List3_tasks

March 8, 2024

[2]:
```
pip install gudhi
```

```
Requirement already satisfied: gudhi in
/home/xenos/maga/venv/lib/python3.11/site-packages (3.9.0)
Requirement already satisfied: numpy>=1.15.0 in
/home/xenos/maga/venv/lib/python3.11/site-packages (from gudhi) (1.26.3)
Note: you may need to restart the kernel to use updated packages.
```

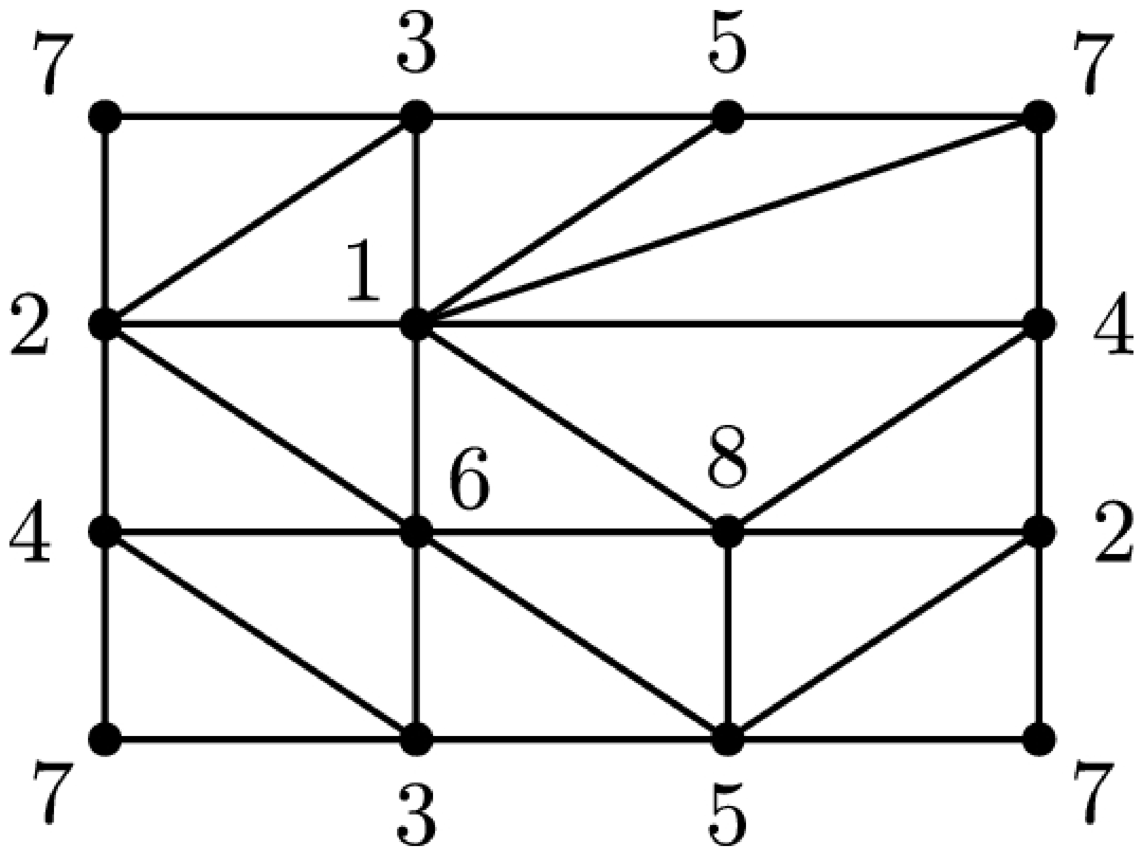
[3]:
```
from PIL import Image
import gudhi as g
import urllib.request
```

0.1 Task 9

0.1.1 possible triangulation

[4]:
```
Image.open("A-vertex-minimal-triangulation-of-the-Klein-Bottle.png")
```

[4]:




```
[ ]:
```

```
[5]: tree = g.simplex_tree.SimplexTree()
```

```
[6]: simplex_set = [[7, 4, 3], [4, 2, 6], [2, 3, 7], [2, 1, 3],
                    [2, 1, 6], [4, 6, 3], [3, 5, 1], [1, 6, 8], [3, 6, 5],
                    [6, 8, 5], [1, 7, 5], [1, 4, 7], [1, 4, 8],
                    [2, 4, 8], [2, 5, 8], [2, 5, 7]]
```

```
[7]: for x in simplex_set:
         tree.insert(x)
```

```
[ ]:
```

```
[8]: tree.compute_persistence()

     tree.betti_numbers()
```

```
[8]: [1, 1]
```

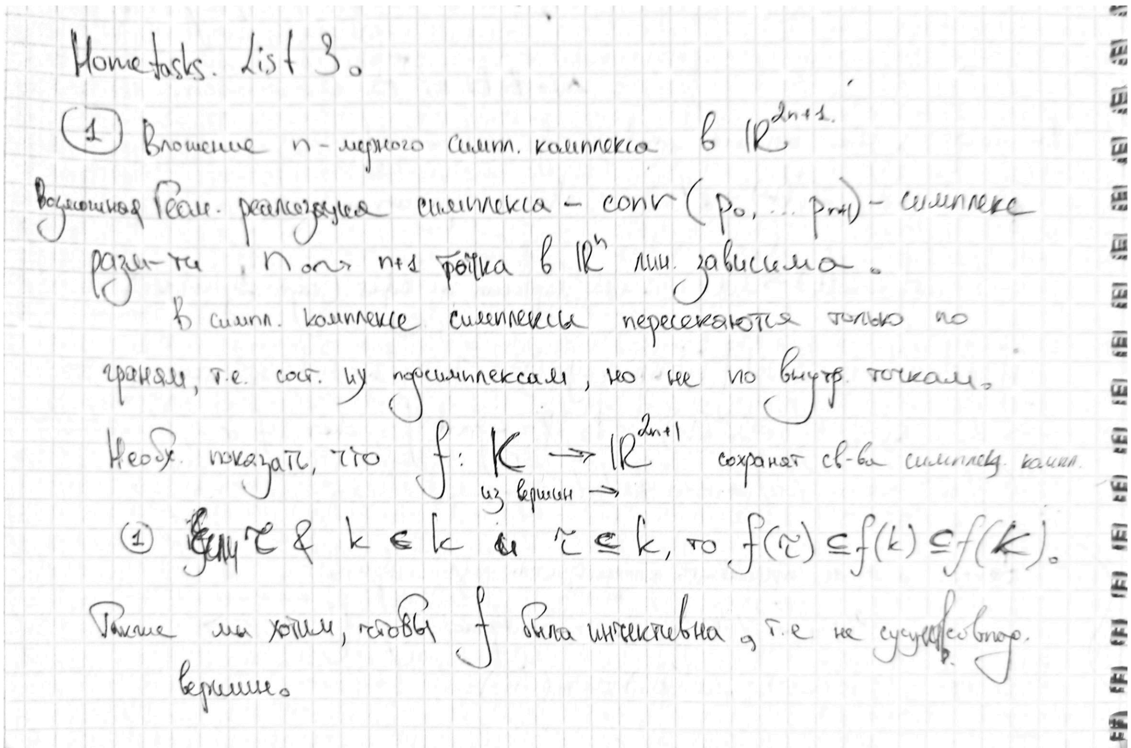
0.1.2 So only zero and first betti numbers are not null.

[ ]:

0.1.3 Other tasks from list 3

[9]:
```
Image.open("1.jpg")
```

[9]:


Hometasks. List 3.

(1) Вложение n-мерного симп. комплекса в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Возможная геом. реализация симплекса — $\mathrm{conv}(p_0, \dots, p_{n+1})$ — симплекс разм-ти n, если n+1 точка в $\mathbb{R}^n$ лин. зависима.

В симп. комплексе симплексы пересекаются только по граням, т.е. сост. из подсимплексами, но не по внутр. точкам.

Необх. показать, что $f: K \to \mathbb{R}^{2n+1}$ (из вершин →) сохраняет св-ва симплиц. компл.

(1) Если $\tau \in k \in K$ и $\tau \subseteq k$, то $f(\tau) \subseteq f(k) \subseteq f(K)$.

Также мы хотим, чтобы f была инъективна, т.е. не существовало вершин.

[10]:
```
Image.open("2.jpg")
```

[10]:

Тогда $\exists$ σ_1 и σ_2 – симплексы в K.

$\dim(\sigma_1) = s_1$, $\dim(\sigma_2) = s_2$ и, очевидно,

$\dim(\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq s_1 + s_2 + 2 \leq 2n+2$

Поскольку f инъекция, то $f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) = f(\sigma_1 \cap \sigma_2)$.

Если $f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2) = \emptyset$, то $\operatorname{conv}(f_1(\sigma_1) \cap f_2(\sigma_2)) =$

$= \operatorname{conv}(f(\sigma_1 \cap \sigma_2))$. Но по первому св-ву $\sigma_1 \cap \sigma_2$ – тоже симплекс, и $\operatorname{conv}(f(\sigma_1 \cap \sigma_2))$ – симплекс.

$f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2)$ либо не пересекаются, либо явл. симплексом, а значит не имеют пересечений по внутр. точкам.

Значит, $f(K)$ – вложение геом. реализации.

(2) $|K| = 1$ (граф). Д-ть: $\dim \operatorname{Im} \partial_1$ ($= \operatorname{rk} D_1$) $=$ # вершин – # комп. св-ти

Допустим, что граф разбивается на компоненты связности: $\sigma_1 \dots \sigma_n$. Тогда матрица инцидентности этого графа имеет блочный вид, с блоками, соответствующими компонентам связности исходного графа.

В таком случае достаточно рассмотреть формулу для одной из компонент, и сложить результаты, т.е. $\dim \operatorname{Im} \partial_1 : \sigma_1 \to \sigma_0 =$ # вершин в $\sigma_1 - 1$.

Поскольку это матрица инцидентности $\to$ в $\forall$ столбце имеются только две единицы, тогда рассмотрим строки матрицы: $\forall \{w \in \partial^r\}$

~~Сумма строк~~ $\sum_{i=1}^{v} w_i = 0$, т.к. в каждом столбце над $\mathbb{Z}_2$ $1+1=0$

$\to$ значит $\operatorname{rk} D(\sigma_1) \leq V_\sigma - 1$

```python
Image.open("3.jpg")
```

Но, поскольку граф связный → существует путь из ∀ вершины в ∀ другую ↳ ~~[illegible]~~ ∃ лин. комб. столбцов, соотв. пути. ↳ $\operatorname{rk} D_{\sigma_1} \geq n-1$.

Тогда, $\operatorname{rk} D_{\sigma_1} = n-1$, где n — кол-во вершин в связном графе. → $\dim \operatorname{Im} \partial_1 = \sum_{\sigma_i} \dim \operatorname{Im} \partial_1(\sigma_i) =$ # верш − # комп. св-ти

(3) $\beta_1(K) =$ # рёбер − $\operatorname{rk} D_1 - \operatorname{rk} D_2$

$$\beta_1(K) = \dim \left(\ker \partial_1 : C_1 \to C_0 \big/ \operatorname{Im} \partial_2 : C_2 \to C_1 \right)$$

Но: $\dim \ker \partial_1 = |E(\text{edges})| - \dim \operatorname{Im} \partial_1$

И $\dim A/B = \dim A - \dim B$ ⇒

⇒ $\dim \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = |E| - \dim \operatorname{Im} \partial_1 - \dim \operatorname{Im} \partial_2 =$

$= |E| - \operatorname{rk} D_1 - \operatorname{rk} D_2$.

(4) $\partial_j \circ \partial_{j+1} = 0$ $\quad \partial_j : C_j \to C_{j-1}$; $\partial_{j+1} : C_{j+1} \to C_j$

∃ $s_j^m = [a_{j_0}, a_{j_1}, \dots a_{j_p} \dots a_{j_k} \dots a_{j_m}]$

$\partial s_j^m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i [a_{j_0} \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_{j_m}]$

↳ Рассмотрим одно из слагаемых $(-1)^k [a_{j_0} \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_m]$.

$\partial (-1)^k [a_{j_0} \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_m] = (-1)^k \sum_{p=0} (-1)^p [a_{j_0} \dots a_{p-1} a_{p+1} \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_m]$

↳ т.е. $(-1)^k (-1)^p [a_{\dots} a_{p-1} a_{p+1} \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_m]$ при $p < k$

[13]:
```
Image.open("4.jpg")
```

[13]:

Если первая точка (выкинута при дифф-нии), $p > k$, то

$$(-1)^k (-1)^{p-1} [a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_{p-1} a_{p+1} \dots a_m].$$

Их сумма дает $0 \; \forall p, k \in S_j^m$.

Тогда это верно для любых p и k. ■

$$\partial_j \circ \partial_{j+1} = 0$$

(5) $\beta_0 = \#$ комп. связности

$\beta_0 = \dim\left(\ker \partial_0 / \mathrm{Im}\, \partial_1\right)$ $\quad \ker \partial_0 : C_0 \to C_{-1}$, где $C_{-1} = \{\emptyset\}$

т.к. все точки замкнуты, то

$$\ker \partial_0 = C_0 = |V|$$

$\dim \mathrm{Im}\, \partial_1 = \mathrm{rk}\, D_1 = |E| - \#$ комп. связн.

$\hookrightarrow \beta_0 = \dim\left(\ker \partial_0 / \mathrm{Im}\, \partial_1\right) = \dim \ker \partial_0 - \dim \mathrm{Im}\, \partial_1 =$

$= \cancel{|V|} - \cancel{|V|} + \#$ комп. связности ■

(6) $\beta_j(k) = |\sigma^j| - \mathrm{rk}\, D_j - \mathrm{rk}\, D_{j+1}$

$\beta_j(k) = \dim\left(\ker \partial_j / \mathrm{Im}\, \partial_{j+1}\right)$

$\dim \ker \partial_j = |\sigma^j| - \dim \mathrm{Im}\, \partial_j = |\sigma^j| - \mathrm{rk}\, D_j$

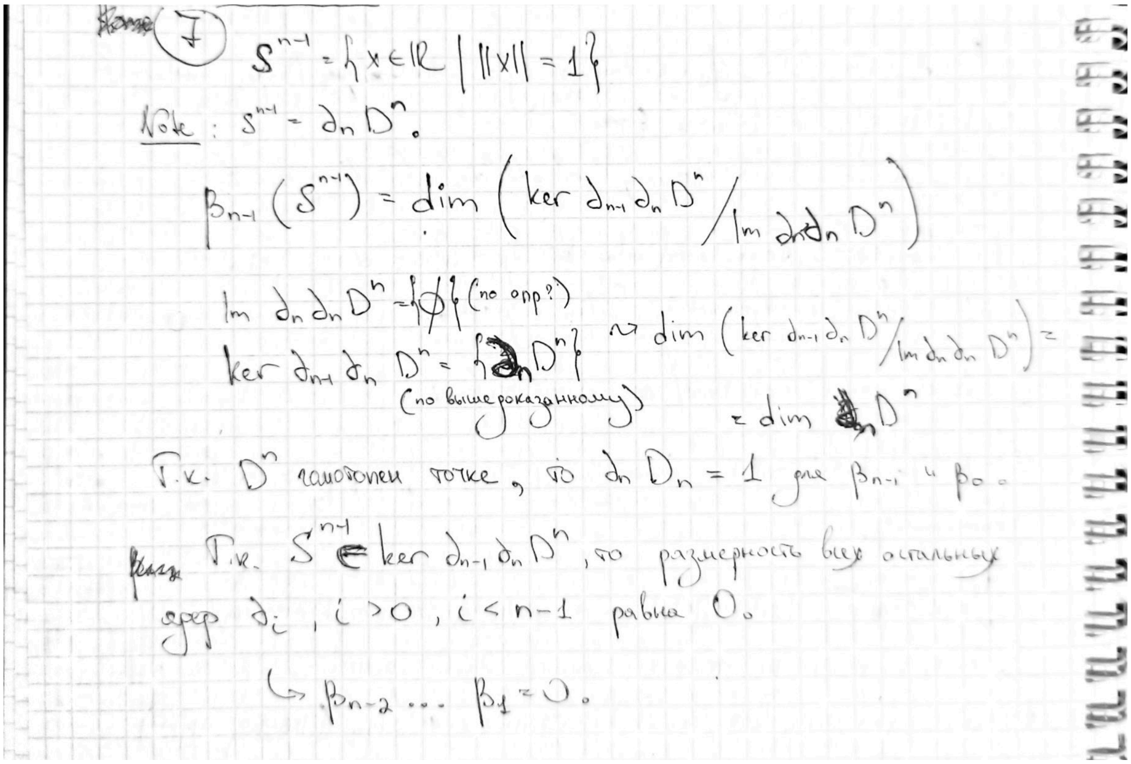
(кол-во симплексов)

$\hookrightarrow \beta_j(k) = |\sigma^j| - \mathrm{rk}\, D_j - \mathrm{rk}\, D_{j+1}$

[14]:

```
Image.open("5.jpg")
```

[14]:



(7) $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x\| = 1\}$

Note: $S^{n-1} = \partial_n D^n$.

$$\beta_{n-1}(S^{n-1}) = \dim\left(\ker \partial_{n-1}\partial_n D^n / \operatorname{Im} \partial_n\partial_n D^n\right)$$

$\operatorname{Im} \partial_n\partial_n D^n = \{\varnothing\}$ (по опр?)

$\ker \partial_{n-1}\partial_n D^n = \{\partial_n D^n\}$ (по выше доказанному) $\rightsquigarrow \dim\left(\ker \partial_{n-1}\partial_n D^n / \operatorname{Im} \partial_n\partial_n D^n\right) = \dim \partial_n D^n$

Т.к. D^n гомотопен точке, то $\partial_n D_n = 1$ для β_{n-1} и β_0.

Т.к. $S^{n-1} \in \ker \partial_{n-1}\partial_n D^n$, то размерность всех остальных срф ∂_i, $i > 0$, $i < n-1$ равна 0.

$\hookrightarrow \beta_{n-2} \dots \beta_1 = 0$.

[15]:

```
Image.open("6.jpg")
```

[15]:

(8) $P(X \sqcup Y; t) = P(X;t) + P(Y;t)$

Поскольку $\forall$ симплекс лежит либо в X, либо в Y,

$$Z_n(X \sqcup Y) \cong Z_n(X) \oplus Z_n(Y)$$

$$B_n(X \sqcup Y) \cong B_n(X) \oplus B_n(Y)$$

$$\hookrightarrow H_n(X \sqcup Y) = \frac{Z_n(X) \oplus Z_n(Y)}{B_n(X) \oplus B_n(Y)} =$$

$$= H_n(X) \oplus H_n(Y) \to \dim H_n(X \sqcup Y) = \dim H_n(X) + \dim H_n(Y)$$

Тогда $P(X \sqcup Y; t) = \sum_i \beta_i (X \sqcup Y) t^i = \sum_i (\beta_i(X) + \beta_i(Y)) t^i =$

$$= \sum_i \beta_i(X) t^i + \sum_i \beta_i(Y) t^i = P(X;t) + P(Y;t).$$

[ ]: