Combinatória Extremal

Ref. Tópicos em Combinatória Contemporânea - Gugu, Yoshi

Autor: Xenônio

Discord: xennonio

Sumário

1 Introdução

1.1 Motivação

1.1.1 Anticadeias sob Divisão (Sequências Primitivas)

Dado $\overline{2n} := \{1, 2, \ldots, 2n\}$, é fácil ver que há $x, y \in \overline{2n}$ tal que $\gcd(x, y) = 1$, basta considerar a partição

$$A = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}\}$$

de $\overline{2n}$ com $|A| = n$. Isso garante que, escolhendo $n+1$ elementos, pelo princípio da casa dos pombos no mínimo dois estarão na mesma classe, i.e., serão consectuvos logo seu mdc será 1.

Analogamente, podemos perguntar, qual o maior subconjunto de $\overline{2n}$ que não possui x, y tal que $x \mid y$, i.e., qual a maior cardinalidade de uma anticadeia de $\overline{2n}$ sob divisibilidade (também conhecida como sequência primitiva).

Como todo número em $\overline{2n}$ pode ser secrito como

$$\overline{2n} = \{1, 2, 3, 2^2, 5, 2 \cdot 3, 7, 2^3, 3^2, \ldots, 2^m a\}$$

retirando os fatores de 2 teremos

$$A = \{1, 1, 3, 1, 5, 3, 7, 1, 3^2, \ldots, a\}$$

como há n ímpares em $2n$, $|A| = n$, escolhendo $n+1$ inteiros, no mínimo 2 serão tal que $x = 2^r k$, $y = 2^s k$, i.e., $x \mid y$ ou $y \mid x$.

Como $B = \{n+1, \ldots, 2n\}$ é tal que $|B| = n$ e B é uma anticadeia, então n é o maior número de elementos de $\overline{2n}$ que não tem elementos tal que um divide o outro.

Em geral, combinatória extremal trabalha com questões do tipo: Dada uma determinada propriedade $\varphi(x) \in \mathcal{L}_1$, qual a maior (ou menor) cardinalidade possível para o conjunto A tal que $\varphi(A)$. Tal número, se existir, será denotado por $c(\varphi)$.

1.1.2 Sistemas Intersectantes

Como uma motivação adicional e, utilizando a notação mencionada anteriormente. Seja $\varphi_n(x) :=$"$\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\overline{n})$ e, para todo $A, B \in \mathscr{A}$, $A \cap B \neq \emptyset$. Provaremos que:

Teorema 1.1. Se $\mathscr{A}$ é tal que $\varphi_n(\mathscr{A})$ e $|\mathscr{A}| < 2^{n-1}$, então ele pode ser estendido para uma coleção $\mathscr{A}'$ com 2^{n-1} elementos tal que $|\mathscr{A}'| = 2^{n-1}$, ou seja

$$c(\varphi_n) = 2^{n-1}$$

Prova. Se $A \subseteq \mathscr{A}$, então $\overline{n} \setminus A \notin \mathscr{A}$, visto que $A \cap (\overline{n} \setminus A) = \emptyset$. Portanto

$$|\mathscr{A}| \leq \frac{1}{2}|\mathcal{P}(\overline{n})| = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$$

De fato, tal limitante não pode ser melhora, visto que

$$\mathscr{A} := \{x \in \mathcal{P}(\overline{n}) : 1 \in x\}$$

é tal que $\varphi_n(\mathscr{A})$ e $\mathscr{A} = 2^{n-1}$.

Agora, se $|\mathscr{A}| < 2^{n-1}$, com $\varphi_n(\mathscr{A})$, então existe $X \in \mathcal{P}(\overline{n})$ tal que $X \notin \mathscr{A}$ e $\overline{n} \setminus X \notin \mathscr{A}$. Se adicionarmos X em $\mathscr{A}$ e não houver $Y \in \mathscr{A}$ tal que $X \cap Y = \emptyset$, então estamos feitos, caso contrário, $X \cap Y = \emptyset$, logo $Y \subseteq \overline{n} \setminus X$, i.e., podemos adicionar $\overline{n} \setminus X$ em $\mathscr{A}$, visto que, para todo $A \in \mathscr{A}$, temos $A \cap Y \neq \emptyset$ e $A \cap (\overline{n} \setminus X) \neq \emptyset$, então eventualmente $\mathscr{A}$ será extendido para um conjunto de 2^{n-1} elementos. $\dashv$

2 Teorema de Sperner

2.1 Estimativas Iniciais

Dado $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\overline{n})$, uma anticadeia sob $\subseteq$, um problema interessante é, sendo $\psi_n(x) :=$"$x \subseteq \mathcal{P}(\overline{n})$ é uma anticadeia", determinar $c(\psi_n(x))$.

Note que $[\overline{n}]^k$ é uma anticadeia de $\mathcal{P}(\overline{n})$, portanto, para $0 \leq k \leq n$

$$c(\psi_n) \geq \binom{n}{k}$$

Que é máximo em $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, pelo seguinte lema.

Lema 2.1. Se $f(k) = \binom{n}{k}$, com $n \in \mathbb{N}$ fixo, então

$$\max_{0 \leq k \leq n} f(k) = f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

Prova. Provaremos que f é estritamente crescente para $0 \leq k < \lceil \frac{n}{2} \rceil$, visto que, como $f(k) = f(n-k)$, então ela é estritamente decrescente após $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, logo em $k = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ temos um ponto de máximo.

Para isso, note que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{n-k+1}{k} \\
&= \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k}
\end{aligned}$$

Logo $f(k) > f(k-1)$ sse $n-k+1 > k$, i.e., $k < \frac{n+1}{2}$. Se $n = 2m$, $k = m$ é máximo e, se $n = 2m+1$, $k+1 = m+1$, ou seja, $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. $\dashv$

2.2 Prova de Lubell e Desigualdade de LYM

Dada essa estimativa de $c(\psi_n)$, o que o Teorema a seguir nos diz é que esta é, na verdade, a melhor possível:

Teorema 2.1. (Sperner)

$$c(\psi_n) = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

Obs. Note que a escolha de $\lceil\ \rceil$ por $\lfloor\ \rfloor$ é arbitrária, visto que, se $n = 2m$, então $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e, se $n = 2m + 1$, então

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} = \binom{n}{m+1} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

Existem muitas provas elegantes para o Teorema de Sperner, em particular duas delas são importantes:

- Prova de Lubell

  Prova um outro resultado mais forte conhecido como Desigualdade de Lym

  É muito mais simples que a prova de Sperner

  Mas tem uma aplicação mais difícil ao problema de Littlewood-Offord

- Prove de Sperner

  Desenvolve métodos mais gerais para combinatória extremal

  Mais fácil de ser aplicada ao problema de Littlewood-Offord

De uma forma ou outra, apresentaremos somente a prova de Lubell:

Prova. (Lubell)
Considere

$$S_n := \{\pi : \overline{n} \to \overline{n} : \pi \text{ é bijetora}\}$$

i.e., o conjunto de todas as permutações em $\overline{n}$. Dizemos que π é compatível com A se

$$A = \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(|A|)\}$$

seja $\mathcal{C}(A) := \{\pi \in S_n : \pi \text{ é compatível com } A\}$. Mostraremos que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \emptyset$ se $A \neq B$, para $A, B \in \mathscr{A}$.

Assuma por contradição que exista $\pi \in \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$, portanto, assuma sem perda de generalidade que $|B| \leq |A|$, portanto

$$B = \{\pi(1), \ldots, \pi(|B|)\} \subseteq \{\pi(1), \ldots, \pi(|A|)\} = A$$

contradição, visto que $\mathscr{A}$ é uma anticadeia.

Com isso, e sabendo que

$$|\mathcal{C}(A)| = |A|!(n - |A|)!$$

visto que os primeiros $|A|$ elementos de $\mathrm{Im}(\pi)$ são uma permutação de A. Então, como cada $\mathcal{C}(A)$ é distinto, temos que

$$\sum_{A \in \mathscr{A}} |\mathcal{C}(A)| = \sum_{A \in \mathcal{A}]} (n - |A|)! \leq |S_n| = n!$$

Sendo $p_k = |[\mathscr{A}]^k|$, temos que

$$\sum_{A \in \mathscr{A}} |A|!(n-|A|)! = \sum_{k=0}^{n} p_k k!(n-k)! \leq n!$$

ou seja

Teorema 2.2. (Desigualdade de LYM)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

Com isso, o Teorema de Sperner vira um corolário direto:

$$\begin{aligned}
|\mathscr{A}| = \sum_{k=0}^{n} p_k &= \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}} \\
&\leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\binom{n}{k}} && \text{(Lema 2.1)} \\
&\leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} && \text{(LYM)}
\end{aligned}$$

$\dashv$

2.3 Teorema de Lovász

Uma pergunta natural que surge é quantas anticadeias $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\overline{n})$ existem tal que

$$|\mathscr{A}| = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

O Teorema a seguir responde tal pergunta

Teorema 2.3. Se $n \equiv 0 \pmod 2$, $\psi_n(\mathscr{A})$ e $|\mathscr{A}| = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$, então

$$\mathscr{A} = [\overline{n}]^{\frac{n}{2}}$$

e, se $n \equiv 1 \pmod 2$, então

$$\mathscr{A} = [\overline{n}]^{\frac{n-1}{2}} \text{ ou } \mathscr{A} = [\overline{n}]^{\frac{n+1}{2}}$$

Prova. **(Lovász 1979)**
Se $n = 2m$, como na penúltima desigualdade da prova do Teorema de Sperner usamos que

$$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq \binom{n}{k}$$

e, como $\binom{n}{m} > \binom{n}{k}$, $\forall k \neq m$, para garantir que valha a igualdade temos que ter $p_k = 0$, $\forall k \neq m$, logo $\mathscr{A} = [\overline{n}]^m$ é a única possibilidade.

Analogamente, se $n = 2m+1$, temos que

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{m+1} > \binom{n}{k}$$

para todo $k \neq m$, $m+1$, portanto $\mathscr{A}$ contém apenas conjuntos de tamanho m e $m+1$. Como precisamos que valha a igualdade, então em particular

$$\frac{p_m}{\binom{n}{m}} + \frac{p_{m+1}}{\binom{n}{m+1}} = 1$$

ou seja

$$\sum_{\substack{|A|=m \\ |A|=m+1}} |\mathcal{C}(A)| = |S_n|$$

com $A \in \mathscr{A}$. Portanto, dado $\pi \in S_n$, existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $\pi \in \mathcal{C}(A)$, i.e., todo π contribui para um elemento de A. $(*)$

Queremos provar que $\mathscr{A}$ consiste ou de todos $[\overline{n}]^m$ ou de todos $[\overline{n}]^{m+1}$. Assuma por contradição que $[\overline{n}]^{m+1} \nsubseteq \mathscr{A}$, logo $\mathscr{A} \cap [\overline{n}]^m \neq \emptyset$. Assim, existem $E, F \in [\overline{n}]^{m+1}$ tal que $E \in \mathscr{A}$ e $F \notin \mathscr{A}$, uma vez que $|\mathscr{A}| = |[\overline{n}]^{m+1}| = |[\overline{n}]^m|$.

Assim, renomeando os elementos de E para que os elementos de $E \cap F$ ocorram por último, temos que $E = \{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ e $F = \{x_i, \ldots, x_{m+i}\}$, para algum $i \in \mathbb{N}$. Como para $j = 1 < i$, $\{x_j, \ldots, x_{m+j}\} = E \in \mathscr{A}$, então existe o maior $j < i$ tal que

$$E^\star = \{x_j, \ldots, x_{m+j}\} \in \mathscr{A} \text{ e } F^\star = \{x_{j+1}, \ldots, x_{m+j+1}\} \notin \mathscr{A}$$

mas $E^\star \cap F^\star \subseteq E^\star \in \mathscr{A}$, como $\mathscr{A}$ é uma anticadeia, $E^\star \cap F^\star \notin \mathscr{A}$, mas também $E^\star \cap F^\star \subseteq F^\star$, onde $|E^\star \cap F^\star| = m$ e $|F^\star| = m+1$. Por causa de $(*)$ sabemos que, dados $X \subseteq Y$ arbitrário tal que $|X| = m$ e $|Y| = m+1$, com $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $Y = X \cup \{x_{m+1}\}$, então toda permutação iniciando com $x_1, \ldots, x_m$ é compatível com algum $A \in \mathscr{A}$, logo $X \in \mathscr{A}$, ou $Y \in \mathscr{A}$, contradição, visto que $E^\star \cap F^\star \notin \mathscr{A}$ e $F^\star \notin \mathscr{A}$, mas, se $X = E^\star \cap F^\star$ e $Y = F^\star$, temos $X \in \mathscr{A}$ ou $Y \in \mathscr{A}$. $\dashv$

3 Problema de Littlewood-Offord

3.1 O Problema Inicial

3.1.1 Resultado de Littlewood-Offord

Em 1943 Littlewood e Offord atacaram o seguinte problema: dados $\{z_i\}_{0 \leq i \leq n} \subseteq \mathbb{C}$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{\pm 1\}^n$, considere o polinômio

$$P(x) = z_0 + \varepsilon_1 z_1 x + \cdots + \varepsilon_n z_n x^n$$

quantas raízes reais tem $P(x)$ tipicamente?

O resultado principal provado foi que, dado $M = |z_0| + \cdots + |z_n|$ então todos os 2^n possíveis polinômio $P(x)$ com $\boldsymbol{\varepsilon}$ variando em $\{\pm\}^n$, exceto por no máximo

$$O\bigg(\frac{\ell n(\ell n(n))}{\ell n(n)} 2^n\bigg) = o(2^n) \qquad (*)$$

deles, são tais que a equação $P(x) = 0$ tem no máximo

$$10\ell n(n)\left(\ell n\left(\frac{M}{\sqrt{|z_0 z_n|}}\right) + 2\ell n(n)^5\right)$$

raízes reais.

Obs. Para ver $(*)$, vale lembrar que

$$O(f) = \left\{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lim_{x\to\infty} \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| < \infty\right\}$$
$$o(f) = \left\{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lim_{x\to\infty} \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = 0\right\}$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ell n(\ell n(x))}{\ell n(x)} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ell n(x)}\cancel{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x}}} = 0$$

portanto, se

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{g(x)\ell n(x)}{2^x \ell n(\ell n(x))}\right| = L \in \mathbb{R}$$

então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{2^x} = 0$$

i.e., $O(f) \subseteq o(f)$ e, como $o(f) \subseteq O(f)$ por definição, então eles são iguais.

3.1.2 O Problema Geométrico

Para provar tal resultado Littlewood e Offord tiveram que considerar o seguinte problema geométrica: o quão concentrada pode ser a distribuição das 2^n somas

$$\sum_{1\le j\le n} \varepsilon_j z_j,\ \ \varepsilon_j \in \{\pm 1\}$$

Em outras palavras

O Problema de Littlewood-Offord: Sejam $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tal que $|z_j| \ge 1$, $1 \le j \le n$, e $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_j)_{1\le j\le n} \in \{\pm 1\}^n$, seja

$$S(\boldsymbol{\varepsilon}) := \sum_{1\le j\le n} \varepsilon_j z_j$$

Se $\chi_r(n) := |\{|S(\boldsymbol{\varepsilon})| < r : \boldsymbol{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^n\}|$, i.e., a quantidade das 2^n somas que caem em um disco fechado de raio r, quanto vale $c(\chi_r(n))$?

O que Littlewood e Offord provaram foi que:

$$c(\chi_r(n)) \le c\frac{(r+1)2^n}{\sqrt{n}}\ell n(n)$$

onde c é uma constante universal.

3.2 Estimativa de Erdös

2 anos depois, Paul Erdös provou, por meio do Teorema de Sperner, que

Teorema 3.1. (Erdös)

$$c(\chi_r(n)) \leq B\frac{(r+1)2^n}{\sqrt{n}}$$

onde B é uma constante universal

e, de fato, tal limitante não pode ser melhorado a menos da constante.

3.2.1 O Melhor Limitante

Em particular, com o avanço de Erdös, podemos reenunciar o problema como:

O Problema de Erdös-Littlewood-Offord: Considere a variável aleatória

$$X = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$$

onde $a_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ são fixos e $\xi_i \sim \mathrm{Ber}(\frac{1}{2})$ são independentes. O problema afirma que a probabilidade de concentração máxima possível

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil}$$

Para mostrarmos que o limitante de Erdös é o melhor possível, vamos antes enunciar uma forma equivalente do problema:

Some $z_1 + \cdots + z_n$ a $S(\boldsymbol{\varepsilon})$ e divida por 2, logo teremos uma soma da forma

$$S(\boldsymbol{\delta}) = \sum_{1\leq j\leq n} \delta_j z_j$$

com $\boldsymbol{\delta} = (\delta_j)_{1\leq j\leq n} \in \{0,1\}^n$. Logo $S(\boldsymbol{\varepsilon})$ está contida em um disco de raio r sse $S(\boldsymbol{\delta})$ está contida em um disco de diâmetro $\Delta = r$.

Considere agora o caso em que $z_1 = \cdots = z_n = 1$ e sejam $u_0 < \cdots < u_\Delta$ distribuidos simetricamente em torno de $\frac{n}{2}$, i.e., tal que

$$\binom{n}{u_0} + \cdots + \binom{n}{u_\Delta}$$

é máximo, por ex. $u_0 = \lceil\frac{n}{2}\rceil + \lfloor\frac{\Delta}{2}\rfloor$, e $u_i = u_0 + i$. E seja

$$\mathscr{A} := [\overline{n}]^{u_0} \cup \cdots \cup [\overline{n}]^{u_\Delta}$$

Assim, temos que, dados $A, A' \in \mathscr{A}$, como $u_0 \leq |A|, |A'| \leq u_\Delta$ e u_j são consecutivos, então

$$||A| - |A'|| \leq u_0 - u_\Delta \leq \Delta$$

Assim, considerando o disco B_Δ de diâmetro Δ ao redor de $u_0, \ldots, u_\Delta$, temos que $\mathscr{A}$ contém todas as somas que caem em B_Δ, visto que

$$S(A) = \sum_{j \in A} \cancelto{1}{z_j} = |A| = \sum_{1 \leq j \leq n} \delta_j z_j$$

para $\delta_j = \chi_A(j)$.
Assim

$$\begin{aligned} |\mathscr{A}| &= \sum_{0 \leq j \leq \Delta} \binom{n}{u_j} = \sum_{|j - n/2| \leq \frac{\Delta}{2}} \binom{n}{j} \\ &= (1 + o(1))(\Delta + 1)\sqrt{\frac{2}{\pi n}} 2^n \qquad (*) \\ &\geq c\frac{(\Delta+1)2^n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

para uma constante universal c e $n \geq n_0(\Delta)$. Portanto o Teorema de Erdös não pode ser substancialmente melhorado.

Obs. A dedução da estimativa em $(*)$ pode ser feita por meio da fórmula de Stirling. Seja $|j - \frac{n}{2}| \leq \frac{\Delta}{2}$, logo, sendo $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, portanto, temos $j = m + k$, para $k \leq \frac{\Delta}{2}$ e

$$\begin{aligned} \binom{n}{j} &= \binom{n}{m+k} \\ &= \binom{n}{m} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-(k-1))}{(m+k)\ldots(m+1)} \\ &= \binom{n}{m} \cdot \frac{(m)_k}{(m+k)_k} \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, $\frac{(m)_k}{(m+k)_k} \to 1$, portanto

$$\sum_{|j - \frac{n}{2}| \leq \frac{\Delta}{2}} \binom{n}{j} \sim (\Delta + 1)\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

e é fácil deduzir que

$$\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \sim \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

pela Fórmula de Stirling. Portanto

$$\sum_{|j - \frac{n}{2}| \leq \frac{\Delta}{2}} \binom{n}{j} = \Theta\left(\frac{(\Delta+1)2^n}{\sqrt{n}}\right)$$

no análogo discreto, sabemos que $f = \Theta(g)$ sse existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ positivas tal que $f(x) \leq c_1 g(x)$ e $f(x) \geq c_2 g(x)$.

3.2.2 O Caso Real

Para provar o Teorema de Erdös vamos antes mostrar que vale o caso real, i.e.,

Lema 3.1. Dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tal que $x_j \geq 1$, para $1 \leq j \leq n$ $\Delta \geq 0$ real, então

$$c(\chi_\Delta(n)) \leq c\frac{(\lfloor \Delta \rfloor + 1)2^n}{\sqrt{n}}$$

onde c é uma constante universal.

Prova. Seja J um intervalo de diâmetro 1. Considere

$$\mathscr{A}(J) := \{A \subseteq \overline{n} : S(A) \in J\}$$

dados $A, A' \in \mathscr{A}(J)$, se $A \subseteq A'$, então $|S(A) - S(A')| \geq 1$, visto que $x_j \geq 1$, para $1 \leq j \leq n$. Logo, se $S(A) \in J$, então $S(A') \notin J$, e vice-versa, portanto $\mathscr{A}$ forma uma anticadeia.

Agora, dado um intervalo I de diâmetro Δ, divida-o em intervalos $I_0, \dots, I_{\lfloor \Delta \rfloor}$ como J, logo $\mathscr{A}(I_j)$ é uma anticadeia, $1 \leq j \leq n$. Seja

$$\mathscr{A} := \bigsqcup_{i=0}^{\lfloor \Delta \rfloor} \mathscr{A}(I_i)$$

portanto, pelo Teorema de Sperner,

$$\begin{aligned} |\mathscr{A}| &= \sum_{i=0}^{\lfloor \Delta \rfloor} |\mathscr{A}(I_i)| \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \Delta \rfloor} \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \\ &= (\Delta + 1)\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq c\frac{(\Delta + 1)2^n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

para algum $c \in \mathbb{R}$. ⊣

3.2.3 O Caso Complexo

Com isso, podemos provar agora o caso complexo:

Prova. Como $|z_j| \geq 1$, então $|\Re(z_j)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$ ou $|\Im(z_j)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$. Se mais da metade dos z_j tem parte imaginária maior que $\frac{1}{2}$, multiplique todos z_j por i, i.e., rotacione o sistema por $\frac{\pi}{2}$, o que obviamente não altera o enunciado do Teorema. Analogamente, se a maioria dos z_j tem parte real $< -\frac{1}{2}$, substitua-os por $-z_j$.

Em outras palavras, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\Re(z_j) \geq \frac{1}{2}$$

para todo $1 \leq j \leq t$, com $t \geq \frac{n}{2}$

Fixando $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$, para $j > t$, arbitrariamente, temos 2^{n-t} formas de escolhê-los. Se, das 2^t somas da forma

$$\sum_{1 \leq j \leq t} \varepsilon_j z_j, \ (1 \leq j \leq t)$$

N delas estão em um disco fechado de raio r, defina

$$x_j = 2\Re(z_j) \geq 1, \ (1 \leq j \leq t)$$

então, considerando apenas a parte real dos z_j, temos N somas da forma

$$\sum_{1\leq j\leq t} \varepsilon_j x_j, \ (1 \leq j \leq t)$$

contidas em um intervalo fechado de comprimento $4r$, visto que, se

$$\left| \Re\left(\sum_{1\leq j\leq t} \varepsilon_j z_j \right) \right| = \left| \sum_{1\leq j\leq t} \varepsilon_j \Re(z_j) \right| \leq r$$

então

$$\left| \sum_{1\leq j\leq t} \varepsilon_j \underbrace{2\Re(z_j)}_{x_j} \right| \leq 2r$$

logo, pelo Lema 3.1

$$N \leq (4r+1)\binom{t}{\lceil \frac{t}{2} \rceil} \leq C\frac{(4r+1)2^t}{\sqrt{t}} \tag{$*$}$$

Com isso, provamos que, para cada uma das possíveis combinações de $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$, $(1 \leq j \leq t)$, o número máximo de somas que pertencem a um disco fechado de raio r é limitado superiormente por $(*)$. Como há ainda 2^{n-t} formas de fixar os ε_j, $(j > t$ e $t \geq \frac{n}{2})$ temos então que, para uma constante absoluta B

$$c(\chi_r(n)) \leq C\frac{(4r+1)2^t}{\sqrt{t}} 2^{n-t} \leq B\frac{(r+1)2^n}{\sqrt{n}}$$

$\dashv$

3.2.4 Generalizações em $\mathbb{R}^d$

Tendo resolvido o problema em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, é possível passar a considerar a genralização:

Dados $z_j \in \mathbb{R}^d$ tal que $||z_j|| \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, seja $V = (z_j)_{1\leq j\leq n}$ e considere Σ o conjunto das somas $S(\boldsymbol{\delta})$, com $\boldsymbol{\delta} \in \{0,1\}^n$ contando multiplicidade de ocorrência. Defina

$$m(V, \Delta) := \max_{\substack{B\subseteq\mathbb{R}^d \\ \ell(B)=\Delta}} |B \cap \Sigma|$$

e defina como uma nova notação para $\chi_r(n)$

$$m_d(n, \Delta) := \max_V m(V, \Delta)$$

com V variando em todas as sequências de vetores $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^d$ tal que $||z_j|| \geq 1$.

O Teorema de Erdös garante que

$$c(\varphi_\Delta(n)) = m_1(n, \Delta) = \sum_{j=0}^{\Delta} \binom{n}{u_j}$$

Katona e Kleitman provaram que

$$m_2(n,\Delta) = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

se $\Delta < 1$. E Kleitman posteriormente generaliziou para $d \geq 2$. Até que eventualmente Frank e Füredi publicaram no Annals of Mathematics em 1988 a confirmação da conjectura de Erdös

Teorema 3.2. Seja d um inteiro positivo e $\Delta \geq 0$ real fixo, então

$$m_d(n,\Delta) = (\lfloor \Delta \rfloor + 1 + o(1))\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

onde $o(1) \to 0$ quando $n \to \infty$. Ou seja

$$m_d(n,\Delta) \leq c(d)(\Delta + 1)\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

onde $c(d)$ é uma constante que depende somente de d.

4 Teorema de Behrend

4.1 Como Mensurar $A \subseteq \mathbb{N}$

Relembrando a definição anterior de que uma sequência (a_i) de inteiros positivos $a_1 < a_2 < \dots$ é primitiva se $a_i \nmid a_j$, $\forall i < j$, vimos no primeiro capítulo que o número máximo de sequências primitivas em $\overline{2n}$ é n.

Em geral, dada uma sequência primitiva $A = (a_i)$, estamos interessados em mensurar o *tamanho* de A.

Obviamente $|A|$ é uma péssima escolha, visto que A pode ser infinito, digamos

$$A = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ é primo}\}$$

Portanto, peguemos

$$\mu(A,x) := \sum_{a_i \leq x} \frac{1}{a_i}$$

A fim de que possamos comparar com $\mathbb{N}$, definamos o que será conhecido como *Densidade Aritmética*

$$d(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(A,n)}{H_n}$$

onde H_n é a n-ésima soma parcial da série harmônica.

4.1.1 Propriedades da Densidade Aritmética

Um fato relativamente trivial para aqueles que tiveram contato com matemática à nível de graduação é de que $|\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0 = |\{n : n \in \mathbb{N}\}|$. Apesar disso, de fato, parece haver uma intuição forte para dizer que os quadrados perfeitos n^2 estão mais *dispersos* que os naturais n, embora haja a mesma quantidade de cada qual.

A Densidade Aritmética, diferentemente da cardinalidade, é capaz de capturar essa ideia de dispersão: Note que, se $A = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$, então

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}{H_n} = 0$$

visto que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A, n) = \frac{\pi^2}{6}$$

mas $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$. Em contrapartida, $d(\mathbb{N}) = 1$, i.e., $A \prec \mathbb{N}$, sob a relação de ordem induzida por d.

Em geral

- Se F é finito, $d(F) = 0$
- $d(\mathbb{N} \setminus F) = 1 - d(F)$
- Dado $A = \{an + b : n \in \mathbb{N}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, então

  $$d(A) = \frac{1}{a}$$

  em particular $d(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$

4.1.2 Teorema de Davenport-Erdös

Dada essa motivação, utilizaremos o seguinte teorema que enuncia uma equivalência entre algumas noções de densidade, em particular

Teorema 4.1. (Davenport-Erdös)
Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, seja $M(A) = \{kA : k \in \mathbb{N}\}$, o Teorema diz que a densidade aritmética é equivalente a densidade logarítmica

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(A, n)}{\ell n(n)}$$

Não é difícil ver, visto que

$$\lim_{n\to\infty} H_n - \ell n(n) = \gamma$$

Analogamente, outra relação íntima que ambas tem é que, como $f(x) = \frac{1}{x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$, então

$$\int_1^{x+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} < \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{x-1} \frac{1}{k+1} < 1 + \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

logo

$$\ell n(x+1) < H_x < \ell n(x) + 1$$

Pelo Teorema do Confronto, é fácil ver que

$$\delta(\mathbb{N}) = 1$$

4.2 Teorema de Behrend

Fixada a notação, podemos agora perguntar: Dado $A = (a_i)$ uma sequência primitiva, o que podemos dizer sobre $\delta(A)$?

Isso é o que o Teorema de Behrend estima

Teorema 4.2. (Behrend)
Existe $c > 0$ tal que, para toda sequência primitiva $A = (a_i)$

$$\mu(A, n) \leq c \frac{\ell n(n)}{\sqrt{\ell n(\ell n(n))}}, \ n \geq 3$$

ou seja

$$\delta(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{c}{\sqrt{\ell n(\ell n(n))}}$$

A fim de provaremos tal teorema precisamos antes do seguinte lema

Lema 4.1. Para todo $x \geq 2$

$$\sum_{m \leq x} \sigma_0(m) \leq 3x\ell n(x)$$

onde σ_n é a função divisora.

Prova. Podemos escrever o somatório à esquerda como a quantidade de pares (a, b) tais que $ab \leq x$, portanto

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq x} \sigma_0(m) &= \sum_{ab \leq x} 1 = \sum_{a \leq x} \sum_{b \leq \frac{x}{a}} 1 \\ &= \sum_{a \leq x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \leq \sum_{a \leq x} \frac{x}{a} \end{aligned}$$

visto que $\lfloor x \rfloor \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Além disso, como $H_a < \ell n(a) + 1 \leq 3\ell n(a)$, então

$$\sum_{m \leq x} \sigma_0(m) \leq x \sum_{a \leq x} \frac{1}{a} = xH_x \leq 3x\ell n(x)$$

$\dashv$

Dada uma sequência primitiva $A = (a_i)$, para $u > 0$ seja

$$r(u) := |\{n \in \mathbb{A} : n \mid u\}|$$

i.e., $r(u)$ é o análogo do σ_0, mas para elementos apenas em A. Analogamente, temos que

$$\begin{aligned}\varrho(n) := \sum_{u\leq n} r(u) &= \sum_{\substack{ma\leq n\\ a\in A}} 1\\ &= \sum_{\substack{a\leq n\\ a\in A}}\sum_{ma\leq n} 1 = \sum_{\substack{a\leq n\\ a\in A}} \left\lfloor \frac{n}{a}\right\rfloor\\ &= \sum_{\substack{a\leq n\\ a\in A}} \left(\frac{n}{a} - \varepsilon\right)\end{aligned}$$

como $0 \leq \varepsilon < 1$, temos que

$$\varrho(n) = -|\{a\in A : a\leq n\}|\cdot\varepsilon + n\sum_{\substack{a\leq n\\ a\in A}} \frac{1}{a}$$

portanto, visto que $|-|\{a \in A : a \leq n\}| \cdot \varepsilon| \leq n\varepsilon < n$, então

$$\varrho(n) = n\mu(A, n) + O(n)$$

ou seja

$$\sum_{a_i\leq n} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{n}\varrho(n) + O(1)$$

logo, para provarmos o Teorema de Behrend basta estimarmos $\varrho(n)$, logo, estimaremos antes $r(u)$.

4.2.1 Estimativa de $r(u)$ com (†)

Seja $\omega(u) := |\{p \in \mathbb{P} : p \mid u\}|$, i.e., a quantidade de divisores primos de u, e seja $\mathrm{div}(u)$ o conjunto dos divisores de u.

Assuma que os elementos de A são livres de quadrados (†)

Como $r(u) = |\mathrm{div}(u)\cap A|$ e A satisfaz (†), então temos que, de certa forma, $\mathrm{div}(u)\cap A$ é *"subconjunto"* de $\mathcal{P}(\overline{\omega(u)})$, onde, por exemplo, $\{1, 2, 3\} \in \mathcal{P}(\overline{\omega(u)})$ representa $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$. Além disso, $\mathrm{div(u)} \cap A$ é uma anticadeia, visto que A é primitiva, portanto, pelo Teorema de Sperner

$$r(u) \leq \binom{\omega(u)}{\lceil \omega(u)/2\rceil} = O\left(\frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\omega(u)}}\right)$$

Assim

$$\begin{aligned}\varrho(n) &= \sum_{u\leq n} r(u)\\ &= \sum_{\substack{u\leq n\\ \omega(u)\leq \ell}} r(u) + \sum_{\substack{u\leq n\\ \omega(u)\geq \ell}} r(u)\\ &= \sum_{\substack{u\leq n\\ \omega(u)\leq \ell}} O\left(\frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\omega(u)}}\right) + \sum_{\substack{u\leq n\\ \omega(u)\geq \ell}} O\left(\frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\omega(u)}}\right)\end{aligned}$$

Temos que, para $f(x) = \frac{2^x}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{\ell n(2) 2^x \sqrt{x} + \frac{2^x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2^x}{\sqrt{x}} \left(\ell n(2) + \frac{1}{2x} \right)$$

logo $f'(x) > 0$ sse $\frac{1}{2x} > \ell n\left(\frac{1}{2}\right)$, mas $\ell n\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, portanto f é estritamente crescente. Assim, visto que $\omega(u) \leq \ell$, dado g tal que

$$g \in O\left(\frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\omega(u)}} \right)$$

existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|g(u)| \leq c \frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\omega(u)}} \leq c \frac{2^\ell}{\sqrt{\ell}}$$

como temos que $f \cdot O(g) = O(f \cdot g)$, então $g \in O(c) \frac{2^\ell}{\sqrt{\ell}}$ e, como $O(c) = O(1)$, então

$$\sum_{\substack{u \leq n \\ \omega(u) \leq \ell}} O\left(\frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\omega(u)}} \right) = O(1) \frac{2^\ell}{\sqrt{\ell}} n$$

visto que

$$\sum_{\substack{u \leq n \\ \omega(u) \leq \ell}} g(u) \leq \sum_{u \leq n} c \frac{2^\ell}{\sqrt{\ell}} = c \frac{2^\ell}{\sqrt{\ell}} n$$

Analogamente, se $g \in O\left(\frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\omega(u)}} \right)$ com $\omega(u) > \ell$, então

$$|g(u)| \leq c \frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\omega(u)}} \leq c \frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\ell}}$$

e, portanto

$$\sum_{\substack{u \leq n \\ \omega(u) \geq \ell}} O\left(\frac{2^{\omega(u)}}{\sqrt{\omega(u)}} \right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ell}} \right) \sum_{u \leq n} 2^{\omega(u)}$$

Logo, vale que

$$\varrho(n) \leq O(1) \frac{2^\ell}{\sqrt{\ell}} n + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ell}} \right) \sum_{u \leq n} 2^{\omega(u)}$$

Com o intuito de melhorar tal estimativa, vamos provar o seguinte lema

Lema 4.2.

$$\sum_{u \leq n} 2^{\omega(u)} \leq \sum_{u \leq n} \sigma_0(n)$$

Prova. Vamos mostrar que σ_0 é multiplicativa, sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $\gcd(m,n) = 1$, logo, se $d \mid mn$, então $d = rs$, onde $r \mid m$ e $r \mid n$, note que $\gcd(r,s) = 1$, pois, caso contrário, m e n teriam um fator em comum. Logo

$$\sigma_0(mn) = \sum_{d|mn} 1 = \sum_{\substack{r|m \\ r|n}} 1 = \sigma_0(m)\sigma_0(n)$$

Analogamente

$$\omega(mn) = \sum_{\substack{p|mn \\ p\in\mathbb{P}}} 1$$

mas, se p é primo e $p \mid mn$, então $p \mid m$ ou $p \mid n$, logo

$$\omega(mn) = \sum_{\substack{p|m \\ p\in\mathbb{P}}} 1 + \sum_{\substack{p|n \\ p\in\mathbb{P}}} 1 = \omega(m) + \omega(n)$$

Assim, dado $n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ temos

$$\begin{aligned}\sigma_0(n) &= \sigma_0(p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \sigma_0(p_k^{\alpha_k}) \\ &= (\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)\end{aligned}$$

e

$$\omega(n) = \omega(p_1^{\alpha_1}) + \cdots + \omega(p_k^{\alpha_k}) = k$$

Logo

$$2^{\omega(n)} = 2^k \leq (\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1) = \sigma_0(n)$$

portanto

$$\sum_{u\leq n} 2^{\omega(u)} \leq \sum_{u\leq n} \sigma_0(u)$$

$\dashv$

Pelos dois últimos lemas, e escolhendo $\ell = \ell n(\ell n(n))$ na estimativa de $\varrho(n)$ temos que

$$\varrho(n) \leq O\left(\frac{2^{\ell n(\ell n(n))}}{\sqrt{\ell n(\ell n(n))}} n\right) + O\left(\frac{n \ell n(n)}{\sqrt{\ell n(\ell n(n))}}\right)$$

e, uma vez que $f(n) = \frac{2^{\ell n(\ell n(n))}}{\ell n(n)}$ é tal que

$$f'(n) = \frac{(\ell n(2) - 1) 2^{\ell n(\ell n(2))}}{n \ell n(n)^2}$$

então $f'(n) < 0$ se $n > 0$, então $f(n) \geq 0$ e é estritamente decrescente, portanto converge quando $n \to \infty$, assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\ell n(\ell n(n))}}{\ell n(n)} \overset{\text{(L'H)}}{=} \ell n(2) \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\ell n(\ell n(n))}}{\ell n(n)}$$

como o limite L existe, então $L = \ell n(2)L$, logo $L = 0$, e, portanto

$$\varrho(n) \leq 2O\left(\frac{n\ell n(()n)}{\sqrt{\ell n(\ell n(n))}}\right) = O\left(\frac{n\ell n(()n)}{\sqrt{\ell n(\ell n(n))}}\right)$$

E, como $\mu(A,n) = \frac{\varrho(n)}{n} + O(1)$, então

$$\mu(A,n) = O\left(\frac{\ell n(n)}{\sqrt{\ell n(\ell n(n))}}\right)$$

4.2.2 Eliminação da Hipótese (†)

Como na prova assumimos que valia (†), mostrar que a hipótese pode ser eliminada é suficiente para provar o Teorema de Behrend. Para isso, defina uma sequência de sequência (a_i^k) como os elementos de A tal que $a_i^k = k^2 q_i^k$, onde q_i^k é livre de quadrados. Assim

$$\begin{aligned}\sum_{a_i \leq n} \frac{1}{a_i} &= \sum_{k\geq 1} \sum_{a_i^k \leq n} \frac{1}{a_i^k} \\ &= \underbrace{\sum_{a_i^1 \leq n} \frac{1}{q_i^1}}_{\text{livre de quadrados}} + \underbrace{\sum_{a_i^2 \leq n} \frac{1}{2^2 q_i^2}}_{\text{com um fator } 2^2} + \ldots\end{aligned}$$

logo

$$\sum_{a_i \leq n} \frac{1}{a_i} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} \sum_{q_i^k \leq \frac{n}{k^2}} \frac{1}{q_i^k} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} \sum_{q_i^k \leq n} \frac{1}{q_i^k}$$

como (q_i^k) é primitiva e livre de quadrados, vale o Teorema de Behrend com (†), logo

$$\mu(A,n) \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} c \frac{\ell n(n)}{\sqrt{\ell n(\ell n(n))}}$$

onde o primeiro somatório vale $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, portanto

$$\mu(A,n) = O\left(\frac{\ell n(n)}{\sqrt{\ell n(\ell n(n))}}\right)$$

5 Teorema de Erdös-Ko-Rado

5.1 Sistemas Intersectantes

Após estudarmos as sequências primitivas definidas na introdução, vamos agora estudar os sistemas intersectantes, i.e., coleções $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\overline{n})$ tais que, dados $A, A' \in \mathscr{A}$, $A \cap A' \neq \emptyset$.

Se definirmos

$$\mathscr{A}_1 := \{A \subseteq \overline{n} : 1 \in A\}$$

temos que $|\mathscr{A}_1| = 2^{n-1}$ e, se $|\mathscr{A}| > 2^{n-1}$, então existe A tal que $A \in \mathscr{A}$ e $\overline{n} \setminus A \in \mathscr{A}$, i.e., não é um sistema intersectante, como mostrado no capítulo 1. Consideremos, portanto, um problema totalmente diferente de sistemas intersectantes, onde $\mathscr{A} \subseteq [\overline{n}]^k$.

Um exemplo que nos dá $|\mathscr{A}|$ grande é: se $2k > n$, então $\mathscr{A} = [\overline{n}]^k$ é intersectante e, se $2k \leq n$, seja

$$\mathscr{A}_0 = \{A \subseteq \overline{n} : |A| = k, 1 \in A\}$$

obviamente $\mathscr{A}_0$ é intersectante e

$$|\mathscr{A}_0| = \binom{n-1}{k-1}$$

o reslultado que provaremos é

Teorema 5.1. (Erdös-Ko-Rado)
Se $\mathscr{A} \subseteq [\overline{n}]^k$ é um sistema intersectante, com $n \geq 2k > 0$, então

$$|\mathscr{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

Ademais, se $n > 2k$ e vale a igualdade, então $\mathscr{A} \cong \mathscr{A}_0$, i.e., existe $b : \overline{n} \to \overline{n}$ bijetora tal que

$$A \in \mathscr{A} \Leftrightarrow b(A) \in \mathscr{A}_0$$

Antes de provarmos tal Teorema, vamos enunciar um lema importante e que captura parte da elegância da prova de Katona.

Seja C um círculo dividido por n pontos em n arestas e seja um arco de comprimento k um conjunto consistindo dos $k+1$ pontos consecutivos e dos k lados entre eles, então temos:

Lema 5.1. Seja $n \geq 2k$, dados t arcos distintos $A_1, \dots, A_t$ de comprimento k, se quaisquer dois arcos tem um lado em comum, então $t \leq k$.

Prova. Note que, dado qualquer ponto em C, ele é o ponto de extremidade de no máximo um arco. De fato, se A_i e A_j tem um ponto de extremidade v em comum, então eles tem de ter começado em direções distintas, uma vez que eles são distintos. Mas caso isso ocorra eles não teriam nenhum lado em comum, visto que $n \geq 2k$. Fixemos A_1, como A_i tem um lado em comum com A_1 e os pontos de extremidade tem de ser distintos, então algum dos pontos de extremidade de A_i é um ponto interno de A_1. Como A_1 contém $k-1$ pontos internos, então podem ter no máximo $k-1$ tais arcos e, junto a A_1, no máximo k. $\dashv$

Voltemos agora a prova do Teorema de Erdös-Ko-Rado.

Prova. **(Katona)** A seguinte prova elegante feita por contagem dupla deve-se a Katona. Considere $\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \overline{n}$ e $a_i := \phi(i)$. Dizemos que $(A, \phi) \in \mathcal{C}(A, \phi)$ (A e ϕ são compatíveis) se, para algum $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$A = \{a_{i+1}, \dots, a_{i+k}\}$$

Tais conjuntos compatíveis podem ser interpretados como arcos em uma circunferência com n pontos. Como, por hipótese, $\mathscr{A}$ é uma família intersectante, sabemos, pelo Lema anterior, que no máximo k conjuntos A são compatíveis com ϕ.

Uma outra forma, é considerar, para cada $2 \leq j \leq k$, os conjuntos $J_j^-, J_j^+ \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tais que

$$J_j^- = \{a_{i+j-k}, \ldots, a_{i+j-1}\}$$
$$J_j^+ = \{a_{i+j}, \ldots, a_{i+j+k-1}\}$$

ambos tem tamanho k e, como $n \geq 2k$, temos $J_j^- \cap J_j^+ = \emptyset$. Logo apenas um deles pode conter $A \in \mathscr{A}$ e, como $2 \leq j \leq k$, temos que todo $A \in \mathscr{A}$ que é compatível com ϕ é igual a J_j^- ou J_j^+ para algum j.

Em ambos os casos temos que, dada uma permutação cíclica ϕ, no máximo k membros de $\mathscr{A}$ são compatíveis com ϕ.

Disso, temos que, fixado ϕ, $|\mathcal{C}(A, \phi)| \leq k$ e, fixado $A \in \mathscr{A}$, as permutações que são compatíveis com A são $k!(n-k)!$, como elas são cíclicas

$$|\mathcal{C}(A, \phi)| = nk!(n-k)!$$

logo

$$\sum_{A \in \mathscr{A}} |\mathcal{C}(A, \phi)| = |\mathscr{A}|nk!(n-k)! \leq \sum_{\phi \in C_n} k = n!k$$

ou seja

$$|\mathscr{A}| \leq \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

Se $n > 2k$, a igualdade vale somente se, para cada permutação cíclica ϕ, exatamente k membros de $\mathscr{A}$ sejam compatíveis com ϕ. Em outras palavras, dada uma ordenação ϕ de $\overline{n}$ no círculo, precisamos que k membros de $\mathscr{A}$ sejam intervalos nele ou, utilizando a prova do Lema anterior, que dado um arco A_1, para cada um dos k pontos internos de A_1, temos um arco que tem esse ponto como ponto de extremidade. Logo Pendente $\dashv$

Obs. Se $n = 2k$ forme $P = \{\{A, \overline{n} \setminus A\} : A \in \mathcal{P}(\overline{n})\}$ uma partição de $\mathcal{P}(\overline{n})$ com $\frac{1}{2}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ elementos, escolha arbitráriamente um elemento de alguma classe de P e reptira o processo para as outras classes de forma que o elemento escolhido intersecte todos os outros já escolhidos anteriormente. Como $2k = n$ e cada classe tem k elementos sempre é possível fazer tal escolha.

Note que, com isso, podemos escolher por exemplo, para $n = 4$ e $k = 2$, $\mathscr{A} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, nesse caso $\mathscr{A}$ não tem nenhum elemento fixo em todos os conjuntos, logo $\mathscr{A} \ncong \mathscr{A}_0$.

Interpretação Alternativa (Bollobás). Podemos também analisar a prova como um resultado probabilístico: Seja P o conjunto de intervalos cíclicos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de comprimento k e considere χ_P a função característica de P. Defina, para $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\overline{n})$

$$\chi_P(\mathscr{A}) := \sum_{A \in \mathscr{A}} \chi_P(A)$$

i.e., a quantidade de intervalos cíclicos de comprimento k em $\mathscr{A}$. Para $\phi \in S_n$, defina também

$$\phi(\mathscr{A}) := \{\phi(A) : A \in \mathscr{A}\}$$

como uma família isomórfica a $\mathscr{A}$, i.e., uma renomeação dos elementos de $A \in \mathscr{A}$. Como $\phi(\mathscr{A})$ continua sendo uma família intersectante se $\mathscr{A}$ for, para todo $\phi \in S_n$, então sabemos pelo Lema anterior que $\chi_P(\phi(\mathscr{A})) \leq k$ e, portanto, escolhendo aleatoriamente e uniformemente uma permutação $\phi \in S_n$, temos que $\mathbb{E}(\chi_P(\phi(\mathscr{A}))) \leq k$. Agora, dado $A \in \mathscr{A}$, sabemos que

$$\mathbb{P}(\chi_P(\phi(A)) = 1) = \mathbb{P}(\phi(A) \in P) = \frac{n}{\binom{n}{k}}$$

i.e., a probabilidade de ϕ mapear A para algum dos n intervalos cíciclos de P de todos os $\binom{n}{k}$ possíveis. Portanto, pelaleariedade de $\mathbb{E}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\chi_P(\phi(\mathscr{A}))) &= \mathbb{E}(\chi_P(\{\phi(A) : A \in \mathscr{A}\})) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{A \in \mathscr{A}} \chi_P(\phi(A))\right) \\
&= \sum_{A \in \mathscr{A}} \mathbb{E}(\chi_P(\phi(A))) \\
&= \sum_{A \in \mathscr{A}} \mathbb{P}(\chi_P(\phi(A)) = 1) \\
&= \frac{|\mathscr{A}| \cdot n}{\binom{n}{k}}
\end{aligned}$$

5.2 Sistemas ℓ-intersectantes

Consideremos agora a generalização com sistemas ℓ-intersectantes de k-subconjuntos de $[\overline{n}]$, i.e., sistemas de conjuntos $\mathscr{A} \subseteq [\overline{n}]^k$ com $|A \cap A'| \geq \ell$, para todo $A, A' \in \mathscr{A}$. Além do Teorema anterior para sistemas 1-intersectantes, Erdös, Ko e Rado provaram também algo análogo para sistemas ℓ-intersectantes quando $\ell > 1$.

Antes consideremos o caso de um sistema ℓ-intersectante grande: Seja $L \subseteq \overline{n}$ tal que $|L| = \ell$. O sistema ℓ-intersectante fixado por L é

$$\mathscr{A}_L := \{A \subseteq \overline{n} : |A| = k, L \subseteq A\}$$

Note que $|\mathscr{A}_L| = \binom{n-\ell}{k-\ell}$. Para n grande o suficiente em relação a k, o que foi provado é que os sistemas $\mathscr{A}_L$ fixados são os sistemas ℓ-intersectantes máximos

Teorema 5.2. Para todo ℓ e k, com $1 \leq \ell \leq k$, existe um $n_0 = n_0(\ell, k)$ tal que, se $\mathscr{A} \subseteq [\overline{n}]^k$ é um sistema ℓ-intersectante e $n \geq n_0$, então

$$|\mathscr{A}| \leq \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

Ademais, se vale a igualdade, então $\mathscr{A}$ é um sistema fixado por algum ℓ-conjunto $L \subseteq \overline{n}$.

Prova. $\dashv$