Wyprowadzenie równania wariacyjnego

Rozważmy równanie transportu ciepła:

$$-k(x)u''(x) = 0,$$

gdzie funkcja $k(x)$ jest określona jako:

$$k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 2, & x \in (1,2]. \end{cases}$$

Warunki brzegowe przyjmuja postać:

$$u(2) = 3, \quad u(0) + u'(0) = 20.$$

Przyjmujemy podział dziedziny na n równych cześci, gdzie

$$h = \frac{2}{n}, ax_i = i \cdot h.$$

Pomnóżmy równanie przez funkcje testowa $v(x)$ i całkujmy po całej dziedzinie:

$$-\int_0^2 k(x)u''(x)v(x)\,dx = 0.$$

Stosujac całkowanie przez cześci:

$$-\int_0^2 k(x)u''(x)v(x)\,dx = -\Big[k(x)u'(x)v(x)\Big]_0^2 + \int_0^2 k(x)u'(x)v'(x)\,dx.$$

Uwzgledniajac warunki brzegowe:

$$u(2) = 3, \quad u(0) + u'(0) = 20,$$

możemy wyrazić pochodna w $x = 0$: $u'(0) = 20 - u(0)$. W wyniku tego człon brzegowy zeruje sie, a równanie przyjmuje postać:

$$\int_0^2 k(x)u'(x)v'(x)\,dx - v(0)u(0) = 0.$$

Zdefiniujmy bilinearna forme $B(u,v)$ oraz liniowa forme $L(v)$:

$$B(u,v) = \int_0^2 k(x)u'(x)v'(x)\,dx - v(0)u(0),$$

$$L(v) = -20v(0).$$

Ostatecznie, równanie wariacyjne możemy zapisać w postaci:

$$B(u,v) = L(v),$$

gdzie $B(u,v)$ opisuje zależność miedzy funkcja $u(x)$ a funkcja testowa $v(x)$, a $L(v)$ zawiera wkład wynikajacy z warunków brzegowych.