

Politecnico di Milano
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi
II APPELLO DI STATISTICA APPLICATA
26 Febbraio 2008

©I diritti d'autore sono riservati. Ogni sfruttamento commerciale non autorizzato sarà perseguito.

Nome e cognome:

Numero di matricola:

Problema 1

Sia $X = (X_1 \ X_2 \ X_3)' \sim N_3(\mu, \Sigma)$ un vettore trivariato normalmente distribuito con:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Si individui una regione \mathbf{A} tale che $P((X_1 \ X_2)' \in \mathbf{A}) = 0.9$.
- b) Si individui una regione $\tilde{\mathbf{A}}$ tale che $P((X_1 \ X_2)' \in \tilde{\mathbf{A}} \mid X_3 = 1) = 0.9$.
- c) Dopo avere riportato su di un grafico le due regioni, si ordinino in senso crescente le seguenti probabilità:
 $P((X_1 \ X_2)' \in \mathbf{A})$, $P((X_1 \ X_2)' \in \tilde{\mathbf{A}})$, $P((X_1 \ X_2)' \in \mathbf{A} \mid X_3 = 1)$ e $P((X_1 \ X_2)' \in \tilde{\mathbf{A}} \mid X_3 = 1)$.

Problema 2

La Warmer Bros produce caldaie a metano per il riscaldamento domestico che sfruttano la reazione chimica di combustione $CH_4 + 2O_2 \rightarrow 2H_2O + CO_2$. Per 40 caldaie Warmer Bros sono state misurate (file `gas.txt`) le quantità [$kmol$] di H_2O , CO_2 e CO contenute in $1\ m^3$ di gas di scarico.

- a) Costruite tre intervalli T2-simultanei di confidenza globale 90% per la media dei tre gas di scarico.

Il corretto funzionamento delle caldaie prevede che il numero di $kmol$ di H_2O sia il doppio di quelle di CO_2 e che il numero di $kmol$ di CO sia pari a 0.

- b) Vi è evidenza statistica del fatto che le caldaie Warmer Bros non funzionino correttamente?
- c) Mantenendo una confidenza globale del 90%, si affianchino agli intervalli costruiti al punto (a), ulteriori intervalli T2-simultanei a sostegno di quanto concluso al punto (b).

Problema 3

Il 24 febbraio 2007, all'ospedale di Kidborough sono nati 30 bambini la cui altezza [cm] è stata monitorata mensilmente fino al compimento del quinto mese (file `children.txt`). Dopo avere inquadrato l'esperimento nell'ottica di un problema di misure ripetute, rispondete alle richieste di due famosi pediatri dell'ospedale:

- a) Il dott. Linearkid, sostenitore della teoria secondo la quale la crescita media dei bambini avviene in modo lineare nei primi 5 mesi di vita, vi chiede di eseguire un test di livello 5% a conferma della sua teoria.
- b) Il dott. Stepkid, sostenitore invece dell'innovativa teoria secondo la quale la crescita media dei bambini è nulla durante il primo, il secondo, il quarto ed il quinto mese, vi chiede di eseguire un test di livello 5% a conferma della sua teoria.
- c) Fornite ad entrambi i medici 5 intervalli di Bonferroni di confidenza globale 95% per le medie degli incrementi mensili.

Problema 4

L'ormai noto fisico Van Glass ha eseguito una serie di esperimenti (file `refraction.txt`) per trovare una legge che, in un intorno destro dello spettro visibile, descriva il legame tra l'indice di rifrazione n [adimensionale] di tre diverse tipologie di vetri (BK7, FK51A ed F2) e la lunghezza d'onda λ [μm] della radiazione incidente. La relazione empirica ipotizzata per ciascuna tipologia di vetro è della seguente forma:

$$n(\lambda) = A_{const} + A_{exp}e^{-8(\lambda-0.4)}$$

- a) Si introduca un modello statistico atto a descrivere i dati raccolti.
- b) Sulla base del modello introdotto al punto (a), si esegua un test per verificare la possibilità di utilizzare la stessa intercetta per i tre vetri?
- c) Sulla base del modello introdotto al punto (a), si esegua un test per verificare la possibilità di utilizzare lo stesso coefficiente del termine esponenziale per i tre vetri?
- d) Sulla base dei p-value forniti dai due test eseguiti ai punti (b) e (c) si individui un opportuno modello ridotto per descrivere i dati.
- e) Sulla base del modello ridotto individuato al punto (e) si riportino le stime delle tre curve empiriche.
- f) Sulla base del modello ridotto individuato al punto (e), si costruiscano tre intervalli di confidenza globale 90% per la differenza delle medie dell'indice di rifrazione tra BK7 ed F2, tra FK51A ed F2, tra BK7 ed FK51A in corrispondenza di $\lambda = 0.62$.