

Dokumentacja projektu - Metoda Elementów Skończonych

Mateusz Pawliczek

Styczeń 2025

1 Opis projektu

Celem projektu było rozwiązanie równania różniczkowego metoda elementów skończonych (MES). Rozwiązanie dotyczy problemu transportu ciepła w 1D w zakresie $[0, 2]$ z uwzględnieniem warunków brzegowych. Dla tego zadania wykorzystano metodę Gaussa-Legendre'a do numerycznego obliczania całek oraz inne obliczenia matematyczne przy użyciu biblioteki `MathNet.Numerics`.

Rozwiązanie obejmuje:

- Wyprowadzenie wariacyjnego sformułowania równania różniczkowego,
- Implementacje algorytmu generującego układ równań liniowych,
- Rozwiązanie układu równań liniowych za pomocą metody Gaussa,
- Zapisanie wyników do pliku tekstowego,
- Wykonanie obliczeń macierzowych i metode interpolacji Lagrange'a z biblioteki matematycznej,
- Wizualizacje rozwiązania w postaci wykresu.

2 Matematyczny model problemu

Zadanie polega na rozwiązaniu równania różniczkowego:

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

gdzie funkcje $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ i $f(x)$ są odpowiednio funkcjami współczynnika, przyrostu i wymuszenia w układzie.

Problem przyjęty do rozwiązania:

$$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{dla} \quad u(2) = 3, \quad \frac{du}{dx}(0) + u(0) = 20$$

gdzie:

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$

3 Algorytm rozwiązania

Metoda elementów skończonych (MES) została zastosowana do rozwiązania układu równań różniczkowych. Proces rozwiązywania składał się z następujących kroków:

- Sformułowanie układu równań liniowych,
- Rozwiązanie układu równań za pomocą metody Gaussa,
- Zapisanie wyników do pliku,
- Wykonanie obliczeń macierzowych przy użyciu biblioteki `MathNet.Numerics`,
- Interpolacja wyników z użyciem metody Lagrange’a,
- Wykres rozwiązania funkcji $u(x)$.

4 Wykorzystane technologie

Program został zaimplementowany w języku C# z użyciem frameworku .NET i biblioteki LiveCharts do rysowania wykresów. Całkowanie numeryczne zostało zrealizowane z wykorzystaniem metody Gaussa-Legendre’a. Obliczenia macierzowe oraz metoda interpolacji Lagrange’a zostały zaimplementowane przy pomocy biblioteki `MathNet.Numerics`.

5 Instrukcja uruchomienia

Aby uruchomić projekt, należy wykonać poniższe kroki:

1. Zainstalować .NET 6.0,
2. Zainstalować Visual Studio Code,
3. Przejść do katalogu projektu `HeatTransport` na swoim komputerze,
4. Uruchomić projekt za pomocą poniższej komendy:

```
cd HeatTransport
dotnet run
```

6 Wyniki

Po uruchomieniu programu, wyniki obliczeń są zapisywane do pliku `wyniki.txt` w formacie:

$$x_i; y_i$$

Dodatkowo generowany jest wykres, który ilustruje rozwiązanie funkcji $u(x)$.

7 Podsumowanie

Projekt realizuje metode elementów skończonych (MES) do rozwiązania równania różniczkowego transportu ciepła. Wyniki obliczeń zostały zapisane do pliku, a rozwiązanie przedstawione na wykresie. Program spełnia wymagania zadania i umożliwia analize wyników.