Devoir à la maison n° 3 à rendre pour le 12 mars

Problème

On considère la fonction f de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

Partie 1 Étude de f

1 **a** – Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1 **b** – Précisez l'expression de $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

2 **a** – Étudier la continuité à gauche et à droite de f en 0.

2 **b** – Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de f en 0.

3 **a** – Étudier les variations de f.

3 **b** – Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites.

3 **c** – Étudier les asymptotes éventuelles à $\mathscr{C}$.

Partie 2 **Calculs d'aires**

1 Soit $a \in \,]0,1[$.

Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.

2 En déduire l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées.

Partie 3 **Résolution d'une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle : $$x^2 y' + (2x-1)\,y = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

1 Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.

2 Donner une solution évidente de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

3 Soit h une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

h est donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 h'(x) + (2x-1)\,h(x) = 0$$

3 **a** – Justifier qu'il existe deux réels λ_+ et λ_- tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad h(x) = \begin{cases} \lambda_+ \cdot f(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ \lambda_- \cdot f(x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

3 **b** – Déterminer la valeur de λ_-.

3 **c** – Déterminer la valeur de $h(0)$.

4 Soit λ un réel et h la fonction définie par : $$h(x) = \begin{cases} \lambda \cdot f(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de h en 0.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Donner toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que $(\mathcal{E})$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer selon les valeurs de a et b le nombre de fonctions h telles que :

$$h \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad h(a) = b$$

Partie 4 — Dérivées successives et polynômes associés

$\boxed{\mathbf{1}}$ Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \,]0,+\infty[\qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

et donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de P_n.

On considère la fonction g définie par : $\qquad g(x) = x^2 f(x)$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Démontrer que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad g^{(n+1)} = f^{(n)}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ **a** – En utilisant la formule de Leibniz pour calculer la dérivée k-ième de g, montrer que :

$$P_{n+1}(X) = \big(1 - 2(n+1)X\big)P_n(X) - n(n+1)X^2 P_{n-1}(X) \qquad (1)$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ **b** – En déduire que : $\qquad P_n'(X) = -n(n+1)P_{n-1}(X) \qquad (2)$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$X^2 P_n''(X) + (1 - 2nX)P_n'(X) + n(n+1)P_n(X) = 0$$

Partie 5 **Une fonction indéfiniment dérivable**

Soit u la fonction de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

1 Montrer que u est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n, donner la valeur de $u^{(n)}(0)$.

2 Dresser le tableau de variations de u en précisant sa limite en $+\infty$.

3 Tracer l'allure de la courbe représentative de u.

Exercice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \left]0, \pi\right[$.

On considère les polynômes T et P de $\mathbb{R}[X]$ définis par :

$$T = X^2 - 2\cos(\theta)\,X + 1 \qquad \text{et} \qquad P = X^{2n} - 2\cos(\theta)\,X^n + 1$$

1 **a** – Donner la décomposition de T en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

1 **b** – Vérifier que T ne possède pas de racine réelle.

2 **a** – Montrer que P ne possède pas de racine réelle.

2 **b** – Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

3 **a** – Déterminer la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

3 **b** – Déterminer la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.