МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

А. И. МИТЮХИН

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

МИНСК 2021

1. Цель лабораторной работы

Изучение метода классификации образов на основе теории решений с использованием дискриминантных функций.

2. Теоретические сведения

Распознавание образов или объектов в широком смысле – это решение задачи отнесения входных сигналов, изображений, данных и пр. к какому-либо из идентифицируемых классов образов. Решение основывается на дифференциации существенных признаков образов от фоновых составляющих и от деталей, не относящихся к обрабатываемому процессу.

На вход системы автоматического распознавания образов данные могут поступать от различных источников: датчиков, источников информации, разных физических объектов и процессов, результатов экспериментов и пр. Данные поступающие на вход системы распознавания, как правило, включают сигналы, которые часто являются пространственными, временными или частотными функциями. Сигналы, данные, объекты интереса на изображениях, которые необходимо распознать, называют образами.

Определение.2.1. Классом образов называется совокупность образов, обладающих общими свойствами.

Классы образов обозначим символами $c_1,\ldots,\ c_i,\ldots,c_m$, где индекс m соответствует количеству классов.

Определение 2.2. Под машинным (компьютерным) распознаванием образов понимаются методы, позволяющие относить образы к тем или иным классам автоматически.

Выходная информация системы распознавания образов сводится к указанию одного или нескольких классов. Например, все разновидности написания символа «а» должны отображаться в один и тот же класс $c_{\text{а}}$; все электрокардиограммы у здоровых людей должны отображаться в один и тот же класс «норма» $c_{\text{н}}$ независимо от пола, национальности, возраста обследуемых, свойственных им биологических отклонений, расположения электродов при снятии электрокардиограммы.

Для представления, описания образов используется совокупность или некоторое множество наиболее характерных признаков (дескрипторов) распознаваемых объектов. В практических задачах распознавания образов получили распространение три формы представления признаков:

– в виде векторов признаков;

– в виде символьных строк;

– в виде деревьев.

Образ, представленный вектором признаком размером $n \times 1$, записывается как

$$\boldsymbol{X}_{ij} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)^T,$$

где T – обозначение операции транспонирования, $\boldsymbol{X}_{ij}$ означает j -й образ, принадлежащий классу c_i. Компонента x_k вектора признаков $\boldsymbol{X}_{ij}$ представляет его k-й дескриптор образа, принадлежащего к классу c_i. Когда величины $x_1, \dots, x_k, \dots x_n$ являются вещественными числами, вектор $\boldsymbol{X}_{ij}$ представляет собой точку в n-мерном евклидовом пространстве. По различным причинам образы, принадлежащие одному классу, могут отличаться. Векторы признаков, описывающие эти образы, варьируют в пределах одного и того же класса. Наблюдаемые (входные) образы $\boldsymbol{X}$ системы распознавания представляют собой случайные векторы. Компоненты x_k вектора $\boldsymbol{X}$ являются случайными величинами. Возможна ситуация, когда векторы признаков, описывающие разные объекты, могут пересекаться.

Пусть на изображении имеются два объекта интереса для распознавания. Каждый образ описывается результатом двух измерений.

Класс c_1 образов описывается множеством векторов признаков:

$$\left\{\boldsymbol{X}_{11} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}_{12} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \dots, \boldsymbol{X}_{1l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Класс c_2 образов описывается множеством векторов признаков:

$$\left\{\boldsymbol{X}_{21} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}_{22} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \dots, \boldsymbol{X}_{2l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Здесь l образов каждого класса представляются точками в двумерном евклидовом пространстве.

Векторы-признаки, принадлежащие определенному классу, образуют распределение вектора $\boldsymbol{X}$ в n-мерном пространстве. Если априори известны m распределений (классов) векторов $\boldsymbol{X}$, то между ними можно установить границы или (гиперплоскости), которые делят n-мерное пространство на подпространства, соответствующие классам $\{c_1, \dots, c_i, \dots, c_m\}$. Функция $g(\boldsymbol{X})$, описывающая разделение подпространств называется дискриминантной функцией.

На рис. 2.1 показаны признаки классов c_1 и c_2 в виде точек двумерного пространства.

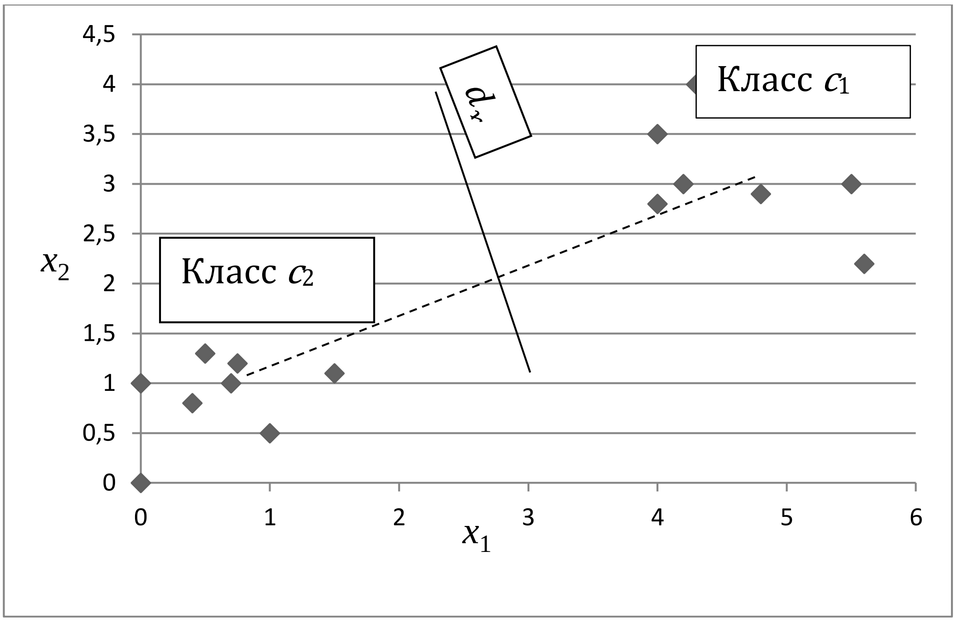

Рис. 2.1. Двумерные признаки

Классификация образов или отнесение образа к тому или иному классу c_i реализуется посредством разбиения множества векторов признаков на подмножества – кластеры. На рис. 2.1 множество точек, представляющих результаты измерений, разбиты на два кластера, состоящие из близкорасположенных точек. В данном примере кластеры можно найти как подмножества плотно расположенных точек внутри описывающих окружностей. Выбор дескрипторов, на которых базируются компоненты вектора признаков, оказывает влияние на конечные характеристики системы распознавания, использующей этот вектор признаков.

Очевидно, что для эффективной классификации образов, принадлежащих к определенному классу необходимо иметь непересекающиеся кластеры. Это обстоятельство подчеркивает важность правильного выбора дескрипторов, процедур предварительной обработки и выделения признаков.

Определение 2.3. Признаки, являющиеся общими для всех образов, принадлежащих к определенному классу, называются внутриклассовыми признаками.

Определение 2.4. Признаки, которые характеризуют различия между классами, называются межклассовыми признаками.

Проблема классификации образов заключается в определении оптимальных разделяющих границ или в разработке решающих процедур для отнесения данных к различным классам образов. На рис. 2.1 иллюстрируется простая линейная решающая функция, или граница разделяющая двумерные векторы признаков на два класса. Оптимальная линейная решающая функция, представляет собой перпендикуляр, проведенный через середину прямой линии, соединяющей кластеры двух классов. Описанный метод построения векторов признаков приводит к классам образов, характеризующийся количественной информацией.

В ряде приложений распознавания характеристики образов описываются структурными связями. Например, распознавание отпечатков пальцев, рис. 2.2, основывается на взаимосвязях признаков отпечатка, называемых мелкими деталями. Эти признаки играют роль примитивов, которые вместе с их относительными размерами и расположением описывают свойства линий отпечатка, такие как конец бороздки, раздвоение бороздки (ветвление), слияния, несвязные сегменты, дуги, завитки, петля правая, петля левая и др. В таких задачах распознавания принадлежность к классу образов определяется не только данными количественных измерений признаков, но и пространственными отношениями между признаками, текстурными особенностями объектов и пр.

Рис. 2.2. Изображение отпечатка пальца

Существуют два подхода решения задачи распознавания образов.

2.1. Распознавание с учителем

Распознавание с учителем предполагает наличие образов $\boldsymbol{X}_{ij}$ с заранее известной классификацией. Каждому образу ставится в соответствие метка, указывающая класс c_i, к которому он принадлежит. Необходимо обучить классификатор автоматически классифицировать образ $\boldsymbol{X}_{ij}$, принадлежащий одному из классов $c_1, c_2,..., c_i,..., c_m$.

Определение 2.5. Заданное множество примеров признаков с известной классификацией называется обучающим множеством (обучающей выборкой).

При наличии обучающей выборки существует возможность разработки решающих, например, дискриминантных функций, которые могут характеризовать разделение между классами. Эти функции далее могут быть использованы для классификации новых векторов признаков, для которых принадлежность к какому-либо классу априори не известно.

Определение 2.6. Множество векторов признаков с известной классификацией, используемое для оценки разработанного классификатора называется контрольной выборкой.

2.2. Распознавание без учителя

Второй подход к распознаванию образов возникает, если примеры образов, подлежащие анализу, не снабжены метками, указывающими их принадлежность к классу. Например, астрономические данные, когда следует обнаружить наличие излучающих звездных или иных объектов. Случай обучения без учителя возникает и при решении задач распознавания на основе данных произвольного характера. Такая ситуация связана с тем, что неизвестно, отличаются ли некоторые классы друг от друга. Для решения таких задач можно воспользоваться методами кластерного анализа.

3. Классификация образов с использованием методов теории решений

Пусть имеется m классов $\{c_1, c_2,..., c_i,..., c_m\}$ образов. Образы-векторы $\boldsymbol{X}_{ij}$, принадлежащие различным классам, представляют собой точки в n-мерном евклидовом пространстве. Все классы образов можно представлять в виде множества подпространств на которое разбивается n-мерное пространство. Классификация образов заключается в отнесении вектора $\boldsymbol{X}$ к соответствующему подпространству. Для этого следует найти описание границ или гиперплоскостей, разделяющих эти подпространствав виде некоторых функций. В качестве таких функций используют функции, линейно зависящие от значений координат векторов признаков. Например, в случае двумерного пространства признаков, рис. 2.1, в качестве разделяющей функции выступает прямая линия. Для 3-мерного пространства разделяющая поверхность между тремя классами является плоскостью, а при $n > 3$ разделяющая поверхность называется гиперплоскостью.

3.1. Классификация образов с использованием прототипа

Иллюстрацией метода теории решений может служить классификатор, основанный на оценке минимума расстояния в пространстве признаков между входом (точкой образа $\boldsymbol{X}$) и всеми прототипами (эталонами) всех m классов. Наиболее вероятно вектор $\boldsymbol{X}$ относится к тому классу c_i, прототип, которого наиболее близок по расстоянию в заданной метрике.

Представим переменные m классов в виде скопления точек в разных областях n-мерного пространства. Тогда качестве прототипа (эталона) каждого класса может выступать точка, координатами которой являются средние значения переменных в данном классе. Каждому классу $\{c_1,\ldots,c_i,\ldots,c_m\}$ соответствует средний образ (прототип) множества $\{\overline{\boldsymbol{X}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{X}}_i, \ldots, \overline{\boldsymbol{X}}_m\}$. На рис. 3.1 показаны точки – прототипы $\overline{\boldsymbol{X}}_1$ и $\overline{\boldsymbol{X}}_2$, соответственно, классов c_1 и c_2. Другие точки пространства описываются множествами обучающих векторов.

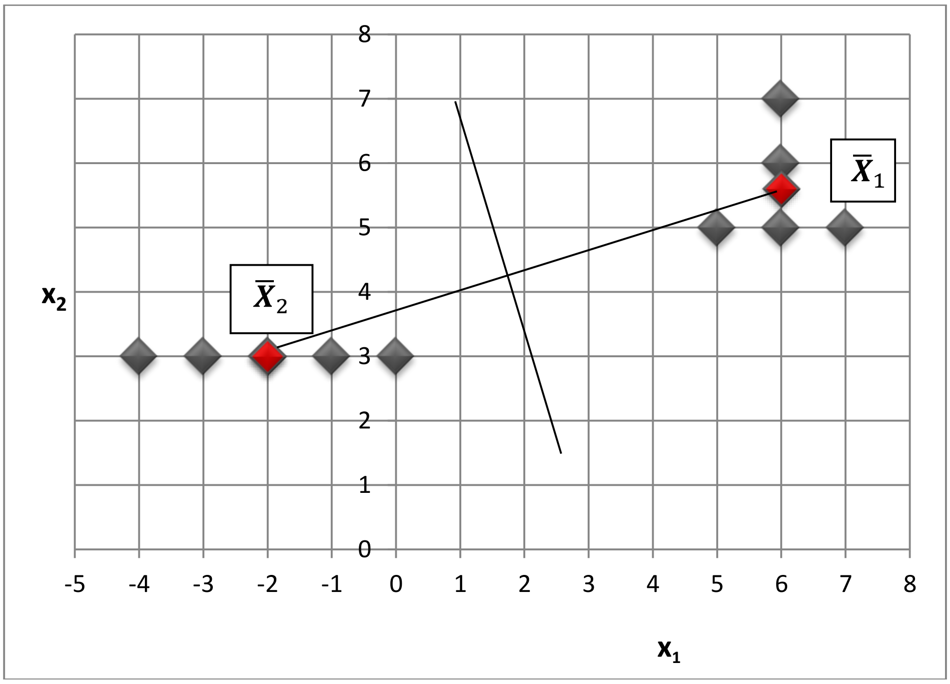

Рис. 3.1.

При использовании евклидовой метрики расстояние между вектором признаков $\boldsymbol{X}$ распознаваемого образа и вектором примитива $\overline{\boldsymbol{X}}_i$ определяется формулой

$$d_i(\boldsymbol{X}) = \|\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_i\|, i = 1,2, \ldots, m.$$

Решающим правилом для классификации образа $\boldsymbol{X} = (x_1, \dots, x_n)$ может быть правило выбора того класса, для которого вектор $\boldsymbol{X}$ соответствует наименьшему расстоянию $d_i(\boldsymbol{X})$ т.е.,

$$\text{если } d_i(\boldsymbol{X}) < d_j(\boldsymbol{X}), \forall j \neq i, \text{ тогда } \boldsymbol{X} \in c_i.$$

Напомним некоторые понятия линейной алгебры. Пусть векторы $\overline{\boldsymbol{X}}_1, \dots \overline{\boldsymbol{X}}_i, \dots, \overline{\boldsymbol{X}}_m$ длиной n обозначают точки в n -мерном евклидовом пространстве, т.е. являются радиус-векторами. Радиус-вектор, соответствующий точке n-мерного пространства, имеет длину (или норму)

$$\|\overline{\boldsymbol{X}}\| = (\bar{x}_1^2 + \dots + \bar{x}_n^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.1)$$

Выражение (3.1) называют расстоянием Евклида (нормой Евклида). Пусть образ $\boldsymbol{X} = (x_1, \dots, x_n)$ – это произвольный вектор n -мерного пространства. Если $\boldsymbol{X}$ и $\overline{\boldsymbol{X}}_i$ радиус-векторы, которые определяют место расположения двух точек $(x_1, \dots, x_n)$ и $(\bar{x}_{i1}, \dots \bar{x}_{in})$ в n-мерном пространстве, то расстояние $d_i(\boldsymbol{X})$ между вектором $\boldsymbol{X}$ и $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{i}}$ определяется длиной вектора переноса $(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_i)$. Вектор $(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_i)$ обозначает перемещение между двумя точками в пространстве. Из (3.1) следует формула вычисления длины вектора переноса в n-мерном пространстве

$$d_i(\boldsymbol{X}) = \|\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_i\| = ((x_1 - \bar{x}_{i1})^2 + (x_2 - \bar{x}_{i2})^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_{in})^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим в качестве примера получение решающей функции для случая, когда образы представляются точками на двумерной плоскости, рис. 3.1.

Граница, разделяющая классы c_1 и c_2, представляет собой перпендикуляр, проведенный через середину прямой линии, соединяющую кластеры двух классов в точках $\overline{\boldsymbol{X}}_1$ и $\overline{\boldsymbol{X}}_2$. Очевидно, любая точка $\boldsymbol{X}$ на линии разделения кластеров находится на одинаковом расстоянии от $\overline{\boldsymbol{X}}_1$ и $\overline{\boldsymbol{X}}_2$. Тогда справедливы следующие равенства относительно векторов переноса:

$$\begin{gathered} d_1(\boldsymbol{X}) = d_2(\boldsymbol{X}), \\ d_1(\boldsymbol{X}) - d_2(\boldsymbol{X}) = 0, \end{gathered} \qquad (3.3)$$

где $d_1(\boldsymbol{X}) = \|\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_1\|$, $d_2(\boldsymbol{X}) = \|\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_2\|$.

Далее запишем (3.3) в форме

$$d_1(\boldsymbol{X}) - d_2(\boldsymbol{X}) = d(\boldsymbol{X}), \qquad (3.4)$$

где $d(\boldsymbol{X})$ – некоторая величина расстояния. Тогда решение о классификации неизвестных образов записывается в виде условий:

$$\text{если } d(\boldsymbol{X}) > 0, \text{ то } \boldsymbol{X} \in c_2;$$
$$\text{если } d(\boldsymbol{X}) < 0, \text{ то } \boldsymbol{X} \in c_1.$$

Используя (3.2), запишем выражение разности расстояний (3.4), используя квадраты расстояний

$$\|\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2 - \|\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 = d'(\boldsymbol{X}), \tag{3.5}$$

Далее используем известное соотношение между скалярным произведением векторов и квадратом нормы (квадратом длины) вектора вида

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 = (x_1^2 + x_2^2 \dots + x_n^2) = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X},$$

где $\boldsymbol{X}^T$ – это вектор-строка.

Используя такую форму записи квадрата длины вектора, запишем отдельные составляющие выражения (3.5).

$$\|\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2 = (\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_1)^T(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_1) = \|\boldsymbol{X}\|^2 - (\boldsymbol{X}^T\overline{\boldsymbol{X}}_1) - (\overline{\boldsymbol{X}}_1^T\boldsymbol{X}) + \|\overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2. \tag{3.6}$$
$$\|\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 = (\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_2)^T(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_2) = \|\boldsymbol{X}\|^2 - (\boldsymbol{X}^T\overline{\boldsymbol{X}}_2) - (\overline{\boldsymbol{X}}_2^T\boldsymbol{X}) + \|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2. \tag{3.7}$$

Подставляя в (3.5) составляющие (3.6) и (3.7), получаем

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 - (\boldsymbol{X}^T\overline{\boldsymbol{X}}_1) - (\overline{\boldsymbol{X}}_1^T\boldsymbol{X}) + \|\overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2 -$$
$$-\|\boldsymbol{X}\|^2 + (\boldsymbol{X}^T\overline{\boldsymbol{X}}_2) + (\overline{\boldsymbol{X}}_2^T\boldsymbol{X}) - \|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 = d'(\boldsymbol{X}).$$

Выполним очевидные преобразования последнего выражения.

$$\|\overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2 - \|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 - (\overline{\boldsymbol{X}}_1^T - \overline{\boldsymbol{X}}_2^T)\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^T(\overline{\boldsymbol{X}}_1 - \overline{\boldsymbol{X}}_2) = d'(\boldsymbol{X}).$$
$$\|\overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2 - \|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 - (\overline{\boldsymbol{X}}_1^T - \overline{\boldsymbol{X}}_2^T)\boldsymbol{X} - (\overline{\boldsymbol{X}}_1^T - \overline{\boldsymbol{X}}_2^T)\boldsymbol{X} = d'(\boldsymbol{X}).$$
$$\|\overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2 - \|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 - 2(\overline{\boldsymbol{X}}_1^T - \overline{\boldsymbol{X}}_2^T)\boldsymbol{X} = \|\overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2 - \|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 - 2(\overline{\boldsymbol{X}}_1 - \overline{\boldsymbol{X}}_2)^T\boldsymbol{X} = d'(\boldsymbol{X}).$$

Таким образом, разность квадратов расстояний (3.5) определяется как

$$\|\overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2 - \|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 - 2(\overline{\boldsymbol{X}}_1 - \overline{\boldsymbol{X}}_2)^T\boldsymbol{X} = d'(\boldsymbol{X}). \tag{3.8}$$

Повторно запишем решение о классификации неизвестных образов в виде условий:

$$\text{если } d'(\boldsymbol{X}) > 0, \text{ то } \boldsymbol{X} \in c_2;$$
$$\text{если } d'(\boldsymbol{X}) < 0, \text{ то } \boldsymbol{X} \in c_1.$$

Пример 1. Пусть обучающие множества состоят из двумерных векторов признаков образов $\boldsymbol{X}_{ij}$.

К классу c_1 относятся векторы признаков:

$$\boldsymbol{X}_{11}=\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix};\ \boldsymbol{X}_{12}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix};\ \boldsymbol{X}_{13}=\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix};\ \boldsymbol{X}_{14}=\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix};\ \boldsymbol{X}_{15}=\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}.$$

К классу c_2 относятся векторы признаков:

$$\boldsymbol{X}_{21}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix};\ \boldsymbol{X}_{22}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix};\ \boldsymbol{X}_{23}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix};\ \boldsymbol{X}_{24}=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix};\ \boldsymbol{X}_{25}=\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}.$$

Векторы прототипы

$$\overline{\boldsymbol{X}}_i=\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}\boldsymbol{X}_{ij},\ i=1,2,$$

классов c_1 и c_2 соответственно равны

$$\overline{\boldsymbol{X}}_1=\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}\boldsymbol{X}_{1j}=\begin{bmatrix}6\\5{,}6\end{bmatrix},$$
$$\overline{\boldsymbol{X}}_2=\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}\boldsymbol{X}_{2j}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}.$$

Подставляя в выражение (3.8)

$$\|\overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2-\|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2-2(\overline{\boldsymbol{X}}_1-\overline{\boldsymbol{X}}_2)^T\boldsymbol{X}=d'(\boldsymbol{X}).$$

значение координат прототипов $\overline{\boldsymbol{X}}_1$ и $\overline{\boldsymbol{X}}_2$, а также координат неизвестного вектора $\boldsymbol{X}$ получаем уравнения:

$$(\bar{x}_{11}^2+\bar{x}_{12}^2)-(\bar{x}_{21}^2+\bar{x}_{22}^2)-2[(\bar{x}_{11}-\bar{x}_{21})\quad(\bar{x}_{12}-\bar{x}_{22})]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=d'(\boldsymbol{X});$$

$$(\bar{x}_{11}^2+\bar{x}_{12}^2)-(\bar{x}_{21}^2+\bar{x}_{22}^2)-2\{(\bar{x}_{11}-\bar{x}_{21})x_1+(\bar{x}_{12}-\bar{x}_{22})x_2\}=d'(\boldsymbol{X});$$

$$(6^2+5,6^2)-((-2)^2+3^3)-2\{\big(6-(-2)\big)x_1+(5{,}6-3)x_2\}=d'(\boldsymbol{X});$$

$$54{,}36-2(8x_1+2{,}6x_2)=d'(\boldsymbol{X}).\qquad(3.9)$$

Пусть в качестве контрольной выборки выступает вектор $\widetilde{\boldsymbol{X}}_1=\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}\in c_1$. Вычислим значение $d'(\boldsymbol{X})$ (3.9).

$$54{,}36-2(8\cdot3+2{,}6\cdot8)=d'(\boldsymbol{X}),$$

$$54{,}36 - 89{,}6 = d'(\boldsymbol{X}).$$

В результате, если

$$d'(\boldsymbol{X}) < 0,$$

то образ $\boldsymbol{X} \in c_1$.

Если

$$d'(\boldsymbol{X}) > 0,$$

то образ $\boldsymbol{X} \in c_2$.

Определение 3.1. Обобщенная линейная решающая или дискриминантная функция записывается как

$$g(\boldsymbol{X}) = w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n - w_{n+1} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{X}, \tag{3.10}$$

где $\boldsymbol{X} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n, 1)^T$ – входной образ с добавленной координатой, равной единице, $\boldsymbol{W} = (w_1, \ldots, w_k, \ldots, w_n, w_{n+1})^T$– вектор параметров (весов) классификатора.

Параметры вектора $\boldsymbol{W}$ получаются из обучающего множества. Получив дискриминантную функцию, говорят, что классификатор обучен, т.е. способен классифицировать образы. Функцию $g(\boldsymbol{X})$ интерпретируют как границу или гиперплоскость, разделяющую классы. Граница или гиперплоскость определяется как

$$g(\boldsymbol{X}) = 0. \tag{3.11}$$

Вид дискриминантной функции (3.10) дает информацию, необходимую для создания классификатора. Коэффициенты $(w_1, \ldots, w_k, \ldots, w_n, w_{n+1})$ дискриминантной функции задают параметры классификатора.

С учетом (3.11), нетрудно увидеть, что уравнению (3.9) соответствует дискриминантная функция

$$g(\boldsymbol{X}) = 8x_1 + 2{,}6x_2 - 27{,}18.$$

Пример 2. Классификатор, работающий по критерию минимума расстояния. Автоматическая классификация образа $\boldsymbol{X}_{ij}$ объекта к одному из классов c_1, c_2 выполняется на основе решающего правила классификатора. Для получения правила принятия решения о классе образа сформируем контрольную выборку из испытательных образов, точная классификация которых известна.

Обозначим эти образы как $\widetilde{\boldsymbol{X}}_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Пусть контрольная выборка включает в себя 4 образа, $k = 1, 2, 3, 4$.

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_1 = \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{X}}_2 = \begin{bmatrix}-2\\7\end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{X}}_3 = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{X}}_4 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

Вычислим значение $g(\boldsymbol{X})$ для каждого из испытательных образов:

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_1\colon g(\boldsymbol{X}) = 8 \cdot 3 + 2{,}6 \cdot 8 - 27{,}18 > 0;$$
$$\widetilde{\mathbf{X}}_2\colon g(\boldsymbol{X}) = 8 \cdot (-2) + 2{,}6 \cdot 7 - 27{,}18 < 0;$$
$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_3\colon g(\boldsymbol{X}) = 8 \cdot 3 + 2{,}6 \cdot 3 - 27{,}18 > 0;$$
$$\widetilde{\boldsymbol{X}}_4\colon g(\boldsymbol{X}) = 8 \cdot 2 + 2{,}6 \cdot 1 - 27{,}18 < 0.$$

Из вычислений следует, что когда образ $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ лежит справа от решающей границы, то $g(\boldsymbol{X}) > 0$. Если образ лежит слева от границы, то $g(\boldsymbol{X}) < 0$. Получаем следующее решающее правило классификатора:

$$\text{если } g(\boldsymbol{X}) > 0, \text{ то } \boldsymbol{X} \in c_1;$$
$$\text{если } g(\boldsymbol{X}) < 0, \text{ то } \boldsymbol{X} \in c_2.$$

Замечание. Если $g(\boldsymbol{X}) = 0$, то имеет место случай неопределенности классификации.

На рис. 3.2 показана схема решающего устройства автоматического классификатора образов.

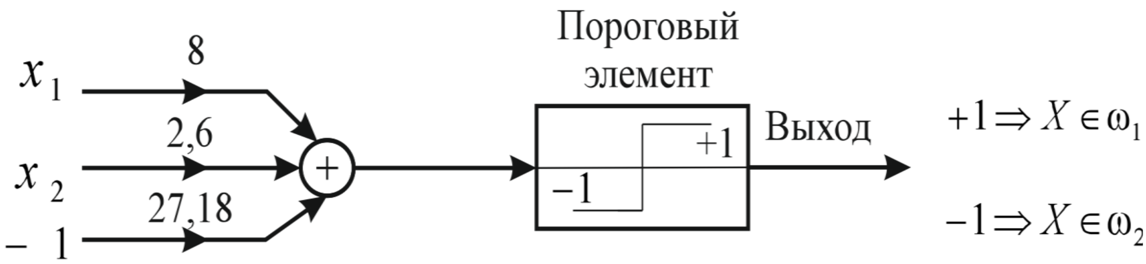

Рис. 3.2. Решающее устройство классификатора

Достоинством метода дискриминантных функций является простая структура классификатора, а также возможность ее реализации преимущественно посредством преимущественно линейных решающих блоков. Важным достоинством рассмотренного метода является возможность обучения машины правильному распознаванию по обучающей выборке образов. При этом алгоритм автоматического обучения оказывается весьма простым в сравнении с другими методами распознавания. В силу указанных причин метод дискриминантных функций весьма часто используется.

В реальных условиях данные поступающие на вход системы распознавания могут иметь пересекающиеся кластеры. Переход от одного кластера к другому может быть не резким, а постепенным. Например, аномалии в клетке могут присутствовать в изменяющейся степени, когда нет отчетливых классов «нормальный» и «с патологией». Даже если классы четко определены, например, как в задаче оптического распознавания символов, пространство признаков буквы О и цифры 0 мало различимо. Возникает очевидная проблема правильной классификации таких объектов. Метод классификации классов объектов с похожим описанием должен основываться на разных признаках. В этом случае признаки разных классов объектов должны быть некоррелированными.

4. Лабораторное задание

4.1. Создать кластеры на основе известных внутренних признаков образов.
4.2. Создать произвольную обучающую выборку образов.
4.3. Получить дискриминантную функцию классификатора образов с использованием прототипов.
4.4. Произвести оценку разработанного классификатора с помощью контрольной выборки образов.
4.5. Синтезировать структурную схему классификатора.

5. Содержание отчета

4.1. Все необходимые расчеты, необходимые для синтеза структуры классификатора.
4.2. Схема классификатора.
4.3. Анализ результатов и выводы.

6. Литература

6.1. Шапиро, Л. Компьютерное зрение / Л. Шапиро, Дж. Стокман. – М.: Бином, 2006.
6.2. Форсайт, Д. Компьютерное зрение. Современный подход / Д. Форсайт, Ж. Понс. – М.: Издат. дом «Вильямс», 2004.
6.3. Вудс Р., Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера., – 2005.
6.4. Ахмед, Н., Рао, К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980.
6.5. Дуда, Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П. Харт. – М.: Мир, 1976
6.6. Верхаген, К. Распознавание образов: состояние и перспектива / К. Верхаген, Р. Дейн, Ф. Грун. – М.: Радио и связь, 1982.
6.7. Фу, К. Структурные методы распознавания образов / К. Фу. – М.: Мир, 1974.
6.8. Дж. Ту, Принципы распознавания образов / Дж. Ту, Р. Гонсалес. – М.: Мир, 1978.