

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Институт информационных технологий

Кафедра физико-математических дисциплин

**А. И. МИТЮХИН**

## **«АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ»**

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики  
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия  
для специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных  
технологий», 1-45 01 01 «Инфокоммуникационные технологии», 1-39 01 01  
01 «Радиотехника», 1-39 01 02 «Радиоэлектронные системы, 1-39 01 04  
«Радиоэлектронная защита информации»*

Минск БГУИР 2021



УДК [621.391.7+004.056](076)  
ББК 32.811.4 я73+32.972.5я73  
М67

**Митюхин, А. И.**

**М67** Алгоритмы цифровой обработки сигналов учеб. метод. пособие / А. И.  
– Минск : БГУИР, 2021. – 51 с. : ил.  
ISBN 978-985-543-356-0.

Рассмотрены понятия теории линейных систем, основные операции обработки сигналов для приложений, реализующих оптимальный прием сигналов. Дано описание линейных алгоритмов, позволяющих уменьшать объем передаваемых, хранимых или распределяемых данных. Представлено математическое описание алгоритмов цифровой обработки сигналов на базе дискретного преобразования Фурье. Методы и алгоритмы теории обработки сигналов изложены с учетом их практической направленности. Учебный материал содержит примеры решения задач на основе использования доступного математического аппарата. Изложение тем сопровождается иллюстрациями и контрольными вопросами.

**УДК [621.391.7 + 004.056](076)**  
**ББК 32.811.4 я73+32.972.5я73**

**ISBN 978-985-543-356-0**

©Митюхин А. И., 2021  
© УО «Белорусский  
государственный  
университет информатики  
и радиоэлектроники», 2021



## Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ЧАСТЬ 1. АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ.....	5
1. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ.....	5
1.1. Способы отсчёта значений сигнала во времени.....	4
1.2. Классификация сигналов.....	8
1.3. Модели представления сигналов.....	13
1.4. Теорема дискретизации.....	14
2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ.....	16
2.1. Преобразование сигналов линейными системами.....	16
2.2. Связь между входным и выходным сигналами в линейной системе.....	17
2.3. Операция свертка.....	20
2.4. Алгоритм построения периодической свертки.....	21
2.5. Операция корреляция.....	23
ЧАСТЬ 2. АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ.....	26
3. АЛГОРИТМЫ ОПИСАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ.....	26
3.1. Ряды Фурье.....	26
3.2. Дискретная форма ряда Фурье.....	31
3.3. Алгоритм дискретного преобразования Фурье.....	36
3.4. Свойства алгоритма дискретного преобразования Фурье.....	39
4. ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ	
4.1. Лабораторная работа «Обработка сигналов во временной области»	46
4.2. Лабораторная работа «Обработка сигналов в частотной области»	47
5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ.....	48
5.1. Краткие теоретические сведения.....	48
5.2. Расчеты и графики лабораторных исследований.....	48
5.3. Анализ результатов и выводы.....	48
6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	48
Литература.....	49

## ВВЕДЕНИЕ

Целью изучения темы «Алгоритмы цифровой обработки сигналов» в рамках лабораторных занятий является:

- овладение общими методами цифровой обработки сигналов;
- овладение математическими алгоритмами цифровой обработки сигналов, используемыми в информационных системах и сетях;
- изучение свойств дискретного преобразования Фурье и применения их в цифровой обработке сигналов и изображений;
- овладение методами решения конкретных реальных задач из отдельных разделов цифровой обработки сигналов.

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) – это область науки и техники, в которой изучаются общие для разных дисциплин алгоритмы обработки сигналов и изображений на основе математических методов. В качестве средств обработки используется цифровая вычислительная техника. Применение разнообразных математических алгоритмов обработки сигналов, соответствующего аппаратного оборудования и программного обеспечения позволяют создавать современные автоматизированные промышленные системы нового индустриального этапа развития общества – «Industrie» 4.0. Отличие ЦОС от классической аналоговой теории обработки сигналов состоит в том, что обрабатываемый сигнал в ЦОС – это числовая последовательность. Обработка осуществляется с помощью операций над числами. В этом случае непрерывные сигналы преобразуются в последовательность отсчётов, т.е. в дискретный сигнал. После дискретной обработки её результат вновь конвертируется в непрерывный сигнал.

Широкое применение находит ЦОС в системах с оптимальной обработкой сигналов, где применяются алгоритмы эффективного и помехоустойчивого кодирования информации. Например, при использовании низкоскоростного помехоустойчивого кодирования операция длительного накопления энергии слабых сигналов легко реализуется с помощью методов ЦОС. Алгоритмы ЦОС позволяют уменьшить энергетические, временные и частотные затраты на передачу сигналов и изображений в сравнении с передачей аналоговых.

# ЧАСТЬ 1. АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

## 1. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

### 1.1. Способы отсчёта значений сигнала во времени

Математические сигналы – это функции одной или более независимых переменных. Например, речевой сигнал представляется как функция времени, а изображение (фотография) – функция яркости от двух пространственных переменных. Поскольку реальные физические процессы протекают во времени, то в качестве математической модели сигнала, представляющего эти процессы, используют функции времени, отражающие изменения физических процессов. Работа современных информационных систем основана на обработке дискретных и цифровых сигналов.

По способу отсчёта значений сигнала во времени сигналы делятся на:

- непрерывные (аналоговые);
- дискретные;
- цифровые.

#### 1.1.1. Непрерывные сигналы

Непрерывный сигнал описывается непрерывной функцией  $x(t)$ , задаётся на непрерывных промежутках, и обычно называется аналоговым. Аналоговый сигнал может быть действительным или комплексным. Интервал изменения переменной времени может быть конечным или бесконечным. Для непрерывного (континуального) это несчётное множество, например,  $[0, t)$  или  $[0, \infty)$ . На рис. 1.1 показан фрагмент речевого сигнала  $x(t)$ . Рисунок напоминает квазипериодическое колебание с изменяющейся основной частотой в сравнительно широком диапазоне.

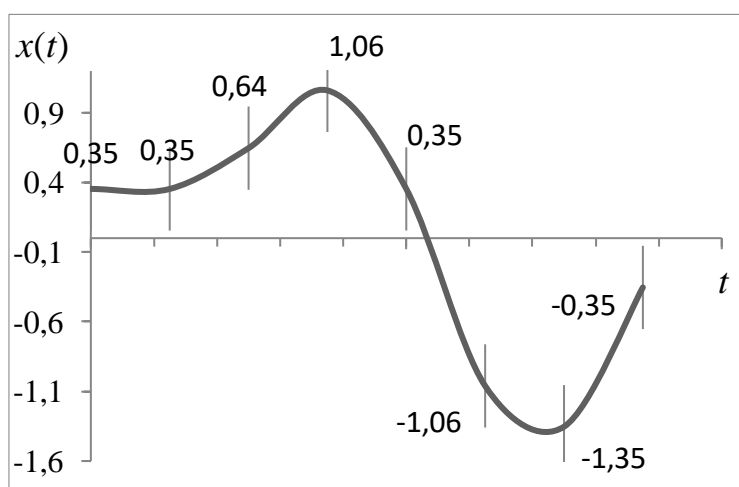


Рис. 1.1. Фрагмент речевого сигнала

### 1.1.2. Дискретные сигналы

Дискретный сигнал – это сигнал дискретный во времени и непрерывный по состоянию. Дискретный фрагмент речевого сигнала виде дискретной функции (решетчатой функции) для дискретной переменной  $nT_d$  изображен на рис. 1.2.

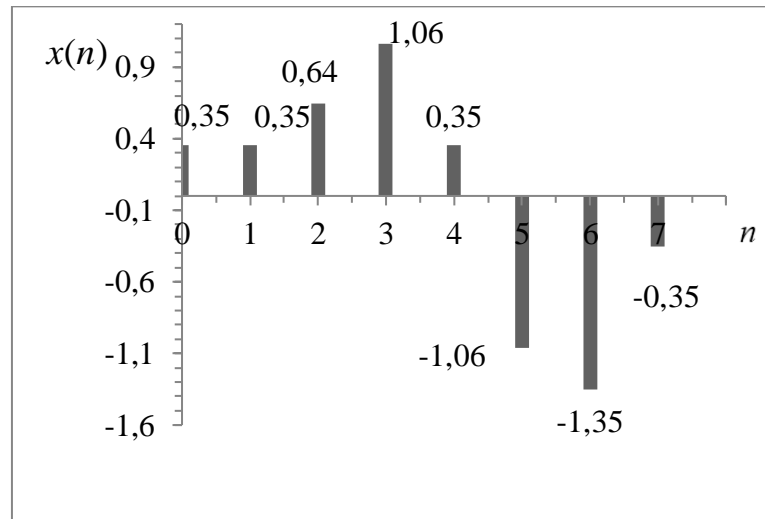


Рис. 1.2. Фрагмент дискретного речевого сигнала

Переход от аналогового представления функции к дискретному виду символически отображается выражением

$$x(t) \rightarrow x_d(nT_d), n \in \mathbb{Z}.$$

Величина  $x_d(nT_d)$  соответствует отсчёту сигнала в точке  $n$ , указывающей порядковый номер отсчёта. Интервал  $T_d$  называется период дискретизации, а обратная величина  $f_d = \frac{1}{T_d}$  – это частота дискретизации. Дискретный сигнал описывается счётным множеством чисел, включающем  $N$  точек на интервале  $[0, N - 1]$ . Период дискретного сигнала определяется как

$$T = nT_d, N > n \geq 0. \quad (1.1)$$

После дискретизации  $x(t)$  получена дискретная вещественная последовательность, рис. 1.2

$$x_d(nT_d) = (x_d(0), x_d(1), \dots, x_d(N-1)) = (0,35; 0,35; 0,64; 1,06; 0,35; -1,06; -1,35; -0,35).$$

Дискретный сигнал может быть действительным или комплексным. Его характеристиками являются энергия



$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x_d(nT_d)|^2 \quad (1.2)$$

и мощность

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_d(nT_d)|^2 \quad (1.3)$$

Выражения (1.2) и (1.3) могут интерпретироваться как энергия и мощность ступенчатых огибающих дискретных сигналов (их непрерывных аналогов).

Дискретные сигналы ортогональны, если их взаимная энергия удовлетворяет условию

$$E_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2^*(n) = 0, \quad (1.4)$$

где знак \* обозначает комплексное сопряжение.

Энергия и мощность ортогональных сигналов аддитивны, так как

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n) + x_2(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n)|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |x_2(n)|^2.$$

### 1.1.3. Цифровые сигналы

Цифровая обработка сигналов требует, чтобы дискретные сигналы были квантованы по величине. В этом случае амплитуды сигнала описываются только фиксированными целочисленными значениями, а сигнал называется цифровым. Цифровой сигнал дискретен как во времени, так и по состоянию. Цифровой сигнал  $x(n)$  также описывается решетчатой функцией  $x_d(nT_d)$ , которая принимает конечное число значений на некотором целочисленном интервале  $x'_d \leq x_d \leq x''_d$ . Эти значения называются уровнями квантования, а соответствующая функция – квантованным сигналом. Квантование производится с целью получения конечной последовательности целых чисел. При попадании дискретного отсчёта сигнала в пределы того или иного шага квантования производится его округление до уровня квантования, соответствующего этому шагу, рис. 1.3. Цифровой сигнал  $x(n)$  отличается от дискретного  $x_d(nT_d)$  на величину

$$\zeta_Q(nT_d) = x_d(nT) - x(n),$$

где  $\zeta_Q(nT)$  – ошибка квантования или искажение, возникающее за счёт квантования. Максимальная ошибка квантования при использовании округления равна половине шага квантования

$$\text{Max} |\xi_q| = -\text{Max} |\xi_q| = \frac{\delta}{2}$$

Легко убедиться, что результатом квантования и дискретизации, рис. 1.3, является дискретный  $\rightarrow$  цифровой сигнал  $x(n)$ . Ему соответствует последовательность десятичных символов вида

$$x_d(n) \rightarrow x(n) = (x(0), x(1), \dots, x(N-1)) = (3, 6, 7, 6, 3, 1, 0, 1, 3). \quad (1.5)$$



Рис 1.3. Квантованный сигнал

При использовании первичного кодирования непрерывных сигналов, например, с применением АЦП, на его выходе формируется цифровая последовательность двоичных символов (чипов), соответствующая значениям дискретного (1.5)

$$x(n) = (011110111110011001000001011).$$

При изучении дискретных, цифровых систем удобно пользоваться нормированным временем

$$\hat{t} = \frac{t}{T_d} = \frac{nT_d}{T_d} = n.$$

*Нормированное время  $\hat{t}$  есть номер  $n$  отсчёта дискретного сигнала.*

*Замечание.* Для описания дискретного, цифрового сигналов могут быть использованы равнозначные обозначения  $x(nT)$  и  $x(n)$ .

## 1.2. Классификация сигналов

По роли в передаче информации сигналы могут быть разделены на полезные и мешающие (помехи). Полезные сигналы переносят заданную информацию, а помехи искажают её.

По степени определенности ожидаемых значений все сигналы можно разделить на случайные сигналы и детерминированные сигналы.

*Случайным сигналом* называют функцию времени, значения которой могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. В качестве основных характеристик случайных сигналов принимают:

- закон распределения вероятности (вероятности значений случайного сигнала в определенном временном интервале);
- спектральное распределение мощности сигнала.

*Детерминированным называется сигнал*, значение которого в любой момент времени может быть точно определено.

На практике ЦОС находят применение периодические и аperiodические сигналы.

*Периодическим* называется сигнал, для которого выполняется условие

$$x(t) = x(t + lT), -\infty < t < \infty, \quad (1.6)$$

где  $l$  – любое целое число,  $T$  – период, являющийся конечным отрезком времени.

### 1.2.1. Испытательные сигналы

Среди детерминированных сигналов особое место занимают испытательные сигналы. Необходимость существования испытательных сигналов обусловлена потребностями испытания характеристик разрабатываемых электронных приборов, устройств, систем и пр. Самым распространенным испытательным сигналом является гармоническое колебание, которое используется на практике для оценки частотных свойств устройств (фильтров) различного назначения.

#### 1. Гармоническое колебание

*Определение 1.1.* Гармоники функции периода  $T_0$  – это периодические функции синуса или косинуса со значениями частот, представляющими целые кратные основной частоты  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$ .

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t) = x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) = x_m \sin(2\pi f_0 t), \quad (1.7)$$

где  $x_m$  – амплитуда колебания (модуль наибольшего его отклонения от нуля),

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$  – основная круговая частота,

$T_0$  – период колебания,

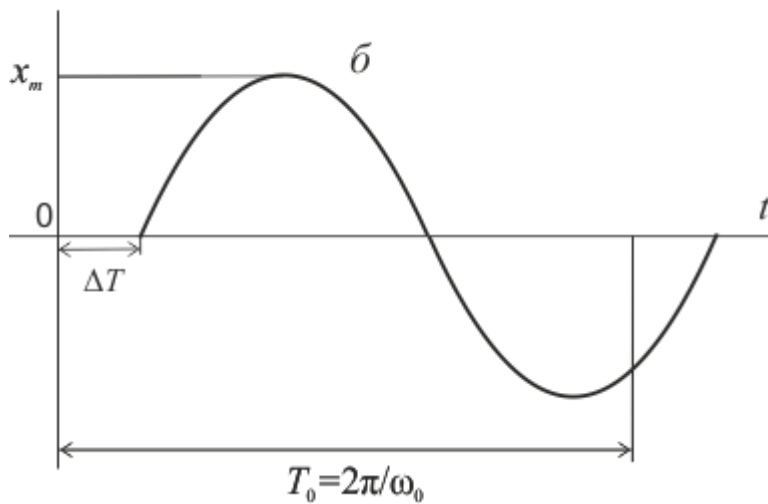
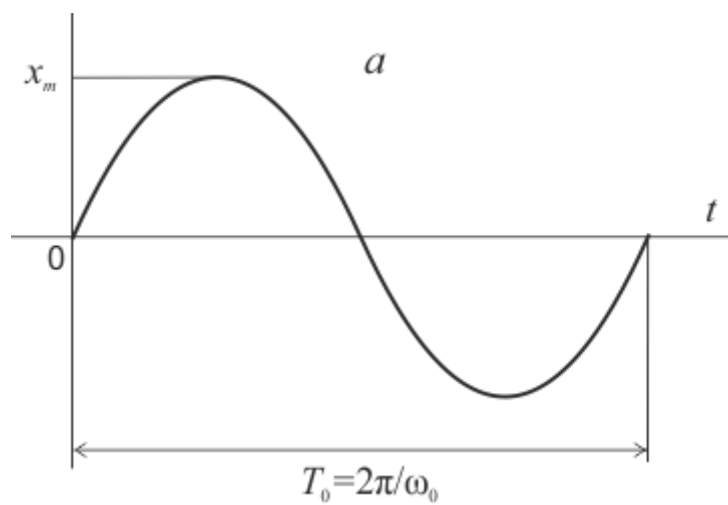
$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Гц}], [c^{-1}]$  – линейная частота.

Гармоническое колебание (1.7), представленное в декартовой системе координат, показано на рис 1.4.а. Ниже, рис 1.4.б, изображено колебание (1.7), но с начальным фазовым сдвигом  $\varphi_0$ .

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t - \varphi_0) = x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t - \varphi_0\right) = x_m \sin(2\pi f_0 t - \varphi_0), \quad (1.8)$$

где  $\varphi_0 = \frac{\Delta T}{T_0} 2\pi$  [рад] – начальная фаза колебания,  $\Delta T$  – сдвиг колебания по времени.

Гармоническое колебание можно изобразить в виде вектора в полярной системе координат, рис. 1.4.в.



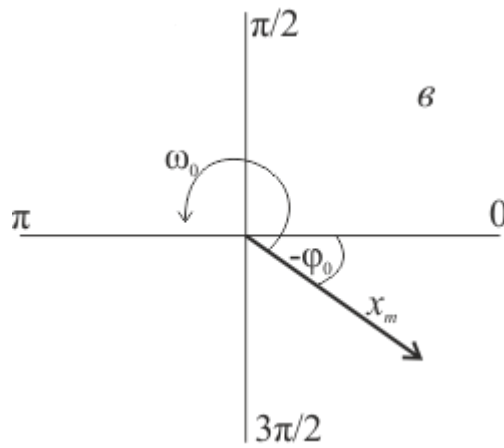


Рис. 1.4. Представления гармонического сигнала

Под  $k$ -ой гармоникой периодического колебания понимают гармоническое колебание с частотой в  $k$  раз превышающей основную частоту  $\omega_0$ . Например, 2-я гармоника записывается как

$$x(t) = x_m \sin(2\omega_0 t - \varphi_0) = x_m \sin\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{T_0} t - \varphi_0\right) = x_m \sin(2 \cdot 2\pi f_0 t - \varphi_0).$$

Наблюдается процесс, когда за каждый основной период  $T_0$  формируются два синусоидальных колебания.

Наряду с использованием синусоидальной функции для представления (описания) сигналов и систем, широко применяется комплексная экспоненциальная функция.

2. *Комплексная экспоненциальная функция* определяется формулой Эйлера (Euler, Leonard, швейц. математик и физик, (1707 – 1783)).

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad (1.9)$$

где  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega t \in \mathbb{R}$ .

Формула отражает связь между действительными тригонометрическими функциями и комплексной экспоненциальной функцией  $e^{j\omega t}$ . Данная система функций составляет счетное бесконечное множество и определена на бесконечном интервале частот. Вещественная и мнимая часть последовательности (1.9) меняются косинусоидально/синусоидально в зависимости от  $\omega$  и  $t$ . По аналогии с непрерывным временем параметр  $\omega$  называется круговой частотой непрерывной комплексной экспоненты.

3. *Цифровой единичный импульс*. Многие алгоритмы ЦОС основаны на применении понятия цифровой единичный импульс.

*Определение 1.2.* Цифровой единичный импульс (отсчёт) определяется выражением

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0, \\ 0, n \neq 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Графическая иллюстрация единичного импульса показана на рис. 1.5.а.

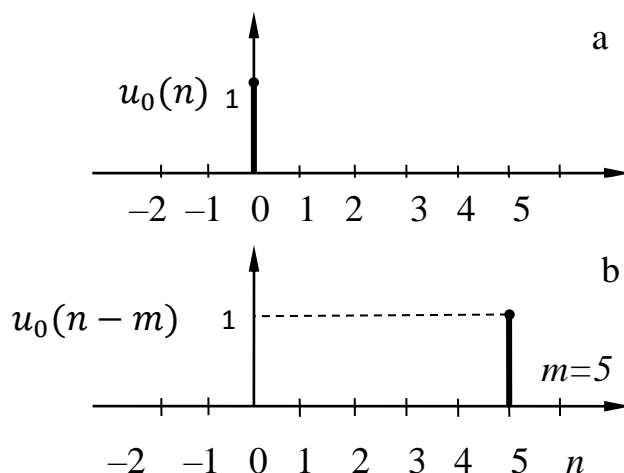


Рис. 1.5. Цифровой единичный импульс

На рис. 1.5.б. изображён единичный импульс  $u_0(n-m)$ , задержанный на  $m=5$  интервалов дискретизации.

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, n = m, \\ 0, n \neq m, \end{cases} \quad (1.11)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В цифровых системах этот импульс играет такую же роль, как и дельта-функция  $\delta(t)$  Дирака ((Dirac, Paul, англ. физик, (1902–1984)). при описании аналоговых систем, По определению  $\delta$ -функция, рис. 1.6, удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, t = t_0, \\ 0, t \neq t_0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1.$$

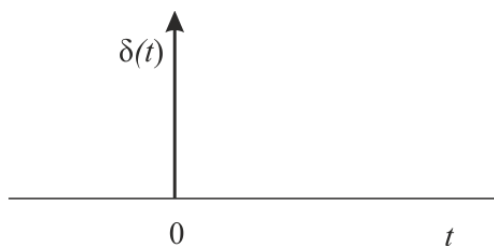


Рис. 1.6. Символическое изображение дельта-функции

Дельта-функция равна нулю при всех отличных от нуля значениях аргумента и принимает в точке  $t = 0$  бесконечно большое значение. Площадь под кривой, ограниченной  $\delta$ -функцией, равна единице. Различие между цифровым единичным импульсом и  $\delta$ -функцией состоит в том, что цифровой единичный импульс является физически реализуемым сигналом, тогда как аналоговый единичный импульс  $\delta(t)$  рассматривается только как обобщённая функция.

Пусть задана произвольная дискретная последовательность  $x(n)$ . Такая числовая последовательность может быть представлена как сумма взвешенных и задержанных цифровых единичных импульсов.

*Определение 1.3.* Дискретная последовательность  $x(n)$  представляется суммой взвешенных и задержанных единичных импульсов по формуле

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u_0(n - m) \quad (1.12)$$

*Пример 1.1.* Задана дискретная последовательность, (рис. 1.2)  $x(n) = (0,35; 0,35; 0,64; 1,06; 0,35; -1,06; -1,35; -0,35)$ . Записать выражение для определения отсчёта с номером  $n = 6$ .

Решение.

$$x(6) = \sum_{m=0}^7 x(m)u_0(6 - m) = x(0)u_0(6 - 0) + x(1)u_0(6 - 1) + \dots + x(6)u_0(6 - 6) + x(7)u_0(6 - 7) = x(6)u_0(0) = x(6) = -1,35.$$

### 1.3. Модели представления сигналов

Основными обобщенными приложениями использования алгоритмов и методов ЦОС является цифровая фильтрация и спектральный анализ. Для этих направлений ЦОС наибольший интерес представляют две модели представления: временная  $x \Rightarrow x(t)$  и частотная (спектральная)  $x \Rightarrow X(\omega)$ .

Модели сигналов в виде функции времени предназначены в первую очередь для анализа формы сигналов. Однако, при решении задач прохождения сигналов сложной формы через какие-либо фильтры временная модель в ряде приложений не позволяет понять суть происходящих физических процессов фильтрации.

В 1807 году Жан Батист Жозеф Фурье (Fourier, Jean-Baptiste, франц. математик, (1768–1830)) высказал идею о том, что любая сложная периодическая функция  $x(t) = x(t + lT)$  может быть представлена суммой синусоидальных и/или косинусоидальных функций с частотами кратными основной частоте, умноженных на некоторые коэффициенты. Частотная модель описывает сигнал набором элементарных (базисных) функций, в качестве которых используются ортогональные функции. На базе частотной модели выполняется спектральный (гармонический) анализ сигналов. Гармонический анализ – это раздел ЦОС и математики, который изучает представления функций (сигналов) в виде тригонометрических рядов Фурье и преобразований Фурье. Основным понятием в спектральном анализе является

гармоническая функция. Выбор именно таких функций обусловлен тем, что они являются, с математической точки зрения, собственными функциями инвариантных во времени линейных систем (систем, параметры которых не зависят от времени). Гармонические функции не изменяют своей формы после прохождения через линейные системы. Могут изменяться только амплитудные и фазовые параметры гармоник. Сигнал может быть представлен множеством гармонических функций, каждая из которых характеризуется своими параметрами амплитуды, фазы и частоты. Таким образом, спектральный анализ описывает исходный сигнала (процесс) посредством иного аргумента – частоты. На рис.1.7 показан дискретный амплитудный спектр речевого сигнала, рис. 1.2. Говорят, спектр как функция  $X(k)$  – это образ сигнала при описании его в частой области. Аргумент  $k$  обозначает номер частотной составляющей спектра 1D сигнала.

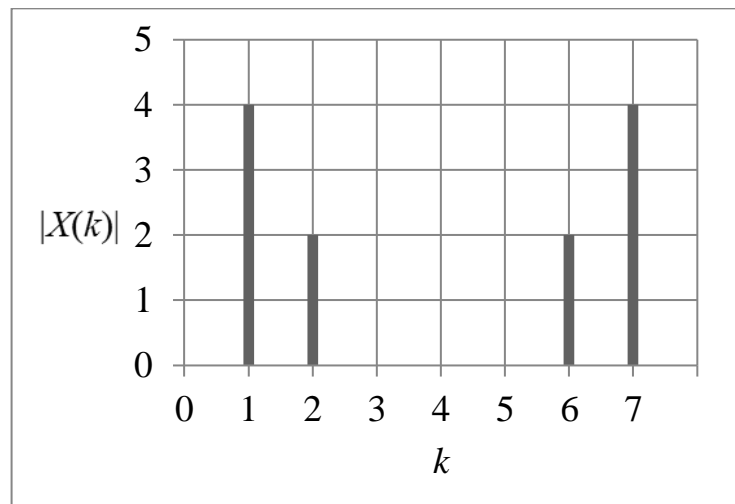


Рис.1.7. Амплитудный дискретный спектр сигнала

#### 1.4. Теорема дискретизации

Дискретизация представляет собой процедуру взятия мгновенных значений непрерывного сигнала  $x(t)$ .

*Положение 1.* Задан сигнал, энергия которого полностью содержится внутри полосы частот от 0 до  $W$  Гц; сигнал дискретизируется с интервалами  $T_d$  секунд.

**Теорема 1.1.** Исходный сигнал может быть полностью восстановлен при частоте дискретизации

$$f_d = \frac{1}{T_d} \geq 2W \quad (1.13)$$

*Замечание.* Частота, равная половине частоты дискретизации, называется частота Найквиста ((Nyquist, Harry, швед., амер., ученый, инженер, (1889–1976)).



В западной научной литературе принято считать, что принцип дискретизации был высказан Найквистом в 1928 году. По советским источникам принцип дискретизации сформулировал и доказал советский ученый, академик В. А. Котельников (1908–2005) в 1933 году. Строгое определение теоремы дано Клодом Шенноном ((Shannon, Claude, амер. инженер, математик, (1916–2001)) в 1948 году.

*Положение 2.* Задан сигнал (приближенно) с частотным спектром ограниченным частотой  $W$  Гц и существующий  $t$  секунд.

**Теорема 1.2.** Сигнал может быть полностью восстановлен (описан)

$$N = 2Wt$$

отсчётами сигнала.

Определение сигнала как приближённое введено для математической корректности. По самой природе преобразования Фурье никакая функция не может быть ограничена по частоте. Существует концептуальная трудность строгого частотного ограничения реального сигнала частотой  $W$ . В силу конечной длительности сигнала, рис. 1.8, он имеет бесконечно широкий спектр. В моменты возникновения-окончания сигнала временные интервалы  $\Delta t$  его формирования очень малы и, следовательно,  $\Delta W$  очень велико,  $W \rightarrow \infty$ .



Рис. 1.8. Сигнал

Фактически бесконечность спектра является препятствием для преобразования сигнала  $x(t)$  в цифровую форму  $x(n)$ , т.е. дискретизация невозможна. Тем не менее, в спектре любого конечного сигнала есть такие высшие частотные составляющие, значения которых имеют незначительные амплитуды, и потому ими можно пренебречь без заметного искажения самого сигнала. Ограничение спектра до частоты Найквиста  $W = \frac{f_d}{2}$  осуществляется антиэлайсинговым фильтром. Например, для телефонного сигнала полосой  $W = 3,4$  кГц. минимальная стандартная частота его дискретизации  $f_d = 8$  кГц. Временной интервал дискретизации равен  $T_d = \frac{1}{8 \cdot 10^3} = 125$  мкс.

*Восстановление сигнала.* Теоретически точное восстановление сигнала после дискретизации может быть выполнено с помощью идеального ФНЧ с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой и частотой среза  $f_s = \frac{f_d}{2}$ . Практически это исключено, так как для создания фильтра потребуется затратить бесконечное время. По теореме дискретизации максимальная частота аналогового сигнала не должна превышать половины частоты дискретизации  $f_d$ , следовательно, в частотной области все дискретные сигналы целесообразно рассматривать в диапазоне  $[0, \frac{f_d}{2}]$  или  $[0, \frac{\omega_d}{2}]$ .

## 2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Во многих приложениях ЦОС ставится задача анализа линейной системы, выяснения особенностей системы и многое др. Решение задачи анализа, как правило, связано с выяснением связи входных и выходных сигналов. Оценка параметров линейной системы может осуществляться на основе измерения сигналов на входе и на выходе системы

### 2.1. Преобразование сигналов линейными системами

Линейная дискретная система (ЛДС) определяется как однозначное преобразование или оператор, переводящий входную последовательность  $x(n)$  – вход) в последовательность  $y(n)$  – выход. Говорят,  $y(n)$  – это отклик или реакция системы на входное воздействие  $x(n)$ . Математически это записывается как

$$y(n) = T[x(n)] \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) – это правило, или формула, по которой вычисляется реакция системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход. Вид оператора  $T[*]$  зависит от свойств конкретной системы. Оператор  $T[*]$  определяет характер математических операций при отображении множества  $\{x(n)\}$  в множество  $\{y(n)\}$ . Графически линейная система изображена на рис. 2.1.



Рис. 2.1. Схема линейной системы

#### 2.1.1. Линейные дискретные системы с постоянными параметрами

Во многих приложениях применяется класс линейных систем с постоянными параметрами. Они сравнительно просты в математическом отношении, дают удобный вид обработки сигналов. Класс линейных систем определяется линейными операциями или принципом суперпозиции. Если  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  – входные последовательности, а  $y_1(n)$  и  $y_2(n)$  – выходные последовательности, то при подаче на вход последовательности  $(ax_1(n) + bx_2(n))$  систему называют линейной тогда и только тогда, когда выполняются свойства аддитивности и однородности

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n), \quad (2.2)$$

где  $a$  и  $b$  постоянные параметры (константы) системы.

*Свойство аддитивности.* Реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие (2.2).

*Свойство однородности.* Умножение входной последовательности на постоянный параметр соответствует выходной последовательности, умноженной на тот же параметр, т.е.

$$T[ax(n)] = aT[x(n)] = ay(n).$$

*Вывод.* Если выражение  $y(n) = T[x(n)]$  с линейным оператором описывает систему, то это означает, что в данном преобразовании (отображении) возможны только линейные операции сложения, вычитания и умножения на постоянный параметр. Соотношение вход – выход линейной системы описывается линейным уравнением.

### 2.1.2. Линейные стационарные системы

В ЦОС широко используется класс инвариантных к сдвигу во времени дискретных систем. Такие системы называются стационарными. В этих системах временной сдвиг (задержка) входного сигнала индуцирует сдвиг выходного сигнала. Если  $y(n)$  отклик на  $x(n)$ , то  $y(n - n_0)$  будет откликом на воздействие  $x(n - n_0)$ , где  $n_0$  – положительное или отрицательное целое число. Выполняется соотношение

$$T[x(n - n_0)] = y(n - n_0).$$

### 2.2. Связь между входным и выходным сигналами в линейной системе

Наличие свойств линейности и стационарности позволяет представлять анализируемую систему в удобном виде. Предположим, на вход системы подан единичный импульс  $u_0(n)$  (1.10). Отклик системы на этот импульс обозначим  $h(n)$ , рис. 2.2.

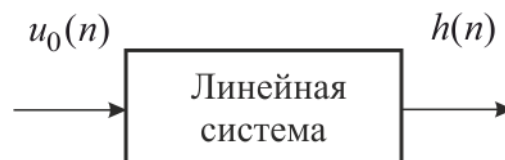


Рис. 2.2. К определению импульсной характеристики

Выход  $h(n)$  системы на входное воздействие  $u_0(n)$  не будет импульсом с той же идеальной формой. Его физические параметры изменяются во времени. Выход линейной системы является запаздывающей усиленной или

подавленной версией входа. Если на вход линейной системы подать последовательность единичных импульсов, рис. 2.3, то результирующий отклик будет формироваться в виде суммы отдельных откликов  $h(n)$  (см. подр. 2.1.1). Форма выходного сигнала будет определяться свойствами линейной системы, например, некоего фильтра, устройства и пр.

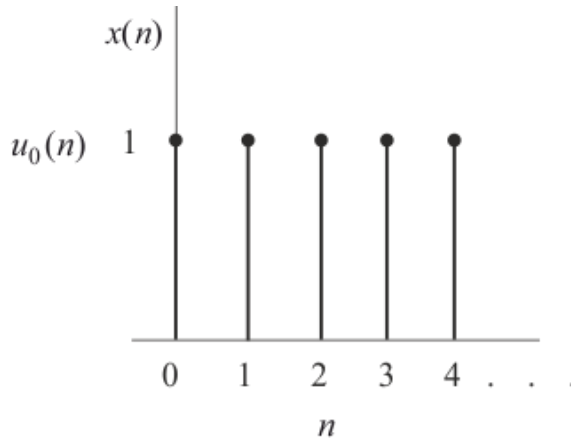


Рис. 2.3. Последовательность единичных импульсов

Представим вход импульсом со свойством единичного, но с иным значением амплитуды (см. свойство однородности в 2.1.1). В момент времени  $n = 0$  подадим на вход системы отсчет высотой  $x(0) > u_0(0)$  или  $x(0) < u_0(0)$ . Поскольку входной сигнал увеличился (уменьшился) в  $x(0)$  раз, то согласно свойству линейной системы, отклик на этот сигнал также увеличился (уменьшился) в  $x(0)$  раз. Тогда выходной сигнал линейной системы определяется отсчетами

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) h(0), \\ y(1) &= x(0) h(1), \\ &\dots \\ y(n) &= x(0) h(n). \end{aligned}$$

Возможный отклик на последовательность трех импульсов  $x(n)$  иллюстрируется изображением, показанным на рис. 2.4. Видно, что в момент времени  $n = 0$  выход равен

$$y(0) = x(0)h(0).$$

В следующий момент времени  $n = 1$  выходной сигнал системы состоит из суммы двух компонент

$$y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0).$$

Первое слагаемое  $x(0)h(1)$  – это запаздывающее влияние входа в момент времени  $n = 0$ . Второе слагаемое  $x(1)h(0)$  – это отклик на текущий импульс  $x(1)$ .

В момент времени  $n = 2$ , когда уже поступил третий импульс, выходной сигнал системы состоит из суммы трех компонент вида

$$y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0).$$

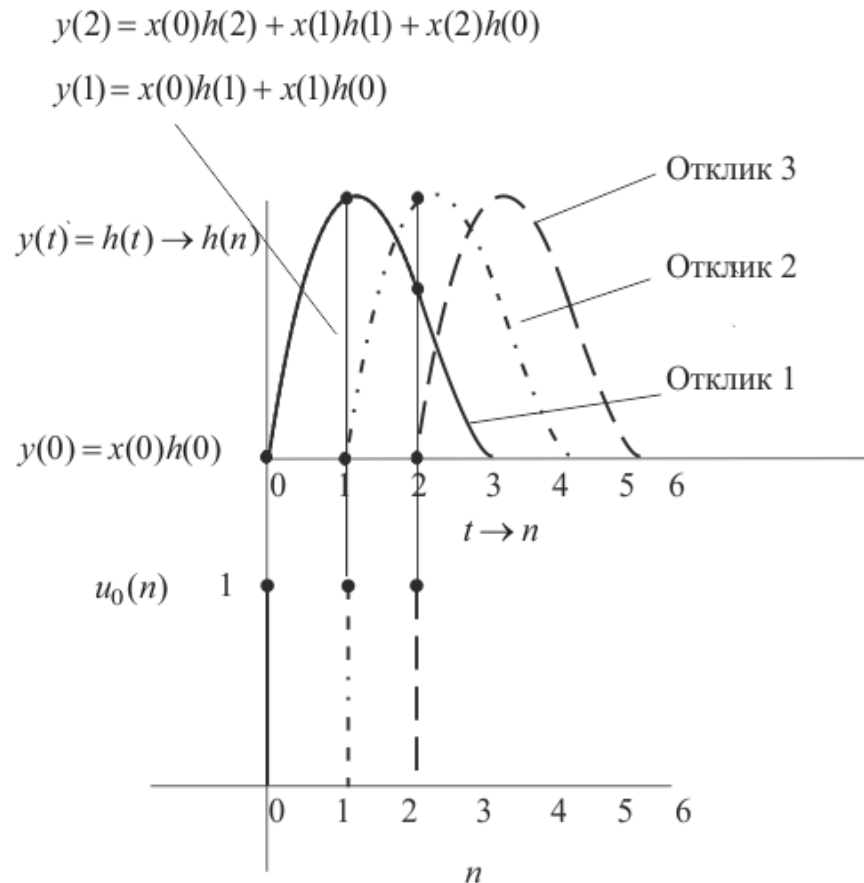


Рис. 2.4. Входные импульсы и импульсные характеристики системы

В момент времени  $n$  выходной сигнал системы описывается выражением

$$y(n) = x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + \dots + x(n)h(0).$$

#### Выводы

1. Если система линейна, выход можно записать как линейную сумму влияния предыдущих входов.

2. Учитывая свойство линейности и возможность представления любой последовательности в форме линейной комбинации сдвинутых единичных импульсов, можно утверждать, что линейная стационарная система определяется своей реакцией на единичный импульс или импульсной характеристикой при нулевых начальных условиях.

*Замечание.* Признаком нулевых начальных условий является отсутствие

отклика при отсутствии входной последовательности  $x(n)$ . Если начальный момент  $n = 0$ , то ему соответствует

$$\begin{cases} x(n) \equiv 0, \\ y(n) \equiv 0 \end{cases} \text{ при } n < 0. \quad (2.3)$$

Нулевые начальные условия соответствуют физическому принципу причинности, когда отклик не может возникнуть раньше воздействия.

Для описания во временной области ЛДС широко применяются следующие линейные операции:

- свертка, где используется импульсная характеристика;
- разностные уравнения, где используются параметры линейных дискретных систем.

## 2.4. Операция свертка

Свертка – это одна из наиболее используемых операций в ЦОС. Например, это основная операция, применяемая в алгоритмах фильтрации, обнаружения, декодирования корректирующих кодов и др. Изменение частотных свойств сигнала посредством свертки лежит в основе алгоритмов цифровой фильтрации.

Из свойств стационарности (см, подр. 2.1.2) следует, что откликом на последовательность  $u_0(n - m)$  будет  $h(n - m)$ , рис. 2.5.

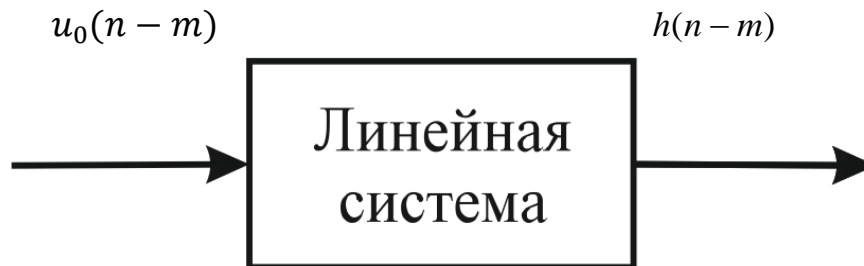


Рис. 2.5. Стационарная линейная система

Рассмотрим отклик ЛДС на входную последовательность, представленную в виде (1.12)

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u_0(n - m).$$

Из свойств линейности и стационарности ЛДС следует, что откликом на эту последовательность должна быть последовательность

$$y(n) = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u_0(n - m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[u_0(n - m)] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m), -\infty < n < \infty. \quad (2.4)$$

Если  $y(n)$  последовательность, значения которой зависят от отсчетов двух последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$  и определяется выражением (2.4), то говорят, что  $y(n)$  есть свертка. Обозначение операции свертка

$$y(n) = x(n) * h(n). \quad (2.5)$$

Свертка удовлетворяет аксиоме коммутативности

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = h(n) * x(n), \\ y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, линейная инвариантная к сдвигу ЛДС со входом  $x(n)$  и импульсной характеристикой  $h(n)$  имеет тот же выход, что и линейная инвариантная к сдвигу система со входом  $h(n)$  и импульсной характеристикой  $x(n)$ .

С учетом нулевых начальных условий (2.3) и конечных значений периодов  $N_1$  и  $N_2$  последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$  линейные уравнения (2.4) и (2.6) записываются как

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} x(m)h(n-m), n=0,1,\dots,N_1+N_2-2 \quad (2.7)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} h(m)x(n-m), n=0,1,\dots,N_1+N_2-2 \quad (2.8)$$

где  $(N_1 + N_2 - 1)$  – длина свертки.

Согласно (2.7) и (2.8)  $y(n)$  соответствует дискретной свертке входного воздействия и импульсной характеристики системы. Покажем тождественность результатов вычисления по формуле свертки в двух вариантах ее записи (2.7) и (2.8). Определим значение коэффициента свертки в точке  $n = 3$ .

$$y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0). \quad (2.9)$$

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0). \quad (2.10)$$

## 2.4. Алгоритм построения периодической свертки

*Определение 2.1.* Если исходные последовательности отсчетов сигналов  $x(n)$  и  $h(n)$  имеют конечные периоды  $N$ , их циклическая свертка задается формулой

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m)_{\text{mod}(N)}, n=0,1,\dots,N-1. \quad (2.11)$$



*Матричная форма записи свертки.*

*Пример. 2.1.* Вычисление коэффициентов свертки, если период сигналов  $N = 4$ .

Решение. По формуле (2.11) записываем коэффициенты  $y(n)$  для  $n = 0, 1, 2, 3$ .

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0)h(0) + x(1)h(3) + x(2)h(2) + x(3)h(1), \\ y(1) &= x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(3) + x(3)h(2), \\ y(2) &= x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + x(3)h(3), \\ y(3) &= x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0). \end{aligned}$$

Алгебраическая структура полученных выражений коэффициентов  $y(n)$  позволяет использовать более удобную матричную форму записи свертки. Решение примера 2.1. можно представить в виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0) & h(3) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & h(3) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & h(3) \\ h(3) & h(2) & h(1) & h(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где  $\mathbf{Y} = (y(0), y(1), y(2), y(3))^T$  – вектор отсчетов свертки,  $\mathbf{H}$  – матрица циклических сдвигов импульсной характеристики  $h(n-m)_{\text{mod}(N)}$ ,  $\mathbf{x} = (x(0), x(1), x(2), x(3))^T$  вектор отсчетов входа.

*Пример. 2.2.* Вычислить свертку последовательности  $x(n) = (1, 1, 1, -1)$  с импульсной характеристикой  $h(n) = (-1, 1, 1, 1)$ , используя матричный алгоритм.

Решение.

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

График свертки показан на рис. 2.6.

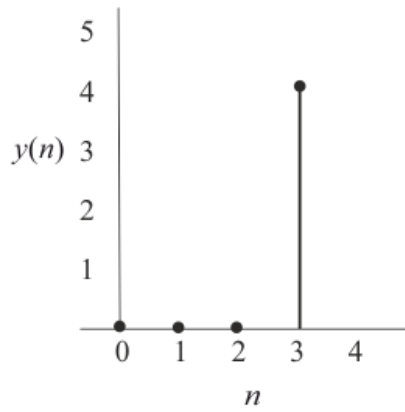


Рис. 2.6. График периодической свертки

## 2.5. Операция корреляция

Как и свертка, операция корреляция – относится к классу основных операций ЦОС.

*Функция корреляции.* Нормированная функция взаимной корреляции (ВКФ)  $r(t)$  сигналов  $x(t)$  и  $h(t)$  конечного периода  $T$  в непрерывной временной области определяется формулой

$$r(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)h(t + \tau)dt ,$$

где  $\tau$  – сдвиг по времени сигнала  $h(t)$ . Значения функции корреляции формируются при изменении временного положения одного из сигналов. Корреляционная функция – это показатель сходства или общих линейных свойств двух сигналов. Значение  $r(t) = 0$  указывает на нулевую корреляцию. Это означает, что сигналы независимы. Например, если один из сигналов случаен, малые значения  $r(t)$  указывают на незначительную корреляцию.

Пусть  $x(n) = (x(0), x(1), \dots, x(N-1))$  и  $h(n) = (h(0), h(1), \dots, h(N-1))$  являются дискретными периодическими последовательностями.

*Определение 2.2.* Нормированная периодическая взаимная корреляционная функция  $r(n)$  последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$  записывается как

$$r(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m)_{\text{mod}(N)}, n=0,1,\dots,N-1 \quad (2.14)$$

Нормированная периодическая автокорреляционная функция (АКФ)  $r(n)$  последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$  записывается как

$$r(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)x(n+m)_{\text{mod}(N)}, n=0,1,\dots,N-1 \quad (2.15)$$

Как видно, АКФ определяется для идентичных последовательностей.

*Матричное представление корреляции.*

*Пример 2.3.* Вычисление коэффициентов корреляции последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$ , если  $N = 4$ .

Решение. Раскрывая формулу 2.15, получаем коэффициенты:

$$\begin{aligned} r(0) &= \frac{1}{4}(x(0)h(0) + x(1)h(1) + x(2)h(2) + x(3)h(3)), \\ r(1) &= \frac{1}{4}(x(0)h(1) + x(1)h(2) + x(2)h(3) + x(3)h(0)), \\ r(2) &= \frac{1}{4}(x(0)h(2) + x(1)h(3) + x(2)h(0) + x(3)h(1)), \\ r(3) &= \frac{1}{4}(x(0)h(3) + x(1)h(0) + x(2)h(1) + x(3)h(2)). \end{aligned}$$

Алгебраическая структура полученных выражений коэффициентов корреляции позволяет использовать более удобную матричную форму записи дискретной функции. Решение примера 2.3. можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{N} \mathbf{H} \mathbf{x}, \\ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \\ r(3) \end{pmatrix} &= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & h(3) \\ h(1) & h(2) & h(3) & h(0) \\ h(2) & h(3) & h(0) & h(1) \\ h(3) & h(0) & h(1) & h(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\mathbf{R} = (r(0), r(1), r(2), r(3))^T$  – вектор отсчетов корреляции,  $\mathbf{H}$  – матрица циклических сдвигов последовательности  $h(n+m)_{\text{mod}(N)}$ ,

$\mathbf{h} = (x(0), x(1), x(2), x(3))^T$  вектор отсчетов последовательности  $h(n)$ .

*Вывод.* Вычисление взаимной корреляции двух  $N$ -периодических последовательностей сводится к циклическому сдвигу одной последовательности относительно другой и усреднения их произведения за период  $N$ .

*Пример 2.4.* Вычислить ВКФ последовательностей  $x(n) = (1, 1, 1, -1)$  и  $h(n) = (-1, 1, 1, 1)$ .

Решение.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2.7 показан график ВКФ.

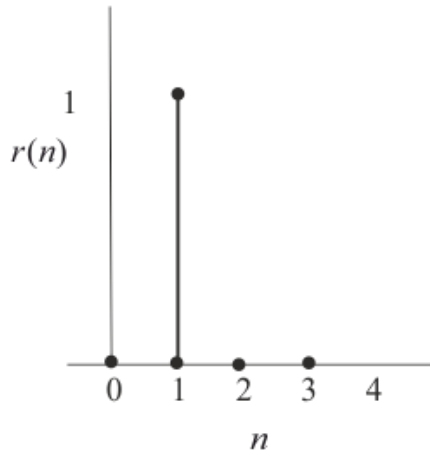


Рис. 2.7. Графическое представление взаимной корреляционной функции

Рассмотренный математический аппарат ВКФ и АКФ находит очень широкое применение в радиолокации, радионавигации, оптимальной обработке кодированных сигналов и изображений, распознавании, в сфере компьютерного зрения, дистанционного зондирования со спутников, в которых сравниваются данные с различных изображений, в задачах технического контроля качества выпускаемых изделий, в климатологии и во многих других приложениях.

Например, корреляция используется при проектировании цифровых фильтров в радиолокации. В этом случае положение максимума ВКФ между излучаемым и отраженным от цели сигналом дает величину временной задержки, по которой определяется расстояние. Наиболее сложной задачей в радиолокации является дальнейшее обнаружение баллистических ракет с последующим сопровождением множественных целей. В режиме обнаружения пространство сканируется с применением корреляционных фильтров, что позволяет обеспечить необходимую дальность обнаружения и достаточное разрешение по скорости. В режиме сопровождения различие в скоростях (боеголовок, ловушек, отражателей и др.) используется для распознавания главных целей.

## ЧАСТЬ 2. АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

### 3. АЛГОРИТМЫ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

#### 3.1. Ряды Фурье

Любой сложный сигнал можно представить на временном интервале  $t + lT$  бесконечным тригонометрическим рядом Фурье. Любой сложный сигнал описывается в виде суммы гармонических колебаний, называемой рядом Фурье.

##### 3.1.1. Ряд Фурье в тригонометрической форме

*Определение 3.1.* Если сложный или произвольный сигнал периодический, т.е.

$$x(t) = x(t + lT), -\infty < t < \infty,$$

то его математической моделью может служить бесконечный ряд Фурье в тригонометрической форме

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \dots + a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) + \dots \quad (3.1)$$

Поясним введенные обозначения и составляющие ряда:

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} - \text{период повторения сигнала}, \quad (3.2)$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T} - \text{основная круговая частота сигнала},$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} - \text{основная линейная частота сигнала},$$

$a_0$  – среднее значение сигнала за период  $T$ ,

$a_1 \cos(\omega_0 t), b_1 \sin(\omega_0 t)$  – составляющие сигнала со значением основной частоты  $\omega_0$ .

*Замечание.* Компоненты  $a_1 \cos(\omega_0 t)$  и  $b_1 \sin(\omega_0 t)$  называют основными гармониками.

$a_2 \cos(2\omega_0 t), b_2 \sin(2\omega_0 t)$  – составляющие сигнала частотой  $2\omega_0$  или вторые гармоники,

$a_k \cos(k\omega_0 t), b_k \sin(k\omega_0 t)$  – составляющие сигнала частотой  $k\omega_0$  или  $k$ -е гармоники.

Таким образом, сигнал  $x(t)$  описывается бесконечным набором гармоник.

В общем виде ряд Фурье записывают как

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t), \quad (3.3)$$

где  $\{a_0, a_k, b_k\}$  – множество коэффициентов Фурье состоит из действительных чисел.

Для того, чтобы ряд (3.3) сходилась необходимо, чтобы любой сигнал, описываемый периодической функцией времени, удовлетворял условиям Дирихле (Peter Gustav Dirichlet, нем. математик (1805 – 1859)). Заметим, большинство модели реальных сигналов удовлетворяют этим условиям, а именно:

- $x(t)$  за период  $T$  имеет конечное число разрывов;
- $x(t)$  за период  $T$  имеет конечное число максимумов и минимумов.

Ранее было показано, что компоненты  $a_k \cos(k\omega_0 t)$  и  $b_k \sin(k\omega_0 t)$  представляются в виде векторов в полярной системе координат (см. рис. 1.4.в). Эти составляющие соответствуют проекциям некоторого вектора длиной (амплитудой)  $c_k$  в полярной системе координат, рис. 3.1.

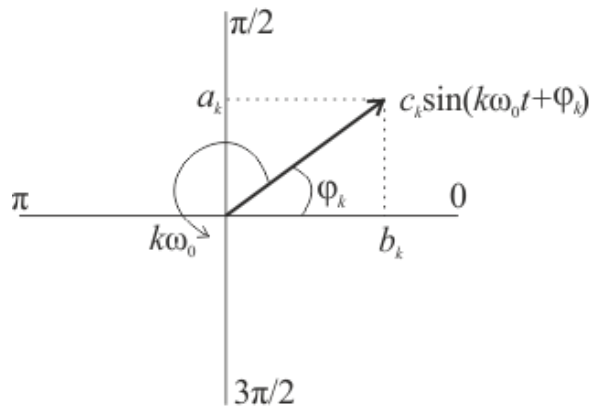


Рис. 3.1. Графическое изображение гармоник  $x(t) = c_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k)$

Из рис. 3.1 следует, что ряд (3.3) можно записать более компактно в виде

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k). \quad (3.4)$$

Выражение (3.4) можно получить, используя известную тригонометрическую формулу линейного сложения гармонических функций

$$a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) = c \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где 
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right).$$

В момент времени  $t = 0$  вектор  $\mathbf{c}_k$  имеет значение начальной фазы

$$\varphi_k = \tan^{-1} \frac{a_k}{b_k}.$$

Значение амплитуды вектора  $\mathbf{c}_k$  равно

$$|c_k| = c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

Множество  $\{c_0, b_k, a_k\}$  коэффициентов Фурье образуют спектр Фурье периодического сигнала  $x(t)$ . Спектр такого сигнала определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) (\cos k\omega_0 t) dt; \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) (\sin k\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

Отметим, что имеются другие записи ряда Фурье, например,

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k),$$

где 
$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \varphi_k = \tan^{-1} \frac{b_k}{a_k}. \quad (3.5)$$

*Пример 3.1.* Имеется временное представление гармонического колебания

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0),$$

или

$$x(t) = x_m \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_0\right).$$

Для представления такого колебания в частотной области достаточно задать две функции частоты, показывающие, что на частоте  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$  амплитуда сигнала равна  $x_m$ , а начальная фаза равна  $\varphi_0$ , т.е.

$$x(\omega) = \begin{cases} x_m, & \omega = \omega_0, \\ 0, & \omega \neq \omega_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \varphi_0, & \omega = \omega_0, \\ 0, & \omega \neq \omega_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Значение  $x(\omega_0) = x_m$  называется амплитудным спектром гармонического колебания, а  $\varphi(\omega_0) = \varphi_0$  называются фазовым спектром гармонического колебания. Их совокупность – просто спектр.

### 3.1.2. Ряд Фурье в комплексной форме

С целью упрощения расчетов часто используют вместо тригонометрической формы записи ряда Фурье его комплексную форму. Расчет спектров сигналов в комплексной области значительно проще, поскольку нет необходимости рассматривать отдельно коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ .

Ранее, (см. подр. 1.2.1) отмечалось, что для представления (описания) сигналов и систем широко применяется комплексная экспоненциальная функция (1.9)

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t,$$

где  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega t \in \mathbb{R}$ .

Функция  $e^{j\omega t}$  отражает положение комплексного числа  $e^{j\omega t}$  (точки) на единичной окружности комплексной плоскости, рис. 3.2.

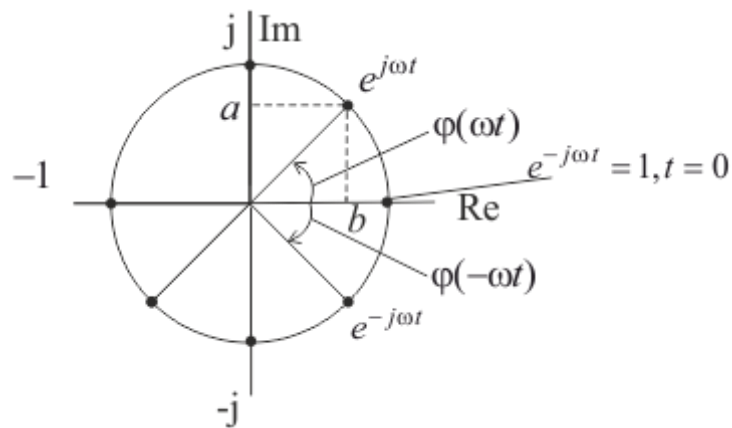


Рис. 3.2. Графическое представление функции  $e^{j\omega t}$

Прямая, соединяющая эту точку с началом координат, образует с действительной осью угол  $\varphi = \omega t$ . Точка движется по окружности против часовой стрелки со скоростью  $\omega \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$ . Выражение  $e^{j\omega t}$  – это единичный

вектор, угол которого линейно нарастает со временем со скоростью  $\omega \left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]$ .

Выражение  $e^{-j\omega t}$  соответствует вектору, угол которого нарастает в противоположном направлении с той же скоростью. Поскольку

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) = (e^{j\omega t})^*,$$

где  $(e^{j\omega t})^*$  обозначает комплексно-сопряженную функцию. Следовательно, сигналы вида  $x_1(t) = e^{-j\omega t}$  и  $x_2(t) = e^{j\omega t}$  имеют одинаковые частоты. Понятие отрицательной частоты следует из этих представлений. Сумма сигналов выражает действительную функцию времени

$$x_1(t) + x_2(t) = e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} =$$



$$(\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) + (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) = 2 \cos(\omega t). \quad (3.8)$$

Разность  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  выражает комплексную функцию времени вида

$$\begin{aligned} x_2(t) - x_1(t) &= e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = \\ (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) - (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) &= 2j \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

С учетом (3.8) и (3.9) получаем выражения действительных гармонических функций

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}}{2}, \quad (3.10)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j},$$

$$\sin(\omega t) = \frac{-j(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{2j}. \quad (3.11)$$

Подставляя (3.10) и (3.11) в выражение (3.3) ряда Фурье в тригонометрической форме, получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (e^{-jk\omega_0 t} + e^{jk\omega_0 t}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} j b_k (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) = \\ &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (e^{-jk\omega_0 t} + e^{jk\omega_0 t}) - j b_k (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})) = \\ &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} + a_k e^{jk\omega_0 t} - j b_k e^{jk\omega_0 t} + j b_k e^{-jk\omega_0 t} = \\ &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - j b_k) e^{jk\omega_0 t} + (a_k + j b_k) e^{-jk\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Введем обозначения  $c_k = (a_k - j b_k)$  и  $c_k^* = (a_k + j b_k)$ . Выражение (3.12) запишем в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + c_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \\ &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Компонента из (3.13)

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Выражение (3.13) запишем как

$$\begin{aligned}
&= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}.
\end{aligned}$$

**Определение 3.2.** Разложение аналогового периодического сигнала  $x(t)$  в комплексный ряд Фурье описывается формулой

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.14)$$

Из формулы (3.14) следует, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте. Комплексные коэффициенты  $c_k$  ряда (3.14) называются коэффициентами Фурье.

### 3.2. Дискретная форма ряда Фурье

Для перехода из непрерывной формы описания ряда Фурье в дискретную произведем замену непрерывных параметров сигнала на дискретные.

Из (1.1) и (3.2) период и основная частота дискретного сигнала определяются из выражений:

$$\begin{aligned}
T &= NT_d = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \\
\omega_0 &= \frac{2\pi}{NT_d}.
\end{aligned}$$

Замену непрерывных параметров сигнала на дискретные произведем по алгоритму

$$\begin{aligned}
x(t) &\rightarrow x(nT_d) \rightarrow x(n), \\
c_k &\rightarrow X(k), \\
\omega_0 &\rightarrow \frac{2\pi}{NT_d}, \\
t &\rightarrow nT_d, \\
t &\rightarrow n,
\end{aligned}$$

где  $t$  обозначает текущее время. Из (3.14) получаем дискретную форму ряда Фурье на конечном интервале наблюдения

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{k2\pi n T_d}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (3.15)$$

### 3.2.1. Конечная дискретная комплексная экспоненциальная последовательность

*Определение 3.3.* Дискретный сигнал (функция) вида

$$x(n) = \text{def}(kn) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \cos\frac{2\pi}{N}kn - j\sin\frac{2\pi}{N}kn \quad (3.16)$$

называется конечной дискретной комплексной экспоненциальной последовательностью.

Последовательность  $x(n) = e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$  задается на конечном интервале времени  $[0, N)$ , где  $N$  – целое положительное число. Величина  $T = NT_d$  определяет основной период комплексной последовательности. В этом случае

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{NT_d}$$

есть значение круговой частоты последовательности, которое определяет период дискретизации по частоте. Фактически (3.16) соответствует дискретному варианту формулы Эйлера (1.9). Другие обозначения (3.16) известны как

$$\text{def}(kn) = W^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, 1, \dots, N-1, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.17)$$

где  $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  называется поворачивающий множитель.

Так как показатель степени комплексного числа  $\text{def}(kn) = e^{-j\omega t}$  со знаком «минус», то функция описывает точку, которая движется по окружности в направлении часовой стрелки.

В выражении (3.17) переменные время  $n$  и частота  $k$  изменяются дискретно, в отличие от (1.9), где параметры время  $t$  и частота  $\omega$  изменяются непрерывно. Огибающая дискретных значений функции  $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$  соответствует функции  $e^{j\omega t}$ . Рис. 3.3 иллюстрирует графическое представление функции  $W^{kn}$ .

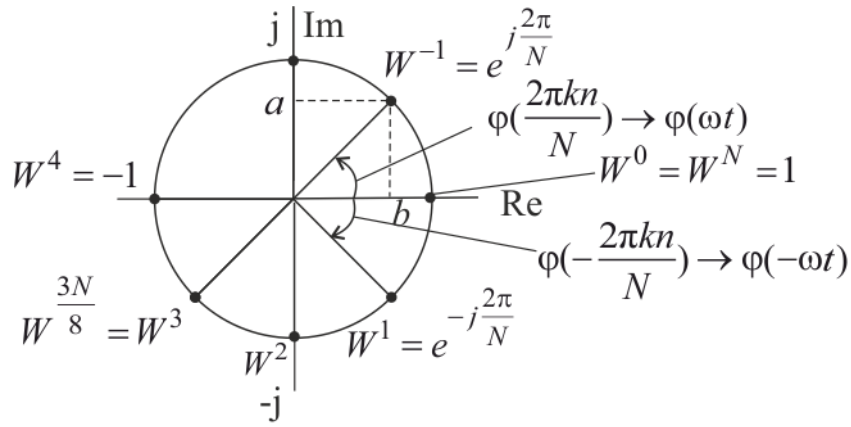


Рис. 3.3. Графическая иллюстрация функции  $W^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Когда переменная  $n$  последовательно принимает значения  $0, 1, \dots, N - 1$ , то через  $N$  шагов комплексный вектор ДЭФ проходит  $2\pi$  радиан или совершает один оборот на комплексной плоскости. Вращаясь, вектор ДЭФ занимает на плоскости  $N$  положений, рис. 3.3. Очевидно, если за время  $T = NT_d$  вектор ДЭФ проходит  $4\pi$  радиан, т.е. совершает два оборота на комплексной плоскости, то частотный индекс  $k = 2$ . Таким образом, индекс  $k$  определяет частотные свойства комплексной экспоненты.

Функция  $W^{kn}$  соответствует единичному вектору на комплексной плоскости, угол которого линейно нарастает со временем. Модуль комплексного числа  $W^{kn}$  равен

$$|W^{kn}| = \left| e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right| = 1, \text{ а его аргумент } \varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}W^{kn}}{\text{Re}W^{kn}}.$$

*Пример 3.2.* Вычисление значения аргумента  $\varphi_n$  (фазы) вектора ДЭФ для  $k = 1, n = 0, 1, 2, \dots, 7, N = 8$ .

Решение. Величина фазы вектора ДЭФ за дискретное время  $n$  определяется по формуле

$$\varphi_n = \frac{2\pi}{N}n, n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$\varphi_n = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = (0^\circ, -45^\circ, -90^\circ, \dots, -315^\circ).$$

Угол  $\varphi_n$  линейно нарастает со временем  $t = nT_d$ , где  $T_d$  – интервал дискретизации.

*Пример 3.3.* Пусть  $k = 2, n = 0, 1, 2, \dots, 7, N = 8$ .

Решение. Величина фазы вектора ДЭФ за дискретное время  $n$  определяется как

$$\varphi_n = \frac{2\pi}{N}n, n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Значения фазы  $\varphi_n$  вектора ДЭФ равны

$$\varphi_n = (0, -90^\circ, -180^\circ, -270^\circ, -360^\circ, -450^\circ, -540^\circ, -630^\circ).$$

Как видно, через 8 шагов дискретного времени комплексный вектор совершает два оборота на комплексной плоскости за то же время, что и в примере 3.2. Вектор ДЭФ движется со скоростью  $\frac{2\pi}{N}k \left[ \frac{\text{рад}}{\text{временной отсчет}} \right]$ . Параметр  $k$  значения  $\frac{2\pi}{N}kn$  определяет скорость нарастания (изменения) фазы или частоту функции  $W^{kn}$ . Таким образом, частота функции  $W^{kn}$  – это число оборотов, совершаемых вектором ДЭФ на интервале ее определения  $[0, N - 1]$ .

Систему ДЭФ записывают в виде матрицы  $\mathbf{V}$ , строки которой нумеруются переменной  $k$ , столбцы переменной  $n$ . В пересечении  $k$ -й строки и  $n$ -го столбца записывается величина  $W^{kn}$ . На рис. 3.4 изображена структура матрицы  $\mathbf{V}$ .

$$\mathbf{V} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots & N-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & W^{kn} & \dots & \dots \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \vdots & & & \vdots & & \end{array} \right] \end{matrix}$$

Рис. 3.4. Структура матрицы ДЭФ

*Пример 3.4.* Пусть период  $N = 4$ . Матрица  $\mathbf{V}$  имеет вид

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Подставив в матрицу числовые значения степенного ряда  $W^{kn}$ , получим

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

На рис. 3.5 показаны положения вектора ДЭФ и значения функции на комплексной плоскости, соответствующие матрице (3.19).

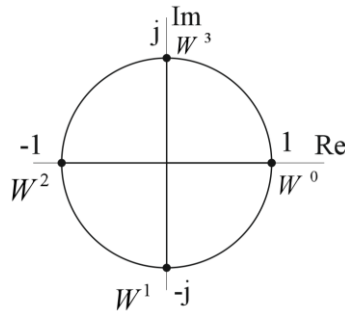


Рис. 3.5. Положения вектора ДЭФ

### Свойства функций ДЭФ

1. *Периодичность.* Рассмотрим функцию ДЭФ вида

$$W^{kn+lN} = W^{kn} \cdot W^{lN}, \quad (3.20)$$

где  $l$  – любое целое число,  $N$  – период.

Составляющая  $W^{lN}$  функции равна единице,

$$W^{lN} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}lN\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}lN\right) = \cos(2\pi l) - j\sin(2\pi l) = 1.$$

Функция ДЭФ  $W^{kn+lN} = W^{kn}$  отвечает свойству периодичности (1.6).

Используя (3.19), матрицу (3.18) можно упростить, если вычисления производить по формуле

$$W^{(kn+lN) \bmod N} = W^{kn}$$

Матрица с минимальными фазами примера 3.4 примет вид

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

2. *Ортогональность.* Так как  $(W^{kn})^* = W^{-kn}$ , то функции  $\text{def}(k, n)$  ортогональны, т.е.

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} (W^{ln})^* = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ N, & \text{если } k = l. \end{cases} \quad (3.22)$$

Следствием свойства ортогональности является:

– скалярное произведение различных двух строк матрицы  $\mathbf{V}$ , одна из которых должна быть комплексно сопряженной, равно нулю;

– скалярное произведение одинаковых двух строк матрицы  $\mathbf{V}$ , одна из которых должна быть комплексно сопряженной, равно  $N$ .

Действительно,

$$W^{kn}(W^{kn})^* = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = 1.$$

Сумма  $N$  единиц в (3.22) даст число  $N$ . Матричная запись свойства ортогональности имеет вид

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{I}, \quad (3.23)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

3. *Симметричность.* ДЭФ является функцией двух переменных  $k$  и  $n$ . Выводы относительно одной из переменных справедливы и для другой. Тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^T.$$

*Замечание.* Использование свойств функций  $\text{def}(k, n)$  и других ДЭФ-подобных функций позволяет уменьшить вычислительную сложность ЦОС.

### 3.3. Алгоритм дискретного преобразования Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) устанавливает связь между временным и частотным представлением сигнала при разложении его по конечным дискретным экспоненциальным функциям. Прямое дискретное преобразование Фурье (ПДПФ) последовательности  $x(n)$  определяет дискретную последовательность  $X(k)$  в частотной области

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.24)$$

где  $k$  – индекс ДПФ в частотной области.

Отдельное значение  $X(k)$  есть сумма почленных произведений входной последовательности отсчетов на косинусоиду и синусоиду, частота которых такова, что на интервале наблюдения из  $N$  отсчетов укладывается  $k$  их полных периодов. В алгебраической форме выражение (3.24)

$$X(k) = \text{Re}X(k) + j\text{Im}X(k). \quad (3.25)$$

В тригонометрическом виде ДПФ записывается как

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left( \cos \frac{\pi}{N} nk - j \sin \frac{2\pi}{N} nk \right), k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.26)$$

В показательной форме ДПФ

$$X(k) = |X(k)|e^{j\arg X(k)}, \quad (3.27)$$

$$|X(k)| = \sqrt{\operatorname{Re}(X(k))^2 + \operatorname{Im}(X(k))^2}, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.28)$$

где  $|X(k)|$  коэффициенты амплитудного спектра Фурье. Амплитуды гармоник – это значения комплексного спектра, отображаемые модулем комплексных чисел  $X(k)$ .

Фазовая характеристика ДПФ определяются выражением

$$\varphi(k) = \arg X(k) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} X(k)}{\operatorname{Re} X(k)}. \quad (3.29)$$

Обратное ДПФ (ОДПФ) имеет вид

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.30)$$

где  $W^{-kn} = (W^{kn})^*.$

Для периодического сигнала каждая гармоническая составляющая изображается вертикальными отрезками, длины которых равны ее амплитуде и фазе. Спектр периодического сигнала является дискретным или, говорят, линейчатым. Частоты всех гармоник кратны основной частоте. Это означает, что если периодический сигнал следует с частотой, например, 1 кГц, то в его спектре могут быть только частоты 0 кГц, 1 кГц, 2 кГц и т.д. В спектре такого периодического сигнала не могут присутствовать, гармоники, например, частоты 1,5 кГц или 1,2 кГц и т.д.

*Матричная форма ДПФ. Прямое ДПФ*

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x}, \quad (3.31)$$

где  $\mathbf{X} = (X(0), X(1), \dots, X(N-1))^T$  и  $\mathbf{x} = (x(0), x(0), \dots, x(N-1))^T$ , соответственно, векторы-столбцы отсчетов спектральных коэффициентов и сигнала.

Обратное ДПФ в матричной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X},$$

где  $\mathbf{V}^{-1}$  – обратная матрица. По определению  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I}$ .

Из свойства ортогональности  $\operatorname{def}(k, n)$  (3.22)

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{M}.$$



Умножим обе части этого равенства слева на  $\mathbf{V}^{-1}$ .

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{M},$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{V}^*.$$

Обратное ДПФ

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{V}^*\mathbf{X}. \quad (3.32)$$

*Пример. 3.4.* Вычисление ДПФ последовательности

$\mathbf{x} = (0,35; 0,35; 0,64; 1,06)^T$  в матричном виде.

Решение. По (3.31) вычисляем комплексный спектр

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,35 \\ 0,64 \\ 1,06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ -0,29 + j0,71 \\ -0,42 \\ -0,29 - j0,71 \end{pmatrix}.$$

Амплитудные (3.27) и фазовые (3.28) коэффициенты ДПФ имеют значения

$$|X(k)| = (X(0), X(1), X(2), X(3)) = (2,4; 0,76; 0,42; 0,76), \quad (3.33)$$

$$\varphi(k) = (0; 112; 180; -112).$$

Сигнал имеет постоянную составляющую  $|X(0)| = 2,4$ . Между первой и второй гармониками имеется фазовый сдвиг величиной  $\Delta\varphi = 68^\circ$ . Графики амплитудного и фазового спектров показаны на рис. 3.6 и рис. 3.7.

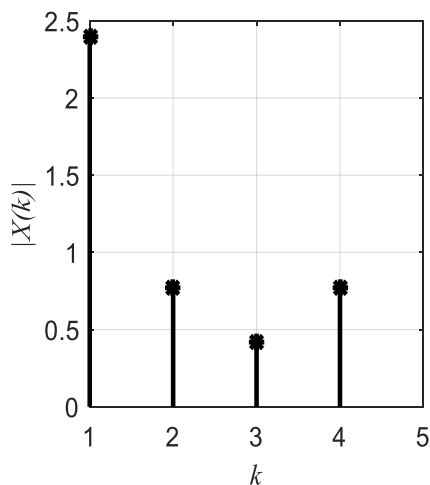


Рис. 3.6. Амплитудный спектр

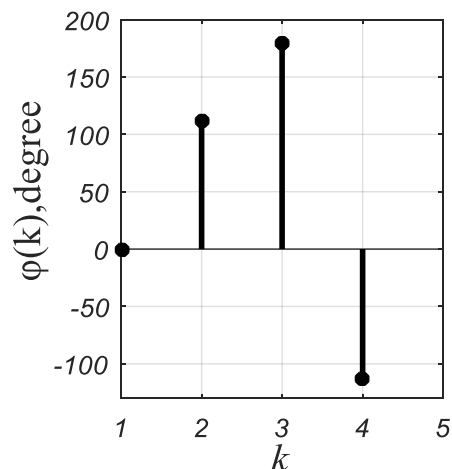


Рис. 3.7. Фазовый спектр

### Замечания

1. Согласно теореме дискретизации (подр.1.7) полное восстановление сигнала возможно, когда процедура дискретизации удовлетворяет условию (1.13)

$$f_d = \frac{1}{T_d} \geq 2W.$$

Следовательно, минимальное число дискретных отсчетов на периоде аналогового сигнала должно быть равным двум. Дискретные отсчеты (3.33) описываются в частотной области двумя реальными спектральными компонентами на частотах  $k = 1$  и  $k = 2$ , и постоянной составляющей на  $k = 0$ . Коэффициент  $X(3) = X(1)^*$  отражает понятие «отрицательная» частота (см. рис. 3.2) и не содержит информации о частотных свойствах сигнала.

2. Математические расчеты и графики выполнены с помощью прикладного математического пакета MatLab. Особенностью представления графического материала в этом приложении является то, что нумерация частотных индексов  $k$  начинается с единицы. Фазовый спектр в MatLab вычисляется по формуле

$$\varphi(k) = -\arg X(k) = -\arctg \frac{\operatorname{Im} X(k)}{\operatorname{Re} X(k)}, \quad (3.34)$$

что связано с определением в MatLab ряда Фурье в «косинусной» форме.

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k).$$

## 3.4. Свойства дискретного преобразования Фурье

1. *Свойство периодичности ДПФ.* Периодичность вытекает из свойства периодичности ДЭФ (3.20), когда  $W^{lN \pm k} = W^{\pm k}$ . Если  $l$  – любое целое число,  $N$  – период,

$$X(lN \pm k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{(lN \pm k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{\pm kn} = X(\pm k).$$

Свойство периодичности справедливо и для обратного ДПФ.

$$x(lN \pm n) = x(\pm n).$$

Обычно рассматривается один период длиной  $N$  во временной и в частотной области. Это позволяет определить матричную форму записи ДПФ.

2. *Линейность ДПФ.* Пусть  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  входные последовательности, а  $X_1(k)$  и  $X_2(k)$ , соответственно, их ДПФ. При подаче на вход линейной системы последовательности  $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$  на выходе формируется спектр (см. подр. 2.1.1) вида

$$X(k) = aX_1(k) + bX_2(k),$$

где  $a$  и  $b$  произвольные постоянные параметры (константы).

3. *Инвариантность ДПФ относительно циклического сдвига по времени.* Рассмотрим две последовательности  $x(n)$  и  $x_1(n) = x(n - h)$ ,  $h = 2$ . Формы последовательностей показаны на рис. 3.8.a.b. Последовательность  $x_1(n)$  задержана на два интервала дискретизации ( $h = 2$ ), т.е.  $x_1(n)$  сдвинута по времени на право. Найдем выражение ДПФ последовательности  $x_1(n)$ , если определено ДПФ  $X(k)$  последовательности  $x(n)$ .

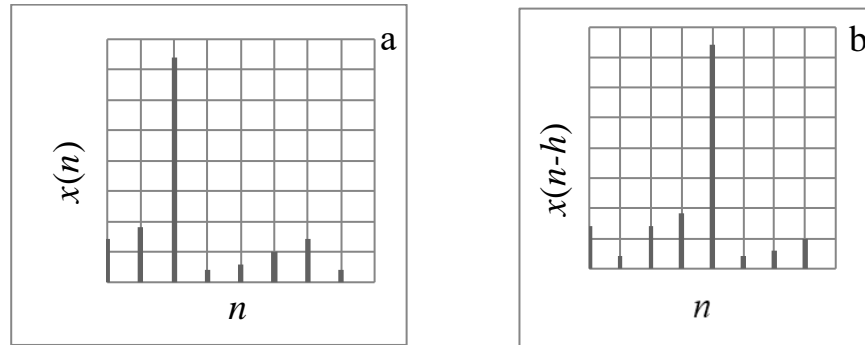


Рис. 3.8. Формы последовательностей  $x(n)$  и  $x_1(n) = x(n - h)$

Заменяем индекс суммирования  $n$  в формуле ДПФ на новую переменную  $l = n - h$ . Выражение ДПФ (3.24) для  $x_1(n) = x(n - h)$  примет вид

$$X_{-h}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)W^{k(l+h)} = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)W^{k(l)}W^{kh} = W^{kh}(X(k)). \quad (3.35)$$

Для положительного сдвига  $x_1(n) = x(n + h)$  ДПФ выполняется как

$$X_{+h}(k) = W^{-kh}(X(k))$$

#### Вывод

При сдвиге дискретного сигнала по времени изменениям подвергаются только фазы дискретных функций (фазовый спектр), амплитудный спектр не изменяется.

### 3.4.1. Теорема о свертке

К свойству ДПФ относится свойство, определяемое как «Теорема о свертке». Свойство имеет важное прикладное значение, поскольку позволяет сократить вычислительные затраты ЦОС для многих приложений. Периодическая свертка описывается формулой (2.11)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m)_{\text{mod}(N)}, n=0,1,\dots,N-1,$$

Вычислим ДПФ свертки  $y(n)$ .

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)W^{kn}, k=0,1,\dots,N-1. \quad (3.36)$$

Подставим в (3.36) формулу свертки

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m)_{\text{mod}(N)} W^{kn}, k=0,1,\dots,N-1. \quad (3.37)$$

Так как  $x(m)$  не зависит от  $n$ , изменяем порядок суммирования в (3.37).

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} h(n-m)_{\text{mod}(N)} W^{kn}, k=0,1,\dots,N-1. \quad (3.38)$$

На основе свойства инвариантности относительно циклического сдвига по времени (3.34), составляющая второй суммы выражения (3.38) равна

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n-m)_{\text{mod}(N)} W^{kn} = W^{km} H(k).$$

С учетом этого выражение (3.38) запишется в виде

$$Y(k) = \left( \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W^{km} \right) H(k) = X(k)H(k), k=0,1,\dots,N-1 \quad (3.39)$$

*Теорема о свертке* определяет спектр свертки  $Y(k)$  как произведение спектров исходных последовательностей.

Коэффициенты свертки вычисляются на основе ОДПФ по формуле

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W^{-kn}, n=0,1,\dots,N-1. \quad (3.40)$$

Теорема о свертке позволяет вычислить коэффициенты свертки при помощи ДПФ согласно выражению

$$y(n) = \text{ДПФ}_y^{-1} \{ \text{ДПФ}_x \cdot \text{ДПФ}_h \}. \quad (3.41)$$

*Замечание.* При больших величинах  $N$  и повышенных требованиях по скорости ЦОС на практике применяют эффективные алгоритмы вычисления свертки с использованием быстрого преобразования Фурье.

*Пример 3.5.* Вычислить свертку векторов  $\mathbf{x} = (1, 1, 1, -1)^T$  и  $\mathbf{h} = (-1, 1, 1, 1)^T$ , используя теорему о свертке.

*Решение.* 1. Находим в матричной форме ДПФ (3.31) исходных данных. Воспользуемся матрицей  $\mathbf{V}$  из примера 3.4.

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x}, \mathbf{H} = \mathbf{V}\mathbf{y}.$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2j \\ 2 \\ 2j \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем поэлементное умножение спектров (3.39) для нахождения спектра свертки.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{H} = (4, 4j, -4, -4j)^T.$$

3. Выполняем ОДПФ (3.40) от спектра свертки.

$$\mathbf{y} = \frac{1}{N} \mathbf{V}^* \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{V}^*$  – матрица комплексно-сопряженная матрице  $\mathbf{V}$ .

### 3.4.2. Теорема о корреляции

К свойству ДПФ относится свойство, определяемое как «Теорема о корреляции». Свойство имеет важное прикладное значение. Многие быстрые алгоритмы ЦОС основаны на этом свойстве. По аналогии со сверткой

рассмотрим ненормированную ВКФ (см. подр. 2.5), т.е. без учета коэффициента  $\frac{1}{N}$ ,

$$r(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m)_{\text{mod}(N)}, n=0,1,\dots,N-1.$$

Вычислим ДПФ корреляционной функции  $r(n)$

$$\begin{aligned} R(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} r(n)W^{kn}, k=0,1,\dots,N-1, \\ R(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+n)W^{kn}, k=0,1,\dots,N-1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Так как  $x(m)$  не зависит от  $n$ , изменяем порядок суммирования в (3.42)

$$R(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} h(m+n)W^{kn}, k=0,1,\dots,N-1. \quad (3.43)$$

Используя свойство инвариантности относительно циклического сдвига по времени (3.34), запишем иначе составляющую выражения (3.43)

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(m+n)W^{kn} = W^{-km} H(k). \quad (3.44)$$

С учетом (3.44) выражение (3.43) приведем к виду

$$R(k) = \left( \sum_{m=0}^{N-1} x(m)W^{-km} \right) H(k) = X^*(k)H(k), k=0,1,\dots,N-1. \quad (3.45)$$

Спектр ВКФ равен произведению спектров коррелируемых последовательностей, причем один из спектров берется в комплексном сопряжении.

Коэффициенты корреляционной функции вычисляются на основе ОДПФ по формуле

$$r(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(k)W^{-kn}, k=0,1,\dots,N-1. \quad (3.46)$$

*Теорема о корреляции* (3.45) позволяет вычислить коэффициенты  $r(n)$  при помощи ДПФ по формуле

$$r(n) = \text{ДПФ}_r^{-1}(\text{ДПФ}_x^* \cdot \text{ДПФ}_h).$$

*Замечание.* При больших величинах  $N$  и повышенных требованиях по скорости ЦОС на практике применяют эффективное вычисление корреляции с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье.

*Пример. 3.6.* Вычислить ВКФ последовательностей  $x(n) = (1, 1, 1, -1)$  и  $h(n) = (-1, 1, 1, 1)$ , используя теорему о корреляции.

*Решение.* 1. Находим в матричной форме ДПФ последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$ . Воспользуемся матрицей  $\mathbf{V}$  из примера 3.4.

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{V}\mathbf{h}.$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2j \\ 2 \\ 2j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Выполняем поэлементное умножение спектров (3.45) для нахождения спектра корреляции. При этом следует записать вектор  $\mathbf{X}$  в комплексном сопряжении.

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}^* \mathbf{H} = (4, -4j, -4, 4j)^T.$$

3. Выполняем ОДПФ от спектра  $\mathbf{R}$ .

$$\mathbf{r} = \frac{1}{N} \mathbf{V}^* \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{V}^*$  – матрица комплексно сопряженная матрице  $\mathbf{V}$ .

В нормированном виде  $\mathbf{r} = (0, 1, 0, 0)^T$ , рис. 3.9.

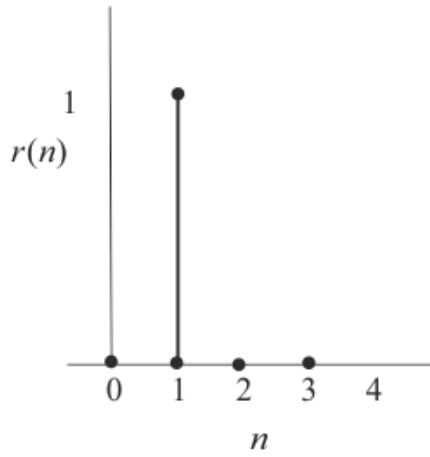


Рис. 3.9. График корреляционной функции

### 3.4.3. Теорема Парсеваля

Теорема имеет важное значение в теории ЦОС, преобразований, теории эффективного кодирования (сжатия) информации посредством дискретных ортогональных преобразований и др.

Пусть последовательности  $x(n)$  и  $h(n)$  будут идентичными. В этом случае теорема о корреляции записывается в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}^* \mathbf{X} = |\mathbf{X}|^2 = |X(k)|^2, k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Коэффициенты корреляционной функции вычисляются с помощью ОДПФ, (3.46)

$$r(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) W^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 W^{-kn}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.47)$$

Для  $n = 0$  выражение (3.47) будет иметь вид

$$\begin{aligned} r(0) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = \\ &= \frac{1}{N} \left( |X(0)|^2 + |X(1)|^2 + \dots + |X(N-1)|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Выражение (3.48) отражает понятие энергии сигнала в частотной области. Далее воспользуемся выражением ненормированной ВКФ (2.15) для случая  $x(n) = h(n)$ ,

$$r(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m) = \sum_{m=0}^{N-1} |x(m)|^2, n = 0, 1, \dots, N-1,$$



В частном случае, для  $m = 0$  равенство сводится к соотношению

$$r(0) = \sum_{m=0}^{N-1} |x(m)|^2 = r(0) = |x(0)|^2 + |x(1)|^2 + \dots + |x(N-1)|^2. \quad (3.49)$$

Приравнивая (3.48) и (3.49), получаем выражение теоремы Парсеваля (Marc-Antoine Parseval, франц. математик, 1755-1836)

$$|x(0)|^2 + |x(1)|^2 + \dots + |x(N-1)|^2 = \frac{1}{N} \left( |X(0)|^2 + |X(1)|^2 + \dots + |X(N-1)|^2 \right) \quad (3.50)$$

*Вывод.* Энергия сигнала, вычисленная во временной области (по переменной  $n=0$ ) равна энергии сигнала, вычисленной в частотной области (по переменной  $k=0$ ). Каждая величина  $|X(k)|^2, k=0,1,\dots,N-1$  представляет собой мощность дискретной гармоник, имеющей частоту с номером  $k$ .

*Пример. 3.6.* Подтвердить теорему Парсеваля, если  $x(n) = (1, 1, 1, -1)$ .

Решение. По формуле (3.49) находим во временной области  $r(0) = 4$ . В примере 3.5 для заданной последовательности получен спектр

$$\mathbf{X} = (2, -2j, -2, 2j)^T.$$

По формуле (3.50) находим в частотной области  $r(0) = 4$ , что и подтверждает теорему Парсеваля.

## 4. ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

### 4.1. Лабораторная работа «Алгоритмы цифровой обработки сигналов во временной области»

4.1.1. Дана дискретная последовательность  $x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4)\} = \{1; 1,5; -1,2; 4; -4,8\}$ . Записать выражение, определяющее значение отсчёта последовательности с номером  $n = 3$ .

4.1.2. 1) Определить количество активных отсчётов в формате Full HD телевизионного изображения.

2) Какой объем памяти требуется для хранения только черно-белого изображения в течение одной секунды, если в формате Full HD число градаций яркости равно 1024.

3) Определить потоковую скорость цифрового кодированного сигнала изображения при 8-битовом квантовании в стандарте 4:4:4. Частота дискретизации сигнала яркостного канала  $f_{dY} = 72$  МГц.

*Замечание.* Стандарт 4:4:4 отражает соотношение частоты  $f_{dY}$  дискретизации сигнала яркости  $Y$  и частот  $f_{dR}, f_{dB}$  дискретизации цветоразностных сигналов  $C_R$  и  $C_B$ , а также одновременность их передачи.

4.1.3. Доказать, что система  $w(n) = \log_2|x(n)|$  относится к классу нелинейных.

4.1.4. Вычислить апериодическую свертку последовательностей  $h(n) = (-1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1)$  и  $x(n) = (1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$ . Построить график свертки.

4.1.5. Вычислить периодическую свертку последовательностей  $h(n) = (-1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1)$  и  $x(n) = (1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$ . Построить график свертки.

4.1.6. Вычислить ВКФ периодических последовательностей  $h(n) = (-1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1)$  и  $x(n) = (1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$ . Построить график ВКФ.

4.1.7. Вычислить АКФ периодической последовательности  $x(n) = (1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$ . Построить график АКФ.

### 4.2. Лабораторная работа «Алгоритмы цифровой обработки сигналов в частотной области»

4.2.1. Вычислить значения ДЭФ:  $W^2, W^3, W^{-1}, W^{-3}$  при  $N = 8$ .

4.2.2. Функции системы ДЭФ записать в виде матрицы  $\mathbf{V}$  размерностью  $8 \times 8$ .

4.2.3. Привести на примерах вычисления подтверждающие свойства ДЭФ.

4.2.4. Вычислить спектр сигнала  $x(n) = (1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$  с помощью ДПФ. Построить графики амплитудного и фазового спектров.

4.2.5. По полученным значениям ДПФ с помощью ОДПФ восстановить исходные значения отсчетов сигнала. Построить график восстановленного сигнала.

4.2.6. Привести на примерах вычисления подтверждающие свойства ДПФ. Вычислить спектр сигнала (п. 4.2.4), сдвинутого по времени на  $t = 3T_d$  интервалов дискретизации. Построить графики сигнала, амплитудного и фазового спектров.

4.2.7. С помощью ДПФ вычислить периодическую свертку последовательностей  $h(n) = (-1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1)$  и  $x(n) = (1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$ . Построить график свертки.

4.2.8. С помощью ДПФ вычислить ВКФ периодических последовательностей  $h(n) = (-1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1)$  и  $x(n) = (1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$ . Построить график ВКФ.

4.2.9. С помощью ДПФ вычислить АКФ периодической последовательности  $x(n) = (1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$ . Построить график АКФ.

4.2.10. Используя исходные данные (п. 4.2.4), провести вычисления, подтверждающие теорему Парсеваля.

## **5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ**

### **5.1. Краткие теоретические сведения**

### **5.2. Расчеты и графики лабораторных исследований**

### **5.3. Анализ результатов и выводы**

## **6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.**

6.1. При каких условиях возможно представление непрерывного сигнала его дискретными значениями?

6.2. Поясните понятие линейная система.

6.3. Поясните понятие импульсная характеристика линейной системы.

6.4. Поясните различия операций свертка и корреляция.

6.5. Что выражает корреляционная функция (АКФ, ВКФ)?

6.6. Поясните понятие разложение сигнала в ряд Фурье.

6.5. Поясните различия комплексной экспоненциальной функции, дискретной комплексной экспоненциальной функции и конечной дискретной комплексной экспоненциальной функции.

6.6. Поясните свойства ДЭФ.

6.7. Поясните различия ряда Фурье, преобразования Фурье, дискретизированного по времени преобразования Фурье и дискретного преобразования Фурье.

6.8. Поясните свойства ДПФ.

6.9. Поясните понятие спектр сигнала.

6.10. Поясните метод спектрального анализа.

6.11. Поясните, как реализовать синтез сигналов с помощью ДПФ.

#### Литература

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов.– М.: Техносфера, 2006.
2. Митюхин, А.И. Цифровая обработка речи и анализ изображений: учеб.-метод. пособие / А.И. Митюхин. – Минск : БГУИР, 2016.
3. Айфичер, Э.С., Джервис, Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2008.
4. Теория прикладного кодирования: Учеб. пособие. В 2 т. В.К. Конопелько, Митюхин, А И. и др. – Минск : БГУИР, 2005.
5. Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов.– М.: Бином-Пресс, 2006.
6. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников: Пер. с англ. – М.: Додека-XXI, 2008.
7. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко.– СПб.: Питер, 2003.
8. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. А.И. Солонина, Улахович Д.А. и др. – СПб: БХВ – Петербург, 2003.
9. Лосев, В.В. Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: Учебное пособие для вузов. – Мн: Выш. школа, 1990.