① $X \cong Y \iff \exists f: X \to Y$, где f непр биект. и $f^{-1}: Y \to X$, где f^{-1} непр. биект.

1.1. $X \cong X$ (id)

1.2. $X \cong Y \iff Y \cong X$ по опр.

1.3. $\exists X \cong Y$ и $Y \cong Z \iff \exists f, f^{-1}: X \to Y, Y \to X$

и $\exists h: Y \to Z$, $h^{-1}: Z \to Y$ непрер. биект. непр. биект.

Тогда $\forall x \in X: h(f(x)) \in Z$ и $f^{-1}(h^{-1}(h(f(x)))) \in X = X$

$\to X \cong Z$ и это отн. эквивалентности.

② $(-1; 1) \cong \mathbb{R}$

$\exists f: (-1; 1) \to \mathbb{R} = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to (-1; 1) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x$

Отобр-я непр. и задают биекцию в обе стороны $\to$

$(-1; 1) \cong \mathbb{R}$

③ C: Круг $\cong$ Квадрату: S

$C = \{ x, y \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ $\quad S = \{ x, y \mid \|x\|_1 \leq 1, \|y\| \leq 1 \}$

$\hookrightarrow C = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1 \}$ $\quad S = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \leq 1 \}$

Тогда $f: C \to S = \begin{cases} \frac{\|x\|_1}{\|x_2\|} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f^{-1}: S \to C = \begin{cases} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Т.к. нормы непр-ны $\Rightarrow$ Гомеоморфизм.

(4) Если $X \cong Y$ и X компакт, то Y - тоже компакт, т.е. из $\forall$ покрытия открытыми можно выделить конечное подпокрытие. ; $f: X \to Y$

Т.к. X - компакт $\to$ $\forall x \in X \; \exists \lim\limits_{n \to \infty} \{x_n\} = x, x_n \in X$, тогда в силу гомеоморфизма $\forall y \in Y \; \exists \lim\limits_{n\to\infty} \{f(x_n)\} = y, x_n \in X$.

Тогда Y также содержит все свои предельные точки, замкнут и ограничен. ■

(5) $x \sim y \Leftrightarrow \exists p: [0,1] \to X : p(0) = x, p(1) = y$

$\exists p(\lambda) = \lambda x + (1-\lambda) y$.

Тогда (1) ~~...~~ $x \sim x$, т.к. $\lambda x + (1-\lambda) x = x$

(2) $x \sim y \to y \sim x$, т.к. $\lambda y + (1-\lambda) x$ непр.

(3) $x \sim y$ и $y \sim z \to x \sim z$, т.к. $\exists p(\lambda) = \lambda x + (1-\lambda) y - y + \lambda y + (1-\lambda) z =$
$= \lambda x + (1-\lambda) z$ непр, и $p(0) = x$, $p(1) = z$

(6) $X \cong Y \Rightarrow$ между комп. лин. св-ти X и Y можно установить биекцию. $\exists f: X \to Y$ - непр, биекц., а также X разбивается на классы эквивалентности $X_i \subseteq X$, $\bigcup\limits_i X_i = X$

Тогда $f(X_i) \subseteq Y$ и $\bigcup\limits_i f(X_i) = Y$.

Homework 7-15.

(7) $\exists f, g: [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = x$; $g(x) = 0$.

Доказать гомотопию.

$\exists F(x,t) = (1-t)x$. Тогда $F(x,0) = f(x)$; $F(x,1) = 0$

↳ между отобр. существует непр. отобр. → они гомотопны.

(8) Гомотопность — отн. эквив-ти.

(1) $f \simeq f$ $\quad F(x,t) = f(x)$

(2) $f \simeq g \to g \simeq f$

$\exists f, g: X \to Y$ и $F(x,t): F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$

$\to \exists F(x, 1-t): F(x,0) = g(x)$, $F(x,1) = f(x)$

$f \simeq g \to g \simeq f$

(3) $f \simeq g$ и $g \simeq h$: $\exists F(x,t) \in C: F(x,0) = f(x); F(x,1) = g(x)$

и $\exists H(x,t): H(x,0) = g(x)$; $H(x,1) = h(x)$

Let $P(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) : 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ H(x,2t-1) : \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ $\to \exists P(x,t): f \simeq h$

(9) Spaces are hom. equiv. iff $\exists h: X \to Y$ & $k: Y \to X$ s.t. $h \circ k: Y \to Y \simeq id_Y$ & $k \circ h \simeq id_X$.

(1) $X \simeq X$ $\quad \exists f, g: X \to X = id_X$, s.t. $f \circ g: X \to X \simeq id_X$ & $g \circ f: X \to X \simeq id_X$

~~(2) $X \simeq Y \to Y \simeq X$. $\exists f, g: X \to Y$, s.t. $f \circ$~~

(9) (2) $X \simeq Y \to Y \simeq X$: $\exists f: X \to Y$ & $g: Y \to X$ s.t. $f\circ g \simeq id_Y$ & $g \circ f \simeq id_X$; true by definition

(3) $X \simeq Y$ и $Y \simeq Z$:

$\exists f: X \to Y$ & $g: Y \to X$ s.t. $f \circ g \simeq id_Y$ & $g\circ f \simeq id_X$

$\exists\, p: Y \to Z$ & $q: Z \to Y$ s.t. $p \circ q \simeq id_Z$ & $q \circ p \simeq id_Y$

$\exists$ $g\circ \underbrace{q\circ p}_{\simeq id_Y}\circ f \simeq id_X$ & $p\circ \underbrace{f\circ g}_{\simeq id_Y}\circ q \simeq id_Z$

Это отн-е экив-ти.

(10) 1. n-мерный шар стягиваем.

$D^n = \{\sum_i^n x_i^2 \leq 1\}$

Тогда $\exists f: D^n \to pt = f(x,t) = \|x\|_2^2\, t$, $g: pt \to D^n = id_{pt}$

$\to pt \simeq D^n$.

2. Convex set is $\simeq$ to pt.

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукл. мн-во. $Y = \{0\}$.

$f: X \to Y: f(x) = 0$ & $g: Y \to X: g(0) = x_0 \in X$.

Тогда $f\circ g \simeq id_Y$; $g \circ f \simeq id_X$, т.к. X может быть выражен как $(1-\lambda)x + \lambda x_0$ $\to$ непр. отобр. $H(\lambda, x)$.

(11) Т.к. дерево – связный ацикличный граф, т.е. между любой парой вершин существует только один путь, выберем $v_0 \in V(X)$ – вершину графа.

Далее итеративно стягиваем ребра, начиная от "наиб. удаленного" – это достаточное условие.

Доказать необходимость ...

(12) $\exists f, g: X \to Y$ гомот.; и $h: Y \to Z$ – какое-то отобр.

Д-ть: $h \circ f$ и $h \circ g$ – гомот. из $X \to Z$.

$\exists$ ~~[illegible]~~ $F(x, 0) = f(x)$ $F(x, 1) = g(x)$

$\hookrightarrow h(F(x,0)) = h(f(x))$ $h(F(x,1)) = h(g(x))$

Это и есть непр. отобр. $H: X \times [0,1] \to Z$.

(13) Число комп. связн-ти инвариантно отн. гомотоп. экв-ти.

Пусть $f \circ g \simeq id_X$. Тогда $\exists F: X \times [0,1] \to X$, т.ч.

$F(x, 0) = f \circ g$ и $F(x, 1) = id_X$. Если C – комп. св-ти в X, тогда $F(C, t)$ содерж. в какой-то комп. X. Однако,

$F(C, 1) = id_X(C) = C \Rightarrow f \circ g(C) \subset C$.

Соотв. кол-во связн. компонент инвариантно.

(14) ~~1.~~ Пр-ка на ~~[illegible]~~ стягиваемость

— ищем кол-во связных компонент (напр. поиском в ширину)

~~ищем~~ если больше одной → не стягиваемый

— проверка на древесность (считаем вершины и ребра)

если $V(X) - E(X) = 1$ → стягиваем.

2. — Снова ищем св. компоненты. Если число отличается — не эквивал.-ны.

— Согласно доказанному в лекции, ищем первое число Бетти $\beta_1(X_1)$ и $\beta_1(X_2)$ для кажд. симплекса

(15) Гомеоморфизм 1-dim симплексов ≡ гомеоморфизм графов.

(1) Вершины степени 2 не влияют → удаляем и пробрасываем связи между соседними(

(2) Повторяем, пока есть вершины степени 2.

(3) Считаем степени вершин.

(4) Если число компонент связности и ~~степени~~ вершине один. степени совпадают → гомеоморфны.