i} uma $\mathcal{S}$-definição em Φ para cada s_i.
a) Para todo $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$

$$\Phi \cup \{\delta_{s_i} \mid i \in X\} \text{ sse } \Phi \models \varphi.$$

($\Leftarrow$) se $\Phi \models \varphi$, obviamente $\Phi \cup \{\delta_{s_i} \mid i \in X\} \models \varphi$;
($\Rightarrow$) Assuma que $\Phi \cup \{\delta_{s_i} \mid i \in X\} \models \varphi$ e seja $\mathfrak{A}$ uma $\mathcal{S}$-estrutura tq $\mathfrak{A} \models \Phi$. Para $I : S' \cup \{S'\} \to \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ uma interpretação sintática tq $S' = S \cup \{s_i \mid i \in X\}$ temos $I(S') = \varphi_{\mathcal{S}'}(v_0) := v_0 \doteq v_0$,

$$\Phi_i = \begin{cases} \varnothing, \text{ se } s_i \text{ é um símbolo relacional;} \\ \{\forall v_0 \ldots v_{n-1} \exists! v_n \varphi_f(v_0, \ldots, v_n)\}, \text{ se } s_i \text{ é um símbolo de função n-ária;} \\ \{\exists! v_0 \varphi_c(v_0)\}, \text{ se } s_i \text{ é um símbolo de constante.} \end{cases}$$

e $\Phi_I := \bigcup_{i \in X} \Phi_i$, portanto segue-se direto da definição de δ_{s_i} que $\mathfrak{A} \models \Phi_I$ e, para toda $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$-estrutura, $\mathfrak{A}^{-I} := (\mathfrak{A}, S'^A := \{s_i^A \mid i \in X\})$ com $\mathfrak{A} \models \Phi$ vale que $\mathfrak{A}^{-I} \models \{\delta_{s_i} \mid i \in X\}$, i.e., $\mathfrak{A}^{-I} \models \Phi \cup \{\delta_{s_i} \mid i \in X\}$ logo, por hipótese, $(\mathfrak{A}, S'^A) \models \varphi$ e, pelo Lema da Coincidência, $\mathfrak{A} \models \varphi$.

b) Para todo $\chi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}$

$$\Phi \cup \{\delta_{s_i} \mid i \in X\} \models \chi \leftrightarrow \chi'.$$

Seja $\mathfrak{A}^{-I} = (\mathfrak{A}, S'^A)$ uma $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$-estrutura que satisfaz $\Phi \cup \{\delta_{s_i} \mid i \in X\}$, como definido em a), pelo Teorema da Interpretação Sintática segue-se que

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^{-I} \models \chi &\text{ sse } \mathfrak{A} \models \chi^I \\ &\text{ sse } \mathfrak{A}^{-I} \models \chi^I.\end{aligned}$$

c) Para todo $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}$

$$\Phi \cup \{\delta_{s_i} \mid i \in X\} \models \varphi \text{ sse } \Phi \models \varphi^I.$$

De b) temos que para $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'}$ vale que $\Phi \cup \{\delta_{s_i} \mid i \in X\} \models \varphi$ sse $\Phi \cup \{\delta_{s_i} \mid i \in X\} \models \varphi^I$ e, por a), sse $\Phi \models \varphi^I$. □

Exercício 3.4. Formalize precisamente e mostre que para $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ vale o seguinte: Uma extensão por definições de uma extensão por definição de Φ é uma extensão por definição de Φ.

Proof. Seja $s \notin \mathcal{S}$ e δ_s uma $\mathcal{S}$-definição de s em Φ, com $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cup \{s\}$ e $\Phi' := \Phi \cup \{\delta_s\}$. Suponha também que há $s' \notin \mathcal{S}'$ e que $\delta_{s'}$ é uma $\mathcal{S}'$-definição de s' em Φ', com $\mathcal{S}'' := \mathcal{S}' \cup \{s'\}$ e $\Phi'' := \Phi' \cup \{\delta_{s'}\}$. Seja $I_1 : \mathcal{S}' \cup \{\mathcal{S}'\} \to \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ a interpretação sintática de $\mathcal{S}'$ em $\mathcal{S}$ e $I_2 : \mathcal{S}'' \cup \{\mathcal{S}''\} \to \mathcal{L}^{\mathcal{S}'}$ a interpretação sintática de $\mathcal{S}''$ em $\mathcal{S}'$. O que queremos enunciar é que, se é possível falar sobre $\mathcal{S}'$ em $\mathcal{S}$, e sobre $\mathcal{S}''$ em $\mathcal{S}'$, sem ganhar expressividade, então é possível fazer o mesmo com $\mathcal{S}''$ em $\mathcal{S}$. Note que se ambos δ_s e $\delta_{s'}$ são definidos em função dos símbolos em $\mathcal{S}$ então segue-se diretamente do exercício anterior que adicionar os dois novos símbolos é uma extensão por definição em Φ direto. Consideremos portanto o caso que $\delta_{s'}$ usa s em $\mathcal{S}'$, nesse caso a partir da interpretação sintática é fácil demonstrar que definição de s' com s pode ser substituido por um equivalente só em $\mathcal{S}$. □

Exercício 3.5. Seja $P \notin \mathcal{S}$ um símbolo de relação k-ário e $\Phi' \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}\cup\{P\}}$ que *define implicitamente* P, no sentido que para toda $\mathcal{S}$-estrutura $\mathfrak{A}$ e todo $P^1, P^2 \subseteq A^k$ vale que

$$\text{se } (\mathfrak{A}, P^1) \models \Phi' \text{ e } (\mathfrak{A}, P^2) \models \Phi', \text{ então } P^1 = P^2.$$

Então, pelo Teorema da Definibilidade de Beth, existe uma *definição explícita* de P com respeito a Φ', i.e., uma $\mathcal{S}$-fórmula $\varphi_P(v_0, \ldots, v_{k-1})$ tq

$$\Phi' \models \forall v_0 \ldots v_{k-1}(P v_0 \ldots v_{k-1} \leftrightarrow \varphi_P(v_0, \ldots, v_{k-1})).$$

A partir disso, mostre que existe $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ e uma definição δ_P de P em Φ tq para todo $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}\cup\{P\}}$

$$\Phi \cup \{\delta_P\} \models \varphi \text{ sse } \Phi' \models \varphi;$$

portanto Φ' é, até a equivalência, uma extensão de Φ por definições.

Proof. **PENDENTE** □

Parte B

9 Extensões da Lógica de Primeira Ordem

Exercício 1.7. O sistema $\mathscr{L}_{\text{II}}^{w}$ da Lógica de Segunda Ordem Fraca é tq para todo $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}_{\text{II}}^{w,\mathcal{S}} := \mathcal{L}_{\text{II}}^{\mathcal{S}}$ e alteramos a noção de satisfatibilidade em $\mathscr{L}_{\text{II}}$, para fórmulas livres de quantificadores em variáveis de relação $\models_w$ é o mesmo que $\models$, nos outros casos especificamos, para $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \gamma)$:

$$\mathfrak{I} \models_w \exists X^n \varphi \text{ sse existe um } C \subseteq A^n \text{ finito tq } \mathfrak{I}\frac{C}{X^n} \models_w \varphi.$$

Portanto, só é permitido quantificar sobre conjuntos e relações finitos. Mostre que:
a) Há uma sentença φ de segunda ordem e uma estrutura $\mathfrak{A}$ tq $\mathfrak{A} \models_w \varphi$, mas $\mathfrak{A} \not\models \varphi$.
b) Para cada sentença $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{II}}^{w,\mathcal{S}}$ há uma sentença $\psi \in \mathcal{L}_{\text{II}}^{\mathcal{S}}$ tq para toda $\mathcal{S}$-estrutura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models_w \varphi$ sse $\mathfrak{A} \models \psi$.
c) O Teorema da Compacidade não vale em $\mathscr{L}_{\text{II}}^{w}$.

Proof. a) Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura com domínio infinito, defina

$$\varphi_{\text{fin}} := \forall X^2 \left(\left(\forall x \exists ! y X^2 xy \wedge \forall x, y, z \left(\left(X^2 xz \wedge X^2 yz \right) \rightarrow x \doteq y \right) \right) \rightarrow \forall y \exists x X^2 xy \right)$$

a formalização de "para toda função $f : X \to X$ injetora, esta é sobrejetora". Obviamente isso não é verdade na lógica de segunda ordem, visto que φ_{fin} é equivalente a dizer que todos os subconjuntos do domínio são finitos o que, por hipótese, é falso. Entretanto, na lógica de segunda ordem fraca a sentença é verdadeira por vacuidade, visto que $\forall X^2$ quantifica somente sobre subconjuntos finitos, portanto sim, todas as funções, se estas são injetoras, estas também são sobrejetoras.

b) Provaremos um teorema mais forte: Para cada **fórmula** $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{II}}^{w,\mathcal{S}}$ há uma **fórmula** $\psi \in \mathcal{L}_{\text{II}}^{\mathcal{S}}$ **com** $\mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\psi)$, tq para toda **$\mathcal{S}$-interpretação** $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$**,** $\mathfrak{I} \models_w \varphi$ **sse** $\mathfrak{I} \models \psi$.
Procedemos por indução: Os casos em que φ, ψ são fórmulas atômicas ou livres de quantificadores é trivial, visto que $\models$ e $\models_w$ são definidos da mesma forma para eles, basta, portanto, tomarmos $\psi = \varphi$. Assuma como hipótese indutiva que, para cada $\varphi \in \mathcal{L}_{II}^{w,\mathcal{S}}$, exista $\psi \in \mathcal{L}_{II}^{\mathcal{S}}$ com os mesmos modelos e com $\mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\psi)$, portanto, para $\varphi = \exists x \varphi'$ existe ψ' com os mesmos modelos de φ', logo, para uma $\mathcal{S}$-interpretação $\mathfrak{I}$ qualquer:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models_w \exists x \varphi' &\text{ sse existe um } a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \text{ tq } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models_w \varphi' \\
&\text{ sse exists um } a \in \mathsf{Dom}(\mathfrak{A}) \text{ tq } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi' \\
\mathfrak{I} \models \exists x \psi'
\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\exists x \psi')$ tomemos $\psi = \exists x \psi'$.
Suponha, finalmente, $\varphi = \exists X^n \varphi'$ e seja, novamente, ψ' a fórmula correspondente a φ' pela hipótese indutiva. Seja Y uma relação unária, defina $\forall x \in Y \chi := \forall x (Yx \rightarrow \chi)$ e $\exists x \in Y \chi := \exists x (Yx \wedge \chi)$, substituindo todas as ocorrências de $Qx\chi$ em φ_{fin} (definido em a), com $Q = \forall, \exists$, por $Qx \in Y\chi$ obtemos $\gamma_{\text{fin}}(Y)$ que diz que o conjunto Y é finito. Definimos, portanto, $\psi = \exists X^n (\gamma_{\text{fin}}(X^n) \wedge \psi')$,

logo, é fácil ver que $\mathsf{free}(\varphi) = \mathsf{free}(\psi)$ e, para toda $\mathcal{S}$-interpretação $\mathfrak{I}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} \vDash_w \exists X^n \varphi' &\text{ sse há um } C \subseteq \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})^n \text{ finito, tq } \mathfrak{I}\frac{C}{X^n} \vDash_w \varphi' \\ &\text{ sse há um } C \subseteq \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})^n \text{ tq } \mathfrak{I}\frac{C}{X^n} \vDash_w \gamma_{\text{fin}}(X^n) \text{ e } \mathfrak{I}\frac{C}{X^n} \vDash \psi' \\ &\text{ sse há um } C \subseteq \mathsf{Dom}(\mathfrak{A})^n \text{ tq } \mathfrak{I}\frac{C}{X^n} \vDash_w (\gamma(X^n) \wedge \psi') \\ &\text{ sse } \mathfrak{I} \vDash \psi\end{aligned}$$

O que termina a prova, sendo o exercício em si um corolário direto deste teorema mais forte.

c) Seja $\varphi_{\geqslant n}(Y) := (\bigwedge_{i=1}^{n} Y v_i) \wedge \bigwedge_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \neg(v_i \doteq v_j)$ a formalização de Y tem no mínimo n elementos, então

$$\Phi := \{\forall Y \varphi_{\geqslant n}(Y) \mid n \geqslant 2\}$$

diz que todas relações unárias são infinitas, se interpretado na lógica de segunda ordem fraca diz que toda relação unária finita é infinita, portanto obviamente $\nvDash_w \Phi$. Entretanto, para todo subconjunto finito Φ_0 de Φ temos que este é satisfatível, logo não pode valer o Teorema da Compacidade. □

Exercício 2.7 Mostre que para toda $\mathcal{L}_{II}^{w,\mathcal{S}}$-sentença φ, existe uma $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}^{\mathcal{S}}$-sentença ψ com os mesmos modelos, i.e., $\mathfrak{A} \vDash_w \varphi$ sse $\mathfrak{A} \vDash \psi$, para toda $\mathcal{S}$-estrutura $\mathfrak{A}$. Conclua que o Teorema de Löwenheim-Skolem vale para $\mathscr{L}_{II}^{w}$.

Proof. A única adição semântica que é incrementada na relação de satisfatibilidade é que $\exists X^n \varphi$ é satisfeita sse existe um subconjunto do domínio da estrutura finito que satisfaz φ, portanto, para expresser finitude em $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ definiremos:

$$\varphi_{\geqslant m}(C^n) := \bigwedge_{\substack{i_0,\ldots,i_n \in \{1,\ldots,m\} \\ i_0 \neq i_1, i_0 \neq i_2, \ldots \\ i_{n-1} \neq i_n}} C^n v_{i_0} v_{i_1} \ldots v_{i_n} \wedge \bigwedge_{i,j \in \{1,\ldots,m\}} \neg(v_i \doteq v_j)$$

a formalização de que C^n tem no mínimo m elementos, logo

$$\gamma_{\text{fin}}(C^n) := \bigvee \{\neg \varphi_{\geqslant m}(C^n) : m \geqslant 2\}$$

é satisfeita sse C^n é finito. À vista disso, procederemos por indução: para φ livre de quantificadores em variáveis relacionais tomemos $\psi = \varphi$ que, trivialmente, possuem os mesmos modelos. Assumindo como hipótese indutiva que para sentença $\varphi \in \mathcal{L}_{II}^{w,\mathcal{S}}$ há uma sentença $\psi \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}^{\mathcal{S}}$ com os mesmos modelos, para $\varphi = \exists X^n \varphi$ tomemos $\psi = \gamma_{\text{fin}}(C) \wedge \varphi\frac{C}{X^n}$

PENDENTE

□

Exercício 2.8 Mostre que as seguintes classes podem ser axiomatizadas por uma $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$-sentença:
a) A classe de grupos finitamente gerados;
b) A classe de estruturas isomórficas a $(\mathbb{Z}, <)$.

Proof. **PENDENTE** $\square$

Exercício 2.9 a) Para um $\mathcal{S}$ arbitrário, prove que $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}_{\omega_1\omega}$ é incontável;
b) Construa uma estrutura $\mathfrak{B}$ incontável (para um conjunto $\mathcal{S}$ de símbolos contáveis adequados) tq não haja estruturas $\mathfrak{A}$ contáveis satisfazendo as mesmas $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}_{\omega_1\omega}$ sentenças que $\mathfrak{B}$.

Proof. **PENDENTE** $\square$

Exercício 3.3 Mostre que toda $\mathscr{L}_Q$-sentenças satisfatível tem um modelo cuja cardinalidade é no máximo $\aleph_1$.

Proof. **PENDENTE** $\square$

Exercício 3.4 Seja $\mathscr{L}_Q^o$ obtido de $\mathscr{L}_Q$ trocando a noção de satisfatibilidade como se segue:

$$\mathfrak{I} \models Qx\varphi \text{ sse } \left\{a \in A \mid \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi\right\} < \aleph_0$$

Mostre que o Teorema da Compacidade não vale em $\mathscr{L}_Q^o$, mas o Teorema de Löwenheim-Skolem sim.

Proof. **PENDENTE** $\square$

10 Computabilidade e suas Limitações

Obs: Como todos os símbolos em $\mathbb{A}_\infty$ podem ser representados em $\mathbb{A}_0$ finito, consideramos apenas alfabetos finitos no que se segue.

Exercício 1.2. Seja $\mathbb{A}$ um alfabeto, e sejam W, W' subconjuntos decidíveis de $\mathbb{A}^*$. Mostre que $W \cup W', W \cap W'$ e $\mathbb{A}^* \backslash W$ também são decidíveis.

Proof. Sejam $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ os procedimentos de decisão para W e W', respectivamente. Para $X \in W \cup W'$ o procedimento $\mathfrak{P}_3$ é tq este devolve $\square$ se $\mathfrak{P}_1$ ou $\mathfrak{P}_2$ devolvem $\square$; para $X \in W \cap W'$, $\mathfrak{P}_3$ devolve $\square$ sse ambos $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$ devolvem $\square$ e $X \in \mathbb{A}^* \backslash W$ é tq $\mathfrak{P}_3$ devolve $\square$ sse $\mathfrak{P}_1$ não devolve $\square$. $\square$

Exercício 1.3. Descreva um procedimento de decisão para os seguintes subconjuntos de $\mathbb{A}_0^*$:
a) O conjunto de strings $x\varphi$ sobre $\mathbb{A}_0$ tq $x \in \mathsf{free}(\varphi)$;
b) O conjunto das $\mathcal{S}_\infty$-sentenças.

Proof. a) Ao receber como entrada uma string $x\varphi$ procuramos em φ um quantificador da forma $\exists x$ ou uma ocorrência de x. Se encontrarmos tal quantificador pulemos todo seu escopo, i.e., toda a string ψ em $\exists x(\psi)$, se encontrarmos um x o procedimento para e devolve $\square$, se chegarmos ao final sem encontrar uma ocorrência de x o procedimento para e devolve $\eta \neq \square$;

b) É fácil notar que a definição recursiva de uma $\mathcal{S}$-fórmula é tq qualquer conjunto de strings sobre um alfabeto pode ser verificado por um procedimento $\mathfrak{P}_1$ que devolve $\square$ se esta é uma fórmula bem formada e $\eta \neq \square$ caso não seja. Basta, portanto, para todas as variáveis que ocorrem em φ, utilizar o procedimento $\mathfrak{P}_2$ de a) para verificar quando esta é uma sentença, devolvendo $\square$ se for e $\xi \neq \square$ caso não seja. O procedimento de decisão $\mathfrak{P}_3$ devolveria $\square$ quando ambos, $\mathfrak{P}_1$ e $\mathfrak{P}_2$, devolvem $\square$ para uma entrada φ, e $\eta \neq \square$ caso contrário. $\square$

Exercício 1.9. Suponha $U \subseteq \mathbb{A}^*$ decidível e $W \subseteq U$. Mostre que se W e $U \backslash W$ são enumeráveis, então W é decidível.

Proof. Seja $\mathfrak{P}_U$ o processo de decisão para U, $\mathfrak{P}_W$ e $\mathfrak{P}_{U\backslash W}$ de enumeração para W e $U \backslash W$, respectivamente. O processo de decisão $\mathfrak{P}$ de W verificará, para uma entrada ζ, primeiro, se $\mathfrak{P}_U$ devolve $\square$, i.e., se $\zeta \in U$ (se não estiver ele retornará $\eta \neq \square$) e depois rodara $\mathfrak{P}_W$ e $\mathfrak{P}_{U\backslash W}$ em paralelo enumerando os elementos de ambos. Como $\zeta \in U$, eventualmente uma das duas enumerações será igual a ζ, caso $\mathfrak{P}_W$ pare, $\mathfrak{P}$ devolve $\square$, caso contrário $\mathfrak{P}$ devolve um $\eta \neq \square$. $\square$

Exercício 1.10. Sejam $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ alfabetos tq $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2$, e suponha que $W \subseteq \mathbb{A}_1^*$. Mostre que W é decidível (enumerável) com respeito a $\mathbb{A}_1$ sse é decidível (enumerável) com respeito a $\mathbb{A}_2$.

Proof. ($\Leftarrow$) Como $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2$ é imediato que se há um procedimento de decisão/enumeração $\mathfrak{P}_2$ para W em $\mathbb{A}_2$, também há um $\mathfrak{P}_1$ em $\mathbb{A}_1$.
($\Rightarrow$) Seja $\mathfrak{P}_1$ o procedimento de decisão de W em $\mathbb{A}_1$, pelo **Teorema 1.8.** ambos, W e $\mathbb{A}_1^* \backslash W$ são enumeráveis, como $\mathbb{A}_1$ é finito, então $\mathbb{A}_1$ é decidível em $\mathbb{A}_2$, pelo exercício anterior $W \subseteq \mathbb{A}_1^* \subseteq \mathbb{A}_2^*$ com W decidível, como W e $\mathbb{A}_1^* \backslash W$ são enumeráveis, então W é decidível com respeito a $\mathbb{A}_2$ e, devido ao **Teorema 1.7.** este também é enumerável. $\square$

Exercício 1.11. Mostre que:
a) O conjunto PIR de polinômios em várias incógnitas com coeficientes inteiros que possuem uma raiz inteira é enumerável.
b) O conjunto PIR_1 de polinômios em *uma* incógnita que pertence a PIR é decidível.

Proof. Seja $\mathbb{A} := \{x, +, -, 0, \ldots, 9, \underline{0}, \ldots, \underline{9}, \overline{0}, \ldots, \overline{9}\}$ o alfabeto usual para incógnitas com subscrito e superscrito para potência.

PENDENTE

$\square$

Exercício 1.12. Sejam $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ alfabetos, $\# \notin \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ e $f : \mathbb{A}^* \to \mathbb{B}^*$. Mostre que os seguintes são equivalentes:
(i) f é computável;
(ii) $\{\zeta \# f(\zeta) \mid \zeta \in \mathbb{A}^*\}$ é enumerável;
(iii) $\{\zeta \# f(\zeta) \mid \zeta \in \mathbb{A}^*\}$ é decidível.

Proof. O conjunto $\{\zeta \# f(\zeta) \mid \zeta \in \mathbb{A}^*\}$ pode ser considerado como o gráfico da função f, i.e., $(\zeta, f(\zeta))$, portanto f é computável sse seu gráfico é enumerável (decidível).
(i) $\Rightarrow$ (iii): Assuma que f é computável, para uma string η podemos construir um procedimento de decisão $\mathfrak{P}$ tq, procuramos por $\#$ em η, se não houver então ela não está no gráfico, se houver pegamos a string ζ antes de $\#$ e calculamos o valor de $f(\zeta)$, o que é possível, visto que f é computável, após isso comparamos tal string em $\mathbb{B}^*$ com o restante de η, se for igual então η está no gráfico, caso contrário não está. Pelo **Teorema 1.7.** pelo gráfico ser decidível ele também é enumerável.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Como decidibilidade implica enumerabilidade basta provarmos que o último implica em computabilidade. Assuma que o gráfico é enumerável, para uma string $\eta \in \mathbb{A}^*$ se quisermos calcular $f(\eta)$ enumeramos o gráfico a procura de uma string que antes do $\#$ possua η, sobre a hipótese de que $\mathbb{A}$ é finito, eventualmente a encontraremos, basta, portanto, o procedimento devolver com a string posterior a $\#$, que será justamente o valor de $f(\eta)$. ☐

Exercício 2.9. Suponha $W, W' \subseteq \mathbb{A}^*$. Mostre que se W e W' são R-decidíveis, então $\mathbb{A}^* \backslash W, W \cap W'$, e $W \cup W'$ também são.

Proof. Se $W, W' \subseteq \mathbb{A}^*$ são R-decidíveis, então existem programas P e P', respectivamente, tq P (P') retorna $\square$ se receber ζ, caso $\zeta \in W$ $(\zeta \in W')$, e $\eta \neq \square$ caso contrário. Como $\zeta \in \mathbb{A}^* \backslash W$ sse $\zeta \notin W$, então o programa

PENDENTE

onde ...
é equivalente a

$$P_0 : \zeta \to \square \text{ se } P : \zeta \to \eta \neq \square$$
$$P_0 : \zeta \to \eta \neq \square \text{ se } P : \zeta \to \square$$

que decide $\mathbb{A}^* \backslash W$. Para $W \cap W'$ temos que ζ pertence a ele sse ζ pertence a ambos, logo

$$P_1 : \zeta \to \square \text{ se } P : \zeta \to \square \text{ e } P' : \zeta \to \square$$
$$P_1 : \zeta \to \eta \neq \square \text{ se } P : \zeta \to \eta \neq \square \text{ ou } P' : \zeta \to \eta \neq \square$$

decide $W \cap W'$. O caso $W \cup W'$ é análogo, basta trocarmos o casos anteriores para "$P : \zeta \to \square$ ou $P' : \zeta \to \square$" e "$P : \zeta \to \eta \neq \square$ e $P' : \zeta \to \eta \neq \square$", respectivamente. ☐

Exercício 2.10. Prove que: a) $\mathbb{A}^*$ é R-enumerável;
b) Se $W \subseteq \mathbb{A}^*$, então W é R-decidível sse W e $\mathbb{A}^* \backslash W$ são R-enumeráveis.

Proof. a)

b) ($\Rightarrow$) Se $W \subseteq \mathbb{A}^*$ é R-decidível, então, pelo **Exercício 2.9.**, existe P' um programa de decisão para $\mathbb{A}^* \backslash W$, logo, de a), sabemos que existe um programa P que enumera $\mathbb{A}^*$, basta então definirmos □