Provas e Exercícios

Ref. A Mathematical Introduction to Logic - H. B. Enderton

Verão 2023

Xenônio

Discord: xennonio

Contents

1 Lógica Sentencial

1.1 A Linguagem da Lógica Sentencial

PENDENTE

2 Lógica de Primeira-Ordem

2.2 Verdade e Modelos

Exercício 1. Mostre que:
a) $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \varphi$ sse $\Gamma \vDash (\alpha \to \varphi)$;
b) $\varphi \vDash\Dashv \psi$ sse $\vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Proof. a) ($\Rightarrow$) Seja $(\mathfrak{A}, s)$ uma estrutura tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \gamma[s], \gamma \in \Gamma$, sabemos que $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$ ou $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$, no último caso é claro que $\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \varphi)[s]$ por definição. No primeiro, como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \varphi$ e $\mathfrak{A}$ é um modelo de cada sentença em $\Gamma \cup \{\alpha\}$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$, portanto $\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \varphi)[s]$.
($\Leftarrow$) Dado $\Gamma \vDash (\alpha \to \varphi)$, sabemos que se $(\mathfrak{A}, s)$ é tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \gamma, \gamma \in \Gamma$, portanto $\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \varphi)[s]$, logo, se $\mathfrak{A}$ é um modelo de Γ e α, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$, portanto $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \varphi$.

b) ($\Rightarrow$) Dado $\varphi \vDash\Dashv \psi$, se $(\mathfrak{A}, s)$ é tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]$, portanto $\vDash_{\mathfrak{A}} (\varphi \leftrightarrow \psi)[s]$, para o caso que $\nvDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ temos $\nvDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]$, portanto $\vDash_{\mathfrak{A}} (\varphi \leftrightarrow \psi)[s]$, i.e., $\vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$;
($\Leftarrow$) Se $\vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$, então para um $(\mathfrak{A}, s)$ arbitrário se $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi$, i.e., $\varphi \vDash \psi$, e caso $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$, portanto $\varphi \vDash\Dashv \psi$. $\dashv$

Exercício 2. Mostre que nenhuma das sentenças a seguir é logicamente implicada pelas outras duas:
$\alpha := \forall x \forall y \forall z (Pxy \to (Pyz \to Pxz))$;
$\beta := \forall x \forall y (Pxy \to (Pyx \to x = y))$;
$\gamma := \forall x \exists y Pxy \to \exists y \forall x Pxy$.

Proof. Sabemos que se $\varphi, \psi \vDash \chi$, então qualquer modelo de φ, ψ é também de χ, para mostrar que nenhuma das sentenças é logicamente implicada pelas outras basta criarmos um modelo que satisfaz cada combinação de duas fórmulas e a negação da outra. α diz que P é transitiva, β que P é antissimétrica e γ que se P for total, então ela colapsa todos os pontos no $\mathsf{Dom}(P)$ em um só. Com isso em mente sejam x, y, z elementos distintos:

$\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma)$:
$|\mathfrak{A}| = \{x, y\}, P^{\mathfrak{A}} = \{(x, x), (y, y)\}$

$\vDash_{\mathfrak{B}} (\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma)$:
$|\mathfrak{B}| = \{x, y\}, P^{\mathfrak{B}} = \{(x, y), (y, y)\}$

$\vDash_{\mathfrak{C}} (\neg\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$:
$|\mathfrak{C}| = \{x, y, z\}, P^{\mathfrak{C}} = \{(x, y), (y, z)\}$ $\dashv$

Exercício 3. Mostre que

$$\{\forall x(\alpha \to \beta), \forall x \alpha\} \vDash \forall x \beta$$

Proof. Seja $(\mathfrak{A}, s)$ tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x(\alpha \to \beta)[s]$ e $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\alpha[s]$, logo $\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \beta)\left[s\frac{d}{x}\right]$ e $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\left[s\frac{d}{x}\right]$ para todo $d \in |\mathfrak{A}|$, i.e., se $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\left[s\frac{d}{x}\right]$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \beta\left[s\frac{d}{x}\right]$, visto que $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\left[s\frac{d}{x}\right]$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \beta\left[s\frac{d}{x}\right]$, para todo $d \in |\mathfrak{A}|$, i.e., $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\beta$. $\dashv$

Exercício 4. Mostre que se $x \notin \mathsf{free}(\alpha)$, então $\alpha \vDash \forall x\alpha$.

Proof. Seja $(\mathfrak{A}, s)$ tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$, visto que para todo $d \in |\mathfrak{A}|$ temos que $s\frac{d}{x}, s : V \to |\mathfrak{A}|$ discordam apenas em x que não ocorre livre em α, portanto concordam em todas as variáveis que ocorrem em α. Pelo **Teorema 22A** temos então que se $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\left[s\frac{d}{x}\right]$, para todo $d \in |\mathfrak{A}|$, i.e., $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\alpha$. $\dashv$

Exercício 5. Mostre que a fórmula $x = y \to (Pzfx \to Pzfy)$ (onde f é um símbolo de função unário e P um símbolo de relação binário) é válida.

Proof. Assuma por contradição que $\varphi(x, y, z) := (x = y \to (Pzfx \to Pzfy))$ não seja válida, logo existe $(\mathfrak{A}, s)$ tq $\nvDash_{\mathfrak{A}} \varphi(x, y, z)[s]$, i.e., $\vDash_{\mathfrak{A}} (x = y)[s]$, $\vDash_{\mathfrak{A}} Pzfx$ e $\nvDash_{\mathfrak{A}} Pzfy$, portanto $\overline{s}(x) = \overline{s}(y)$, $(\overline{s}(z), \overline{s}(fx)) \in P^{\mathfrak{A}}$ e $(\overline{s}(z), \overline{s}(fy)) \notin P^{\mathfrak{A}}$, mas $\overline{s}(fx) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s}(x)) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s}(y)) = \overline{s}(fy)$, contradição. $\dashv$

Exercício 6. Mostre que uma fórmula θ é válida sse $\forall x\theta$ é válida.

Proof. $(\Rightarrow)$ Se $\vDash_{\mathfrak{A}} \theta[s]$, para todo $(\mathfrak{A}, s)$, em particular $\vDash_{\mathfrak{A}} \theta\left[s\frac{d}{x}\right]$, para todo $d \in |\mathfrak{A}|$, visto que s é arbitrário, portanto $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\theta$;
$(\Leftarrow)$ Se $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\theta$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \theta\left[s\frac{d}{x}\right]$, para todo $(\mathfrak{A}, s)$ com $d \in |\mathfrak{A}|$, logo, em particular, vale para $d = s(x)$. Visto que $s\frac{s(x)}{x} = s$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \theta[s]$. $\dashv$

Exercício 7. Redefina "$\mathfrak{A}$ satisfaz φ com s" por meio de uma função recursiva $\overline{h}$ tq $\mathfrak{A}$ satisfaz φ com s sse $s \in \overline{h}(\varphi)$.

Proof. Fixando $\mathfrak{A}$ e utilizando a definição de $\overline{s}$ usual para cada termo τ, sejam:
$(\wedge) : \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \times \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \to \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, $(\neg) : \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \to \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, $(\forall v_n) : \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \to \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ e $h : \mathsf{At} \to |\mathfrak{A}|^V$ (com At sendo o conjunto de fórmulas atômicas) definido como:

$$h(t_1 = t_2) = \{s \in |\mathfrak{A}|^V \mid \overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)\};$$
$$h(Pt_1 \dots t_n) = \{s \in |\mathfrak{A}|^V \mid (\overline{s}(t_1), \dots, \overline{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}\}$$

É fácil ver que $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ é livremente gerado de At por $(\wedge), (\neg), (\forall v_n)$, pra cada $v_n \in V$. Logo o Teorema da Recursão garante que existe um único $\overline{h} : \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \to |\mathfrak{A}|^V$ satisfazendo:

$$\begin{aligned}
\overline{h}(\varphi) &= h(\varphi), \text{para } \varphi \in \mathsf{At}; \\
\overline{h}((\wedge)(\varphi, \psi)) &= \{s \in |\mathfrak{A}|^V \mid s \in \overline{h}(\varphi) \wedge s \in \overline{h}(\psi)\} \\
\overline{h}((\neg)(\varphi)) &= \{s \in |\mathfrak{A}|^V \mid s \notin \overline{h}(\varphi)\} \\
\overline{h}((\forall v_n)(\varphi)) &= \left\{s \in |\mathfrak{A}|^V \mid \forall d \left(d \in \mathfrak{A} \to s\tfrac{d}{x} \in \overline{h}(\varphi)\right)\right\}
\end{aligned}$$

Bastando agora verificar que $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ sse $s \in \overline{h}(\varphi)$, o que é trivial por indução em fórmulas. $\dashv$

Exercício 8. Seja $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ completo e $\mathfrak{A}$ um modelo de Σ, prove que para qualquer $\tau \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ temos $\vDash_{\mathfrak{A}} \tau$ sse $\Sigma \vDash \tau$.

Proof. $(\Leftarrow)$ Se $\Sigma \vDash \tau$, como $\mathfrak{A}$ é um modelo de Σ, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \tau$ por definição;
$(\Rightarrow)$ Se $\Sigma \nvDash \tau$, como Σ é completo, então $\Sigma \vDash \neg\tau$, i.e., $\vDash_{\mathfrak{A}} \neg\tau$, portanto $\nvDash_{\mathfrak{A}} \tau$. Por contraposição temos que se $\vDash_{\mathfrak{A}} \tau$, então $\Sigma \vDash \tau$. $\dashv$

Exercício 9. Seja $\mathcal{S} = \{P\}$ sendo P um símbolo de relação binário. Para cada uma das condições abaixo, construa uma sentença σ tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \sigma[s]$ sse a condição é satisfeita:
a) $|\mathfrak{A}|$ tem exatamente dois elementos;
b) $P^{\mathfrak{A}}$ é uma função de $|\mathfrak{A}|$ em $|\mathfrak{A}|$
c) $P^{\mathfrak{A}}$ é uma permutação em $|\mathfrak{A}|$.

Proof. a) $\exists v_1 \exists v_2 (\neg(v_1 = v_2) \wedge \forall x(x = v_1 \vee x = v_2))$;
b) $\mathsf{Fun}(P) := \forall x \exists y (Pxy \wedge \forall z(Pxz \to z = y))$;
c) $\mathsf{Fun}(P) \wedge \forall y \exists x (Pxy \wedge \forall z(Pzy \to x = z))$. $\dashv$

Obs. Para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer podemos formalizar "$|\mathfrak{A}|$ tem exatamente n elementos" como:

$$\varphi_{=n} := \exists v_1 \ldots v_n \left(\varphi_{\geqslant n} \wedge \forall v \left(\bigwedge_{i=1}^{n} v = v_i \right) \right)$$

onde $\varphi_{\geqslant n}$ é a formalização de há no mínimo n elementos, dada por:

$$\varphi_{\geqslant n} := \bigwedge_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \neg(v_i = v_j).$$

Exercício 10. Mostre que, para Q um símbolo de relação binário e c um símbolo de constante:

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall v_2 Q v_1 v_2 [\![c^{\mathfrak{A}}]\!] \text{ sse } \vDash_{\mathfrak{A}} \forall v_2 Q c v_2.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\vDash_{\mathfrak{A}} \forall v_2 Q v_1 v_2 [\![c^{\mathfrak{A}}]\!] \text{ sse } & \vDash_{\mathfrak{A}} Q v_1 v_2 \left[s \frac{d}{v_2} \right], \text{ com } s(v_1) = c^{\mathfrak{A}}, \text{ para todo } d \in |\mathfrak{A}| \\
\text{sse } & \left(c^{\mathfrak{A}}, d \right) \in Q^{\mathfrak{A}}, \text{ para todo } d \in |\mathfrak{A}| \\
\text{sse } & \vDash_{\mathfrak{A}} Q c v_2 \left[s \frac{d}{v_2} \right], \text{ para todo } d \in |\mathfrak{A}| \\
\text{sse } & \forall v_2 Q c v_2.
\end{aligned}$$

⊣

Exercício 11. Para cada uma das relações a seguir, dê uma fórmula que a defina em $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.
a) $\{0\}$;
b) $\{1\}$;
c) $\{(m, n) \mid n$ é o sucessor de m em $\mathbb{N}\}$;
d) $\{(m, n) \mid m < n$ em $\mathbb{N}\}$.

Proof. Para cada uma das relações X definiremos φ tq $X = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi(x)\}$:
a) $\varphi_1(x) = \forall y(y = x + y)$;
b) $\varphi_2(x) = \forall y(y \cdot x = y)$;
c) $\varphi_3(n, m) = \exists y \forall x(xy = x \wedge n = m + y)$;
d) $\varphi_4(n, m) = \exists y(\neg \forall x(x = y + x) \wedge n = m + y)$ ou $\exists x \exists y(\varphi_3(x, y) \wedge n = x + m)$. ⊣

Exercício 12. Seja $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$:
a) Dê uma fórmula que defina em $\mathfrak{R}$ o intervalo $[0, \infty)$;
b) Dê uma fórmula que defina em $\mathfrak{R}$ o conjunto $\{2\}$;
c) Mostre que $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} I_n$, para quaisquer intervalos $I_1, \dots, I_n$ cujos extremos são números algébricos ou $\pm\infty$, é definível em $\mathfrak{R}$.

Proof. a) $\psi_1(x) = \exists y(y \cdot y = x)$ garante que $x \geqslant 0$, visto que $y \cdot y = y^2 \geqslant 0$;
b) $\psi_2(x) = \exists y(\forall z(y \cdot z = z) \wedge x = y + y)$;
c) Sabemos que $\alpha \in \mathbb{R}$ é algébrico sse existe $p \in \mathbb{Z}[x]$ tq $p(\alpha) = 0$, equivalentemente, podemos descrever $p(x) = 0$ como $p_1(x) = p_2(x)$ onde $p_1, p_2 \in \mathbb{N}[x]$ (basta somar os termos negativos em $p(x)$), analogamente seria fácil descrever um inteiro negativo $x = -n \in \mathbb{N}$ como $x + n = 0$, o que nos permitiria descrever $p(x) = 0$ direto. Com isso em mãos, e sabendo que a relação de $<$ é definível em $\mathbb{R}$ como $(x \leqslant y \wedge x \neq y)$, sendo $x \leqslant y := \exists z(y + z \cdot z = x)$, podemos definir os números algébricos das seguintes formas:
1. Seja $p \in \mathbb{Z}[x]$ um polinômio com raízes de multiplicidade no máximo 1 tq $p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ cujas raízes, em ordem, são $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, x, \alpha_k, \dots, \alpha_{n-1}$, defina:

$$\varphi_{v_i} := \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{a_0 \text{ vezes}} + \cdots + \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{a_n \text{ vezes}} \underbrace{(v_i \cdot \cdots \cdot v_i)}_{n \text{ vezes}} = 0$$

Portanto o número algébrico x pode ser definido por

$$\psi(x) := \exists v_1 \dots v_{n-1} \left(\bigwedge_{1 \leqslant i < n} \varphi_i \right) \wedge \varphi_x \wedge (v_1 < \cdots < v_{k-1} < x < v_k < \cdots < v_{n-1});$$

2. Podemos também utilizar o fato de que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ e tomar $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ tq

$$\alpha_{k-1} < \frac{p}{q} < x < \frac{r}{s} < \alpha_k$$

portanto x pode ser definido como:

$$\psi(x) := \varphi_x \wedge (p < q \cdot x) \wedge (s \cdot x < r)$$

visto que tanto inteiros quanto naturais podem ser definidos em $\mathfrak{R}$.

De volta ao resultado inicial, para um intervalo meio aberto $(a, b]$, com a, b algébricos podemos definir $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists ab(\psi(a) \wedge \psi(b) \wedge a < x \wedge a \leqslant b)\}$, o caso para (a, b), $[a, b]$ e $[a, b)$ é análogo, se $b = \infty$ podemos definir (a, ∞) por $\exists a(\psi(a) \wedge a < x)$, os outros casos para $\pm\infty$ também são análogos. Sejam agora I_1, I_2 intervalos definidos por φ, ψ, portanto $I_1 \cup I_2$ pode ser definido como $\varphi \vee \psi$, o que termina a prova. $\dashv$

Obs. De uma forma mais geral, uma estrutura infinita $(M, <, \dots)$ que é totalmente ordenada por $<$, é dita ser *o-mínima* sse todo subconjunto definível $X \subseteq M$ é a união finita de pontos e intervalos abertos (ou, equivalentemente, intervalos quaisquer). Provamos que a união finita de intervalos cujos pontos extremos são algébricos são definíveis em $\mathfrak{R}$, mostrar que esses são os únicos é provar que $\mathfrak{R}$ é uma estrutura o-mínima. Um exemplo clássico de teoria o-mínima são os corpos reais fechados, portanto em particular $\mathfrak{R}$ é uma estrutura o-mínima, a teoria dos corpos reais fechados é particularmente importante para teóricos dos modelos, visto que Tarski provou que ela é decidível (em um tempo de complexidade terrível, mas teoricamente é).

Exercício 13. Prove que se h é um homomorfismo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ e $s : V \to |\mathfrak{A}|$, então para qualquer termo t, $h(\overline{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$, onde $\overline{s}$ é calculado em $\mathfrak{A}$ e $\overline{h \circ s}$ em $\mathfrak{B}$.

Proof. É fácil provar por indução, obviamente para $v \in V$ temos $\overline{s}(v) = s(v)$, portanto $h(\overline{s}(v)) = \overline{h \circ s}(v)$. Se c é um símbolo de constante $h(\overline{s}(c)) = h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$, por definição de homomorfismo. $\overline{h \circ s}(c) = c^{\mathfrak{B}}$ por definição da extensão da valoração $h \circ s : V \to |\mathfrak{B}|$.
Como hipótese indutiva temos $h(\overline{s}(t_i)) = \overline{h \circ s}(t_i)$, para $1 \leqslant i \leqslant n$. Para o passo indutivo seja f um símbolo de função n-ária, logo

$$\begin{aligned} h(\overline{s}(ft_1 \dots t_n)) &= h\left(f^{\mathfrak{A}}\left(\overline{s}(t_1), \dots, \overline{s}(t_n)\right)\right); \\ &= f^{\mathfrak{B}}\left(h(\overline{s}(t_1)), \dots, h(\overline{s}(t_n))\right); \\ &= f^{\mathfrak{B}}\left(\overline{h \circ s}(t_1), \dots, \overline{h \circ s}(t_n)\right) \text{ (Pela hipótese de indução);} \\ &= \overline{h \circ s}(ft_1 \dots t_n). \end{aligned}$$

$\dashv$

Exercício 14. Liste os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são definíveis em $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, <)$. Faça o mesmo para os em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Proof. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente, se $A \neq \varnothing$, então existe $x \in A$ e $\varepsilon > 0$ tal que $x = \sup(A) - \varepsilon$. Caso A seja definível, o **Teorema do Homomorfismo** garante que, o automorfismo $h(x) = x + 2\varepsilon$ (que é estritamente crescente, portanto é um homomorfismo) é tq se $x \in A$, então $h(x) = \sup(A) + \varepsilon > \sup(A)$ está em A, contradição. O caso em que A é limitado inferior é análogo. Portanto nenhum subconjunto não-vazio limitado é definível em $\mathbb{R}$, logo só nos resta $\mathbb{R}$ e $\varnothing$, que de fato são definíveis por $x = x$ e $x \neq x$, respectivamente.
Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ for definível, então $\mathsf{Dom}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y(Axy)\}$ (e $\mathsf{Ran}(A)$, respectivamente), também é definível, logo se A é definível, seu domínio e imagem tem necessariamente de ser $\varnothing$ ou $\mathbb{R}$. É intuitivo ver após algumas tentativas que os casos triviais são definíveis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \times \mathbb{R} &= \{(x, y) \mid x = x \wedge y = y\}; \\
\varnothing &= \{(x, y) \mid x \neq x \wedge y \neq y\}; \\
< &= \{(x, y) \mid x < y\}; \\
\equiv &= \{(x, y) \mid x = y\}; \\
> &= \{(x, y) \mid \neg(x = y) \wedge \neg(x < y)\}; \\
\leqslant &= \{(x, y) \mid x < y \vee x = y\}; \\
\geqslant &= \{(x, y) \mid \neg(x < y)\}; \\
\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \equiv &= \{(x, y) \mid x = x \wedge y = y \wedge \neg(x = y)\}
\end{aligned}$$

mas a priori não temos nenhuma condição forte o suficiente para saber se esses são os únicos subconjuntos definíveis, mas um pouco mais será explorado nas observações a seguir. $\dashv$

Obs. O **Teorema do Homomorfismo** garante que se h é um automorfismo em M, então se $A \subseteq M^n$ é definível temos $(a_1, \ldots, a_n) \in A$ sse $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in A$, em um outro sentido, se definirmos a relação $\sim$ tq $a \sim b$ sse existe um automorfismo h em M onde $h(a) = b$, é fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência. Além disso, se $a \in A$ e $a \sim b$, então $h(a) = b \in A$ e, portanto, todo conjunto definível em M^n vai ser a união dos conjuntos do conjunto quociente ${}^{M^n}/_{\sim}$.
Vamos aplicar isso a $\mathbb{R}$, sabemos que os automorfismo são funções estritamente crescentes, logo se $a \in A$, então existe um h tal que $h(a) = b$, para todo $a \in A$ (basta pegar $h(x) = x + (b - a)$), logo ${}^{\mathbb{R}}/_{\sim} = \mathbb{R}$, sendo as únicas combinações de uniões possíveis para o conjunto quociente $\mathbb{R}$ próprio e $\varnothing$ (a união de nenhum elemento).
Vamos repetir o processo para $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que é mais interessante, se $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e A é definível, caso $a = b$, como h é um automorfismo, temos que $(a, a) \in A$ sse $(h(a), h(a)) = (x, x) \in A$, equivalentemente, como h tem de ser estritamente crescente e sempre existe um h que mapeia a pra algum real então $[\equiv] = \{(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = x\}$ é uma classe de equivalência. Se $a < b$, então $(h(a), h(b)) \in A$ e $h(a) < h(b)$, portanto é fácil ver que as outras duas classes são $[<] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$ e $[>] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \nless y \wedge x \neq y\}$, logo se um conjunto é definível, ele é uma das possíveis uniões de ${}^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}/_{\sim} = \{[\equiv], [<], [>]\}$, que são exatamente os conjuntos descritos!

Portanto provamos que eles são os únicos:

$$\begin{aligned}
\varnothing &= \text{união de nenhum elemento;}\\
< &= [<];\\
\equiv &= [\equiv];\\
> &= [>]\\
\leqslant &= [<] \cup [\equiv];\\
\geqslant &= [>] \cup [\equiv];\\
\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus \equiv &= [<] \cup [>];\\
\mathbb{R}\times\mathbb{R} &= [\equiv] \cup [<] \cup [>].
\end{aligned}$$

Exercício 15. Mostre que a relação $R = \{(m, n, p) \mid p = m + n\}$ não é definível em $(\mathbb{N}, \cdot)$.

Proof. Defina um automorfismo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $h(0) = 0, h(1) = 1, h(2) = 3, h(3) = 2$, se $x = y$ o Teorema Fundamental da Aritmética garante que ambos possuem a mesma fatoração em primos $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, portanto $h(x) = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} = h(y)$, logo h é injetora, além disso, para todo $n = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \dots q_m^{\beta_m}$, temos que $k = 2^{\beta_2} \cdot 3^{\beta_1} \dots q_m^{\beta_m}$ é tq $h(k) = n$, logo h é bijetora e, portanto, é um automorfismo em $(\mathbb{N}, \cdot)$, entretanto, se $+$ fosse definível em $(\mathbb{N}, \cdot)$, então $(1, 1, 2) \in R$ sse $(h(1), h(1), h(2)) = (1, 1, 3) \in R$, contradição. $\dashv$

Exercício 16. Construa uma sentença φ que possua modelos de tamanho exatamente $2n$, para qualquer inteiro positivo n.

Proof. Seja $\mathcal{S} = \{R\}$ onde R é um símbolo de relação binário, defina

$$\varphi = \bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists v_1 v_2 \left(\varphi_{\geqslant 2} \wedge \forall v \left(Rvv_1 \vee Rvv_2\right)\right)$$

onde $\varphi_{\geqslant n}$ é a formalização de "há no mínimo n elementos" definida na **Obs.** do **Exercício 9.** e $\bigwedge \Phi_{\text{eq}}$ é a conjunção dos axiomas da relação de equivalência definidos por:

$$\Phi_{\text{eq}} := \{\underbrace{\forall v_0 R v_0 v_0}_{\text{Reflexiva}}, \underbrace{\forall v_0 v_1 (R v_0 v_1 \to R v_1 v_0)}_{\text{Simétrica}}, \underbrace{\forall v_0 v_1 v_2 ((R v_0 v_1 \wedge R v_1 v_2) \to R v_0 v_2)}_{\text{Transitiva}}\}$$

Isso garante não só que R seja uma relação de equivalência como também que o conjunto quociente ${}^{|\mathfrak{A}|}/_{R}$ de qualquer modelo de φ terá exatamente 2 classes de equivalência, como todas possuem a mesma cardinalidade tem de ser possível particionar o domínio em 2 conjuntos diferentes, i.e., ser um múltiplo de 2. $\dashv$

Obs. Podemos estender o raciocínio e, utilizando o termo modelo-teórico usual, definir o *spectrum* $\{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \mid n \equiv 0(\text{mod } m)\}$, para $m \geqslant 1$ da seguinte forma:

$$\varphi = \bigwedge \Phi_{\text{eq}} \wedge \exists v_1 \dots v_m \left(\varphi_{\geqslant m} \wedge \forall v \left(\bigvee_{i=1}^{m} Rvv_i \right) \right)$$

o raciocínio é o mesmo, garantimos que R é uma relação de equivalência e que o conjunto quociente de qualquer modelo sobre R terá exatamente m classes, i.e., pode ser particionado em m conjuntos de mesmo tamanho.

Exercício 17. a) Considere $\mathcal{S} = \{P\}$ um símbolo de relação binário. Mostre que se $\mathfrak{A}$ é finito e $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$;
b) Mostre que o resultado em a) vale independente de $\mathcal{S}$.

Proof. a) Assuma que $\mathfrak{A}$ possua n elementos, logo $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi_{=n}$. Seja agora s tq $s(v_1) \neq \dots \neq s(v_n)$ e

$$\psi^P_{i,j} = \begin{cases} Pv_iv_j, & \text{se } \vDash_{\mathfrak{A}} Pv_iv_j[s]; \\ \neg Pv_iv_j, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obviamente $\vDash_{\mathfrak{A}} \bigwedge_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \psi^P_{i,j}[s]$ por definição, logo $\vDash_{\mathfrak{A}} \chi := \varphi_{=n} \wedge \bigwedge_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \psi^P_{i,j}[s]$. Visto que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, então $\vDash_{\mathfrak{B}} \chi$, logo $\mathfrak{B}$ tem exatamente n elementos, existe uma valoração $s' : V \to |\mathfrak{B}|$ tq $s(v_1) \neq \dots \neq s(v_n)$ e há uma única interpretação possível para $P^{\mathfrak{B}}$, visto que cada elemento de $|\mathfrak{A}|$ pode ser determinado unicamente por $s(v_i)$ e os em $|\mathfrak{B}|$ por $s'(v_i)$, portanto $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ tq $h(s(v_i)) = s'(v_i)$ é um isomorfismo, garantido pelas propriedades acima.
b) O caso em que possuímos $\{P_1, \dots, P_n\}$ símbolos de relação de diversas aridades é trivial, basta, para P_i m-ário, tomar $\bigwedge_{i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\}} \psi^P_{i_1,\dots,i_m}$, a conjunção de cada qual garante que toda estrutura elementarmente equivalente a $\mathfrak{A}$ também será isomórfica pelo mesmo h. Para o caso que possuímos um símbolo de função m-ária f construimos

$$\alpha^f_{i_1,\dots,i_m} = \begin{cases} fv_{i_1} \dots v_{i_{m-1}} = v_{i_m}, & \text{se } f^{\mathfrak{A}}(\overline{s}(v_{i_1}), \dots, \overline{s}(v_{i_{m-1}})) = \overline{s}(v_{i_m}); \\ \neg fv_{i_1} \dots v_{i_{m-1}} = v_{i_m}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e, analogamente

$$\beta^c_i = \begin{cases} c = v_i, & \text{se } c^{\mathfrak{A}} = \overline{s}(v_i); \\ \neg c = v_i, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

logo, defina

$$\gamma = \varphi_{=n} \wedge \bigwedge \psi^{P_{i_1}} \wedge \dots \wedge \bigwedge \psi^{P_{i_p}} \wedge \bigwedge \alpha^{f_{i_1}} \wedge \dots \wedge \bigwedge \alpha^{f_{i_q}} \wedge \bigwedge \beta^{c_{i_1}} \wedge \dots \wedge \bigwedge \beta^{c_{i_r}}$$

é fácil ver, pelo mesmo argumento, que a função h que identifica cada elemento de $\mathfrak{A}$ pela sua interpretação na valoração s define um isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, dado que $\vDash_{\mathfrak{B}} \gamma$. $\dashv$

Obs. Um resultado mais forte diz respeito a transformar uma $\mathcal{S}$-estrutura $\mathfrak{A}$ arbitrária em uma $\mathcal{S}^r$-estrutura *relacional* $\mathfrak{A}^r$, i.e., contendo apenas símbolos de relação, basta definirmos $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}^r|$; para cada $P \in \mathcal{S}$, $P^{\mathfrak{A}^r} = P^{\mathfrak{A}}$; para cada símbolo n-ário de função $f \in \mathcal{S}$, adicione $F \in \mathcal{S}^r$ como o grafo de f, i.e., $F^{\mathfrak{A}^r} a_1 \dots a_n a$ sse $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = a$, e por fim para cada $c \in \mathcal{S}$ adicione $C \in \mathcal{S}^r$ como o grafo de c, i.e., $C^{\mathfrak{A}^r}$ sse $c^{\mathfrak{A}} = a$. Com isso, é fácil provar que para todo $\psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, existe um $\psi^r \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}^r}$ tq para toda $\mathcal{S}$-estrutura $(\mathfrak{A}, s)$

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s] \text{ sse } \vDash_{\mathfrak{A}^r} \psi^r[s]$$

Analogamente, para todo $\psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}^r}$, existe um $\psi^{-r} \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ tq para toda $\mathcal{S}$-estrutura $(\mathfrak{A}, s)$ vale

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \psi^{-r}[s] \text{ sse } \vDash_{\mathfrak{A}^r} \psi[s]$$

Em outras palavras, toda sentença em $\mathfrak{A}^r$ possui um análogo em $\mathfrak{A}$, e vice-versa, um corolário direto é que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ sse $\mathfrak{A}^r \equiv \mathfrak{A}^r$. A prova do teorema é fácil e feita da forma esperada, definindo $[fy_1 \dots y_n = x]^r := Fy_1 \dots y_n x$, $[c = x]^r := Cx$, $[\psi_1 \vee \psi_2]^r := \psi_1^r \vee \psi_2^r$ e os outros conectivos de forma análoga, sendo o caso contrário também trivial, $[Ft_1 \dots t_n t]^{-r} := ft_1 \dots t_n = t$, etc. A prova da equivalência sai de forma direta.

Exercício 18. Uma fórmula universal (Π_1) é uma da forma $\forall x_1 \dots x_n \theta$, onde θ é livre de quantificadores. Analogamente, uma existencial (Σ_1) é da forma $\exists x_1 \dots x_n \theta$. Seja $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e $s : V \to |\mathfrak{A}|$.
a) **Teorema da Preservação de Łoś–Tarski**: Mostre que se $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]$, com $\psi \in \Sigma_1$, então $\vDash_{\mathfrak{B}} \psi[s]$. E se $\vDash_{\mathfrak{B}} \varphi[s]$, com $\varphi \in \Pi_1$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$;
b) Conclua que a sentença $\exists x Px$ não é logicamente válida a nenhuma sentença Π_1, nem $\forall x Px$ a uma Σ_1.

Proof. a) Se $\vDash_{\mathfrak{A}} \exists \overline{x} \psi(\overline{x}, \overline{y})[s]$, então existe $\overline{a} \in |\mathfrak{A}|^n$ tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi(\overline{x}, \overline{y}) \left[s\frac{\overline{a}}{\overline{x}}\right]$, logo o **Teorema do Homomorfismo** garante que $\vDash_{\mathfrak{B}} \psi(\overline{x}, \overline{y}) \left[h \circ s\frac{\overline{a}}{\overline{x}}\right]$, mas como $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ é uma inclusão definida como $h(a) = a$, então $h \circ s\frac{\overline{a}}{\overline{x}} = s\frac{\overline{a}}{\overline{x}} : V \to |\mathfrak{B}|$, além disso, como $|\mathfrak{A}|^n \subseteq |\mathfrak{B}|^n$, então $\overline{a} \in |\mathfrak{B}|^n$, logo $\vDash_{\mathfrak{B}} \psi(\overline{x}, \overline{y}) \left[s\frac{\overline{a}}{\overline{x}}\right]$, para $\overline{a} \in |\mathfrak{B}|^n$, portanto $\vDash_{\mathfrak{B}} \exists \overline{x} \psi(\overline{x}, \overline{y})[s]$.
O outro caso é análogo, se $\vDash_{\mathfrak{B}} \forall \overline{x} \varphi(\overline{x}, \overline{y})[s]$, então $\vDash_{\mathfrak{B}} \varphi(\overline{x}, \overline{y}) \left[s\frac{\overline{b}}{\overline{x}}\right]$, para todo $\overline{b} \in |\mathfrak{B}|^n$, por hipótese $v : V \to |\mathfrak{A}|$, e se vale para todo $\overline{b} \in |\mathfrak{B}|^n$ em particular vale para todo $\overline{a} \in |\mathfrak{A}|^n$, logo $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall \overline{x} \varphi(\overline{x}, \overline{y})[s]$;
b) Seja $|\mathfrak{A}| = \{a\}$, $|\mathfrak{B}| = \{a, b\}$ e defina $P^{\mathfrak{A}} = \varnothing$, $P^{\mathfrak{B}} = \{b\}$, logo $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, visto que $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ e $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}}|_{|\mathfrak{A}|}$. Assuma por contradição que exista $\varphi \in \Pi_1$ tq $\exists x Px \vDash\dashv \varphi$, como $\vDash_{\mathfrak{B}} \exists x Px$ (em particular Pb), então $\vDash_{\mathfrak{B}} \varphi$, o **Teorema da Preservação de Łoś–Tarski** garante que $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$, logo $\vDash_{\mathfrak{A}} \exists x Px$, contradição. $\dashv$

Exercício 19. Uma fórmula Σ_2 é da forma $\exists x_1 \dots x_n \theta$, com $\theta \in \Pi_1$.
a) Mostre para toda sentença $\varphi \in \Sigma_2$ em uma assinatura sem símbolos de constante e função, se $\vDash_{\mathfrak{B}} \varphi$, então existe $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ finita tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$;
b) Conclua que $\forall x \exists y Pxy$ não é logicamente equivalente a nenhuma sentença em Σ_2.

Proof. a) Se $\vDash_{\mathfrak{B}} \exists x_1 \ldots x_n \theta[s]$, então existem $d_1, \ldots, d_n \in |\mathfrak{B}|$ tq $\vDash_{\mathfrak{B}} \theta\left[s\frac{d_1 \ldots d_n}{x_1 \ldots x_n}\right]$, defina $|\mathfrak{A}| = \{d_1, \ldots, d_n\} \subseteq |\mathfrak{B}|$ e, para cada P_i defina $P_i^{\mathfrak{A}} = P_i^{\mathfrak{B}}|_{|\mathfrak{A}|}$, portanto $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ e, como $\theta \in \Pi_1$, o **Teorema da Preservação de Łoś–Tarski** garante que $\vDash_{\mathfrak{A}} \theta\left[s\frac{d_1 \ldots d_n}{x_1 \ldots x_n}\right]$, com $d_1, \ldots, d_n \in |\mathfrak{A}|$, portanto $\vDash_{\mathfrak{A}} \exists x_1 \ldots x_n \theta[s]$;
b) Assuma por contradição que exista $\varphi \in \Sigma_2$ tq $\forall x \exists y Pxy \vDash\dashv \varphi$, portanto, como $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, <)$ é tq $\vDash_{\mathfrak{N}} \forall x \exists y Pxy$, i.e., para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $m \in \mathbb{N}$ tq $n < m$, então $\vDash_{\mathfrak{N}} \varphi$ e, por a), temos que existe um $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}$ finito tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$, logo $\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x \exists y Pxy$, o que é obviamente uma contradição em qualquer conjunto com finitos naturais, em particular, uma instância é que $\exists y(\max(|\mathfrak{A}|) < y)$, o que é claramente falso. ⊣

Exercício 20. Seja $\mathcal{S} = \{P\}$, sendo R um símbolo de relação binária. Considere as $\mathcal{S}$-estruturas $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, <)$ e $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, <)$.
a) Encontre uma sentença verdadeira em uma e falsa na outra;
b) Mostre que para qualquer sentença $\varphi \in \Sigma_2$ se $\vDash_{\mathfrak{R}} \varphi$, então $\vDash_{\mathfrak{N}} \varphi$.

Proof. a) $\vDash_{\mathfrak{N}} \varphi := \exists x \forall y(x \neq y \to Pxy)$, mas $\nvDash_{\mathfrak{R}} \varphi$, uma vez que $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente e $\mathbb{R}$ não. Ademais $\vDash_{\mathfrak{R}} \psi := \forall xy \exists z(Pxy \to (Pxz \wedge Pzy))$, mas $\nvDash_{\mathfrak{N}} \psi$, visto que $\mathbb{R}$ é denso em si mesmo e $\mathbb{N}$ não.
b) Se $\vDash_{\mathfrak{R}} \exists \overline{x} \varphi(\overline{x})$ então existem $\overline{d} = d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ tq $\vDash_{\mathfrak{R}} \varphi(\overline{x})\left[s\frac{\overline{d}}{\overline{x}}\right]$, considere o automorfismo $h : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ que envia $\overline{d}$ para os naturais $\overline{m} = m_1, \ldots, m_n$ (basta tomar $h([d_i, d_{i+1}]) = [i, i+1]$, para $1 < i < n-1$ e $h((-\infty, d_1]) = (-\infty, 1]$ e $h([d_n, \infty)) = [n, \infty)$, é obviamente uma bijeção que é estritamente crescente), portanto $h \circ s\frac{\overline{d}}{\overline{x}} = h \circ s\frac{h(\overline{d})}{\overline{x}} = h \circ s\frac{\overline{m}}{\overline{x}}$, como $\exists \overline{x} \varphi(\overline{x})$ é uma sentença, então as únicas variáveis livres em φ são $\overline{x}$, portanto a função $s\frac{\overline{m}}{\overline{x}} : V \to \mathbb{N}$ concorda com $h \circ s\frac{\overline{m}}{\overline{x}}$ em todas variáveis livres de φ, logo $\vDash_{\mathfrak{R}} \varphi(\overline{x})\left[s\frac{\overline{m}}{\overline{x}}\right]$. Pelo **Teorema da Preservação de Łoś–Tarski**, como $\varphi \in \Pi_1$ e $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$ ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ e $<^{\mathfrak{N}} = <^{\mathfrak{R}}|_{\mathbb{N}}$), então $\vDash_{\mathfrak{N}} \varphi(\overline{x})\left[s\frac{\overline{d}}{\overline{x}}\right]$, i.e., $\vDash_{\mathfrak{N}} \exists \overline{x} \varphi(\overline{x})$. ⊣

Exercício 21. Podemos enriquecer a linguagem adicionando um quantificador adicional. A fórmula $\exists! x \alpha$ (lê-se "há um único x tq α) tem $(\mathfrak{A}, s)$ como modelo sse existe um único $a \in |\mathfrak{A}|$ tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha\left[s\frac{a}{x}\right]$. Prove que esse aparentem enriquecimento é, na verdade, redundante, no sentido de que podemos encontrar uma fórmula ordinária na lógica equivalente a $\exists! x \alpha$.

Proof. Considere $\varphi = \exists x(\alpha(x) \wedge \forall y(\alpha(y) \to x = y))$, é fácil ver que $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$ sse existe um $a \in |\mathfrak{A}|$ tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha(x)\left[s\frac{a}{x}\right]$ e, para todo $d \in |\mathfrak{A}|$ tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha(x)\left[s\frac{d}{x}\right]$ temos $d = a$, portanto há um único a que satisfaz α. ⊣

Obs. Para $n \geqslant 1$ podemos definir, analogamente, "existem no máximo n tq φ" ($\exists^{\leqslant n}$) e "existem exatamente n tq φ" ($\exists^{=n}$) como:

$$\exists^{\leqslant n} v \varphi(v) := \exists v_1 \ldots v_n \left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi(v_i) \wedge \forall v \left(\varphi(v) \to \bigvee_{1 \leqslant j \leqslant n} v = v_j \right) \right)$$

$$\exists^{=n} v\varphi(v) := \exists v_1 \dots v_n \left(\bigwedge_{x,y \in \{1,\dots,n\}} v_x \neq v_y \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi(v_i) \wedge \forall v \left(\varphi(v) \to \bigvee_{1 \leqslant j \leqslant n} v = v_j \right) \right)$$

Exercício 22. Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura e h uma função tq $\operatorname{ran}(h) = |\mathfrak{A}|$, mostre que existe uma estrutura $\mathfrak{B}$ tq h é um homomorfismo sobrejetor de $\mathfrak{B}$ em $\mathfrak{A}$.

Proof. Tomando uma das formas de AC, em particular a que para qualquer relação R, existe uma função $H \subseteq R$ tq $\operatorname{dom}(H) = \operatorname{dom}(R)$, tome $R = h^{-1}$, portanto existe $H \subseteq h^{-1}$ com $\operatorname{dom}(H) = \operatorname{dom}(h^{-1}) = |\mathfrak{A}|$, logo dado qualquer $a \in |\mathfrak{A}|$, $(a, H(a)) \in h^{-1}$, i.e., $(H(a), a) \in h$, portanto $h(H(a)) = a$. Defina $|\mathfrak{B}| := \operatorname{dom}(h)$ e

$$\begin{aligned} c^{\mathfrak{B}} &:= H(c^{\mathfrak{A}}); \\ P^{\mathfrak{B}} &:= \{(x_1, \dots, x_n) \in |\mathfrak{B}|^n \mid (h(x_1), \dots, h(x_n)) \in P^{\mathfrak{A}}\}; \\ f^{\mathfrak{B}} &:= \underbrace{\{(H(x_m), \dots, H(x_m)) \in |\mathfrak{B}|^m \mid (x_1, \dots, x_m) \in f^{\mathfrak{A}}\}}_{f_1} \cup f_2. \end{aligned}$$

onde $f_2 = \{(x, y) \in |\mathfrak{B}|^2 \mid (H(h(x)), y) \in f_1\}$. Obviamente f_1 é uma função em $\operatorname{ran}(H)$, visto que H também é, entretanto f_1 não é necessariamente uma função em $|\mathfrak{B}|$, visto que H nem sempre é sobrejetora, portanto f_2 cobre os pontos restantes, associando cada ponto $x \in |\mathfrak{B}|$, a um único ponto y tq $f(H(h(x))) = y$, i.e., envia x ao mesmo ponto único escolhido por H na fibra que x pertence.

Basta agora provarmos que $\mathfrak{B}$ é definido de tal forma que $h : |\mathfrak{B}| \to |\mathfrak{A}|$ é um homomorfismo: $h(c^{\mathfrak{B}}) = h(H(c^{\mathfrak{A}})) = c^{\mathfrak{A}}$; se $(b_1, \dots, b_n) \in P^{\mathfrak{B}}$, por def. $(h(b_1), \dots, h(b_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$, para $(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}}$, como h é sobrejetora existem $x_1, \dots, x_n \in |\mathfrak{B}|$ tq $h(x_i) = a_i$, logo, como $(h(x_1), \dots, h(x_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$, por def. $(x_1, \dots, x_n) \in P^{\mathfrak{B}}$; Seja $\bar{b} \in |\mathfrak{B}|^n$, considere $X = \{\bar{x} \in |\mathfrak{B}|^n \mid h(\bar{x}) = h(\bar{b})\}$ (onde $h(\bar{x}) = (h(x_1), \dots, h(x_n))$, como $h(\bar{b}) \in |\mathfrak{A}|^n$, existe $y \in X$ tq $H(h(\bar{b})) = y$, logo se $f^{\mathfrak{A}}(h(\bar{b})) = m$, então por def. $(H(h(\bar{b})), H(m)) \in f_1$, e f_2 garante que para todo $k \in X$ temos $(H(h(\bar{k})), H(m)) = (H(h(\bar{b})), H(m)) \in f_1$, logo $(\bar{k}, H(m)) \in f_2$ e, portanto, todo elemento em X (uma das fibras de h^{-1}) está definido em $f^{\mathfrak{B}}$, portanto $f^{\mathfrak{B}}$ é uma função em $\mathfrak{B}$ $\dashv$

Obs. É interessante notar que se $F : A \to B$, com $A \neq \varnothing$, então ZF prova que:
a) Existe uma função $G : B \to A$ tq $G \circ F = \operatorname{id}_A$ sse F é injetora;
b) Se existe uma função $H : B \to A$ tq $F \circ H = \operatorname{id}_B$, então F é sobrejetora.
Mas, talvez não surpreendentemente, precisamos de AC para provar a conversa de b). Uma vez que F não é necessariamente injetiva, F^{-1} não será uma função, portanto AC nos garante que podemos escolher, para cada $y \in B$, um $x \in A$ tq $f(x) = y$, é por isso que o exercício acima, sobre a hipótese de que h é sobrejetora, não garante sem AC que existe uma função inversa à direita de h.
Ademais, o resultado do Exercício anterior garante que, como h é um homomorfismo sobrejetor, então o **Teorema do Homomorfismo** garante que $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ sse $\vDash_{\mathfrak{B}} \varphi[h \circ s]$ onde φ não contém o símbolo de igualdade, i.e., para qualquer estrutura $(\mathfrak{A}, s)$, existe uma extensão elementarmente

equivalente para fórmulas sem igualdade para uma estrutura $(\mathfrak{B}, h \circ s)$ com qualquer cardinalidade, que seria um caso mais fraco do **Teorema de Löwenheim-Skolem Ascendente**.

Deixaremos uma pequena prova da volta de a), i.e., se $g : A \to B$ é injetora, então existe $G : B \to A$ tq $G \circ g = \mathrm{id}_A$, visto que a utilizaremos nos próximos exercícios:
Seja g uma função injetora, então $g^{-1} : \mathrm{ran}(g) \to |\mathfrak{A}|$ é uma função. A ideia é extendê-la a uma G definida em $|\mathfrak{B}|$. Como $|\mathfrak{A}| \neq \varnothing$ existe um $a \in |\mathfrak{A}|$, logo $G := g^{-1} \cup (|\mathfrak{B}| \backslash \mathrm{ran}(g)) \times \{a\}$ satisfaz o que queremos, visto que associa cada ponto fora $\mathrm{ran}(g)$ a a.

Exercício 23. Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura e g uma função injetora com $\mathrm{dom}(g) = |\mathfrak{A}|$, mostre que há uma única estrutura $\mathfrak{B}$ tq g é um isomorfismo de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$.

Proof. Pela observação anterior sabemos que, por $g : |\mathfrak{A}| \to \mathrm{ran}(g)$ ser injetora, existe uma função G tq $G \circ g = \mathrm{id}_{|\mathfrak{A}|}$, portanto basta, de forma análoga ao exercício anterior, definir $\mathfrak{B}$ tq $|\mathfrak{B}| = \mathrm{ran}(g)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c^{\mathfrak{B}} &:= g(c^{\mathfrak{A}}); \\ f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n) &:= g\left(f^{\mathfrak{A}}(G(b_1), \ldots, G(b_n))\right); \\ (b_1, \ldots, b_n) \in P^{\mathfrak{B}} &\text{ sse } (G(b_1), \ldots, G(b_n)) \in P^{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

As verificações de que g é um homomorfismo são triviais, por definição $g(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$; temos que $(g(a_1), \ldots, g(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$ sse $(G \circ g(a_1), \ldots, G \circ g(a_n)) = (a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}}$ e, por fim

$$\begin{aligned} f^{\mathfrak{B}}(g(a_1), \ldots, g(a_n)) &= g\left(f^{\mathfrak{A}}(G \circ g(a_1), \ldots, G \circ g(a_n))\right) \\ &= g\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)\right) \end{aligned}$$

como g é injetora e $\mathrm{ran}(g) = |\mathfrak{B}|$, então ela é também sobrejetora, logo é um isomorfismo. O fato de que g é um isomorfismo implica que $G = g^{-1}$ é uma função e é única, portanto a estrutura $\mathfrak{B}$ definida por ela também é, diferente do exercício anterior que depende da escolha que fazemos para H. As verificações adicionais como o fato de que $f^{\mathfrak{B}}$ é uma função em $|\mathfrak{B}|$ são triviais e serão omitidas. $\dashv$

Exercício 24. Seja h um homomorfismo injetor de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$, mostre que existe uma estrutura $\mathfrak{C}$ com $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$ e tq $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$.

Proof. Utilizando como base a ideia da prova da conversa de a) da observação do **Exercício 22.**, se h é injetora, então $h : |\mathfrak{A}| \to \mathrm{ran}(h)$ é uma função bijetora, logo $h^{-1} : \mathrm{ran}(h) \to |\mathfrak{A}|$ é também uma bijeção, vamos expandir h^{-1} para G, mas de forma que, para cada $x \in |\mathfrak{B}| \backslash \mathrm{ran}(h)$, G vai associar x a um único $y \notin A$ de forma que G será também injetora. Metateoricamente essa é uma tarefa fácil, conjunto-teoréticamente isso pode ser feito definindo $A_0 := \{|\mathfrak{A}|\}$, $A_n := A_{n-1} \cup \{A_{n-1}\}$, e repetindo o mesmo processo da construção dos ordinais, mas com A_0 no lugar de $\varnothing$ como nosso

urelemento. O fato é que o Axioma da Fundação garante que $|\mathfrak{A}|$ é diferente de qualquer ordinal definido dessa forma. Além disso, ele junto com o Axioma da Substituição garantem que todo conjunto é isomorfo a um ordinal, em particular existe uma bijeção $f : |\mathfrak{B}| \backslash \text{ran}(h) \to X$, onde $X \neq |\mathfrak{A}|$ é um dos novos ordinais, portanto a função $h^{-1} \cup f : |\mathfrak{B}| \to X \cup \{|\mathfrak{A}|\}$ é injetora e o **Exercício 23.** garante que existe uma única estrutura $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$ tq $|\mathfrak{C}| = X \cup \{|\mathfrak{A}|\} \supseteq |\mathfrak{A}|$, é fácil ver, portanto, que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$.
PENDENTE **(Provavelmente tem um jeito mais fácil de resolver)** $\dashv$

Exercício 25. Considere uma $\mathcal{S}$-estrutura fixa $\mathfrak{A}$. Expanda $\mathcal{S}$ para $\mathcal{S}^+ := \mathcal{S} \cup \{c_a \mid a \in |\mathfrak{A}|\}$ e seja $\mathfrak{A}^+$ uma $\mathcal{S}^+$-estrutura tq $c_a^{\mathfrak{A}^+} = a$ e concorde com a interpretação em $\mathfrak{A}$ dos outros símbolos em $\mathcal{S}$. Uma relação R é dita ser *definível com parâmetros* em $\mathfrak{A}$ sse R é definível em $\mathfrak{A}^+$. Seja $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot)$:
a) Mostre que se $A \subseteq \mathbb{R}$ é a união finita de intervalos, então A é definível com parâmetros em $\mathfrak{R}$;
b) Assuma que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{R}$, mostre que qualquer subconjunto de $\mathfrak{A}$ não-vazio, limitado (utilizando $<^{\mathfrak{A}}$) e definível com parâmetros em $\mathfrak{A}$ possui um supremo em $|\mathfrak{A}|$.

Proof. a) Para $I = (a, b]$, como $a, b \in \mathbb{R}$, então existem $c_a, c_b \in \mathcal{S}$, portanto:

$$\varphi_I(x) := c_a < x \wedge (x < c_b \vee x = c_b)$$

define I. O caso para $(a, b), [a, b)$ e $[a, b]$ é análogo, portanto se $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$, então a fórmula $\varphi = \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_{I_i}(x)$ define A.
b) Se $A \subseteq |\mathfrak{A}|$ é não-vazio e limitado superiormente, e se A for definível por $A = \{x \in |\mathfrak{A}| \mid \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[\![x]\!]\}$, então, se $\psi(x) =$ "$x \in B (B \neq \varnothing)$ e B é limitado superiormente" e $\chi(x) = (x = \sup(B))$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi(a)$, para algum $a \in |\mathfrak{A}|$. Visto que $\mathfrak{R}$ satisfaz completude, então

$$\vDash_{\mathfrak{R}} \forall x(\psi(x) \to \exists y(\chi(y)))$$

i.e., se B é não-vazio e limitado superiormente, o supremo existe. Como $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{R}$, então

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x(\psi(x) \to \exists y(\chi(y)))$$

em particular $\vDash_{\mathfrak{A}} (\psi(a) \to \exists y(\chi(y)))$, uma instância em a, logo $\vDash_{\mathfrak{A}} \exists y(\chi(y))$.

As fórmulas $\psi(x)$ e $\chi(x)$ podem ser formuladas como:

$$\psi(x) := \exists x(\varphi(x)) \wedge \exists y \forall x(\varphi(x) \to x \leqslant y)$$

$$\chi(s) := \forall y x((\varphi(x) \to x \leqslant y) \to s \leqslant y) \wedge \forall y(\varphi(y) \to y \leqslant s)$$

onde, intuitivamente ψ expressa que há no mínimo um x em B e que há um y tq para todo $x \in B$, y é uma cota superior de B $(x \leqslant y)$. χ por sua vez expressa que para todo y que é uma cota superior de B temos $s \leqslant y$ e, além disso, que s é uma cota superior de B, portanto é claro que $\chi(s)$ expressa que s é a menor das cotas. $\dashv$

Exercício 26. a) Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura fixa, defina seu *tipo elementar* como $\mathfrak{t}(\mathfrak{A}) := \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}\}$. Mostre que $\mathcal{K} = \mathfrak{t}(\mathfrak{A})$ é EC_Δ;
b) Uma classe $\mathcal{K}$ é dita ser *elementarmente fechada* ou ECL se, sempre que $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{t}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{K}$. Mostre que toda classe ECL é a união de classes EC_Δ;
c) Conversamente, mostre que toda classe que é a união de classes EC_Δ é ECL.

Proof. a) Considere $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \mid \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi\}$, portanto $\mathfrak{B} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{A})$ sse ($\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$ sse $\vDash_{\mathfrak{B}} \varphi$), i.e., $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$, que é equivalente a $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}^{\mathcal{S}}(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}))$, visto que $\vDash_{\mathfrak{B}} \mathrm{Th}(\mathfrak{B}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Logo $\mathfrak{t}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Mod}^{\mathcal{S}}(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}))$
b) Como $\equiv$ é uma relação de equivalência entre estruturas, considere o conjunto quociente ${}^{\mathcal{K}}/_{\equiv}$, obviamente se temos $[\mathfrak{A}] \in {}^{\mathcal{K}}/_{\equiv}$, então $\mathfrak{B} \in [\mathfrak{A}]$ sse $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, como $\mathcal{K}$ é ECL, então em particular todo $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ está em $\mathcal{K}$, i.e., $\mathfrak{t}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{K}$, portanto $\mathfrak{B} \in \mathfrak{t}(\mathfrak{A})$ sse $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ sse $\mathfrak{B} \in [\mathfrak{A}]$, logo $\mathfrak{t}(\mathfrak{A}) = [\mathfrak{A}]$.
Sob posse de AC, considere a função $h : \mathcal{K} \to {}^{\mathcal{K}}/_{\equiv}$ definida como $h(\mathfrak{A}) = [\mathfrak{A}]$, sabemos portanto que existe uma função $f \subseteq h^{-1}$ tq $\mathrm{dom}(f) = {}^{\mathcal{K}}/_{\equiv}$, uma função de escolha, portanto

$$\mathcal{K} = \bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathrm{ran}(f)} \mathfrak{t}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{\mathfrak{A} \in \mathrm{ran}(f)} \mathrm{Mod}^{\mathcal{S}}(\mathrm{Th}(\mathfrak{A}))$$

onde cada $\mathfrak{t}(\mathfrak{A})$ é EC_{Δ}.
c) Se $\mathcal{K} = \bigcup_{\Sigma \in X} \mathrm{Mod}(\Sigma)$, então $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ implica que $\vDash_{\mathfrak{A}} \Sigma$, para algum $\Sigma \in X$, obviamente se $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, então, por def. $\vDash_{\mathfrak{B}} \Sigma$, logo $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}^{\mathcal{S}}(\Sigma)$, i.e., $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, o que prova que $\mathfrak{t}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{K}$. Em particular, b) e c) juntos provam que $EC_{\Delta\Sigma} = ECL$. ⊣

Exercício 27. Seja $\mathcal{S} = \{P\}$ com P um símbolo de relação binária. Liste todas as estruturas não-isomórficas de tamanho 2.

Proof. Como $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^2$, e $|\mathfrak{A}|$ contém 2 elementos, então basta testar todos $P \in \mathcal{P}(|\mathfrak{A}|^2)$, i.e., $2^4 = 16$ possibilidades, e listar as que são não-isomórficas.
PENDENTE (Trivial) ⊣

Exercício 28. Para cada par de estruturas a seguir, mostre que eles não são elementarmente equivalentes:
a) $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \times)$ e $\mathfrak{R}^* = (\mathbb{R}^*, \times^*)$;
b) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +)$ e $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}^+, +^*)$;
c) Para cada uma das quatro estruturas aprensetadas, construa uma sentença verdadeira em uma e falsa nas outras três.

Proof. a) Se $\varphi := \exists x \forall y (x \cdot y = x)$, então $\vDash_{\mathfrak{R}} \varphi$, mas $\nvDash_{\mathfrak{R}^*} \varphi$, intuitivamente φ expressa que 0 existe;
Se $\psi := \neg\varphi$, então $\vDash_{\mathfrak{R}^*}$, mas $\nvDash_{\mathfrak{R}} \varphi$, intuitivamente ψ expressa que 0 não existe;
b) Se $\chi := \exists x \forall y (x + y = y)$, então $\vDash_{\mathfrak{N}} \chi$, mas $\nvDash_{\mathfrak{Z}} \chi$, intuitivamente χ expressa que 0 existe;
Se $\gamma := \neg\chi$, então $\vDash_{\mathfrak{Z}} \gamma$, mas $\nvDash_{\mathfrak{N}} \gamma$, intuitivamente γ expressa que 0 não existe.
c) $\mathfrak{R}$: Note que φ se interpretada em $\mathfrak{N}$ diz que existe um x tq $x + y = x$ para todo $y \in \mathbb{N}$, o que é claramente falso, é fácil ver que em $\mathfrak{Z}$ também;
$\mathfrak{R}^*$: A estrutura $(\mathbb{R}^*, \times^*, 1)$ é a única das 4 que é um grupo, todas $\mathfrak{N}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{R}$ falham em ter inversa, portanto $\psi' := \forall x \exists y (x \cdot y = x)$ só é verdadeira em $\mathfrak{R}^*$;
$\mathfrak{N}$: Algumas propriedades algébricas apresentadas por $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R}^*$ que $\mathfrak{N}$ não possui é a de que todo elemento da última possui inversa, e um único elemento da primeira não, portanto:

$$\varphi := \exists x (\forall y (x \cdot y = y) \wedge \exists! y \nexists z (y \cdot z = x))$$

é tq $\vDash_{\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*, \mathfrak{Z}} (\varphi \vee \psi' \vee \gamma)$, mas $\nvDash_{\mathfrak{N}} (\varphi \vee \psi' \vee \gamma)$.
$\mathfrak{Z}$: γ se interpretada em $\mathfrak{R}$ diz que não existe x tq $x \times y = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$, o que é claramente falso, $x = 1$ satisfaz, o mesmo raciocínio se aplica a $\mathfrak{R}^*$, logo γ só é verdadeira em $\mathfrak{Z}$. ⊣

Exercício Bônus. Para cada $n \in \mathbb{N}$, construa um modelo $\mathfrak{A}_n$ em uma linguagem $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ tq $\mathcal{S}$ é finito, onde exatamente n elementos de $|\mathfrak{A}|$ não são definíveis, i.e., existem $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ tq, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, não existe φ tq $\{a_i\} = \{x \in |\mathfrak{A}| \mid \varphi(x)\}$.

Proof. Para $n = 0$ basta tomar $|\mathfrak{A}_0| = \varnothing$, portanto todo subconjunto é definível por vacuidade, caso não seja permitido estruturas com domínio vazio basta tomarmos $|\mathfrak{A}_0| = \{a\}$ e $c \in \mathcal{S}$ tq $c^{\mathfrak{A}_0} = a$, logo $\{a\} = \{x \in |\mathfrak{A}_0| \mid x = c\}$. Para $n > 1$ note que $|\mathfrak{A}_n| = \{x_1, \ldots, x_n\}$ não possui nenhum elemento definível, assuma por contradição que x_i é definível por φ, logo o teorema do homomorfismo garante que qualquer permutação $h : |\mathfrak{A}_n| \to |\mathfrak{A}_n|$ é tq se $\{x_i\}$ é definível, para todo $x \in \{x_i\}$ temos $h(x) \in \{x_i\}$, portanto se $R \neq \varnothing$ é definível, então $R = |\mathfrak{A}_n|$, portanto em $\mathfrak{A}_n$ é impossível definir todos seus elementos, i.e., possui exatamente n elementos indefiníveis.
Note que o raciocínio anterior não vale para $n = 1$, visto que o único automorfismo de $\{x\}$ em $\{x\}$ é a identidade, considere portanto $\mathfrak{A}_1 = (\omega + 1, 0, R, <)$, onde $0^{\mathfrak{A}_1} = 0$ e $R = \{(i, i+1) \mid i \in \mathbb{N}\}$, portanto podemos definir $\{0\} = \{x \mid x = 0\}$, $\{1\} = \{x \mid R0x\}$, $\{2\} = \{x \mid \exists y(R0y \wedge Ryx)\}$, ... Em geral, temos $\{n\} = \{x \mid \exists x_1(R0x_1 \wedge \exists x_2(Rx_1x_2 \wedge \ldots \exists x_{n-1}(Rx_{n-1}x) \ldots)\}$, portanto todo $n \in \omega$ é definível, mas $\omega \in \omega + 1$ não é. $\dashv$

2.3 Um Algoritmo de Análise

Exercício 1. Mostre que para qualquer segmento inicial próprio α' de uma wff α, temos $K(\alpha') < 1$.

Proof. **Lema. 1. Para qualquer wff α, $K(\alpha) = 1$.** *Proof.* Caso base: se $\alpha = (t_1 = t_2)$, por def.

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= K(() + K(t_1) + K(=) + K(t_2) + K()) \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

se $\alpha = (Pt_1 \ldots t_n)$, temos também por def.

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= K(() + K(P) + K(t_1) + \cdots + K(t_n) + K()) \\ &= -1 + (1 - n) + n + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assuma como hipótese indutiva que para cada wff α temos $K(\alpha) = 1$, logo, como passo indutivo: Se $\alpha = (\varphi \wedge \psi)$, então

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= K(() + K(\varphi) + K(\wedge) + K(\psi) + K()) \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para $\alpha = (\neg\varphi)$

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= K(() + K(\neg) + K(\varphi) + K()) \\ &= -1 + 0 + 1 + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por fim, se $\alpha = (\forall x \varphi)$, então

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= K(() + K(\forall) + K(x) + K(\varphi) + K()) \\ &= -1 - 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora é fácil mostrar que para todo segmento inicial próprio α' de α temos $K(\alpha') < 1$. Se α for $(t_1 = t_2)$ ou $(Pt_1 \dots t_n)$ é fácil ver que para qualquer segmento inicial α' temos $K(\alpha') < 1$, assuma portanto como hipótese indutiva que vale para qualquer wff, logo se $\alpha = (\varphi \wedge \psi)$, basta testarmos seus possíveis segmentos iniciais próprios: $($, $(\varphi'$, $(\varphi$, $(\varphi \wedge$, $(\varphi \wedge \psi'$, $(\varphi \wedge \psi$, onde φ' e ψ' são segmentos iniciais próprios de φ e ψ, respectivamente, é fácil ver, utilizando a hipótese indutiva, que cada qual é tq $K(\alpha') < 1$, o caso para os outros símbolo lógicos é análogo. $\dashv$

Exercício 2. Seja ε uma expressão consistindo de variáveis, símbolos de constantes e funções. Mostre que ε é um termo sse $K(\varepsilon) = 1$ e que para todo segmento terminal próprio ε' de ε temos $K(\varepsilon') > 0$.

Proof. Se ε for um termo, sabemos que $K(\varepsilon) = 1$, assuma portanto que $K(\varepsilon) = 1$, teríamos que mostrar que ε é um termo, entretanto $\varepsilon = v_1 \dots v_n f$ satisfaz $K(\varepsilon) = 1$, mas não é um termo (wtf). Seja agora ε' um segmento terminal próprio de ε, logo $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon'$ com ε_1 um segmento inicial próprio de ε, queremos mostrar que $K(\varepsilon') > 0$, se ε for uma concatenção de símbolos quaisquer como no caso anterior, então isso não é necessariamente verdade, tome $\varepsilon = v_1 \dots v_n f$ novamente, então f é um segmento terminal próprio de ε e, se for n-ária, com $n > 1$, então $K(f) < 0$. Assuma portanto que ε seja um termo, logo sabemos que $K(\varepsilon_1) < 1$, visto que é um segmento inicial próprio, logo $K(\varepsilon') = K(\varepsilon) - K(\varepsilon_1) > 0$. $\dashv$

2.4 Um Cálculo Dedutivo

PENDENTE

Exercício 3. a) Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura e $s : V \to |\mathfrak{A}|$. Defina v no conjunto de fórmulas primas por

$$v(\alpha) = \top \text{ sse } \models_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$$

e prove que para qualquer wff α, $\overline{v}(\alpha) = \top$ sse $\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$;
b) **Correção Fraca.** Conclua que se $\Gamma \models_S \varphi$ (implica tautologicamente), então $\Gamma \models_F \varphi$ (implica logicamente).

Proof. a) Obviamente para cada fórmula prima α temos que $\overline{v}(\alpha) = v(\alpha) = \top$ por hipótese, provando portanto o caso base. Assuma agora que valha para φ e ψ, portanto $\overline{v}(\varphi \to \psi) = \top$ sse se $\overline{v}(\varphi) = \top$, então $\overline{v}(\psi) = \top$, pela hipótese indutiva isso é equivalente a se $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$, então $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$, i.e., $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \to \psi)[s]$.

b) Com isso é fácil concluir que se existe um v que satisfaz cada fórmula em Γ, no sentido da lógica sentencial, então ele satisfaz também φ no mesmo sentido, podemos concluir que isso também vale no sentido da lógica de primeira ordem. $\dashv$

Exercício 12. Teorema de Lindenbaum. Prove que todo conjunto consistente de fórmulas Γ pode ser estendido a um conjunto consistente e completo (ou maximal) Δ.

Proof. Seja Γ consistente, como a linguagem é contável, enumere as wffs em $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ e defina $\Delta_0 := \Gamma$ e

$$\Delta_n := \begin{cases} \Delta_{n-1} \cup \{\varphi_n\} \text{ se } \mathrm{Con}(\Delta_{n-1} \cup \{\varphi_n\}); \\ \Delta_{n-1} \cup \{\neg\varphi_n\} \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

logo $\Delta := \bigcup_{i \geqslant 0} \Delta_i$, obviamente para cada φ_i teremos $\varphi_i \in \Delta_i \subseteq \Delta$ ou $\neg\varphi_i \in \Delta_i \subseteq \Delta$, portanto Δ é completo. Assuma por contradição que $\mathrm{Inc}(\Delta)$, logo $\Delta \vdash \beta \wedge \neg\beta$, i.e., existe uma sequência finita de fórmulas $(\psi_1, \ldots, \psi_n, \beta \wedge \neg\beta)$ tq cada $\psi_i \in \Delta \cup \Lambda$ ou foi obtida por MP de fórmulas anteriores, seja Ψ o conjunto de $\psi_i \in \Delta \cup \Lambda$, portanto existe Δ_i tq $\Psi \subseteq \Delta_i \cup \Gamma$, bastando, portanto, repetir a prova de $\beta \wedge \neg\beta$, logo $\Delta_i \vdash \beta \wedge \neg\beta$, i.e., $\mathrm{Inc}(\Delta_i)$, contradição. $\dashv$

2.5 Teorema da Correção e Completude

Exercício 1. (Regra Semântica EI) Assuma que o símbolo de constante c não ocorra em φ, ψ ou Γ, e que $\Gamma \cup \{\varphi\frac{c}{x}\} \vDash \psi$. Prove, sem utilizar Correção e Completude, que $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\} \vDash \psi$.

Proof. Sabemos pelo Teorema da Dedução em $\vDash$ que $\Gamma \cup \{\varphi\frac{c}{x}\} \vDash \psi$ sse $\Gamma \vDash \varphi\frac{c}{x} \to \psi$, i.e., se $\mathfrak{A}$ é tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \gamma[s], \gamma \in \Gamma$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} (\varphi\frac{c}{x} \to \psi)[s]$, sendo este último equivalente a: se $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi\frac{c}{x}[s]$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]$, basta mostrarmos que $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi\frac{c}{x}[s]$ é equivalente a $\vDash_{\mathfrak{A}} \exists x\varphi[s]$. O Lema da Substituição garante, portanto, que $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi\frac{c}{x}[s]$ sse $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi\left[s\frac{\overline{s}(c)}{x}\right]$, i.e., $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi\left[s\frac{c^{\mathfrak{A}}}{x}\right]$, logo existe um $d = c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$ tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi\left[s\frac{d}{x}\right]$, logo, por definição, $\vDash_{\mathfrak{A}} \exists x\varphi[s]$, o que termina a prova. $\dashv$

Exercício 2. Prove que $\mathsf{Con}(\Phi) \Rightarrow \mathsf{Sat}(\Phi)$ é equivalente a $\Phi \vDash \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$.

Proof. $(\Leftarrow)$ Se $\mathsf{Con}(\Phi)$, por definição $\Phi \nvdash \beta \wedge \neg\beta$, portanto a conversa do Teorema da Completude garante que $\Phi \nvDash \beta \wedge \neg\beta$, que é equivalente a $\mathsf{Sat}(\Phi \cup \{\beta \vee \neg\beta\})$, uma vez que $\vDash \beta \vee \neg\beta$, então $\Phi \cup \{\beta \vee \neg\beta\}$ é satisfatível sse Φ também é.
$(\Rightarrow)$ Se $\Phi \vDash \varphi$, então $\neg\mathsf{Sat}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$, portanto $\neg\mathsf{Con}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$, i.e., $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \beta \wedge \neg\beta$, logo, por contrapositiva, $\Phi \cup \{\beta \vee \neg\beta\} \vdash \varphi$, pelo teorema da dedução $\Phi \vdash (\beta \vee \neg\beta) \to \varphi$, obviamente $\beta \vee \neg\beta$ é uma tautologia, logo $\Phi \vdash \beta \vee \neg\beta$, por modus ponens temos $\Phi \vdash \varphi$. $\dashv$

Exercício 3. Assuma que $\Gamma \vdash \varphi$, e seja P um símbolo de relação que não ocorre nem em Γ, nem em φ, prove que existe uma dedução de φ por Γ em que P não ocorre em nenhum passo.

Proof. Se $\Gamma \vdash \varphi$, Correção garante que $\Gamma \vDash \varphi$, basta provar o fato trivial de que se em uma assinatura $\mathcal{S}$ tq $P \in \mathcal{S}$ temos $\Gamma \vDash \varphi$, então o mesmo vale em $\mathcal{S}' = \mathcal{S}\backslash\{P\}$, i.e., as estruturas concordam nas sentenças que não possuem P.
PENDENTE (Trivial) $\dashv$

Exercício 4. Seja $\Gamma = \{\neg\forall v_1 P v_1, P v_2, P v_3, \ldots\}$, prove que $\mathsf{Con}(\Gamma)$.

Proof. Seja $|\mathfrak{A}| = V$, o conjunto de variáveis e $P^{\mathfrak{A}} = V\backslash\{v_1\}$, se $\beta(v_i) = v_i, 1 \leqslant i$, então obviamente todo subconjunto finito de Γ é satisfatível por $(\mathfrak{A}, \beta)$, portanto compacidade garante que $\mathsf{Sat}(\Gamma)$ e Correção e Completude que $\mathsf{Con}(\Gamma)$. $\dashv$

Exercício 5. Mostre que um mapa infinito pode ser colorido com 4 cores sse todo submapa finito também pode.

Proof. A prova é análoga a do caso sentencial, basta tomar $\mathcal{S} = \{R, B, G, Y, c_1, c_2, \ldots\}$, onde R, B, G, Y são símbolos de relação unários e $c_i, 1 \leqslant i$ símbolos de constante, e repetir os mesmos axiomas, mas com c_i no lugar dos símbolos sentenciais. O Teorema das Quatro Cores garante que para o caso finito sempre é possível colorir o mapa, portanto compacidade garante que também vale para o caso infinito. $\dashv$

Exercício 6. Prove que classes EC_Δ disjuntas podem ser separadas em classes EC, i.e., se Φ, Ψ são tq $\mathrm{Mod}(\Phi) \cap \mathrm{Mod}(\Psi) = \varnothing$, então existe τ tq $\mathrm{Mod}(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}(\tau)$ e $\mathrm{Mod}(\Psi) \subseteq \mathrm{Mod}(\neg\tau)$.

Proof. Se $\mathrm{Mod}(\Phi) \cap \mathrm{Mod}(\Psi) = \varnothing$, então $\neg\mathsf{Sat}(\Phi \cup \Psi)$, portanto Compacidade garante que existe $\Phi_0 \cup \Psi_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$ tq $\neg\mathsf{Sat}(\Phi_0 \cup \Psi_0)$, seja $\varphi = \bigwedge \Phi_0$ e $\psi = \bigwedge \Psi_0$, que estão bem definidas, visto que Φ_0, Ψ_0 são finitas. Como $\neg\mathsf{Sat}(\varphi \wedge \psi)$, i.e., $\neg\mathsf{Con}(\varphi \wedge \psi)$, então $\neg(\varphi \wedge \psi) = \varphi \to \neg\psi$ é uma tautologia, como $\Phi_0 \vDash \varphi$, então $\Phi_0 \vDash \neg\psi$. Como este é consistente, então $\Phi_0 \nvDash \neg\psi$, além disso $\Psi_0 \vDash \psi$, logo $\Phi \vDash \Phi_0 \vDash \neg\psi$ e $\Psi \vDash \Psi_0 \vDash \psi$, i.e., $\tau = \neg\psi$ satisfaz. $\dashv$

Exercício 8. Seja $\mathcal{S} = \{P\}$, onde P é um símbolo de relação binário, e seja $|\mathfrak{A}| = \mathbb{Z}$ com $P^{\mathfrak{A}} := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a - b| = 1\}$. Prove que existe $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ que não é conexa, i.e., existem $a, b \in |\mathfrak{B}|$ tq não existe $(p_0, \ldots, p_n)$, com $a = p_0, b = p_n$ e $(p_i, p_{i+1}) \in P^{\mathfrak{A}}, 0 \leqslant i < n$.

Proof. Considere

$$\Phi := \mathrm{Th}(\mathbb{Z}) \cup \left\{ \nexists x_1 \ldots x_n \left(Pax_1 \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i < n} Px_i x_{i+1} \wedge Pbx_n \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Para todo $\Phi_0 \subseteq \Phi$ finito temos $\vDash_{\mathfrak{A}} \Phi_0$, seja m a maior quantidade de variáveis nas fórmulas de Φ, basta tomar $\overline{s}(a) = 0, \overline{s}(b) = n + 1$, portanto compacidade garante que existe $\mathfrak{B}$ tq $\vDash_{\mathfrak{B}} \Phi$, o que garante que $\vDash_{\mathfrak{B}} \mathrm{Th}(\mathbb{Z})$, i.e., $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{A})) = \mathfrak{t}(\mathfrak{A})$, logo $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, mas $\mathfrak{B}$ contém dois elementos $\overline{s}(a), \overline{s}(b)$ que não são conectados por nenhuma sequência finita de elementos em $|\mathfrak{B}|$. $\dashv$

Exercício 9. a) Mostre que se adicionarmos $\psi \in \Lambda$ tq $\not\vDash \psi$, então o Teorema da Correção falha;
b) Mostre que se $\Lambda = \varnothing$, então o Teorema da Completude falha;
c) Suponha que modifiquemos Λ para incluir uma nova fórmula válida, mostre porque ambos Correção e Completude ainda valem.

Proof. a) Se $\not\vDash \psi$, então existe $\mathfrak{A}$ tq $\not\vDash_{\mathfrak{A}} \psi$, entretanto, como $\psi \in \Lambda$, então $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \vdash \psi$, mas $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \not\vDash \psi$;
b) Sabemos que $\{\varphi \wedge \psi\} \vDash \varphi$, mas $\{\varphi \wedge \psi\} \nvdash \varphi$, visto que as únicas deduções possíveis incluem $\varphi \wedge \psi$ e modus ponens, que nada pode fazer nesse caso;
c) Sendo $\Gamma' = \Gamma \cup \{\psi\}$ tq $\vDash \psi$, temos $\Gamma \vdash \varphi$, i.e., $\Gamma \cup \Lambda \vDash \varphi$, sse $\Gamma \cup \Lambda' \vDash \varphi$, visto que $\Gamma \cup \Lambda \vDash\dashv \Gamma \cup \Lambda'$. $\dashv$

2.6 Modelos de Teorias

Exercício 1. Mostre que $\varphi, \psi \notin \Phi_{\text{fv}}$, onde

$$\varphi = \exists xyz((Pxf(x) \to Pxx) \vee (Pxy \wedge Pyz \wedge \neg Pxz));$$
$$\psi = \exists x \forall y \exists z((Qzx \to Qzy) \to (Qxy \to Qxx)).$$

Proof. Se $\varphi, \psi \in \Phi_{\text{fv}}$, então para todo $\mathfrak{A}$ finito temos $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi, \psi$, portanto $\varphi, \psi \notin \Phi_{\text{fv}}$ sse os modelos de $\neg\varphi, \neg\psi$ são infinitos.

$$\begin{aligned}
\neg\varphi &= \exists xyz((Pxf(x) \to Pxx) \vee (Pxy \wedge Pyz \wedge \neg Pxz)) \\
&= \forall xyz(\neg(Pxf(x) \to Pxx) \wedge \neg(Pxy \wedge Pyz \wedge \neg Pxz)) \\
&= \forall xyz((Pxf(x) \wedge \neg Pxx) \wedge (Pxy \wedge Pyz \to Pxz))
\end{aligned}$$

i.e., P é transitivo, não reflexivo e para cada x, $Pxf(x)$. Assuma por contradição que $\vDash_{\mathfrak{A}} \neg\varphi$ onde $|\mathfrak{A}| = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $f(a_1) \neq a_1$, caso contrário $Pa_1 f(a_1) = Pa_1 a_1$, contradição, portanto $f(a_1) = a_{i_1}, i_1 \neq 1$, se $f(a_{i_1}) = a_{i_2}$, não podemos ter $a_{i_2} = a_{i_1}, a_{i_2}$, caso contrário a transitividade de P garante que Pxx, em geral é fácil ver por indução que $f(a_{i_k}) \neq a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, entretanto, para a_{i_n} teremos $f(a_{i_n}) \notin \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\} = |\mathfrak{A}|$, contradição, visto que f é uma função, portanto $\mathfrak{A}$ precisa ser infinito.
Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
\neg\psi &= \neg\exists x \forall y \exists z((Qzx \to Qzy) \to (Qxy \to Qxx)) \\
&= \forall x \exists y \forall z((Qzx \to Qzy) \wedge Qxy \wedge \neg Qxx)
\end{aligned}$$

$\neg\psi$ expressa que existe um y tq para todo z em que zQx, temos zQy, que sempre existe um y tq Qxy e e que Q é não reflexiva. Assuma $\vDash_{\mathfrak{A}} \neg\psi$, com $|\mathfrak{A}| = \{a_1, \ldots, a_n\}$, como para todo x_1 existe

x_2 tq Qx_1x_2, visto que Q é não-reflexivo $x_1 \neq x_2$, analogamente existe x_3 tq Qx_2x_3, com $x_3 \neq x_2$, se $x_3 = x_1$, como Qx_1x_2 e Qx_2x_1, então Qx_1x_1, contradição, é fácil ver por indução, portanto, que isso forma uma sequência (x_i) tq Qx_ix_{i+1} e $x_i \neq x_j, i \neq j$, entretanto, se $Qx_1x_2, \ldots, Qx_{n-1}x_n$, então tem de existir um $x_{n+1} \neq x_i, i \leqslant n+1$ tq Qx_nx_{n+1}, o que é impossível, visto que $|\mathfrak{A}|$ só possui n elementos distintos, contradição, logo $\mathfrak{A}$ é infinito. $\dashv$

Exercício 2. Sejam T_1, T_2 teorias na mesma linguagem tq $T_1 \subseteq T_2$, T_1 é completa e $\mathrm{Sat}(T_2)$, prove que $T_1 = T_2$.

Proof. Seja $\varphi \in T_2$, como T_1 é completa, φ ou $\neg\varphi$ está em T_1, no último caso, como $T_1 \subseteq T_2$, temos $\varphi, \neg\varphi \in T_2$, logo $T_2 \vdash \varphi, \neg\varphi$, i.e., $\neg\mathrm{Con}(T_2)$ que, por Correção, implica em $\neg\mathrm{Sat}(T_2)$, contradição, logo $\varphi \in T_1$, i.e., $T_2 \subseteq T_1$, como por hipótese $T_1 \subseteq T_2$, então $T_1 = T_2$. $\dashv$

Exercício 3. Prove que:
a) $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Rightarrow \mathrm{Mod}(\Sigma_2) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma_1)$;
b) $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \Rightarrow \mathrm{Th}(\mathcal{K}_2) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{K}_1)$;
c) $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma)))$ e $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})))$.

Proof. a) Se $\vDash_{\mathfrak{A}} \Sigma_2$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \sigma, \sigma \in \Sigma_2$, como $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, então também $\vDash_{\mathfrak{A}} \sigma, \sigma \in \Sigma_1$, i.e., $\vDash_{\mathfrak{A}} \Sigma_1$, portanto todo modelo de Σ_2 é também modelo de Σ_1: $\mathrm{Mod}(\Sigma_2) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma_1)$;
b) Analogamente, se $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$ para toda $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_2$, visto que $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$ para toda $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1$;
c) Se $\varphi \in \Sigma$, então $\Sigma \vDash \varphi$, i.e., todos os modelos $\mathfrak{A}$ de Σ são modelos de φ, portanto $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma))$, por a) temos então que $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma))) \subseteq \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Para a conversa, se $\mathfrak{A}$ é um modelos de Σ, sabemos que $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma))$ sse todo modelo de Σ é modelos de φ, em particular $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$, logo $\mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma)))$;
Se $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{K})$, então $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$ para todo $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, então em particular $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$ para todo $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, i.e., $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$, por b) temos $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))) \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{K})$. Seja $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{K})$, logo para todo $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K}))$ temos $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi$, portanto $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})))$, i.e., $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})))$. $\dashv$

Exercício 4. Prove que a teoria das ordenações lineares densas sem pontos limites é $\aleph_0$-categórica.

Proof. Sejam $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ estruturas contáveis tq $\vDash_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} \delta$, enumere $|\mathfrak{A}| = \{a_0, a_1, \ldots\}, |\mathfrak{B}| = \{b_0, b_1, \ldots\}$, defina $f(a_0) = b_0$ e siga o procedimento: para o menor $a_i \in |\mathfrak{A}|$ que ainda não foi associado a nenhum elemento por f, escolha o menor $b_j \in |\mathfrak{B}|$ tq f preserve a ordem, i.e., se $a_{i_0} < \cdots < a_i < \cdots < a_{i_n}$, então $f(a_{i_0}) < \cdots < b_j < \cdots < f(a_{i_n})$, onde cada $a_{i_k}, 0 \leqslant k \leqslant n$ já foi associado, após isso, escolha o menor $b_i \in |\mathfrak{B}|$ que ainda nennhum $a \in |\mathfrak{A}|$ se associou e escolha o menor $a_j \in |\mathfrak{A}|$ para associar tq f preserve a ordem, e repita o procedimento. Para provar que f é um isomorfismo e que o procedimento anterior é válido, basta notar que paara todo a_i, podemos encontrar um b_j que preserva a ordem, se a_i estiver entre os pontos já associados, densidade garante que existe um b_j entre os pontos de $|\mathfrak{B}|$ que preserve a ordem, se a_i estiver a direita ou a esquerda de todos os pontos, a propriedade de não haver pontos limites garante que vai existir um b_j maior ou menor que todos os outros, e tricotomia permite que testemos em cada passo qual a relação de a_i com os pontos anteriormente associados para garantir que f preserva a ordem. $\dashv$

Obs. O processo descrito acima é uma das técnicas modelo-teóricas mais comuns para provar que duas estruturas são isomórficas, é conhecida como **ir-e-vir** (ou back-and-forth), e reside no fato de que se $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$ (são parcialmente isomórficas), com $|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}| \leq \aleph_0$, então $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Isomorfismos parciais são, além de técnicas importantes, fatos essenciais nas provas do **Teorema de Fraïssé** e no **Jogo de Ehrenfeucht–Fraïssé**, que por sua vez são usados nas provas dos **Teoremas de Lindström**, então vamos dar um sketch do teorema acima, um mapeamento p de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ é denominado isomorfismo parcial se $\mathrm{Dom}(p) \subseteq |\mathfrak{A}|, \mathrm{Ran}(p) \subseteq |\mathfrak{B}|$ e
a) p é injetor;
b) para todo $a_1, \ldots, a_n, a \in \mathrm{Dom}(p)$ e símbolos $P, f, c \in \mathcal{S}$:

$$P^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_n \text{ sse } P^{\mathfrak{B}} p(a_1) \ldots p(a_n);$$
$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a \text{ sse } f^{\mathfrak{B}}(p(a_1), \ldots, p(a_n)) = p(a);$$
$$c^{\mathfrak{A}} = a \text{ sse } c^{\mathfrak{B}} = p(a).$$

O ponto principal é que isomorfismos parciais, embora em geral não preservem fórmulas com quantificadores, se puderem ser extendidos podem preservar, o que é capturado pela definição de estruturas *parcialmente isomórficas* ($\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$): se existe I tq
a) $I \neq \varnothing$ é um conjunto de isomorfismos parciais de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$;
b) (propriedade de ir) Para todo $p \in I$ e $a \in |\mathfrak{A}|$, existe $q \in I$ tq $p \subseteq q$ e $a \in \mathrm{Dom}(p)$;
c) (propriedade de vir) Para todo $p \in I$ e $b \in |\mathfrak{B}|$, existe $q \in I$ tq $p \subseteq q$ e $a \in \mathrm{Ran}(p)$.
Vamos agora a prova do teorema enunciado no início, suponha que $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$, $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$. Inicie com um $p_0 \in I$ e, aplicando repetidamente as propriedades de ir e vir, obtemos extensões $p_1, p_2, \dots \in I$ tq $a_0 \in \mathrm{Dom}(p_1)$, $b_0 \in \mathrm{Ran}(p_2)$, $a_1 \in \mathrm{Dom}(p_3)$, $b_1 \in \mathrm{Ran}(p_4)$, ..., portanto $p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_n$ é um isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{B}$ tq $\mathrm{Dom}(p) = |\mathfrak{A}|$ e $\mathrm{Ran}(p) = |\mathfrak{B}|$, logo $p : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Com isso em mãos, a prova de que a teoria das ordenações lineares densas sem pontos limites é $\aleph_0$-categórica se resume a encontrar um conjunto I de isomorfismo parciais entre quaisquer estruturas no máximo contáveis $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ que as torna parcialmente isomórficas. Com algumas definições adicionais como *finitamente isomórficas* ($\mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B}$) que não será explicada em detalhes aqui, conseguimos provar o **Teorema de Fraïssé**, que diz que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ sse $\mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B}$, para $\mathcal{S}$-estruturas com $\mathcal{S}$ finito, sabendo que $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B}$ é fácil mostrar que $(\mathbb{R}, <^R) \equiv (\mathbb{Q}, <^Q)$ e que a teoria é completa e R-decidível.

Exercício 5. Encontre a forma normal prenex de:
a) $(\exists x Ax \wedge \exists x Bx) \to Cx$;
b) $\forall x Ax \leftrightarrow \exists x Bx$.

Proof. a) $\exists x \exists y((Ax \wedge By) \to Cz)$;
b) $\forall x \exists y(Ax \leftrightarrow By)$. $\dashv$

Exercício 6. Prove que uma teoria R-enumerável (em uma linguagem razoável) é axiomatizável.

Proof. Se T é uma teoria R-enumerável seja $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots\}$ uma enumeração, considere

$$\Sigma := \left\{ \bigwedge_{0 \leqslant i \leqslant n} \sigma_i : n \in \mathbb{N} \right\} = \{\sigma_0, \sigma_0 \wedge \sigma_1, \sigma_0 \wedge \sigma_1 \wedge \sigma_2, \dots\}$$

é fácil ver que o n-ésimo elemento de Σ satisfaz σ_n e que, equivalentemente, pra todo $\bigwedge_{0 \leqslant i \leqslant k} \sigma_k$ temos que T satisfaz, portanto $T \vDash\dashv \Sigma$, i.e., $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, do Exercício 3. dessa seção sabemos que $\mathrm{Th}(T) = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(T)))$, visto que T é uma teoria, $\mathrm{Th}(T) = T$, portanto

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T)) \\ &= \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma)) \\ &= \mathrm{Cn}(\Sigma) \end{aligned}$$

para provar que T é axiomatizável basta, portanto, provar que Σ é decidível.
Como T é enumerável, basta, para um $\varphi \in \Sigma$ qualquer, verificar se o segmento inicial de φ é igual a σ_0, visto que todas as sentenças em Σ assim começam, caso não combine, então não pertence a Σ, se combinar e a string não tiver acabado teste para $\wedge\sigma_1$, e assim por diante. $\dashv$

Exercício 7. Seja $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, <)$, mostre que existe $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$ tq $<^{\mathfrak{A}}$ tem uma cadeia descendente, i.e., existem $a_0, a_1, \dots \in |\mathfrak{A}|$ tq $(a_{i+1}, a_i) \in <^{\mathfrak{A}}, i \geqslant 0$.

Proof. Seja

$$\sigma_n := \exists x_1 \dots x_n \left(\bigwedge_{r,s \in \{1,\dots,n\}} v_r \neq v_s \wedge \bigwedge_{0 \leqslant i < n} <^{\mathfrak{A}} x_{i+1} x_i \right)$$

considere $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$, obviamente todo subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ é tq $\vDash_{\mathfrak{N}} \Sigma_0$, por compacidade existe $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ tq $\vDash_{\mathfrak{B}} \Sigma$. $\dashv$

Exercício 8. Assuma que $\vDash_{\mathfrak{A}} \sigma$ para todo modelo infinito $\mathfrak{A}$ de uma teoria T. Mostre que existe $k \in \mathbb{N}$ tq σ é verdade em todos os modelos $\mathfrak{B}$ de T que possuem k ou mais elementos no domínio.

Proof. Se $\vDash_{\mathfrak{A}} \sigma$ para todo modelo infinito de T, então $\vDash_{\mathfrak{B}} \neg\sigma$ se $\mathfrak{B}$ é um modelo finito, considere

$$\Sigma := T \cup \{\neg\sigma\} \cup \{\varphi_{\geqslant i} \mid i \geqslant 0\}$$

onde $\varphi_{\geqslant n}$ expressa "há no mínimo n elementos" (veja a Observação do Exercício 9. da Seção 2.2.), Assuma por contradição que para cada $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ existe $\mathfrak{A}$ tq $\vDash_{\mathfrak{A}} \Sigma_0$, portanto compacidade garante que existe um modelo $\mathfrak{B}$ de Σ, contradição, visto que $\mathfrak{B}$ tem de ser infinito para satisfazer Σ, e $\vDash_{\mathfrak{B}} \neg\sigma$, portanto existe um Σ_0 tq $\neg\mathrm{Sat}(\Sigma_0)$, seja $\varphi_{\geqslant k}$ a fórmula com maior k que esteja em Σ_0, como Σ_0 não é satisfatível, nenhum outro modelo que contém mais de k elementos pode satisfazer $\neg\sigma$, portanto σ é verdadeiro para todo modelo que possui k ou mais elementos. $\dashv$

Exercício 9. Dizemos que um conjunto de sentenças Σ possui a propriedade de modelo finito sse para cada $\sigma \in \Sigma$, se $\mathrm{Sat}(\sigma)$, então σ possui um modelo finito. Assuma que Σ é um conjunto de sentenças em uma linguagem finita e que possui a propriedade de modelo finito. Crie um procedimento que decida se, dado um $\sigma \in \Sigma$, este é ou não satisfatível.

Proof. Pelo Teorema de Kleene, basta provarmos que $\Phi := \{\sigma \in \Sigma \mid \mathrm{Sat}(\sigma)\}$ e $\Sigma \backslash \Phi$ são ambos R-enumeráveis, o que implica que Σ por si só é R-enumerável, algo que não foi dado como hipótese no enunciado, portanto assumiremos que Σ é R-enumerável. Se $\sigma \in \Sigma$, pela propriedade do modelo finito, se σ for satisfatível, então possui um modelo finito, portanto basta utilizarmos o procedimento que testa, para cada $\sigma \in \Sigma$, se a estrutura $|\mathfrak{A}_n| = \{1, \ldots, n\}$ de tamanho n é tq $\vDash_{\mathfrak{A}_n} \sigma$, utilizando o algoritmo descrito no livro. Portanto enumeramos Σ e testamos se $\mathfrak{A}_1$ é modelo de σ_1, depois se $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ são modelos de σ_1, σ_2, ..., se algum σ_i for satisfeito, printamos, caso contrário não, visto que cada sentença satisfatível possui um modelo finito ela eventualmente será printada, logo Φ é R-enumerável pelo procedimento $\mathfrak{P}_1$. Se σ, por outro lado, não for satisfatível, então ele prova uma contradição, sabemos que $\{\sigma\}$ é decidível, portanto seus teoremas são enumeráveis, se este for uma contradição, printamos, caso contrário não, portanto o procedimento $\mathfrak{P}_2$ enumera fórmulas não satisfatíveis, visto que a contradição que σ prova tem de ser finita, logo eventualmente será um teorema que aparecerá na enumeração. $\dashv$

Exercício 10. Assuma que temos uma linguagem finita sem símbolos de função:
a) Prove que o conjunto de sentenças Σ_2 satisfatíveis é decidível;
b) Prove que o conjunto de sentenças Π_2 válidas é decidível.

Proof. a) Devido ao Exercício 19. da seção 2.2. sabemos que uma sentença Σ_2, se satisfatível, possui um modelo finito, i.e., o conjunto Φ de sentenças Σ_2 satisfatíveis goza da propriedade de modelo finito, logo, pelo exercício anterior, Φ é decidível;
b) Se $\varphi \in \Pi_2$, então $\varphi = \forall x_1 \ldots x_n \exists y_1 \ldots y_m \theta$, onde θ é livre de quantificadores. Se φ é válida, então $\neg\varphi$ não é satisfatível, note que $\neg\varphi = \exists x_1 \ldots x_n \forall y_1 \ldots y_m \neg\theta$, i.e., $\neg\varphi \in \Sigma_2$, de a) sabemos que o conjunto de sentenças Σ_2 satisfatíveis é decidível, portanto seu complementar em Σ_2 também é, logo, dado $\varphi \in \Pi_2$, para saber se φ é válida basta determinar se $\neg\sigma$ é não satisfatível utilizando o processo de decisão de a). $\dashv$

2.7 Interpretações entre Teorias

PENDENTE. Ambos os exercícios 1. e 2. são corolários diretos do fato maçante de que toda linguagem L_0 pode ser reduzida a uma linguagem relacional L_1, i.e., uma linguagem somente com símbolos de relação.

Exercício 3. Prove que uma interpretação π de uma teoria completa T_0 em uma teoria satisfatível T_1 é sempre fiel.

Proof. Assuma por contradição que existe $\pi : L_0 \to T_1$ tq $T_0 \subset \pi^{-1}[T_1]$, logo existe $\varphi \in \pi^{-1}[T_1] \backslash T_0$, mas como T_0 é completo, então $\neg\varphi \in T_0 \subseteq \pi^{-1}[T_1]$, i.e., $\varphi, \neg\varphi \in \pi^{-1}[T_1]$, por definição existe $\mathfrak{B}$ tq $\vDash_{\mathfrak{B}} T_1$ e $\vDash_{\pi\mathfrak{B}} \varphi, \neg\varphi$, contradição, logo não existe tal π. ⊣

2.8 Análise não Padrão

Exercício 1. ($\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$). Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}^*$ existe $y \in \mathbb{Q}^*$ tq $x \cong y$.

Proof. Como

$$\vDash_{\mathfrak{R}} \forall xy(x \neq y \to \exists p(Qp \wedge x < p < y))$$

então

$$\vDash_{\mathfrak{R}^*} \forall xy(x \neq y \to \exists p(\mathbb{Q}^* p \wedge x <^* p <^* y))$$

portanto, em particular, para $y = x + \varpi$, com $\varpi \in \mathcal{I}$, temos que existe $p \in \mathbb{Q}^*$ tq $x <^* p <^* x + \varpi$, i.e., $0 <^* p - x <^* \varpi$, por definição $|\varpi| < y$, para todo $y \in \mathbb{R}$, visto que $0 <^* |p - x| <^* |\varpi| < y$, então obviamente $p - x \in \mathcal{I}$, i.e., $p \cong x$. ⊣

Exercício 2. a) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e $F : A \to \mathbb{R}$, mostre que $F^* : A^* \to \mathbb{R}^*$;
b) Seja $S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} S(n) = b$ sse $S^*(x) \cong b$ para todo $x \in \mathbb{N}^*$ infinito;
c) Se $S_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge para b_i, com $i = 1, 2$. Mostre que $(S_1 + S_2) \to (b_1 + b_2)$ e $(S_1 \cdot S_2) \to (b_1 \cdot b_2)$.

Proof. a) Como $F \subseteq \mathbb{R}^2$, então $F : A \to \mathbb{R}$ sse $\vDash_{\mathfrak{R}} \forall x(Ax \to \exists! y(Fxy))$, portanto em $\mathfrak{R}^*$ temos que $\vDash_{\mathfrak{R}^*} \forall x(A^* x \to \exists! y(Fxy))$, i.e., $F^* : A^* \to \mathbb{R}^*$;
b) $\lim S(n) = b$ sse para todo $\varepsilon > 0$, existe k tq para todo $n > k$ temos $|S(n) - k| < \varepsilon$. Portanto em $\mathfrak{R}^*$ sabemos que $|S^*(n) - k| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$ sse $S^*(n) - k \in \mathcal{I}$, i.e., $S^*(n) \cong k$, para todo $n > k$, portanto em particular para todo $x \in \mathbb{N}^*$ infinito. Analogamente, se para todo $x \in \mathbb{N}^*$ infinito, $S^*(x) \cong b$, então para todo x tq para todo k, $x > k$, $|S^*(x) - b| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Então obviamente existe um k tq se $x > k$, temos $|S^*(x) - b| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$;
PENDENTE (prova feia :c, refazer mais elegantemente)
c) Do resultado anterior para todo $x \in \mathbb{N}^*$ infinito temos $S_1^*(x) \cong b_1$ e $S_2^*(x) \cong b_2$, logo segue-se diretamente do **Teorema 28B** b) e c) que $(S_1 + S_2) \cong (b_1 + b_2)$ e $(S_1 \cdot S_2) \cong (b_1 \cdot b_2)$. ⊣

Exercício 3. Seja $F : A \to \mathbb{R}$ injetora, com $A \subseteq \mathbb{R}$, mostre que se $x \in A^* \backslash A$, então $F^*(x) \notin \mathbb{R}$.

Proof. Assuma por contradição que existe $x \in A^* \backslash A$ tq $F^*(x) \in \mathbb{R}$, como F é injetora então $F^{-1} : \mathrm{Im}(F) \to A$ existe e, portanto, $F^{-1^*} : \mathrm{Im}(F^*) \to A^*$ também e é função. Sabemos que $F^{-1} = F^{-1^*}|_{\mathbb{R}}$, como $F^*(x) \in \mathrm{Im}(F^*)$ e $x \in \mathbb{R}$, então $x \in \mathrm{Im}(F)$, logo $F^{-1}(x)$ existe e está em A, contradição. ⊣

Exercício 4. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que $A = A^*$ sse A é finito.

Proof. ($\Leftarrow$) Se $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é finito, então

$$\vDash_{\mathfrak{R}} \varphi(A) := \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} A_{x_i} \wedge \forall x\left(Ax \to \bigvee_{1\leqslant j\leqslant n} x = x_j\right)$$

como cada $x_i \in \mathbb{R}$, então $x_i^* = x_i$, logo $\vDash_{\mathfrak{R}^*} \varphi(A^*)$ com os mesmos x_i, i.e., $A = A^*$.
($\Rightarrow$) Assuma que A é ilimitado em $\mathbb{R}$, como A é infinito então $\vDash_{\mathfrak{R}} \forall n(n \in \mathbb{N} \to \exists x(x \in A \wedge x > n))$, logo $\vDash_{\mathfrak{R}^*} \forall n(n \in \mathbb{N}^* \to \exists x(x \in A^* \wedge x >^* n))$, em particular $\vDash_{\mathfrak{R}^*} \exists x(x \in A^* \wedge x > \omega)$, com $\omega \in \mathbb{N}^*$ infinito, e portanto A^* possui um hiperreal infinito que não tem como estar em A, logo $A \neq A^*$; Assuma agora que A é limitado e infinito, pelo exercício seguinte existe $p \in \mathbb{R}$ tq $p \cong a$ e $p \neq a$ para algum $a \in A^*$, mas se $p, a \in \mathbb{R}$ e $p \cong a$, então $p = a$, logo $a \notin \mathbb{R}$, i.e., $A \neq A^*$. $\dashv$

Exercício 5. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ limitado e infinito. Mostre que existe $p \in \mathbb{R}$ tq $p \cong a$, mas $p \neq a$, para algum $a \in A^*$.

Proof. Se A é infinito existe $S : \mathbb{N} \to A$ injetora, uma vez que A é limitado em $\mathbb{R}$, então Bolzano-Weierstrass garante que existe uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(S(n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, digamos para $p \in \mathbb{R}$. Do **Exercício 2. b)** $\lim s_n = p$ sse $s_x^* \cong p$, para todo $x \in \mathbb{N}^*$ infinito, como $S^* : \mathbb{N}^* \to A^*$, em particular existe um $\omega \in \mathbb{N}^*$ infinito tq $\omega \in \mathrm{Dom}(s^*)$, $S^*(\omega) \in A^*$ e $S^*(\omega) = s_\omega^* = a \cong p$, para garantir que existe ω tq $s_\omega^* = a \neq p$, i.e., $a \notin \mathbb{R}$ assuma por contradição que $s_x^* = s_y^* = a$ para todo $x, y \in \mathbb{N}^*$ infinito, isso contradiz o fato de que S^* é injetora (visto que S é), para completar, é óbvio que não podemos ter $s_x^*, s_y^* \in \mathbb{R}$ e $s_x^* \neq s_y^*$, visto que nesse caso $s_x^* \ncong s_y^*$. $\dashv$

Exercício 6. a) Mostre que $|\mathbb{Q}^*| \geq 2^{\aleph_0}$;
b) Mostre que $|\mathbb{N}^*| \geq 2^{\aleph_0}$.

Proof. a) Do **Exercício 1.** sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}^*$ existe $y \in \mathbb{Q}^*$ tal que $x \cong y$. Como para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se $x \neq y$, então $x \ncong y$, logo $\mathrm{st}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^*$ é injetora, portanto $\mathbb{Q}^* \geq 2^{\aleph_0}$;
b) como $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, então existe $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ bijetora, em particular

$$\vDash_{\mathfrak{R}} \forall xy(P_{\mathbb{Q}}x \wedge P_{\mathbb{Q}}y \wedge x \neq y \to F_f(x) \neq F_f(y)) \wedge \forall y(P_{\mathbb{N}}y \to \exists x(P_{\mathbb{Q}}x \wedge F_f(x) = y))$$

i.e., f é uma bijeção de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{N}$, portanto $\mathfrak{R}^*$ prova o mesmo para $f^* : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{N}^*$. $\dashv$

Exercício 7, Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ sem máximo, logo, com respeito a $\mathbb{R}^*$ e $<^*$, A terá um limite superior em $\mathbb{R}^*$, mas prove que $\sup(A)$ não existe.

Proof. Assuma que $\sup(A)$ exista, como A não possui máximo obviamente $\sup(A) \notin A$. Seja $\varpi \in \mathcal{I}$ positivo, logo para todo $y \in A$ temos que $0 < \varpi < \sup(A) - y$, uma vez que $\sup(A) > y, \forall y \in A$, i.e., $\sup(A) - y > 0$. Logo $y - \sup(A) < -\varpi < 0$ e $y < \sup(A) - \varpi < \sup(A)$, $\forall y \in A$, i.e., $\sup(A) - \varpi$ é um limite superior menor que o supremo, contradição, logo $\sup(A)$ não existe ($<$ é interpretado como $<^*$ na prova). $\dashv$