List 4 ① $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \dots + (-1)^n f^n = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \dots + (-1)^n \beta_n$

Как было доказано ранее:

$$\beta^j = \underbrace{|\sigma^j|}_{\text{кол-во } j\text{-мерных симплексов} \equiv f_j} - rk\, D_j - rk\, D_{j+1} \qquad \beta^{j+1} = \underbrace{|\sigma^{j+1}|}_{\equiv f_{j+1}} - rk\, D_{j+1} - rk\, D_{j+2}$$

$$\beta^j - \beta^{j+1} = f^j - rk\, D_j - \cancel{rk\, D_{j+1}} - f^{j+1} + \cancel{rk\, D_{j+1}} + rk\, D_{j+2}$$

Тогда при знакопеременном сложении нас интересуют только

$rk\, D_0 = 0$, т.к. $\partial_0 : C_0 \to 0$ (по опр.)

$rk\, D_{n+1} = 0$, т.к. $\partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n$, но $C_{n+1} = 0$

Тогда $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_n$

фигр

(2) $\chi(K\cup L)=\chi(K)+\chi(L)-\chi(K\cap L)$

(1) $\forall f_i(X\cup Y)=f_i(X)+f_i(Y)-f(X\cap Y)$, т.к. для любого симплекса из объединения он либо входит только в один, либо входит в оба (является гранью, по которой объединяли).

↳ Тогда $\chi(K\cup L)=f_0(K\cup L)-f_1(K\cup L)+\ldots+(-1)^n f_n(K\cup L)=$

$$=f_0(K)+f_0(L)-f_0(K\cap L)-f_1(K)-f_1(L)+f_1(K\cap L)+\ldots+(-1)^n f_n(K)+(-1)^n f_n(L)+$$
$$+(-1)^{n+1} f_n(K\cap L)$$

$$\to\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i(K\cup L)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i(K)+\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i(L)+\sum_{i=0}(-1)^{i+1} f_i(K\cap L)=$$
$$=\chi(K)+\chi(L)-\chi(K\cap L)$$

(3) $\exists K\cong S^{n-1}$.

Заметим, что если $\chi(K)$ выр-ся через числа Бетти, а гомологии инвар. отн. гомеоморф. и гомотоп. эквив, то Эйлера хар-ка также инвар. отн. гомеоморф. и гомотоп. эквив-ти.

Возьмем в кач-ве K $\partial_n D^n$ - границу n-мерного симплекса, т.к. $\Delta_n\cong D^n$.

Тогда
$$\chi(K)=f_0(K)-f_1(K)+\ldots+(-1)^n f_n(K)=$$
$$=C_{n+1}^1-C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+\ldots(-1)^n C_{n+1}^n=$$
$$=\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^i-C_{n+1}^0+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}=1+(-1)^n.$$

(4) $V_0 \xrightarrow{x} V_1 \xrightarrow{x} V_2 \xrightarrow{x} \ldots \xrightarrow{x} V_n \xrightarrow{x}$ ~

$k[x]$-модулю на вект. пр-ве $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$

$\forall a \in V_0 \to V_1 \to V_2 \to \ldots \to V_n \to \ldots$ можно задать

в виде $(a_0, a_1, a_2 \ldots)$, т.к. пр-ва $V_1 \ldots V_n \ldots$

~~разложимы~~ представимы в виде прямой суммы.

Тогда для град. модуля на $\mathbb{k}[x]$ покажем возьмем a — произв

полином $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ с коэф из $\mathbb{k}$.

$a(p+q)$, где $x, y \in$ ~~[illegible]~~, $= ap + aq =$

$= \sum_{i\geq 0} a_i x^i p + \sum_{i\geq 0} a_i x^i q$, и $a_i p \in V_i$, $a_i q \in V_i$

Тогда $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$ — модуль с операцией умножения на X для перехода между эл-тами. Т.к. $\mathbb{k}$ — поле, то $k[x]$ — кольцо главных идеалов. ⇒ рез. по теореме.

Обратно, возьмем эл-т модуля, он раскладывается в сумму эл-тов, получаемых умн-ем на X.

Сопоставим коэф. этой суммы эл-т $a \in V_0 \to V_1 \to \ldots \to V_n \to$

(5) Поскольку имеем модуль устойчивости, представимый в виде счетной ~~[illegible]~~ суммы пр-в и отобр. между ними, необходимо, чтобы отобр. между эл-тами модуля были одинаково определены.

Но отобр. для $I_{[j;s)} \oplus I_{[s,k)}$ между s и $s-1$, либо равно тожд. нулю, либо не определено, в то время как для $I_{[j,k)}$ отобр. сущ-ет и определено произвольно, т.е. они изоморфны в точности за искл-ем тех компонент, которые ~~[illegible]~~ преобр. в $V_{s-1} \to V_s$.

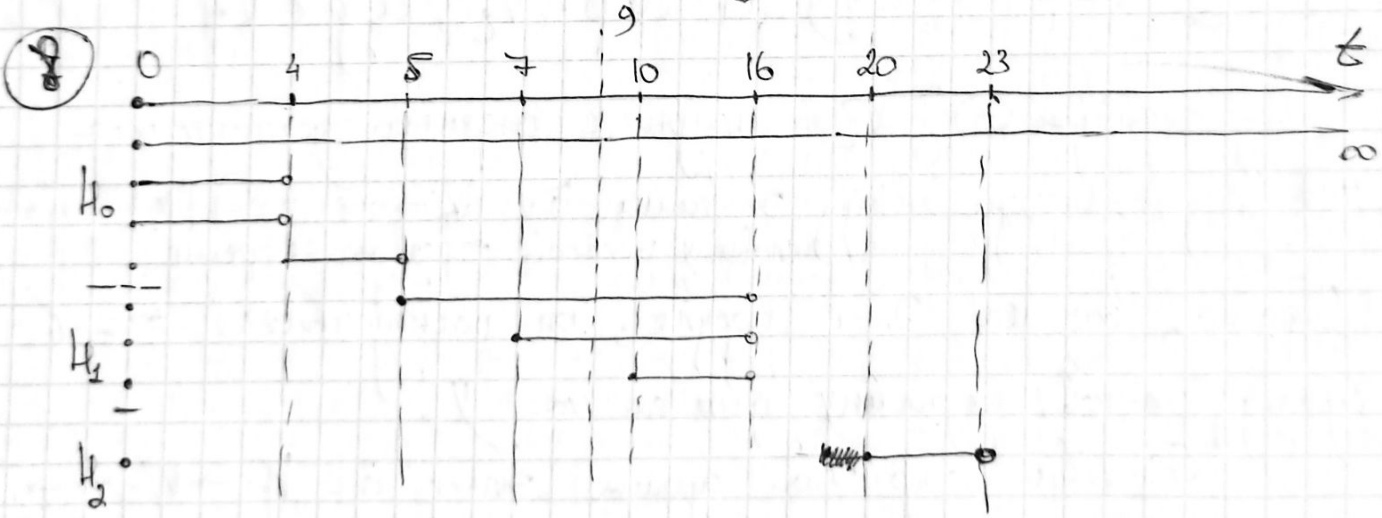
(6) $\exists\, K_j$ - произв. фильтрация комплекса C.

Тогда перечислим сначала верш. ~~[illegible]~~, потом ребра и т.д.

Выкинем те, которые встречаются в фильтрации K_{j-1}.

~~При~~ При такой конструкции условия соблюдаются по построению.

(8)



Есть одна ∞ живущая гомология H_0. Еще две H_0-гомологии живут 4 ед. времени; ~~[illegible]~~ одна H_0-гомология 1 ед. времени;

H_1: 11 ед. времени; 9 ед; 6 ед.

H_2: 3 ед. времени — одна гомология.

В момент 9 имеют место: 1 H_0-гом; 2-H_1-гомол; 0-H_i, $i \geq 2$ гомологии

(7) $L \subset K$ и $K \setminus L$ — j-dim simplex.

Тогда $L \to K$ либо:

β_{j-1} $-= 1$, либо β_j $+= 1$.

Поскольку $K \setminus L \subset K$, то все его $j-1$, $j-2$ ... симплексы уже лежат в K. Значит, изменится только пространство цепей C_j $+= 1$. Рассмотрим симпл. дифф-л ∂_j: $\dim \operatorname{Im} \partial_j = \dim C_j - \dim \operatorname{Ker} \partial_j$.

Значит, либо $\dim \operatorname{Im} \partial_j$ увелич. на 1, тогда β_{j-1} уменьшилось на 1, т.к. $\operatorname{Ker} \partial_{j-1}$ не меняется от j-мерных симплексов.

Либо $\dim \operatorname{Ker} \partial_j$ ~~уменьшилось~~ увеличилось на 1, тогда β_j также увеличилось на 1, т.к. $\operatorname{Im} \partial_{j+1}$ не меняется от добавл. j-мерных симплексов.

■