

Sprawozdanie z Laboratorium 2

Autorzy: Mateusz Pawliczek, Piotr Świerzy

Data: 18.03.25

Zadanie 1

Celem zadania jest zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do predykcji, czy nowotwór jest złośliwy (ang. *malignant*), czy łagodny (ang. *benign*).

Nowotwory złośliwe i łagodne różnią się charakterystyką wzrostu. Istotne cechy to m.in. promień i tekstura, które są wyznaczane za pomocą diagnostyki obrazowej i biopsji.

Do rozwiązania problemu wykorzystamy bibliotekę *pandas*, typ *DataFrame* oraz dwa zbiory danych:

- `breast-cancer-train.dat`
- `breast-cancer-validate.dat`

Nazwy kolumn znajdują się w pliku `breast-cancer.labels`. Pierwsza kolumna to identyfikator pacjenta (*patient ID*). Dla każdego pacjenta wartość w kolumnie *Malignant/Benign* wskazuje klasę, tj. czy nowotwór jest złośliwy, czy łagodny. Pozostałe 30 kolumn zawiera cechy, tj. charakterystyki nowotworu.

a) Na początku importujemy potrzebne nam na później biblioteki, a później otwieramy pliki i zapisujemy je jako *DataFrame*.

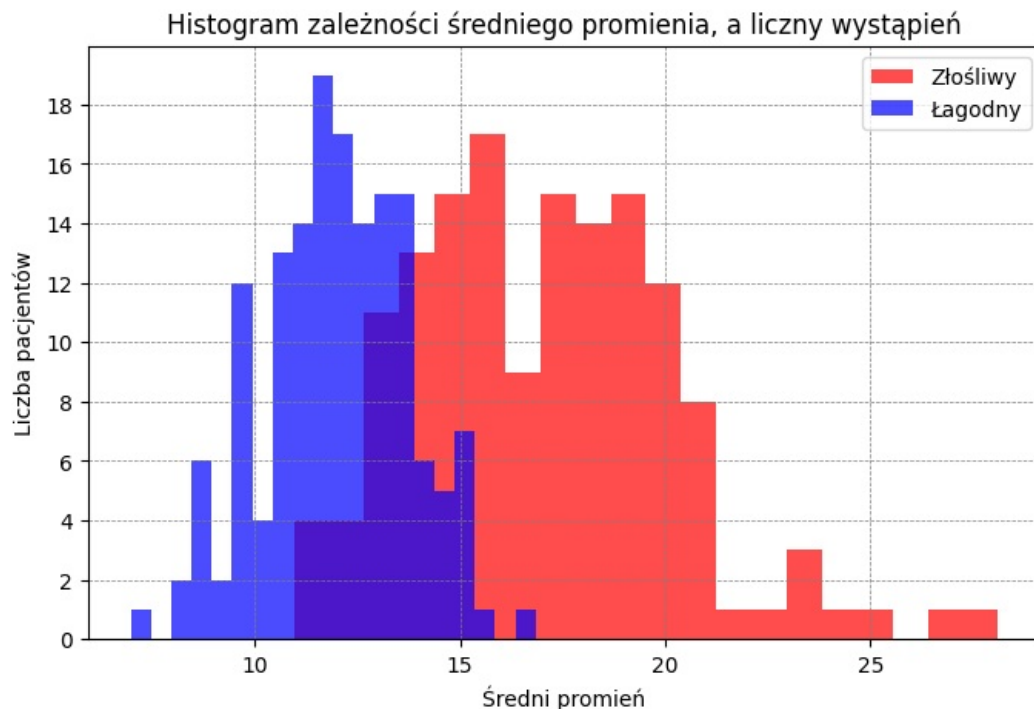
```
In [25]: import os
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.linalg
from sklearn.metrics import confusion_matrix

dataset_dir = os.path.join(os.getcwd(), "dataset")

columns = pd.read_csv(os.path.join(dataset_dir, "breast-cancer.labels"), header=None).squeeze().tolist()
train_data = pd.read_csv(os.path.join(dataset_dir, "breast-cancer-train.dat"), names=columns)
validate_data = pd.read_csv(os.path.join(dataset_dir, "breast-cancer-validate.dat"), names=columns)
```

b) Następnie rysujemy histogram, który pokazuje zależność między średnim promieniem nowotworu a liczbą wystąpień nowotworów, z rozróżnieniem na nowotwory złośliwe i łagodne.

```
In [26]: malignant = train_data[train_data["Malignant/Benign"] == "M"]
benign = train_data[train_data["Malignant/Benign"] == "B"]
feature = "radius (mean)"
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.hist(malignant[feature], bins=20, alpha=0.7, label="Złośliwy", color="red")
plt.hist(benign[feature], bins=20, alpha=0.7, label="Łagodny", color="blue")
plt.xlabel("Średni promień")
plt.ylabel("Liczba pacjentów")
plt.title("Histogram zależności średniego promienia, a liczny wystąpień")
plt.legend()
plt.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.yticks(np.arange(0, 20, 2))
plt.show()
```



Widać, że zazwyczaj jeśli mamy doczynienia z większym promieniem nowotworu, okazuje się być złośliwy.

c) Kolejnym krokiem jest przygotowanie macierzy dla **liniowej** (wszystkie 30 cech) i **kwadratowej** (4 cechy podane w liście `selected_features`) metody najmniejszych kwadratów. Robimy to zarówno dla danych treningowych, jak i danych walidacyjnych.

```
In [27]: selected_features = ["radius (mean)", "perimeter (mean)", "area (mean)", "symmetry (mean)"]
A_training_lin = np.c_[np.ones(train_data.shape[0]), train_data.iloc[:, 2:].values]
A_validate_lin = np.c_[np.ones(validate_data.shape[0]), validate_data.iloc[:, 2:].values]

A_training_quad = np.c_[np.ones(train_data.shape[0]), train_data[selected_features].values, train_data[selected_features]]
A_validate_quad = np.c_[np.ones(validate_data.shape[0]), validate_data[selected_features].values, validate_data[selected_features]]
```

Możemy sprawdzić wielkość tych macierzy, aby zobaczyć czy wszystko się poprawnie zrobiło.

```
In [28]: print("Rozmiar macierzy A_train_lin: ", A_training_lin.shape)
print("Rozmiar macierzy A_train_quad: ", A_training_quad.shape)
print("Rozmiar macierzy A_validate_lin: ", A_validate_lin.shape)
print("Rozmiar macierzy A_validate_quad: ", A_validate_quad.shape)
```

```
Rozmiar macierzy A_train_lin: (300, 31)
Rozmiar macierzy A_train_quad: (300, 9)
Rozmiar macierzy A_validate_lin: (260, 31)
Rozmiar macierzy A_validate_quad: (260, 9)
```

d) Następnie tworzymy dwa wektory b (dla danych testowych i walidacyjnych), które będą odpowiedziami czy dany nowotwór jest złośliwy (wtedy będzie równy 1) czy łagodny (wtedy będzie równy -1).

```
In [29]: b_training = np.where(train_data["Malignant/Benign"] == "M", 1, -1)
b_validate = np.where(validate_data["Malignant/Benign"] == "M", 1, -1)
```

e) Za pomocą tych macierzy jesteśmy w stanie obliczyć wagi dla liniowej oraz kwadratowej reprezentacji najmniejszych kwadratów. W tym celu korzystamy z następującego wzoru:

$$(A^T A)w = A^T b$$

Wysoka waga oznacza, że dana cecha jest bardzo liniowo zależna od tego, że dany nowotwór jest złośliwy lub łagodny, czyli silnie wpływa na przewidywanie klasy nowotworu. W takim przypadku, dana cecha ma duży wpływ na model, a jej obecność w zbiorze cech jest kluczowa dla dokładności predykcji. Wartości wag bliskie 0 oznaczają natomiast, że cecha ma niewielki wpływ na klasyfikację i nie wnosi istotnej informacji do modelu.

```
In [30]: lin_weight = np.linalg.solve(A_training_lin.T @ A_training_lin, A_training_lin.T @ b_training)
quad_weight = np.linalg.solve(A_training_quad.T @ A_training_quad, A_training_quad.T @ b_training)

print("Waga w reprezentacji liniowej: ")
for i in range(1, len(columns)-1):
    if i == 1: print("{:<30} {:>10.6f}".format("bias ", lin_weight[i]))
    else: print("{:<30} {:>10.6f}".format(columns[i], lin_weight[i]))
```

Waga w reprezentacji liniowej:

bias	-0.607588
radius (mean)	0.024537
texture (mean)	0.078325
perimeter (mean)	0.000578
area (mean)	8.807513
smoothness (mean)	-9.195525
compactness (mean)	0.373832
concavity (mean)	3.659996
concave points (mean)	-3.237545
symmetry (mean)	6.688689
fractal dimension (mean)	1.144291
radius (stderr)	0.043649
texture (stderr)	-0.061307
perimeter (stderr)	-0.001738
area (stderr)	29.207437
smoothness (stderr)	2.825510
compactness (stderr)	-4.344522
concavity (stderr)	18.721965
concave points (stderr)	-7.618858
symmetry (stderr)	-30.504055
fractal dimension (stderr)	0.338193
radius (worst)	0.008098
texture (worst)	0.008923
perimeter (worst)	-0.002446
area (worst)	-2.386699
smoothness (worst)	-0.436881
compactness (worst)	0.540824
concavity (worst)	2.013278
concave points (worst)	3.086857
symmetry (worst)	10.529672

```
In [31]: print("Waga w reprezentacji kwadratowej: ")
for i in range(2*len(selected_features) + 1):
    if i == 0: print("{:<30} {:>10.6f}".format("bias ", quad_weight[i]))
    elif i <= len(selected_features): print("{:<30} {:>10.6f}".format(selected_features[i-1], quad_weight[i]))
    else: print("{:<30} {:>10.6f}".format(selected_features[i-len(selected_features)-1] + " kwadrat", quad_weight[i]))
```

Waga w reprezentacji kwadratowej:

bias	-1.896540
radius (mean)	-4.147853
perimeter (mean)	0.604554
area (mean)	0.006839
symmetry (mean)	14.709297
radius (mean) kwadrat	0.091564
perimeter (mean) kwadrat	-0.002236
area (mean) kwadrat	-0.000001
symmetry (mean) kwadrat	-29.306680

f) Następnie staramy się znaleźć wagi za pomocą funkcji `scipy.linalg.lstsq` oraz wagi dla ustandaryzowanej reprezentacji liniowej. Do czego korzystamy z następującego wzoru:

$$(A^T A + \lambda I)w = A^T b$$

Robi się to w taki sposób, aby zapobiec dominowaniu małych wartości własnych w macierzy $A^T A$ i poprawić jej uwarunkowanie.

```
In [32]: lin_weight_lstsq = scipy.linalg.lstsq(A_training_lin, b_training)[0]
print("Waga w reprezentacji liniowej (lstsq): ")
for i in range(1, len(columns)-1):
    if i == 1: print("{:<30} {:>10.6f}".format("bias ", lin_weight_lstsq[i]))
    else: print("{:<30} {:>10.6f}".format(columns[i], lin_weight_lstsq[i]))
```

```

Waga w reprezentacji liniowej (lstsq):
bias -0.607588
radius (mean) 0.024537
texture (mean) 0.078325
perimeter (mean) 0.000578
area (mean) 8.807513
smoothness (mean) -9.195525
compactness (mean) 0.373832
concavity (mean) 3.659996
concave points (mean) -3.237545
symmetry (mean) 6.688689
fractal dimension (mean) 1.144291
radius (stderr) 0.043649
texture (stderr) -0.061307
perimeter (stderr) -0.001738
area (stderr) 29.207437
smoothness (stderr) 2.825510
compactness (stderr) -4.344522
concavity (stderr) 18.721965
concave points (stderr) -7.618858
symmetry (stderr) -30.504055
fractal dimension (stderr) 0.338193
radius (worst) 0.008098
texture (worst) 0.008923
perimeter (worst) -0.002446
area (worst) -2.386699
smoothness (worst) -0.436881
compactness (worst) 0.540824
concavity (worst) 2.013278
concave points (worst) 3.086857
symmetry (worst) 10.529672

```

Wyniki te są takie same jak poprzednie, co jest poprawne, bo zmieniliśmy tylko sposób liczenia.

```

In [33]: lambda_ = 0.01
I = np.eye(A_training_lin.shape[1])
I[0,0] = 0
w_ridge = np.linalg.solve(A_training_lin.T @ A_training_lin + lambda_ * I, A_training_lin.T @ b_training)
print("Waga w reprezentacji liniowej z regularyzacją λ=0.01: ")
for i in range(1, len(columns)-1):
    if i == 1: print("{:<30} {:>10.6f}".format("bias ", w_ridge[i]))
    else: print("{:<30} {:>10.6f}".format(columns[i], w_ridge[i]))

```

Waga w reprezentacji liniowej z regularyzacją λ=0.01:

```

bias -0.246760
radius (mean) 0.029216
texture (mean) 0.023132
perimeter (mean) 0.000662
area (mean) 3.404644
smoothness (mean) -5.127520
compactness (mean) -0.029314
concavity (mean) 3.553629
concave points (mean) -2.177167
symmetry (mean) 0.468101
fractal dimension (mean) 0.974968
radius (stderr) 0.050205
texture (stderr) -0.002911
perimeter (stderr) -0.003107
area (stderr) 3.213225
smoothness (stderr) 0.613753
compactness (stderr) -2.727758
concavity (stderr) 2.539944
concave points (stderr) -1.532306
symmetry (stderr) -0.402055
fractal dimension (stderr) 0.323679
radius (worst) 0.004253
texture (worst) 0.005253
perimeter (worst) -0.002272
area (worst) 3.086705
smoothness (worst) -0.199086
compactness (worst) 0.505666
concavity (worst) 3.020341
concave points (worst) 1.796502
symmetry (worst) 4.432934

```

g) Następnie liczymy współczynniki uwarunkowania macierzy, $\text{cond}(ATA)$, dla liniowej i kwadratowej metody najmniejszych kwadratów. Wzór na to jest następujący:

$$\text{cond}(A^T A) = \frac{\sigma_{\min}(A^T A)}{\sigma_{\max}(A^T A)}$$

```

In [34]: ATA_linear = A_training_lin.T @ A_training_lin

```

```

condition_num_linear = np.linalg.cond(ATA_linear)

ATA_quad = A_training_quad.T @ A_training_quad
condition_num_quad = np.linalg.cond(ATA_quad)

print("Wartość cond(ATA) dla liniowej metody najmniejszych kwadratów: ", condition_num_linear)
print("Wartość cond(ATA) dla kwadratowej metody najmniejszych kwadratów: ", condition_num_quad)

```

Wartość cond(ATA) dla liniowej metody najmniejszych kwadratów: 2104550664831.374
Wartość cond(ATA) dla kwadratowej metody najmniejszych kwadratów: 5.587380847499689e+17

Wysoki współczynnik uwarunkowania oznacza, że macierz jest źle uwarunkowana, co prowadzi do niestabilności numerycznej.

Małe zmiany w danych mogą powodować duże zmiany w wagach, co utrudnia interpretację wyników.

Niski współczynnik uwarunkowania wskazuje na stabilność i wiarygodność wag.

f) Ostatnim krokiem jest sprawdzenie jak dobrze nasze wagi przewidują typ nowotworu. Do tego celu korzystamy z danych walidacyjnych.

Zakładamy, że wynik >0 oznacza nowotwór złośliwy a wynik <=0 nowotwór łagodny. Dokładność metody oznaczamy za pomocą wzoru:

$$acc = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

Gdzie:

TP– liczba przypadków prawdziwie dodatnich

TN– liczba przypadków prawdziwie ujemnych

FP– liczba przypadków fałszywie dodatnich

FN– liczba przypadków fałszywie ujemnych.

```

In [35]: p_lin = A_validate_lin @ lin_weight
p_quad = A_validate_quad @ quad_weight
p_ridge = A_validate_lin @ w_ridge

predictions_lin = np.where(p_lin > 0, 1, -1)
conf_matric_lin = confusion_matrix(b_validate, predictions_lin)
TP = conf_matric_lin[1, 1] # złośliwy
TN = conf_matric_lin[0, 0] # łagodny
FP = conf_matric_lin[0, 1] # łagodny jako złośliwy
FN = conf_matric_lin[1, 0] # złośliwy jako łagodny
lin_acc = (TP + TN) / (TP + TN + FP + FN)

predictions_quad = np.where(p_quad > 0, 1, -1)
conf_matric_quad = confusion_matrix(b_validate, predictions_quad)
TP = conf_matric_quad[1, 1] # złośliwy
TN = conf_matric_quad[0, 0] # łagodny
FP = conf_matric_quad[0, 1] # łagodny jako złośliwy
FN = conf_matric_quad[1, 0] # złośliwy jako łagodny
quad_acc = (TP + TN) / (TP + TN + FP + FN)

predictions_ridge = np.where(p_ridge > 0, 1, -1)
conf_matric_ridge = confusion_matrix(b_validate, predictions_ridge)
TP = conf_matric_ridge[1, 1] # złośliwy
TN = conf_matric_ridge[0, 0] # łagodny
FP = conf_matric_ridge[0, 1] # łagodny jako złośliwy
FN = conf_matric_ridge[1, 0] # złośliwy jako łagodny
ridge_acc = (TP + TN) / (TP + TN + FP + FN)

print("Macierz pomyłek dla metody liniowej\n", conf_matric_lin)
print("Dokładność: ", round(lin_acc, 2), "\n")
print("Macierz pomyłek dla metody kwadratowej\n", conf_matric_quad)
print("Dokładność: ", round(quad_acc, 2), "\n")
print("Macierz pomyłek dla metody liniowej z regularyzacją\n", conf_matric_ridge)
print("Dokładność: ", round(ridge_acc, 2))

```

Macierz pomyłek dla metody liniowej

```
[[195  5]
 [ 2 58]]
```

Dokładność: 0.97

Macierz pomyłek dla metody kwadratowej

```
[[185 15]
 [ 5 55]]
```

Dokładność: 0.92

Macierz pomyłek dla metody liniowej z regularyzacją

```
[[196  4]
 [ 2 58]]
```

Dokładność: 0.98