

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Государственный астрономический институт
имени П.К. Штернберга

Л.В. Зотов

ТЕОРИЯ ФИЛЬТРАЦИИ
И ОБРАБОТКА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Курс лекций

Москва
2010

Зотов Л.В. Теория фильтрации и обработка временных рядов. Курс лекций. – М: Физический факультет МГУ, 2010. – 200 с.

ISBN 978-5-8279-0089-4

Рассматриваются методы анализа и обработки сигналов и математическая теория фильтрации. Даются основы классического спектрального анализа, вейвлет-анализа, сингулярного спектрального анализа. Приводятся характеристики линейных фильтров, основы винеровской и калмановской фильтрации. Внимание уделено также нейронным сетям и роли фильтрации в решении обратных задач.

Курс лекций, разработан для студентов и аспирантов Астрономического отделения физического факультета МГУ. Он может быть полезен работающим в астрономии и геофизике, технике и экономике, биологии и медицине. Всем, так или иначе использующим в своей работе методы прикладной математики.

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат физико-математических наук Сергей Леонидович Пасынок,
кандидат физико-математических наук Ольга Сергеевна Сажина.

ISBN 978-5-8279-0089-4



©Л.В. Зотов
©Физический факультет МГУ
имени М.В. Ломоносова, 2010 г.

Содержание

Предисловие	6
Введение	8
1 Фурье-анализ	15
1.1 История создания	15
1.2 Ряд Фурье	16
1.3 Геометрический смысл Фурье-анализа	18
1.4 Преобразование Фурье	20
1.5 Принцип неопределённости Гейзенберга	23
1.6 Дискретное преобразование Фурье	24
1.7 Быстрое преобразование Фурье	25
1.8 Принцип Котельникова-Шеннона	26
1.9 Характеристики случайных процессов	28
1.10 Спектральный анализ случайных процессов	30
1.11 Спектральный анализ с окном	31
1.12 Кросскорреляционный анализ	33
1.13 Многомерный анализ	34
2 Вейвлет-анализ	37
2.1 Оконное преобразование	39
2.2 Непрерывный вейвлет-анализ	41
2.3 Вейвлет-анализ как фильтрация	44
2.4 Анализ сигналов с использованием вейвлетов	45
2.5 Дискретное вейвлет-преобразование	49
2.6 Каскады зеркальных фильтров	50
2.7 Кратно-масштабный анализ	53
2.8 Многомерный вейвлет-анализ	54
3 Сингулярный спектральный анализ	57
3.1 Алгоритм ССА	57

3.2	Разделимость	59
3.3	Группировка	61
3.4	Многомерный ССА	61
3.5	Особенности ССА	62
4	Постановка задачи фильтрации, характеристики линейных фильтров	68
4.1	Основные характеристики линейных фильтров	68
4.2	Стационарная динамическая система как фильтр	71
4.3	Распространение на двумерный случай	74
4.4	Дискретные фильтры	75
5	Оптимальная фильтрация Винера-Колмогорова	82
5.1	Общие положения	82
5.2	Начальные моменты СПМ	84
5.3	Факторизация СПМ, формирующий фильтр	85
5.4	Постановка задачи оптимальной фильтрации	88
5.5	Вывод уравнения Винера-Хопфа	89
5.6	Решение уравнения Винера-Хопфа в спектральной области	90
5.7	Решение уравнения Винера-Хопфа методами ТФКП	92
5.8	Многомерный случай	97
6	Фильтрация Калмана-Бьюсси	100
6.1	Динамические системы	100
6.2	Модель наблюдений и состояний	102
6.3	Операционный подход. Характеристики многоканальной системы.	102
6.4	Предварительные соглашения	106
6.5	Уравнение Винера-Хопфа в нестационарном случае, принцип ортогональности.	108
6.6	Вывод уравнений непрерывного фильтра Калмана-Бьюсси	109
6.7	Вывод соотношений дискретного фильтра Калмана	114
6.8	Алгоритм дискретной фильтрации Калмана	117
6.9	Нелинейный фильтр Калмана	118
7	Нейронные сети и методы оптимизации	123
7.1	Модели нейрона, персептрон	123
7.2	Многослойные нейронные сети	126
7.3	Теорема об аппроксимации	128
7.4	Обучение	128
7.5	Алгоритм обратного распространения ошибки	130

7.6	Погрешность и структура НС	132
7.7	Другие виды НС	134
7.8	НС, обучающиеся без учителя	136
7.9	Модульные сети. Области применения НС.	137
7.10	Методы оптимизации	138
7.11	Методы наискорейшего спуска	139
7.12	Ньютоновские методы	140
7.13	Метод Левенберга-Марквардта	141
7.14	Квазиньютоновские методы	141
7.15	Условная оптимизация	144
7.16	Популяционные алгоритмы	145
8	Фильтрация и решение обратных задач	149
8.1	Совместность СЛАУ	151
8.2	Обусловленность	153
8.3	Псевдорешения	154
8.4	SVD-разложение	156
8.5	Геометрия псевдорешения	159
8.6	Обратные задачи для дискретных моделей наблюдений . .	159
8.7	Модель в спектральной области	162
8.8	Регуляризация плохо обусловленных систем	163
8.9	Общие замечания, дилемма смещения и дисперсии	163
8.10	Модели на основе интегральных уравнений	166
8.11	Корректирующая фильтрация Пантелеева	166
8.12	Регуляризация Филлипса-Тихонова	168
	Заключение	176
	Приложения	179
	Приложение А	179
	Приложение Б	181
	Приложение В	182
	Приложение Г	184
	Приложение Д	188
	Приложение Е	190
	Список литературы	193
	Русскоязычные источники	193
	Англоязычные источники	197
	Список дополнительных статей с примерами	198

Предисловие

*Лишь твой образ, лишь ты
Как молнии вспышка
Средь моей темноты.
А. Мачадо,
перевод Ю. Петрова*

Всем знакомы фильтры воды и напряжения в электросети, звуковые фильтры и поисковые системы в Интернете. Однако мы не часто задумываемся над тем, что все они работают на общих принципах, выделяя полезную составляющую из исходной информации, энергии или вещества. Распознавая лицо или голос знакомого человека в толпе, слыша звук солирующего инструмента на фоне симфонического оркестра, выделяя уникальную звезду в галактике, мы осуществляем фильтрацию.

Задача курса лекций – познакомить слушателей с различными подходами к фильтрации сигналов, дать примеры их успешного использования в астрономии и геофизике. В нём изложены классические и современные методы анализа временных рядов, такие как Фурье-анализ, вейвлет-анализ, сингулярный спектральный анализ, даны классические подходы к линейной фильтрации, разработанные Винером, Колмогоровым, Калманом, Бьюсси.

Развитие кибернетики и биологические исследования, проведённые в XX веке, позволили использовать при создании систем и решении ряда задач принципы, заложенные природой в живые существа. На таких принципах основаны динамические системы с обратной связью, нейронные сети, генетические алгоритмы, о которых также пойдёт речь.

Динамические системы служат для моделирования причинно-следственных связей. Задачи восстановления причин по наблюдаемым следствиям называют обратными, их решение отягчено шумами наблюдений и недостатком априорной информации. О важной роли фильтрации при решении таких задач говорится в заключительной главе.

Идея создания данного курса лекций принадлежит профессору Валерию Леонтьевичу Пантелееву, который, будучи заведующим кафедры Небесной механики, астрометрии и гравиметрии Астрономического отделения физического факультета МГУ, предложил в 2003 г. разработать

его для студентов старших курсов и аспирантов. Обладая большим опытом применения фильтрации в морской гравиметрии, профессор Пантелеев помог автору, тогда ещё аспиранту, освоить приёмы фильтрации и понять основополагающие идеи её использования, в частности, при решении обратных задач. Большое спасибо ему за это.

Данный курс апробировался на студентах и аспирантах Астрономического отделения МГУ. В 2009 г. он читался в Школе наук о Земле Университета штата Огайо, г. Колумбус, США при поддержке гранта Фулбрайта. Курс регулярно дорабатывался, в него включались новые методы и примеры. Этому способствовали беседы с профессором Б. Шаффриным в Колумбусе, К. Бизуардом в Париже, профессорами А.Г. Яголой, В.Н. Козловым, А.В. Гусевым, Н.И. Арбузовой в Москве. Автор благодарит за помощь при редактировании курса С.А. Носову, М.В. Барина, за содействие при выборе эпиграфов – Б.О. Кутенкова, выражает признательность рецензентам С.Л. Пасынку и О.С. Сажинной. Просит извинения за оставшиеся незамеченными ошибки, за которые рецензенты и факультет ответственности не несут. Самую глубокую благодарность и признательность автор выражает своей маме Ольге Викторовне Зотовой. Печать осуществлена при поддержке гранта Президента РФ МК-4234.2009.5.

1 декабря 2010 г.

Л.В. Зотов

Введение

*Этих людей поколеньем вознегодовавшая Правда
В небо тогда вознеслась и там, наконец, поселилась,
Где среди ночи она и поныне является людям
Девой, недалеко от блистательного Волопаса.
Арат, “Явления”, 133:136*

Повсеместно в жизни, сами того не подозревая, мы сталкиваемся с фильтрацией – отделением полезных (нужных) составляющих объекта и удалением бесполезных. Примерами могут служить фильтры¹ очистки воды, фильтры напряжения в электросети, звуковые фильтры, воздушные и масляные фильтры двигателя. Когда поисковая система Google выдает список нужных нам ссылок в Интернете, когда мы разбираем слова знакомого на противоположной стороне улицы, когда мгновенно узнаем в толпе знакомое лицо, – мы также сталкиваемся с задачей фильтрации, которая решается компьютерной системой или человеческим мозгом. Фильтрация идет бок о бок с распознаванием и составляет основу любого оценивания параметров.

В гуманитарных науках можно услышать о фильтрации советского населения в 30-е–40-е годы XX века, отделении “зёрен от плевел” и пр. Интуитивно ясно, что фильтрация требует некоторой меры, на основе которой она осуществляется. Так просеивание сквозь сито или процеживание основано на различии частиц по размерам². Порой фильтрация осуществляется на основе разделения составляющих по массе. Взглянув на звездное небо, мы увидим по соседству с созвездием Весов – Деву, которая, согласно поэме Арата “Явления”, олицетворяет богиню справедливости [84]. Вопрос о том, осуществляет ли она фильтрацию, какого рода и на основе каких критериев, мы оставляем читателю.

В рамках данного курса мы подойдем к задаче фильтрации с математической точки зрения. Пусть y – некоторый объект, в составе которого имеется полезная составляющая x . *Фильтром* будем считать оператор

¹Слово фильтр происходит от англо-саксонского слова felt – “войлок”.

²На обложке – фрагмент картины Дина Юнпена (Ding Yunpeng, 1547-1628) “Фильтрация вина”, Шанхайский музей.

Φ , выделяющий полезную составляющую

$$x = y_\Phi = \Phi\{y\}. \quad (1)$$

Большей частью мы будем иметь дело с линейной фильтрацией, хорошо разработанной в силу известного свойства³

$$\alpha y_\Phi + \beta u_\Phi = \Phi\{\alpha y + \beta u\}. \quad (2)$$

Правило суперпозиции позволяет разложить объект на более простые составляющие, тем самым открывая путь к решению задачи. Такая возможность очень важна для научного исследования. Так, ещё Евдокс Книдский, разложив движение планет на составляющие вдоль и поперек эклиптики, отделил сложную часть от сравнительно простой, реализовав эту основную стратегию исследования явлений [30]. Мы столкнемся с различными методами разложения объектов (сигналов). Все эти методы служат основой для анализа. Нашей целью будет подготовка почвы для освоения методов фильтрации.

Под объектом y мы будем понимать функцию f времени или координат. Будем называть её *процессом или сигналом*, не делая различия между этими терминами⁴. Функция дискретного аргумента $f(t_k)$ будет называться *временным рядом*. Все методы, даже если их изложение ведется на примере одномерного процесса, можно обобщить на многомерные векторные процессы. Функцией двух координат чаще всего будет являться поле или изображение (фотография), в большинстве случаев дискретное, т.е. состоящее из пикселей. Непрерывные сигналы удобно использовать для теоретического рассмотрения, что мы и будем делать. На практике же, в цифровой век, обычно приходится иметь дело с дискретными сигналами.

Операция *дискретизации* заключается во взятии отсчетов сигнала $f(t)$ через промежутки времени Δt , что может быть записано в виде

³На первый взгляд, в выражении 1.2 отражены два свойства. На самом деле аддитивность влечет мультипликативность.

⁴Слово сигнал (от латинского *signum* – знак), как считают некоторые авторы, неявно подразумевает искусственное происхождение. “Статистику рождаемости или смертности сигналом не назовешь”. На наш взгляд, это слово действительно подразумевает наличие информации, которую вкладывает передающая, либо получает принимающая сторона. Мы будем использовать этот термин в широком смысле, так что даже смысл фразы А.В. Тутукова “отсутствие сигналов внеземных цивилизаций является сигналом их отсутствия” [89] будет нам понятен.

суммы δ -функций Дирака

$$f_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - k\Delta t) \Delta t. \quad (3)$$

Действие обобщенных функций Дирака здесь сводится к выборке значений в дискретные моменты времени. Между отсчетами $f_d(t) = 0$. При стремлении интервала дискретизации Δt к нулю, сумма переходит в интеграл.

Крайне важно обращать внимание на то, является ли природа объекта детерминированной или стохастической. Если успехи небесной механики в XVII в. укрепили веру в возможность описания явлений детерминированными законами, то обработка наблюдений, которые всегда отягчены ошибками неизвестной природы, не поддающимися исключению, привела к созданию Гауссом и Лежандром метода наименьших квадратов (МНК). Стало понятно, что описание некоторых явлений детерминированными законами невозможно. Действие большого числа факторов, информация о которых неполна, допускает описание явлений лишь с помощью вероятностных законов. Поэтому в большинстве практических случаев мы будем сталкиваться с объектами, в состав которых входят случайные компоненты. Для лучшего понимания сказанного приведем примеры.

◇ Детерминированные сигналы.

Пример 1): *Характеристическая функция* отрезка $[-T, T]$ или прямоугольное *окно*⁵ (рис. 1а)

$$f(t) = 1_{[-T, T]} = \begin{cases} 0 & t < -T \\ 1 & -T \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Пример 2): Гауссов чирп

$$f(t) = \exp[-(a - ib)t^2]$$

Пример 3): Комбинация δ -функций Дирака (*функция отсчетов*)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

– эта функция представляет собой дискретизацию вида (3) отмасштабированной единичной функции $1(t)/\Delta t$ (рис. 1б).

⁵Окном будем называть функцию, убывающую на краях.

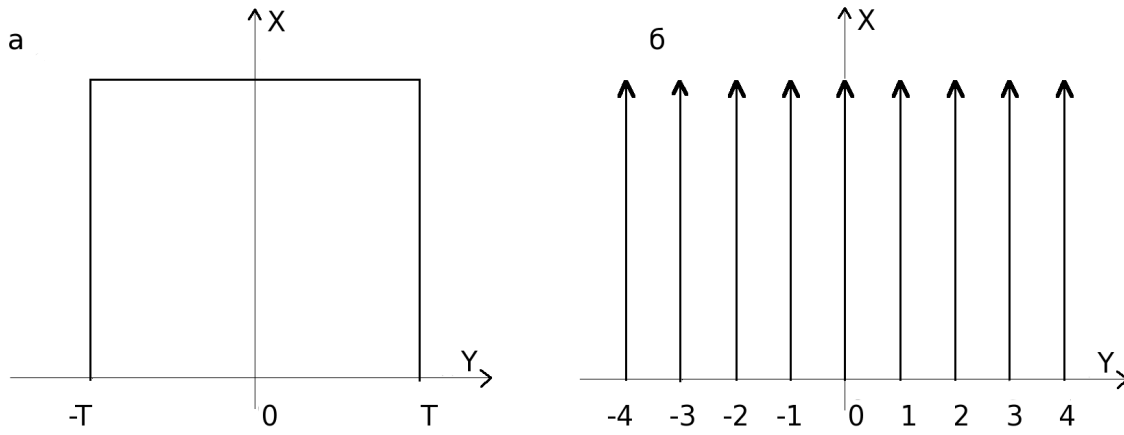


Рис. 1: Характеристическая функция (а) и функция отсчетов (б).

Вообще говоря, детерминированные процессы можно считать случайными с единичной вероятностью появления единственной реализации.

Стохастические сигналы.

Пример 4): Броуновское движение (рис. 2а)

$$P\{(x(t) - x(t_0)) \leq c\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2(t - t_0)}} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{u^2}{2\sigma_0^2(t-t_0)}} du$$

$$t > t_0, \quad \sigma_0 = const, \quad M\{w\} = \langle w \rangle = 0, \quad D(t_0, t) = \sigma_0^2(t - t_0).$$

Под $M\{.\} = \langle . \rangle$ мы подразумеваем математическое ожидание, под D – дисперсию [13]. Броуновское движение называют также *винеровским процессом*. Это случайный процесс с независимыми стационарными приращениями. Если ввести параметр степени (Хёрста) H в дисперсию нормально распределенных приращений

$$D(t_0, t) = \sigma_0^2(t - t_0)^{2H},$$

то они перестают быть независимыми (а процесс марковским). Такой процесс можно считать хаотическим с фрактальной размерностью⁶ $d = 2 - H$. ($H = 0.5$ в случае обычного винеровского процесса).

Пример 5): Синусоидальный процесс со случайной фазой

$$f(t) = \sin(\omega t + \alpha)$$

⁶ $d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}$, где ε – линейный размер каждого из N элементов, образующих покрытие множества [26].

α – случайная величина, распределенная равномерно на $[0, 2\pi]$. Случайный процесс здесь – функция случайного параметра. Такого рода процессы называют квазислучайными.

Пример 6): Точечное изображение с гауссовским шумом⁷

$$f(x_1, x_2) = \delta(x_1 - a, x_2 - b) + u(x_1, x_2)$$

$$P\{u \leq c\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{(u-\langle u \rangle)^2}{2\sigma^2}} du \quad (4)$$

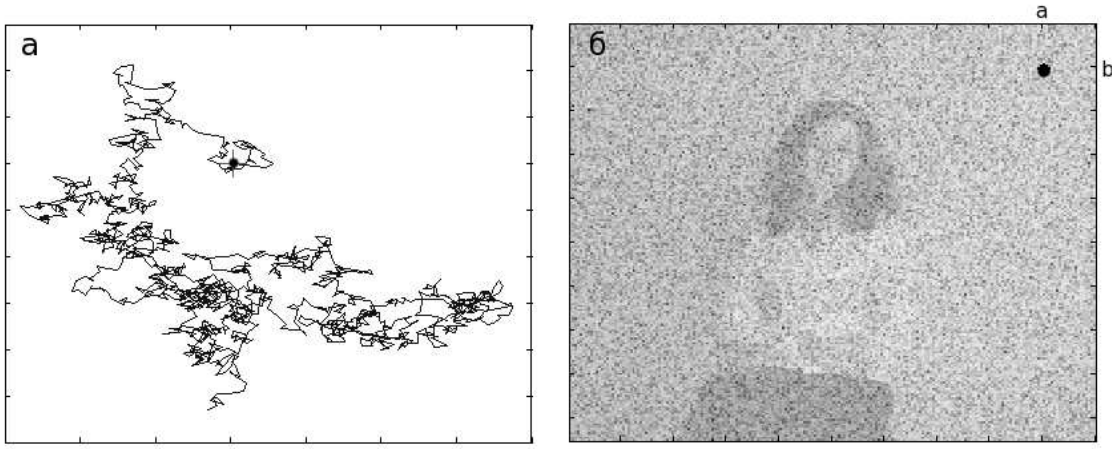


Рис. 2: Броуновское движение (а), изображение с гауссовским шумом (б).

Анализу временных рядов посвящены первые три главы курса. Фильтрации – следующие три главы. В седьмой главе мы познакомимся с нейронными сетями, тоже своего рода фильтрами, и кратко – с методами оптимизации, необходимыми для их настройки. Заключительную главу курса мы посвятим обратным задачам, рассмотрев их с позиций фильтрации. К каждой главе даются дополнительные примеры и упражнения. Не вошедшие в основной текст специальные сведения вынесены в приложения.

Существует немало способов изложения основ теории фильтрации. Так, основоположник кибернетики⁸ Н. Винер, использовал теорию групп и функциональный анализ, особое внимание уделяя инвариантным преобразованиям и теории вероятностной меры [10]. Он подчёркивал

⁷В реальных изображениях фотонный шум обычно пуассоновский $p(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$

⁸От греческого $\kappaυβερνητης$ - “кормчий”, “правлящий рулём”.

глубокую связь теории фильтрации с теорией информации, разрабатывавшейся им и другими авторами. Калман, создавая теорию рекуррентной фильтрации, особое внимание уделял динамическим системам, описывающим “поток причинно-следственных связей из прошлого в будущее” [22]. Мы не предполагаем знакомство слушателей с этими теориями, хотя оно и желательно. Поскольку данный курс в большей степени ориентирован на практическое применение в астрономии и геофизике, некоторые теоретические выкладки будут опущены, за ними можно обратиться к литературе (стр. 193). Однако для понимания курса, необходимо знакомство с анализом [20], [25], теориями вероятностей и случайных процессов [13], [41], [31], [47], [60], дифференциальными уравнениями [63], а также с теорией функций комплексной переменной (ТФКП) [46], без опоры на которые разработка теории фильтрации и обратных задач невозможна.

Итак, мы обсудили предмет, записали общую формулу (1). Однако для успешного решения задач фильтрации необходимы более конкретные сведения о природе объектов и целях их обработки.

► Пример 7): В отчете Межправительственной группы экспертов по изменению климата (МГЭИК) [94], представлены тренды⁹ изменений средней температуры и уровня моря глобально по земному шару. На рис. 3 черными кривыми представлены данные с 1850 г, сглаженные за десятилетия. Белыми точками – ежегодные средние. В зависимости от использованного сглаживания или фильтрации меняется разброс и, как следствие, восприятие кривых. Для того, чтобы судить, являются ли происходящие изменения следствием антропогенного влияния, или лишь частью циклических изменений долгопериодического характера, необходимо привлечение дополнительных данных на более протяженном интервале времени.

★ Упражнение 1): Пусть вдоль отрицательной полуоси (левого плеча весов) непрерывно распределена некоторая масса m с плотностью, задаваемой левой половиной гауссовского распределения (4). Где на положительной полуоси (правом плече весов) следует разместить эквивалентную точечную массу m , чтобы скомпенсировать непрерывную (выровнять весы)? Запишите выражение для центра масс такой системы с использованием обобщенных функций.

⁹Тренд, от англ. trend – тенденция, долговременная тенденция изменений временного ряда. Иногда полагают, что тренды должны описываться строго монотонными функциями. Мы будем допускать смену возрастания и убывания в трендах. При этом возможно понятие циклического тренда как части долгопериодического колебания [16].

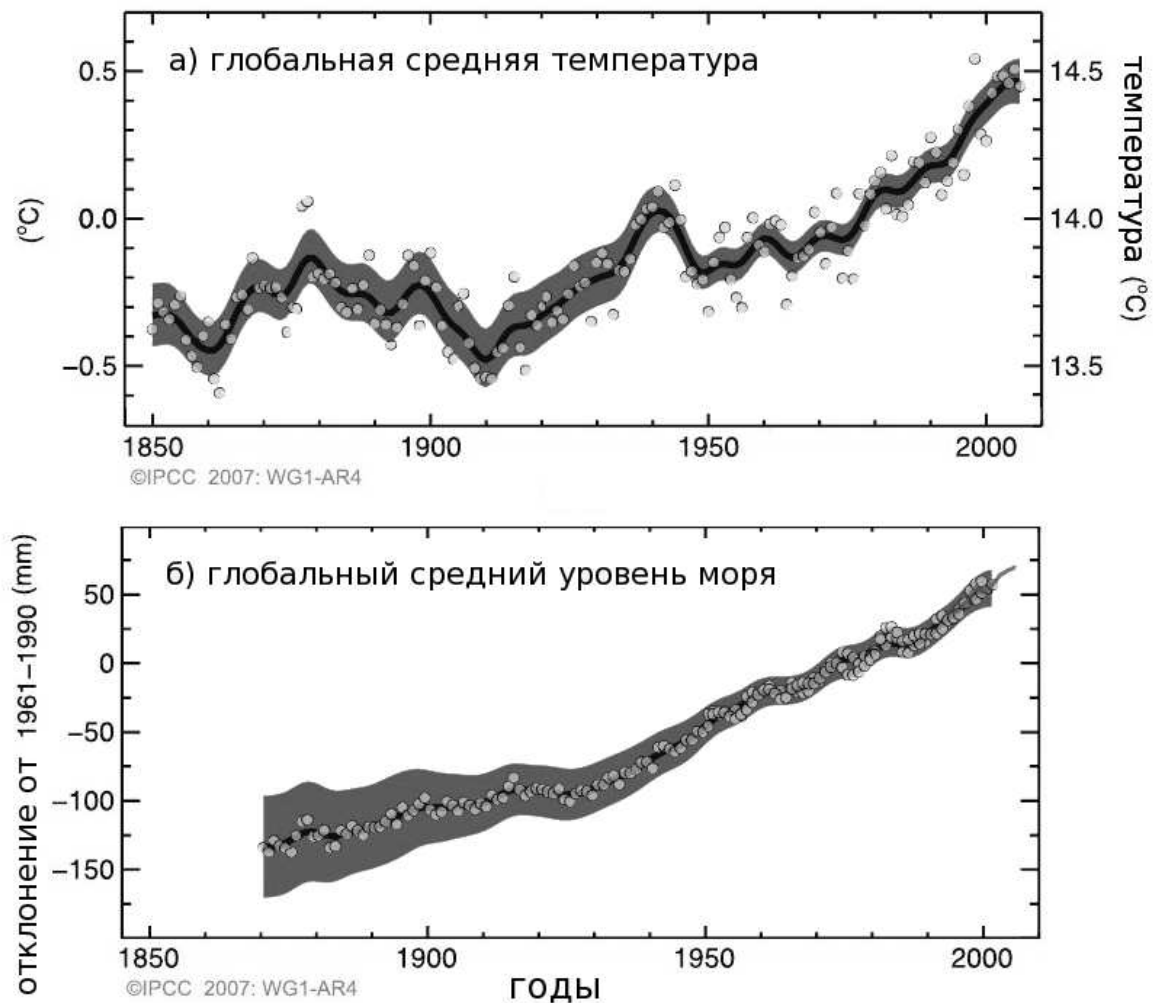


Рис. 3: Изменения глобальной средней температуры (а) и уровня моря (б) по данным МГЭИК [94].

Упражнение 2): В [44] приведены следующие определения: семейство $\{\Sigma\}$ подмножеств некоторого множества называется фильтром, если

- а) $\emptyset \notin \{\Sigma\}$,
- б) если $A \supset B$ и $B \in \{\Sigma\}$ то $A \in \{\Sigma\}$,
- с) если $A, B \in \{\Sigma\}$ то $A \cap B \in \{\Sigma\}$.

Если $\{\Sigma\}$ и $\{F\}$ — два фильтра, то говорят, что $\{\Sigma\}$ мажорирует $\{F\}$. Ультрафильтром называется фильтр, не мажорируемый никаким другим, кроме себя. Покажите, что фильтр подмножеств топологического пространства сходится к точке, если любая окрестность точки принадлежит фильтру. Обратите внимание, что для введения понятия фильтра необходимо некоторое отношение порядка.

Глава 1

Фурье-анализ

*Передо мною волны моря.
Их много. Им немислим счет.
Их тьма. Они шумят в миноре.
Прибой, как вафли, их печет.
Б. Пастернак*

Основным методом спектрального анализа сигналов является Фурье-анализ. Поскольку этот классический метод часто используется и служит основой для многих других, рассмотрим его подробно, вместе с историей становления.

1.1 История создания В 1807 г. Йозеф Фурье (1768-1830) представил решение уравнения теплопроводности [77]:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \Theta}{\partial^2 x}, \quad (1.1)$$

где $\Theta(x, t)$ – температура в момент t в точке x бесконечного стержня, k – коэффициент теплопроводности. В начальный момент $\Theta(x, 0) = f(x)$. Фурье рассмотрел стержень длины 2π , полагая что $\Theta(x, t)$ и $f(x)$ – 2π -периодичны, и что $f(x)$ может быть представлена в виде ряда

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

Решение было получено им при общем предположении, что все периодические функции представимы тригонометрическими рядами с коэффициентами

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Несмотря на то, что математики (Лагранж, Лаплас, Монж) отнеслись скептически к обобщению Фурье, в 1811 г. ему присудили приз

французской Академии наук за его мемуар. Результат Фурье был правилен. При начальном распределении температур решение представляется в виде конечной тригонометрической суммы. В приведённом Фурье доказательстве использовались правила дифференцирования и свёртки-произведения, обусловившие силу Фурье-анализа.

Неявное использование разложения в тригонометрические ряды можно усмотреть уже в построениях Птолемея и Коперника. Однако физические основы спектрального анализа, безусловно, возникли, когда проявилась волновая природа света и звука. В XIX и XX вв. было создано множество методов ручного вычисления амплитуд Фурье по значениям функций с использованием различных приёмов, таблиц, а также механических устройств для выполнения анализа зависимостей, заданных графически [45]. С появлением вычислительной техники необходимость в этих устройствах отпала, но ещё долгое время спектральный анализ больших рядов был операцией, трудоёмкой в вычислительном смысле. Ситуация изменилась с изобретением алгоритма *быстрого преобразования Фурье* (БПФ).

Строгая математическая теория Фурье-анализа развивалась до XX века включительно. Основной проблемой была сходимость и вопрос о том, каковы функции, представимые рядами Фурье. Спустя более 150 лет после открытия Фурье было доказано, что по коэффициентам Фурье можно восстановить любую непрерывную периодическую функцию и что всякая локально интегрируемая с квадратом периодическая функция имеет ряд Фурье, сходящийся почти всюду [20], [25].

1.2 Ряд Фурье В общем случае *рядом Фурье* по ортогональной системе действительных функций $g_k(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, называется представление функции $f(t)$, непрерывной на $[a, b]$, в виде сходящегося ряда [49]

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(t). \quad (1.2)$$

Если ряд (1.2) сходится равномерно на $[a, b]$, то коэффициенты даются выражением

$$c_k = \frac{\int_a^b f(t) g_k(t) dt}{\int_a^b (g_k(t))^2 dt} \quad \text{для } k \in N.$$

В качестве системы $g_k(t)$ чаще всего берется тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi t}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi t}{l}, \dots, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi t}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi t}{l}, \dots, \quad (1.3)$$

ортонормированная на отрезке $[-l, l]$. Тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ записывается в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad (1.4)$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt.$$

Ряд содержит бесконечное число членов. Для приближения функции можно использовать *частичную сумму* ряда Фурье

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^K \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right), \quad (1.5)$$

Определение амплитуд синусоидальных и косинусоидальных гармоник в сигнале может быть сведено к определению амплитуд и фаз косинусоидальных гармоник в силу представления, эквивалентного (1.4)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left(\frac{k\pi t}{l} - \varphi_k \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k} \leq 2\pi. \quad (1.6)$$

Таким образом, разложение временного ряда на отрезке $[-l, l]$ в ряд Фурье равнозначно вычислению параметров гармонической модели методом наименьших квадратов (МНК) [38]. Модель состоит из гармоник заданных периодов, укладывающихся целое число раз в длину ряда $2l$. Их амплитуды и фазы оцениваются. Нормальная матрица диагональна, вследствие ортонормированности компонент (см. гл. 8).

Используя формулы Эйлера (см. упр. 2.3)

$$\cos(kt) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \quad \sin(kt) = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}, \quad (1.7)$$

и обозначив переменную $\omega_k = \pi k/l$, ряд (1.4) можно представить в комплексном виде

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \quad (1.8)$$

$$c_k = c_{-k}^* = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{A_k}{2} e^{-i\varphi_k}.$$

Здесь и далее $*$ означает сопряжение. Ряд Фурье состоит из счётного набора гармоник. Самая долгопериодическая (основная) гармоника имеет период равный длине интервала $2l$. Поскольку в ряд Фурье входят только те гармоники, для которых выполнено $e^{i\omega_k t} = e^{i\omega_k(t+2l)}$, таким рядом может быть представлена $2l$ -периодическая функция. Функции, представимые рядом Фурье могут быть периодически продолжены на всю действительную ось R . Если функция $f(t)$ – комплексная, набором гармоник могут быть представлены её действительная и мнимая части.

1.3 Геометрический смысл Фурье-анализа Для непериодических функций, определённых на всей вещественной оси R необходим переход от ряда (1.2) к непрерывному преобразованию. Прежде чем сделать это, напомним, что полное¹ нормированное² пространство называется *банаховым*. Если определить скалярное произведение $(x \cdot y)$ в линейном³ пространстве, то пространство будет называться унитарным или евклидовым. Если полное евклидово пространство бесконечномерно, то оно носит имя Гильберта.

Типичным примером комплексного гильбертова пространства H является пространство интегрируемых с квадратом комплексных функций $L_2^C[-l, l]$, заданных на отрезке $[-l, l]$. В этом пространстве скалярное

¹Любая фундаментальная последовательность полного пространства сходится.

²В нормированном пространстве введено понятие нормы элемента $\|x\| > 0$.

³В линейном пространстве однозначно определены нулевой и единичный элементы, операции умножения на число и сложения элементов, результат которых принадлежит этому пространству. Подробные определения см. в [25].

произведение определяется интегралом

$$(f \cdot g) = \int_{-l}^l f(t)g^*(t)dt, \quad (1.9)$$

где звёздочкой справа над функцией обозначено комплексное сопряжение. Функция из этого пространства может быть разложена по полному счётному (избыточному или ортогональному) базису⁴. Пространство со счётным полным базисом называют сепарабельным [44]. По аналогии с (1.2), ортогональный базис из комплексных векторов g_k позволяет представить функцию в виде ряда Фурье

$$f = \sum_k (f \cdot g_k) \cdot g_k = \sum_k c_k \cdot g_k.$$

Если базис *ортонормированный*

$$(g_n \cdot g_m) = \delta_{n,m},$$

здесь справа стоит *символ Кронекера*⁵, то нормализация не требуется, и коэффициент c_k в (1.2) оказывается проекцией f на g_k , иными словами, k -координатой f в этом базисе.

Набор гармоник $\{e^{i\omega_k t}\}$ в (1.8) образует полный бесконечномерный счётный тригонометрический базис пространства функций, заданных на $[-l, l]$. Амплитуды c_k являются проекциями функции $f(t)$ на эти базисные гармоники, иными словами, координатами сигнала в этом базисе.

Другим примером гильбертова пространства является пространство интегрируемых с квадратом комплексных функций $L_2^C(R)$, заданных на действительной оси R . Скалярное произведение задается как и в случае $L_2^C[-l, l]$ интегралом, но с бесконечными пределами. Элементами пространства $L_2^C(R)$ могут быть и непериодические функции. В пределе $l \rightarrow \infty$ мы переходим от ряда (1.8) к таким функциям. Счетный набор периодических гармоник переходит в непрерывный набор гармоник всех возможных частот. Так мы приходим к преобразованию Фурье.

В отличие от пространства интегрируемых с квадратом функций, пространство абсолютно интегрируемых функций $L_1^C(R)$ является банаховым, но не является евклидовым, а следовательно, и гильбертовым.

⁴Некоторые авторы, например [56], применяют понятие базис только к конечным множествам, а бесконечные называют полным множеством. Мы будем использовать термин базис в обоих случаях.

⁵ $\delta_{n,m} = 1$ для $n = m$ иначе $\delta_{n,m} = 0$.

В нем нельзя определить норму как скалярное произведение. Оно не является сепарабельным. Однако, как мы увидим, преобразование Фурье определено и для функций из него.

1.4 Преобразование Фурье Для непрерывного преобразования Фурье будем использовать обозначение

$$\hat{f}(\omega) = (Ff)(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} f(t) dt \quad (1.10)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота.

Восстановление функции выполняется с использованием *обратного преобразования Фурье*

$$f(t) = (F^{-1}\hat{f})(t) = F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (1.11)$$

Иногда коэффициент $1/\sqrt{2\pi}$ переносят из обратного преобразования в прямое, добиваясь симметрии⁶. В этом случае выполняется $(Ff)(\omega) = (F^{-1}f)(-\omega)$.

Обратное преобразование или интеграл Фурье является обобщением ряда Фурье. Преобразование Фурье является непрерывным аналогом коэффициентов Фурье. Поскольку $|e^{it\omega}| = 1$, интеграл (1.10) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции $f(t) \in L_1^C(R)$. Можно показать, что преобразование Фурье определено для функций из $L_2^C(R)$, и даже более общих функций, хотя не все из них будут входить в $L_1^C(R)$ [25]. В случае гильбертова пространства $L_2^C(R)$ интеграл Фурье можно интерпретировать как разложение функции по непрерывному множеству комплексных гармоник $e^{it\omega}$. Коэффициент, определяющий меру присутствия гармоники некоторой частоты ω_0 в сигнале

$$\hat{f}(\omega_0) = (f \cdot g_{\omega_0}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} dt$$

можно воспринимать, как проекцию сигнала на неё, или как коэффициент корреляции сигнала с этой гармоникой.

⁶Избавиться от коэффициента $1/(2\pi)$ можно интегрированием по линейной частоте $d\nu$, вместо циклической $d\omega$.

Функция, заданная на отрезке, может быть дополнена в $L_2^C(R)$ нулевыми значениями вне отрезка, пределы интегрирования в (1.10) станут в этом случае конечными.

Квадрат модуля преобразования Фурье называют *спектральной плотностью* (энергии), модуль – *амплитудным спектром*, фазу – *фазовым спектром*. График спектральной плотности принято называть *спектрограммой* или *периодограммой* (как функции периода). В общем случае $\hat{f}(\omega)$ – непрерывная комплексная функция на R , своего рода плотность амплитуды гармоник по частоте. Она может быть отлична от нуля на всех частотах или в некотором их диапазоне. Область частот с положительной спектральной плотностью называется *носителем спектра*. Спектр может быть как непрерывным, так содержать и дискретную часть. Дискретный спектр, состоящий из δ -функций, соответствует отдельным гармоникам. Для действительных функций выполняется соотношение

$$(Ff)(\omega) = (Ff)^*(-\omega),$$

в этом случае ограничиваются рассмотрением спектра в положительной области частот (рис. 1.1).

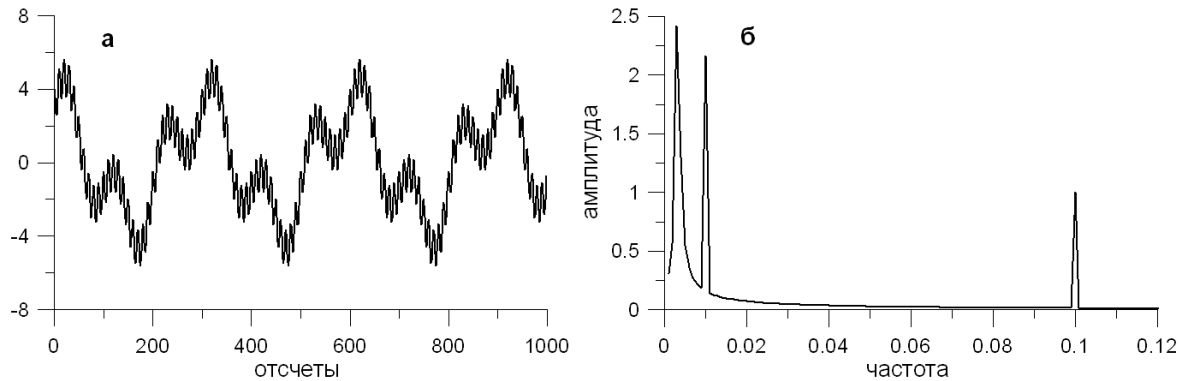


Рис. 1.1: Сигнал, состоящий из трех гармоник (а) и его спектр (б).

Важнейшие свойства Фурье-преобразования даются *теоремой о производной*

$$F\left\{\frac{d^k}{dt^k}f\right\} = (i\omega)^k(Ff)(\omega) \quad (1.12)$$

и *теоремой о свёртке*

$$F\{f * h\} = F\{f\} \cdot F\{h\}, \quad (1.13)$$

где точкой обозначено произведение, символом $*$ – свёртка

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

т.о. операция свёртки сводится в спектральной области к перемножению Фурье-образов участвующих в ней функций.

Согласно равенству Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}^*(\omega)d\omega$$

и его частному случаю – равенству Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

энергия сигнала не меняется при переходе из временной в частотную область⁷.

◇ Пример 1.1): Характеристическая функция отрезка

$$f(t) = 1_{[-T,T]}, \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{iT\omega} - e^{-iT\omega}}{i\omega} = \frac{2 \sin(T\omega)}{\omega}. \quad (1.14)$$

В частном случае, когда $T = 0.5$, можно записать⁸ $\hat{f}(\omega) = \text{sinc}(\nu) = \sin(\pi\nu)/\pi\nu$, где $\nu = \omega/2\pi$ – линейная частота, рис. 1.2а.

Пример 1.2): Дельта-функция Дирака $\delta(t)$

$$f(t) = \delta(t), \quad \hat{f}(\omega) = 1,$$

соответственно

$$F^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{\sin(Wt)}{\pi t} = \delta(t),$$

⁷Для ряда Фурье равенство Планшереля переходит в сумму $\|f\|^2 = (f \cdot f) = \sum_k a_k^2 (g_k \cdot g_k)$, являющуюся обобщением теоремы Пифагора.

⁸Вообще говоря, обратное преобразование Фурье функции $\text{sinc}(\cdot)$ дает в точках $-T$ и T значения $1/2$. Это те точки меры ноль, где разрывную функцию $1_{[-T,T]}$ не удаётся представить разложением Фурье (см. упр. 2.1).

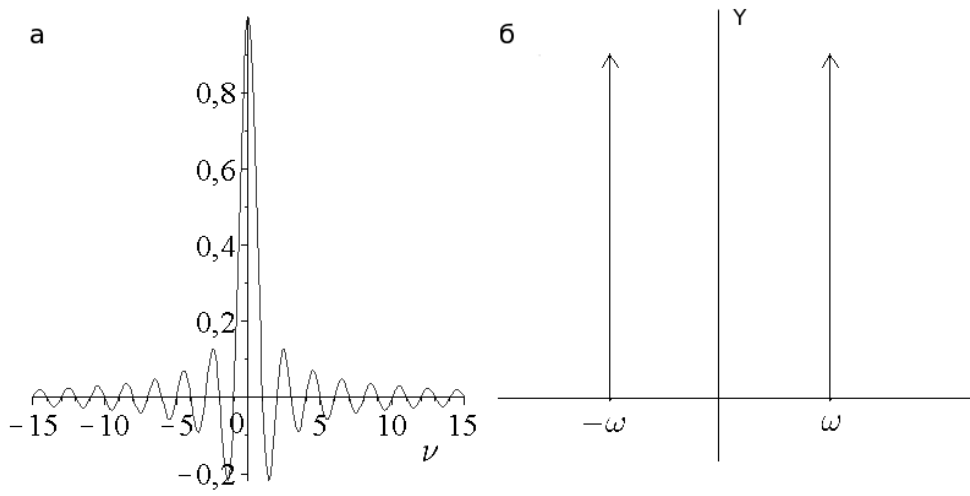


Рис. 1.2: Кардинальный синус $\text{sinc}(\nu)$ (1.14) при $T = 0.5$ (а) и спектр единичной гармоники (б).

$$\begin{aligned} \text{т.к.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Wt)}{t} dt = \pi, \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^t W \frac{\sin(Wt)}{\pi W t} dt &= \int_{-\infty}^{Wt} \frac{\sin(\tau)}{\pi \tau} d\tau \xrightarrow{W \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{W \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ 1, & (t > 0) \end{cases} = \chi(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau. \quad (1.15) \end{aligned}$$

Здесь $\chi(t)$ – ступенчатая *функция Хевисайда*.

Пример 1.3): Гармоника частоты ω_0 (спектр на рис. 1.2б)

$$f(t) = a \cos(\omega_0 t),$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t} \right) dt = \pi a (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)).$$



1.5 Принцип неопределённости Гейзенберга Из примеров видно, что бесконечная во времени синусоида имеет в спектральной области точечное представление, а точечная функция Дирака представляется бесконечным набором частот. На лицо в некотором смысле противоположность временного и частотного представления. Если попытаться отыскать функцию, наиболее компактную как во временной, так и в частотной области, то ей окажется функция Гаусса (см. приложение А)

$$f(t) = a e^{-bt^2}, \quad a, b = \text{const} > 0, \quad \hat{f}(\omega) = a \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}.$$

Её дисперсии во временной и частотной областях (2.7) связаны равенством

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{4}, \quad (1.16)$$

выполняющемся для всех функций, приводимых к виду $a \cdot \exp[i\xi t - b(t - u)^2]$, [59]. Для остальных функций имеет место неравенство

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 > \frac{1}{4}.$$

Таким образом, для частотно-временного представления любых функций выполняется принцип неопределенности Гейзенберга⁹. Уменьшение протяженности по частоте достигается только за счет увеличения длительности во времени и улучшения гладкости функции (окна). Функция Гаусса – наиболее компактный частотно-временной элемент (атом).

1.6 Дискретное преобразование Фурье Если функция дискретизована с шагом Δt как показано в (3), последовательность её отсчетов можно представить через произведение функции $f(t)$ и эквидистантных дельта-функций Дирака $\delta(t)$. Преобразование Фурье от дискретной функции можно записать в виде

$$\hat{f}_d(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) \Delta t \right] e^{-i\omega t} dt = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) e^{-i\omega k\Delta t}. \quad (1.17)$$

Фурье-преобразование можно обобщить на случай периодических функций с использованием δ -функций. Поскольку периодические функции представимы рядом Фурье (1.8), для них можно записать (пример 1.3)

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - \omega_k) \quad (1.18)$$

Из этого выражения видно, что периодическая функция имеет дискретный спектр, состоящий из δ -функций, умноженных на коэффициенты Фурье. Из симметрии прямого и обратного Фурье-преобразований сразу можно заключить, что дискретный сигнал, в свою очередь, имеет периодический спектр. Действительно, с использованием (1.18) можно показать, что спектр функции отсчетов является функцией отсчетов [71].

⁹Этот фундаментальный принцип хорошо известен в квантовой механике, где через волновую функцию он связывает энергию и время измерений, а также импульс и координату частицы.

С учётом этого, применяя теорему о свёртке к выражению в квадратных скобках в (1.17), получаем

$$\hat{f}_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta t}\right). \quad (1.19)$$

Отсюда видно, что спектр дискретизованного сигнала имеет периодический характер с периодом по частоте $2\pi/\Delta t$. В таблице 1.1 представлены типы спектров, соответствующих непрерывным и дискретным сигналам.

	f периодический	f непериодический (с конечной энергией)
f дискретный	\hat{f} дискретный и периодический	\hat{f} непрерывный и периодический
f непрерывный	\hat{f} дискретный и непериодический	\hat{f} непрерывный и непериодический

Таблица 1.1: Типы соответствия сигналов f и спектров \hat{f} .

Пусть имеется ряд наблюдений, содержащий N точек, нумеруемых с нуля. Такой конечный дискретный сигнал можно периодически (с периодом $N\Delta t$) продолжить на R , тогда $\hat{f}_d(\omega)$ становится дискретным по набору частот $\omega_n = 2\pi n/(N\Delta t)$, и сумма в (1.17)

$$\hat{f}_{dpf}(\omega_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)e^{-i\omega_n k\Delta t} = \frac{\hat{f}_d(\omega_n)}{\Delta t}$$

получает название *дискретного преобразования Фурье* (ДПФ) [74]. Прямое и обратное ДПФ имеют вид

$$\hat{f}(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t)e^{-i\frac{2\pi n}{N}k}, \quad f(k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(\omega_n)e^{i\frac{2\pi n}{N}k}$$

1.7 Быстрое преобразование Фурье Ряд наблюдений удобно представить в векторном виде $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$. Тогда прямое и обратное ДПФ запишутся в матричном виде [56]

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{W}_N \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \frac{1}{N} \overline{\mathbf{W}_N} \hat{\mathbf{f}},$$

где симметрическая матрица \mathbf{W}_N состоит из элементов $w_N^{nk} = e^{-i2\pi kn/N}$ (считаем $\Delta t = 1$). Индекс $n = 0 \dots N - 1$ меняется вдоль столбцов, а $k = 0 \dots N - 1$ – вдоль строк. В матрице $\overline{\mathbf{W}}_N$ все элементы комплексно сопряжены \overline{w}_N^{nk} . Вычисление каждого из преобразований потребует N^2 операций умножения. Для существенного сокращения вычислений можно воспользоваться БПФ. Если $N = 2M$ – кратно двум, ряд можно разбить на две последовательности четных и нечетных номеров $\mathbf{v} = (f_0, f_2, \dots, f_{N-2})^T$ и $\mathbf{u} = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})^T$. При этом для любого номера $m = 0, 1, \dots, M - 1$ выполняется (исходя из структуры \mathbf{W}_N)

$$\hat{\mathbf{f}}(m) = \hat{\mathbf{u}}(m) + e^{-2\pi i k/N} \hat{\mathbf{v}}(m),$$

$$\hat{\mathbf{f}}(m + M) = \hat{\mathbf{u}}(m) - e^{-2\pi i k/N} \hat{\mathbf{v}}(m).$$

С использованием этого свойства на каждом этапе вычислений число умножений сокращается до $(N^2 + N)/2$. Если N делится на четыре, скорость еще возрастает и т.д. Желательно, чтобы N было степенью двойки. Итоговая скорость БПФ оказывается пропорциональна $(N \log_2 N)/2$. Таким образом, к примеру, вычисление преобразования из 2^{18} точек становится более чем в 29000 раз быстрее (1 секунда вместо 8 часов). Обратим внимание на то, что в случае последовательности наблюдений в точках $(0, 1, \dots, N - 1)$, высокие частоты определяются функциями w_N^{nk} , когда $(n \approx N/2)$, а низкие частоты расположены по краям. Наоборот, для центрированной относительно нуля последовательности наблюдений в точках $(-M + 1, -M + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, M - 1, M)$ функции w_N^{nk} высокочастотны по краям (n около $\pm M$) и низкочастотны около нуля.

БПФ можно использовать для быстрого вычисления дискретной свёртки

$$(f * h)(k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i h_{k-i}. \quad (1.20)$$

В случае одинаковой периодичности и равного шага дискретизации f и h такая свёртка вычисляется как циклическая, когда значения с одного края продолжаются значениями с противоположного. [71].

1.8 Принцип Котельникова-Шеннона Спектр функции, заданной дискретно, хотя и является периодическим, может быть задан в ограниченной полосе частот

$$-\frac{1}{2\Delta t} \leq \nu \leq \frac{1}{2\Delta t}. \quad (1.21)$$

Частота $\nu = 1/(2\Delta t)$ носит название частоты Найквиста, это самая короткопериодическая гармоника, которая может присутствовать

в дискретизованном сигнале. Если $f(t)$ из $L_2(R)$ является функцией с ограниченной полосой частот, т.е. её преобразование Фурье имеет компактный носитель, положим $\hat{f}(\omega) \equiv 0$ для $|\omega| > \Omega$, тогда по теореме Котельникова-Шеннона¹⁰ такую функцию можно полностью восстановить по отсчетам, взятыми с интервалами $\Delta t = \pi/\Omega$ с использованием формулы

$$f(t) = \sum_{k \in Z} \Delta t f(k\Delta t) \frac{\sin(\Omega(t - k\Delta t))}{\pi(t - k\Delta t)} = \sum_{k \in Z} f\left(k\frac{\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega t - k\pi)}{\Omega t - k\pi}. \quad (1.22)$$

Действительно, если $\pi/\Delta t \leq \Omega$, то ни одна высокая частота, присутствующая в f , при дискретизации не теряется. Пусть $\Omega = \pi/\Delta t$ и характеристическая функция носителя спектра в частотной области имеет вид $1_{[-\Omega, \Omega]}$. Тогда во временной области ей соответствует функция

$$h(t) = F^{-1}\{1_{[-\Omega, \Omega]}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i\pi t} = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}.$$

Представляя дискретизацию f_d как домножение \hat{f} на прямоугольное окно \hat{h} , с учетом (1.17), по теореме о свёртке получаем

$$f(t) = F^{-1}\{\hat{f}\hat{h}\} = F^{-1}\{\Delta t \hat{f}_d \hat{h}\} = \Delta t f_d * h, \quad (1.23)$$

откуда следует формула (1.22), которая и является дискретным вариантом такой свёртки. В случае, если частота дискретизации выше требуемой теоремой, для восстановления сигнала можно использовать функцию, убывающую быстрее чем $\text{sinc}(\cdot)$. Если шаг выборки окажется больше, чем необходимо для сохранения в дискретном варианте функции всех её частотных составляющих, некоторые высокие частоты могут обнаружиться в областях низких частот, в силу эффекта наложения спектров (aliasing), рис. 1.3. Перетекание энергии любой высокочастотной гармоники $\omega_0 \geq \pi/\Delta t$ будет происходить согласно правилу (1.19), в котором нужно учесть коэффициент $1/\Delta t$ (домножить). При сгущении шага выборки (интерполяции) может иметь место обратный эффект [85].

¹⁰Обычно, в связи с этой теоремой, ссылаются на работы Виттакера Е.Т. 1915, Котельникова В.А. 1933, Виттакера Дж.М. 1935, Шеннона К.Э. 1949 г., но иногда упоминают и работу Г. Найквиста 1928 г., в которой вводится только частота Найквиста. Котельников был первым, кто записал точную формулировку теоремы для передачи сигнала.

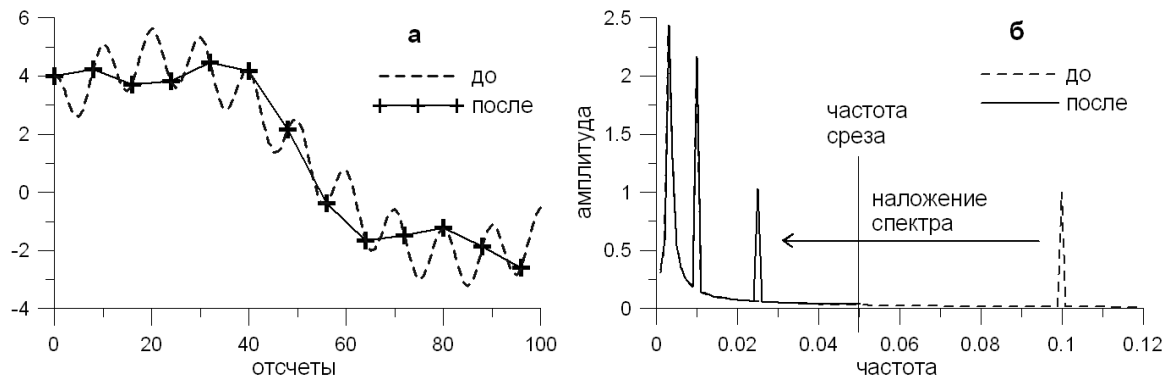


Рис. 1.3: Сигнал, представленный на рис. 1.1 до и после увеличения шага выборки (а) и эффект наложения (б).

1.9 Характеристики случайных процессов Перейдем от рассмотрения детерминированных сигналов к случайным процессам. Для их анализа требуется специальный подход [17]. *Случайную функцию $f(t)$* можно рассматривать как бесконечное множество случайных величин, каждая из которых реализуется (принимает определённое значение из пространства состояний) в свой момент t . Для полного описания такой функции нужно построить плотности вероятностей всех совместных распределений семейств этих случайных величин для разных моментов времени. В теории случайных процессов [41], [47], [60], выделяют *стационарные* в строгом смысле процессы, у которых характеризующие их распределения инвариантны относительно сдвига во времени $P_f(t) = P_f(t + \tau)$. Параметры таких процессов не меняются со временем. Если при этом существуют конечные первые и вторые моменты (процесс второго порядка, стационарный в широком смысле), они неизменны. Особенно удобно иметь дело с *гауссовскими* случайными процессами, плотности вероятности любого порядка которых нормальны. Такие процессы полностью характеризуются математическим ожиданием, дисперсией и ковариационным (корреляционным) моментом т.е. принадлежат к классу *линейных*. Смешанным моментом второго порядка является *автоковариационная функция*

$$K(t_1, t_2) = \langle [f(t_1) - \langle f(t_1) \rangle][f(t_2) - \langle f(t_2) \rangle] \rangle = \langle f_c(t_1)f_c(t_2) \rangle, \quad (1.24)$$

где треугольными скобками обозначено математическое ожидание $\langle f \rangle = M\{f\}$, а индексом c — *центрированная* случайная величина ($\langle f_c \rangle = 0$).

Автоковариационная функция стационарных случайных процессов зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$. Для стационарных процессов, автоковариационная функция которых неограниченно убывает по модулю¹¹, когда $|\tau| \rightarrow \infty$, справедлива эргодическая теорема, позволяющая заменить усреднение по вероятностному пространству усреднением по времени, в ходе которого процесс реализуется. Стационарный случайный процесс с такими свойствами называют *эргодическим*. Его автоковариационная функция может быть записана в виде

$$K(\tau) = \langle f_c(t)f_c(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_c(t)f_c(t + \tau)dt. \quad (1.25)$$

Автоковариационная функция характеризует линейную зависимость между значениями процесса в различные моменты времени. Дисперсия процесса $D_f = K(0)$. Для большинства случайных процессов, встречающихся на практике, зависимость между случайными значениями с ростом τ уменьшается, как того и требует эргодическая теорема. Их автоковариационная функция – убывающая функция с максимумом в нуле.

Для *белого шума*, значения которого по определению независимы, автоковариационная функция отлична от нуля только для $\tau = 0$, где её значение равно дисперсии белого шума. Выполнив нормировку

$$\kappa(\tau) = \frac{K(\tau)}{D_f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_{cn}(t)f_{cn}(t + \tau)dt,$$

где f_{cn} – центрированная и *нормированная* ($D_{f_{cn}} = 1$) случайная величина, приходим к *автокорреляционной функции*¹² (АКФ) $\kappa(\tau)$, значения которой лежат в диапазоне $[-1, 1]$. АКФ обладает многими интересными свойствами, из которых выделим свойство симметрии

$$\kappa(\tau) = \kappa(-\tau). \quad (1.26)$$

Это свойство позволяет ограничиваться рассмотрением АКФ для неотрицательных сдвигов.

¹¹Выполняется свойство эргодичности по отношению к автоковариационной функции.

¹²Аббревиатура АКФ подходит и для автоковариационной функции. Мы будем подразумевать под АКФ автокорреляционную функцию.

Если реализация процесса имеется на конечном отрезке времени $[0, T]$, несмещённую оценку АКФ можно получить по формуле

$$\bar{\kappa}(\tau) = \frac{1}{(T - \tau)} \int_{t=0}^{T-\tau} f_{cn}(t) f_{cn}(t + \tau) dt. \quad (1.27)$$

Очевидно, чем больше τ , тем меньше оставшийся интервал $T - \tau$, по которому оценивается АКФ, и тем меньше доверия заслуживают оценки для больших τ . Для уменьшения их роли вместо коэффициента $1/(T - \tau)$ используют $1/T$, при этом получается смещённая оценка АКФ. Часто по эмпирической оценке АКФ строится её модель для τ разумно меньших T , а “хвост”, приближающийся к нулю, отбрасывается. Для дискретного сигнала интеграл (1.27) заменяется суммой.

1.10 Спектральный анализ случайных процессов Непосредственное использование преобразования Фурье для случайных сигналов невозможно, т.к. в бесконечных пределах интеграл Фурье от них обычно не существует (расходится). Приблизненно представить имеющийся на интервале процесс в виде набора гармоник со случайными амплитудами и фазами всё же возможно (представление Райсса).

Доказана теорема Винера-Хинчина [31], согласно которой стационарная случайная функция допускает спектральное разложение. Для получения такого разложения выполняют преобразование Фурье автокорреляционной функции

$$G(\omega) = (F\kappa)(\omega) = \hat{\kappa}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.28)$$

Полученная величина носит название *спектральной плотности мощности*¹³ (СПМ). Она характеризует распределение энергии (дисперсии) случайного процесса по частотам. Для действительного случайного сигнала СПМ – действительная, чётная (состоящая только из косинусов), неотрицательная функция.

Интегрирование в (1.28) можно выполнять от нуля, принимая к учету свойство симметрии АКФ (1.26), при этом

$$G(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \kappa(t) e^{-i\omega t} dt.$$

¹³Мощность – энергия сигнала, нормированная на время.

Точно так же, для действительного сигнала часто используют *одностороннюю спектральную плотность*, которая определена на положительной полуоси $\omega \geq 0$ и в два раза больше двусторонней [33]. Удвоение необходимо для восстановления всей энергии АКФ как для положительного, так и для отрицательного t при обратном преобразовании Фурье.

По аналогии с функцией распределения в теории вероятности определяется *спектральная функция* – это интеграл от спектральной плотности для всех значений аргумента, меньших заданного. Для дискретных сигналов интегралы заменяются суммами. На конечном интервале реализации можно получить *выборочную* спектральную плотность.

1.11 Спектральный анализ с окном Недостатком представления (1.28) является то, что получаемые на его основе оценки выборочной спектральной плотности являются несостоятельными (с увеличением длины реализации дисперсии оценок амплитуд гармоник не уменьшаются), хотя и несмещенными (мат. ожидание оценки совпадает с оцениваемой величиной). Для уменьшения дисперсии можно выполнить усреднение, т.е. вычислить спектры на нескольких участках и усреднить их.

Для улучшения свойств (1.28) разработан метод Блэкмана-Тьюки построения сглаженной СПМ. Для её получения вводится корреляционное окно $w(t)$ (см. таблицу 1.2). После домножения АКФ во временной области на это окно, выполняется преобразование Фурье

$$G_w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\kappa(t)e^{-i\omega t}dt. \quad (1.29)$$

По теореме о свёртке такое преобразование может быть записано в виде

$$G_w(\omega) = F\{w(t)\kappa(t)\} = \hat{w}(\omega) * G(\omega). \quad (1.30)$$

Это означает, что в частотной области спектр сглаживается с окном $\hat{w}(\omega)$ (см. пример 2.1 в главе 2). Аналогичный эффект достигается использованием смещённой оценки АКФ (1.27), получающейся умножением на треугольное окно, либо её усечением. Такая методика избавляет от несостоятельности оценок, делает более достоверными основные особенности в спектре, хотя и уменьшает спектральное разрешение.

Другим подходом является т.н. *многооконный* (multitaper) подход, когда для повышения частотного разрешения и уменьшения *утечки* – эффекта, заключающегося в размывании энергии конкретной частоты по соседним частотам (см. пример 2.2), вызванного короткой временной протяженностью сигнала, его домножают на ортогональные окна,

Название	Вид во временной области	Вид в частотной области
Прямоугольное	$w_R(t) = 1_{[-T, T]} = \begin{cases} 1, & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\hat{w}_R(\omega) = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}$
Бартлета	$w_B(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T}, & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\hat{w}_B(\omega) = T \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^2$
Тьюки	$w_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi t}{T} \right), & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\hat{w}_T(\omega) = T \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right) \left(\frac{1}{1 - (\omega T / \pi)^2} \right)$
Парзена	$w_P(t) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{t}{T} \right)^2 + 6 \left(\frac{ t }{T} \right)^3, & t \leq \frac{T}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{ t }{T} \right)^3, & \frac{T}{2} < t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\hat{w}_P(\omega) = T \frac{3}{4} \left(\frac{\sin(\omega T / 4)}{\omega T / 4} \right)^4$

Таблица 1.2: Часто используемые окна.

которые вычисляются из условия максимизации энергии, заключенной в заданном диапазоне частот. Эти окна носят название слепиановских¹⁴ (Slepian) и, как и в методе Блекмана-Тьюки, улучшают точность спектральных оценок ценой их смещённости [69], [93].

Известны также параметрические методы спектрального оценивания случайного сигнала, в которых временной ряд моделируется некоторой параметрической моделью, а затем, по специальной методике, оценивается его спектр. Среди таких методов назовем авторегрессионный метод (см. пример 1.4, упр. 4-5), метод максимальной энтропии, метод Прони и др. Они подробно описаны в [36].

◇ Пример 1.4): Дискретный процесс авторегрессии и скользящего среднего (АРСС) задаётся в рекуррентном виде

$$x_i = - \sum_{k=1}^p \alpha_k x_{i-k} + \sum_{k=0}^q \beta_k n_{i-k}, \quad (1.31)$$

где n_i – случайная величина (некоррелированная), α_k – коэффициенты авторегрессии (АР), β_k – коэффициенты скользящего среднего (СС). Т.о. α_k и β_k являются параметрами АРСС [3].

Процесс скользящего среднего первого порядка – это белый шум. АР-процесс первого порядка – красный или броуновский шум со спектральной плотностью убывающей как $1/\omega^2$. Известны коррелированные

¹⁴Слепиановские функции называют также дискретной последовательностью вращения сфероида, они являются собственными векторами в задаче минимизации Релея-Ритца.

шумы различных цветов¹⁵: со спектром убывающим как $1/\omega$ – розовый или фликкер шум (пролёт вертолѐта), возрастающий как ω – синий шум, как ω^2 – фиолетовый, серый шум имеет равную во всех диапазонах громкость для человеческого уха и т.п. ♦

1.12 Кросскорреляционный анализ В приложениях широко используется взаимный спектральный или корреляционный анализ. Для двух стационарных случайных процессов χ и φ подобно (1.25) можно ввести взаимную ковариационную

$$K_{\chi\varphi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \chi_c(t) \varphi_c(t + \tau) dt \quad (1.32)$$

и корреляционную функции

$$\kappa_{\chi\varphi}(\tau) = \frac{K(\tau)}{\sqrt{D_\chi} \sqrt{D_\varphi}},$$

а затем вычислить взаимную спектральную плотность

$$G_{\chi\varphi}(\omega) = (F \kappa_{\chi\varphi})(\omega).$$

Отметим, что взаимная корреляционная функция не является чётной, но обладает свойством зеркальной симметрии

$$\kappa_{\chi\varphi}(\tau) = \kappa_{\varphi\chi}(-\tau),$$

следовательно её преобразование Фурье будет комплексной функцией, такой что

$$G_{\chi\varphi}(\omega) = G_{\varphi\chi}(-\omega) = G_{\varphi\chi}^*(\omega). \quad (1.33)$$

Взаимный корреляционный анализ позволяет судить о линейной зависимости между процессами. Модуль взаимного спектра показывает одновременное наличие в сигналах χ и φ случайных компонент, мощность которых сосредоточена на определённых частотах, а фаза взаимного спектра отражает запаздывание этих компонент друг относительно друга. Величина

$$\Psi_{\chi\varphi}(\omega) = \frac{|G_{\varphi\chi}(\omega)|^2}{G_{\varphi\varphi}(\omega) G_{\chi\chi}(\omega)} \quad (1.34)$$

носит название спектра когерентности. Она не превышает единицу и служит мерой корреляции сигналов на заданных частотах.

¹⁵Шумы с убывающими спектрами по частоте имеют окраски в теплые цвета, с возрастающим – в холодные.

1.13 Многомерный анализ Результаты теории легко распространяются на пространства двух и более измерений. Для полей или изображений (фотографий), зависящих от двух координат, преобразование Фурье выполняется с двумерной экспонентой – волной, распространяющейся в направлении θ и осциллирующей с частотой $p = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-ip(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Фурье-анализ в двумерной области сложнее, чем в одномерной, но значительно упрощается для сепарабельной функции

$$f(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2),$$

при этом

$$\hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \hat{g}(\omega_1)\hat{h}(\omega_2).$$

Распространение Фурье-анализа на поверхность сферы часто встречается в астрономии и геофизике в виде разложения по сферическим функциям. Преобразование Фурье переходит при этом в преобразование Лежандра. Однако из-за наличия на сфере особых точек – полюсов, применимость теоремы о свёртке ограничена [71].

Фундаментальным свойством тригонометрического базиса Фурье является то, что он диагонализует любое линейное инвариантное во времени преобразование. Это означает, что каждая гармоника является собственной функцией, а коэффициент при ней – собственным числом такого преобразования (см. гл. 4).

Классический спектральный анализ, как мы видим, основан на представлении сигнала в виде набора гармоник различных амплитуд, фаз и периодов. При разложении в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ частоты разложения задаются априорно (периоды делят $2l$ нацело), так чтобы обеспечить условие ортонормированности базиса (1.3). Для непериодических функций непрерывное преобразование Фурье даёт своего рода плотность распределения сигнала по частотам. В любом случае, колебания, которыми представляется сигнал, имеют постоянные на всей действительной оси амплитуды. Поэтому Фурье-анализ не позволяет адекватно судить о нестационарном сигнале. Когда спектральный состав сигнала меняется во времени, следует использовать

частотно-временной (или частотно-пространственный) анализ, речь о котором пойдёт в главе 2.

► Пример 1.5): В работе [107] представлен спектральный анализ палеоданных. Судить о климате Земли за 1 млн лет возможно на основе анализа отложений фораманифер на дне океана. На рис. 1.4а представлены исходные ряды по изотопу кислорода δO^{18} для отложений, добытых из скважины ODP 980 в северной Атлантике в рамках программ бурения Ocean Drilling Program (ODP). Количество этого изотопа медленно растёт вместе с похолоданием климата и достигает максимума на пике ледниковых периодов, после чего, в связи с резким таянием льдов и потеплением, спадает. Около 20 тыс. лет назад закончился ледниковый период и сейчас мы живём в эпоху межледниковья. На рис. 1.4б показана оценка СПМ, полученная методом Блекмана-Тьюки с окном Бартлетта. Выявлены основные циклы (пики в спектре) с периодами около 20, 40 и 100 тыс. лет, которые согласно гипотезе Миланковича связаны с изменениями параметров земной орбиты.

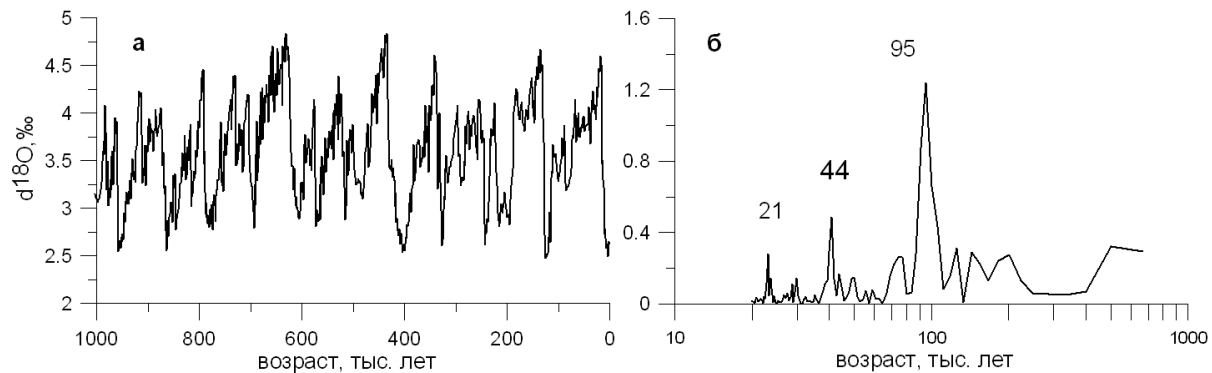


Рис. 1.4: Данные по изотопу δO^{18} из скважины ODP 980 (а) и оценка СПМ для них (б).

★ Упражнение 1-1): Докажите, что сдвиг исходного сигнала на τ сводится к домножению преобразования Фурье на $e^{-i\omega\tau}$

$$F\{f(t - \tau)\} = e^{-i\omega\tau} F\{f(t)\}$$

Упражнение 1-2): Покажите, что формулы Эйлера (1.7) эквивалентны выражению $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, лежащему в основе полярного представления комплексных чисел.

Упражнение 1-3): Покажите, используя упр. 1-2, что в общем случае

$$F\{f^*\}(\omega) = F\{f\}^*(-\omega).$$

Упражнение 1-4): Докажите, что для вещественной функции вещественная часть Фурье-преобразования – четная, а мнимая – нечетная функции, а соответствующие составляющие ряда Фурье имеют в составе только гармоники $\cos(\cdot)$ либо $\sin(\cdot)$. Покажите также, что спектр взаимной ковариационной функции дается выражением

$$G_{\chi\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\chi\varphi}(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} B_{\chi\varphi}(t) \sin(\omega t) dt,$$

где $A_{\chi\varphi}(t) = [\kappa_{\chi\varphi}(t) + \kappa_{\varphi\chi}(t)]/2$, $B_{\chi\varphi}(t) = [\kappa_{\chi\varphi}(t) - \kappa_{\varphi\chi}(t)]/2$.

Упражнение 1-5): В теории вероятностей характеристическая функция случайной величины x определяется как математическое ожидание $g(\lambda) = M\{e^{i\lambda x}\}$, и рассматривается как функция параметра λ . С использованием плотности вероятности $p(x)$ её можно записать в виде $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} p(x) dx$. Какова характеристическая функция случайной

величины, распределённой по нормальному закону?

Упражнение 1-6): Выполните спектральный анализ амплитудно-модулированного сигнала, покажите, что в спектре возникают боковые полосы согласно правилу

$$\begin{aligned} f(t) &= [a + b \sin(\omega_m t + \varphi)] \sin(\omega_c t) = \\ &= a \sin(\omega_c t) + \frac{b \cos((\omega_m - \omega_c)t + \varphi)}{2} - \frac{b \cos((\omega_m + \omega_c)t + \varphi)}{2} \end{aligned}$$

Упражнение 1-7): Найдите решение уравнения теплопроводности (диффузии) (1.1) с помощью преобразования Фурье.

Упражнение 1-8): Объясните, почему норма в $L_1^C(R)$ не может быть задана скалярным произведением, как в $L_2^C(R)$.

Упражнение 1-9): Перепишите выражение для АКФ (1.27) в виде свёртки.

Упражнение 1-10): Используя теорему о свёртке, покажите, к чему приведет дискретизация с неравномерным шагом. Рассмотрите случай интерферометра, когда данные имеются на двух интервалах разделенных промежутком [12], [106].

Упражнение 1-11): Исходя из принципа Гюйгенса, опишите, как Фурье анализ и теорема о свёртке работают для световых волн $ae^{i(kr - \omega t + \alpha)}$, распространяющихся сквозь отверстие.

Глава 2

Вейвлет-анализ

*От нашего рождения до смерти
На рост уходит три десятых срока,
И на распад – другие три десятых.
А из того, что нам дано для жизни,
Мы, суетясь, бросаем той же смерти
От разности опять же три десятых.
Так мы неосмотрительно, бездумно
Перерасходуем живую силу.
Лао-Цзы, “Дао дэ цзин”, 139,
перевод В. Перелешина*

Методы анализа основываются на умении разложить исследуемый объект или сигнал на составляющие. Если мы умеем это делать в подходящем базисе, выполнить фильтрацию не составит труда. В этой главе мы рассмотрим частотно-временной анализ сигналов. Однако прежде заметим, что с основным предметом нашего курса – с фильтрами, мы столкнулись уже в прошлой главе. Поскольку в дальнейшем нам не удастся обойтись без понимания того, что же такое фильтр, приведем основное определение и подробнее разберем примеры главы 1.

В многообразном мире фильтров наиболее изученными представителями являются линейные инвариантные во времени фильтры. О свойстве линейности уже шла речь (2). Инвариантность во времени означает, что задержка входного сигнала влечет задержку выходного

$$\text{если } f_{\Phi}(t) = \Phi f(t), \quad \text{то } f_{\Phi}(t - \tau) = \Phi f(t - \tau).$$

Указанными свойствами обладает оператор свертки (1.13), который и определяет линейный инвариантный во времени фильтр

$$\Phi\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t - \tau)d\tau = h * f. \quad (2.1)$$

Функция $h(t) = \Phi\delta(t)$ носит название импульсной характеристики фильтра, т.е. является откликом фильтра на импульс $\delta(t)$. Её также называют окном, сглаживающей весовой функцией, ядром оператора свёртки или функцией Грина (см. гл. 4).

Частотная фильтрация, заключается в подавлении определённых спектральных составляющих, соответствующих, к примеру, шумам, и пропускании полезных частотных составляющих. *Фильтр нижних частот* (ФНЧ) пропускает низкочастотные составляющие, т.е. сглаживает сигнал. *Фильтр верхних частот* (ФВЧ) пропускает высокочастотные составляющие.

◇ Пример 2.1): В метод Блэкмана-Тьюки, который встретился нам в разделе 1.11, спектр сглаживается. В выражении (1.29) в качестве импульсной характеристикой фильтра выступает Фурье-образ окна $\hat{w}(\omega)$. В соответствии с принципом неопределенности, чем протяжённее временное окно $w(t)$, т.е. длиннее анализируемый отрезок АКФ, тем компактнее $\hat{w}(\omega)$ и выше разрешение спектральных составляющих.

Пример 2.2): Рассмотрим эффекты, возникающие при домножении сигнала или спектра на прямоугольное окно. Первый случай может быть проиллюстрирован взятием сигнала на конечном интервале $[-l, l]$. Второй – дискретизацией сигнала, не допускающей в спектре частот выше частоты Найквиста $\nu = 1/(2\Delta t)$ (своего рода ФНЧ), либо приближением периодической функции частичной суммой ряда Фурье (1.5). Прямоугольному окну в спектральной области $1_{[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]}$ соответствует

$$h(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t/\Delta t)}{\pi t}. \quad (2.2)$$

во временной, и наоборот. Следовательно, домножение на прямоугольное окно в одной области соответствует свёртке с кардинальным синусом (2.2) в другой. Примерами могут быть: а) свёртка (1.23) при восстановлении аналогового сигнала из дискретной последовательности в соответствии с теоремой Котельникова-Шеннона (1.22). б) Эффект утечки, заключающийся в том, что, при взятии ограниченного во времени сигнала (домножении на временное окно), спектр сглаживается (с соответствующим окном в спектральной области) и спектральные составляющие определённых частот проникают на соседние частоты. При этом, в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга, спектральное разрешение тем лучше, чем протяжённее сигнал во времени. Наконец, в) эффект Гиббса – появление колебаний в точках разрыва функции при её аппроксимации конечной суммой ряда Фурье (домножение спектра на прямоугольное окно). *Колебание Гиббса* для прямоугольного окна

при включении разного количества гармоник показано на рис. 2.1. Оно легко объясняется с позиций свёртки сигнала во временной области с функцией (2.2). Включение всё более высоких частот сужает колебание, но амплитуда отклонения практически не меняется ($\sim 9\%$ от амплитуды скачка). Сходимость ряда Фурье в точке разрыва очень медленная и неравномерная. Эффект может наблюдаться на краях заданной на интервале функции, если её периодическое продолжение на всю ось терпит разрыв. Кардинальный синус (2.2) является функцией с “плохим” поведением: $\text{sinc}(\cdot)$ – бесконечно протяженная функция времени с бесконечной полной вариацией

$$\|h\|_V = \int_{-\infty}^{\infty} |h'(t)| dt = \infty.$$

Это заставляет избегать, где это возможно, резких срезов частот при фильтрации. При работе с реальными объектами стараются разработать фильтр, ведущий себя плавно в частотной области и соответствующий гладкому окну с разумной длительностью во времени (не превышающей интервал наблюдений). ♦

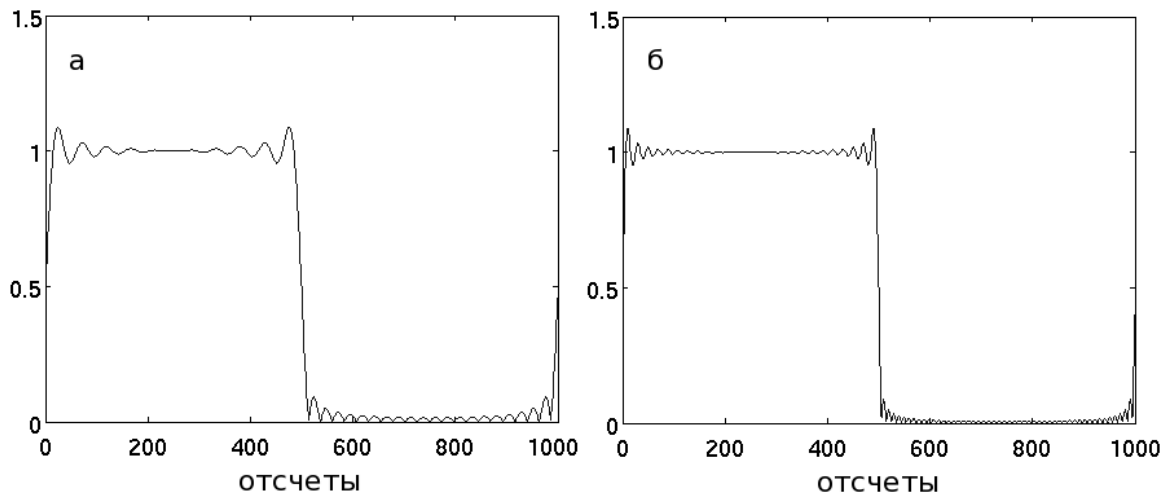


Рис. 2.1: Эффект Гиббса в точках разрыва для разных частот обрезания.

2.1 Оконное преобразование Что, если спектральный состав сигнала меняется во времени, как модифицировать для данного случая Фурье-анализ? Ответ найден природой: человек способен различать инструменты в оркестре, играющие каждый свою партию в своё время. Осталось лишь перевести решение на язык математики. Первое, что приходит на ум – разбить сигнал на участки и выполнять спектральный

анализ на каждом из них по отдельности. Следуя по этому пути можно сопоставить сигналу $f(t)$ двумерную функцию – *оконное преобразование*

$$S_g f(\omega, t) = (f \cdot g_{\omega, t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g_{\omega, t}^* d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(\tau - t) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.3)$$

где $g_{\omega, t} = g(\tau - t) e^{i\omega\tau}$, а $g(t)$ – временное окно, локализирующее $f(t)$ по аргументу (модулирующее амплитуду колебания $e^{i\omega t}$). Преобразование, где в качестве окна используется функция Гаусса $g(t) = e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$, носит имя Габора. Параметр α определяет меру временного разрешения окна σ_t^2 , связанную с частотным разрешением σ_ω^2 соотношением Гейзенберга (1.16). Квадрат модуля оконного преобразования Габора $|S_g f(\omega, t)|^2$ характеризует энергию сигнала в частотно-временной окрестности (ω, t) .

Базис, составленный функциями $g_{\omega, t}$ полон, хотя и избыточен. Для любой f из $L_2^C(R)$ можно записать аналог формулы Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_g f_1(\omega, t) S_g^* f_2(\omega, t) d\omega dt = 2\pi \|g\|^2 (f_1 \cdot f_2), \quad (2.4)$$

а значит восстановить функцию по её разложению $S_g f(\omega, t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_g f(\omega, t) g_{\omega, t} d\omega dt,$$

здесь $\|g\|^2$ – полная энергия окна. Процедура восстановления устойчива.

Спектральный анализ в скользящем временном окне широко используется, в частности, в геофизике под названием *спектрально-временного анализа* (СВАН). Его применение имеет некоторые масштабные особенности. Если представить на плоскости (ω, t) частотно-временное разрешение оконного преобразования (2.3) *прямоугольником Гейзенберга* с центром в (ω_0, t_0) и сторонами $(2\sigma_\omega, 2\sigma_t)$, то вид этого прямоугольника не будет зависеть от частоты и сдвига (рис. 2.3а). Спектральное разрешение жестко связано с длиной окна, которое постоянно. Оконное преобразование не обладает свойством адаптироваться к сигналу на разных частотах.

◇ Пример 2.3): Если в преобразовании (2.3) зафиксировать время, то мы получим преобразование Фурье сигнала, локализованного

в окне $g(t)$. Если же зафиксировать частоту $\omega = \omega_0$, то для симметричной $g(t)$ преобразование (2.3) можно записать в виде свертки

$$S_g f(\omega_0, t) = \frac{1}{e^{i\omega_0 t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) e^{i\omega_0(t-\tau)} d\tau. \quad (2.5)$$

Таким образом, для фиксированной частоты оконное преобразование – полосовой фильтр с центром на этой частоте. Огибающая отфильтрованного таким способом сигнала может быть получена как модуль преобразования Габора $S_g f(\omega_0, t)$, а изменения фазы – как аргумент преобразования (2.5), домноженного на $e^{i\omega_0 t}$. Если выбрать полосу пропускания фильтра достаточно широкой, можно изучать поведение амплитуды и фазы исходного сигнала во времени. На рис. 2.2 показаны полученные таким способом огибающая и фаза чандлеровской компоненты движения полюса Земли из работы [108]. ♦

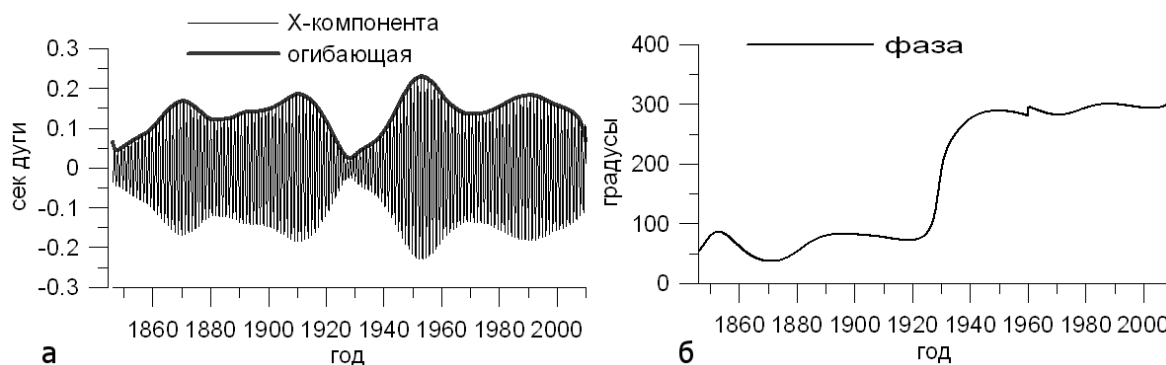


Рис. 2.2: Огибающая (а) и фаза (б) чандлеровского колебания.

2.2 Непрерывный вейвлет-анализ На высоких частотах изменения сигнала могут происходить быстрее, чем на низких. Как создать окно, временное разрешение которого возрастало бы с увеличением частоты? Очевидно нужно менять его длину обратно пропорционально частоте. Эта идея была реализована в вейвлет-преобразовании

$$W_\psi f(a, b) = (f \cdot \psi_{a,b}) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt,$$

где $\psi(t)$ – материнская вейвлет-функция

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right),$$

сдвигаемая и масштабируемая с *масштабным фактором* a и *параметром сдвига* b . “Вейвлет” в переводе означает “маленькая волна”. Это колебание, локализованное во времени и убывающее по краям тем быстрее, чем больше частота. Положение вейвлета на временной оси регулируется параметром b . С уменьшением масштаба a частота увеличивается, а длительность вейвлет-окна во времени становится всё меньше, позволяя обнаруживать быстрые изменения сигнала. Область сосредоточения вейвлета единичного масштаба без сдвига на частотно-временной плоскости может быть представлена прямоугольником Гейзенберга с центром в (m_ω, m_t) , где средние значения¹ по частоте и по времени определяются выражениями

$$m_\omega = \frac{1}{2\pi||\psi||^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega,$$

$$m_t = \frac{1}{||\psi||^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt, \quad (2.6)$$

здесь $||\psi(t)||^2 = 2\pi||\hat{\psi}(\omega)||^2$ – полная энергия. Прямоугольник имеет эффективные размеры² $(2\sigma_\omega, 2\sigma_t)$. Радиусы во временной и частотной областях определяются выражениями для их квадратов

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi||\psi(\omega)||^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - m_\omega)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega.$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{||\psi(t)||^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - m_t)^2 |\psi(t)|^2 dt. \quad (2.7)$$

Здесь $||\psi(t)||^2 = 2\pi||\hat{\psi}(\omega)||^2$ – полная энергия. При смещении на b и изменении масштаба a , частотно-временное окно (прямоугольник Гейзенберга), соответствующее $\psi_{a,b}$, смещается в точку $(m_\omega/a, b + am_t)$ и приобретает эффективные размеры $(2\sigma_\omega/a, 2a\sigma_t)$, рис. 2.3б.

¹Аналоги среднего импульса и среднего положения частицы в квантовой механике.

²В качестве характерных (эффективных) размеров прямоугольника Гейзенберга мы принимаем удвоенные временной и частотный радиусы [11]. Это удобно при сопоставлении с шагом дискретизации и частотой Найквиста. В некоторых работах коэффициент 2 не используется [35] или используются квадраты радиусов.

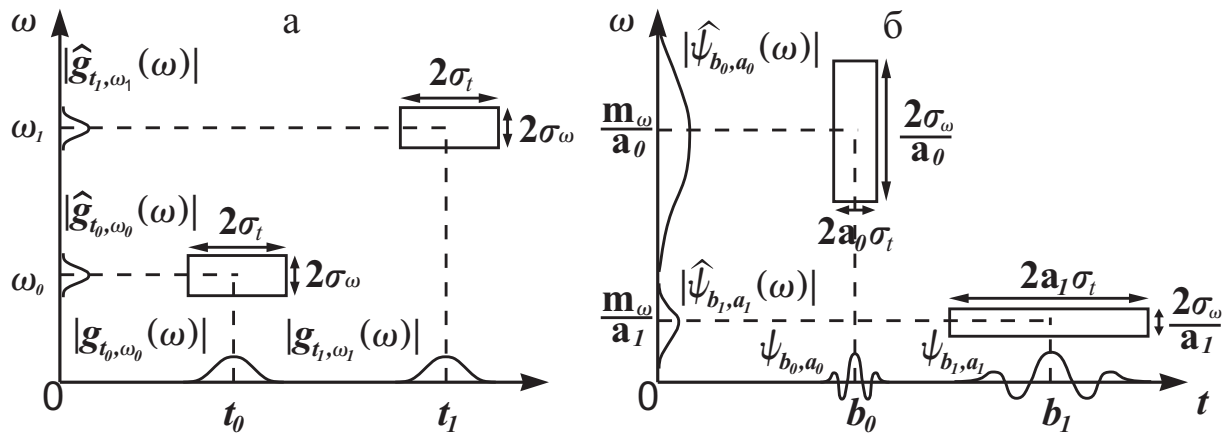


Рис. 2.3: Прямоугольники Гейзенберга для оконного преобразования (а) и вейвлет-преобразования (б) [35].

Для восстановления функции по её вейвлет-преобразованию необходимо, чтобы выполнялось условие допустимости вейвлет-функции

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (2.8)$$

Данное условие для $\psi \in L_1(R)$ выполнено, если Фурье-преобразование $\hat{\psi}$ непрерывно и $\hat{\psi}(0) = 0$ или, что равнозначно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (2.9)$$

Общая формула, аналог (2.4), запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dad b}{a^2} W_\psi f_1(a, b) W_\psi^* f_2(a, b) = C_\psi (f_1 \cdot f_2),$$

откуда следует формула обращения

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dad b}{a^2} W_\psi f(a, b) \psi_{a, b}. \quad (2.10)$$

Вейвлет-преобразование, так же как и оконное преобразование, позволяет представить сигнал набором частотно-временных атомов – волновых функций, локализованных по ω и t . Сдвиги и растяжения локализуют вейвлет-функции по времени и по частоте. Возникающий отсюда

вейвлет-базис является полным, хотя и избыточным. Он близок к базису Фурье, т.к. почти ортогонализует линейные инвариантные во времени преобразования [35], [59], [66].

2.3 Вейвлет-анализ как фильтрация Как вейвлет-преобразование, так и оконное преобразование могут быть записаны в виде свертки (2.1)

$$\begin{aligned} W_\psi f(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \tilde{\psi} \left(\frac{b-t}{a} \right) dt = f * \tilde{\psi}_{a,b}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где сделана замена $\tilde{\psi}(t) = \psi^*(-t)$. Это означает, что после сопряжения и отражения по t , модулированная окном волна $\tilde{g}_{\omega,t}$ и вейвлет $\tilde{\psi}$ могут рассматриваться как импульсные характеристики фильтров, а соответствующие преобразования – как фильтрация. Этот вывод можно обобщить, сказав что свёртка связана со скалярным произведением выражением

$$(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \tilde{h}^*(\tau - t) d\tau = (f \cdot \Delta_t \tilde{h}), \quad (2.12)$$

где Δ_t – оператор сдвига по времени на t , а $\tilde{h}(t)$ – сопряженное отражение импульсной характеристики. Тот факт, что вейвлет-преобразование может быть представлено как свёртка, позволяет в дискретном случае проводить быстрые вычисления с использованием БПФ (см. раздел 1.6).

Каждому масштабу a вейвлет-преобразования соответствует определенный частотный слой, который срезается с сигнала подобно очисткам с картофеля. Каждый такой слой имеет свой базис, основанный на растянутой в соответствии с масштабом a и сдвигаемой на b материнской вейвлет-функции. Остающиеся низкочастотные составляющие могут быть разложены по базису, построенному на основе *масштабирующей функции* (см. раздел 2.6 и упр. 2-2), модуль Фурье-преобразования которой определяется выражением

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(x)|^2}{x} dx,$$

а фаза произвольна [35]. Масштабирующая функция ортогональна вейвлет-функции и может быть интерпретирована как импульсная характеристика низкочастотного фильтра, аппроксимирующего сигнал до

масштаба a . Используя замену $\tilde{\varphi}(t) = \varphi^*(-t)$, запишем низкочастотную аппроксимацию f

$$W_{\varphi}f(a, b) = f * \tilde{\varphi}_{a,b}.$$

Исследуемый сигнал может быть представлен в виде суммы низкочастотной аппроксимации до масштаба a_0 и набора более высокочастотных слоёв.

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{a_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dad b}{a^2} W_{\psi}f(a, b) \psi_{a,b} + \frac{1}{C_{\psi}a_0} W_{\varphi}f(a_0, b) * \varphi_{a_0,b}. \quad (2.13)$$

Поскольку для анализа сигнал необходимо разложить, а восстанавливать нет необходимости, рассмотрим вначале подробнее вейвлет-разложения.

2.4 Анализ сигналов с использованием вейвлетов Материнский вейвлет в общем случае – комплекснозначная функция, позволяющая изучать амплитудную и фазовую компоненты сигнала на основе модуля и фазы вейвлет-преобразования

$$W_{\psi}f(a, b) = |W_{\psi}|e^{-i\varphi_W}.$$

Чаще всего используются *аналитические*³ вейвлеты, т.е. такие комплексные вейвлеты, Фурье-преобразование которых для отрицательных частот равно нулю. К примеру, вейвлет-функция Морле – модулированная гауссианой плоская волна, в общем виде задаваемая формулой

$$\psi(t) = e^{\frac{-t^2}{\sigma^2}} \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-\omega_0^2 \sigma^2 / 4} \right)$$

с преобразованием Фурье

$$\hat{\psi}(\omega) = \sigma\sqrt{\pi} \left(e^{-(\omega_0 - \omega)^2 \sigma^2 / 4} - e^{-(\omega_0^2 + \omega^2) \sigma^2 / 4} \right).$$

Обычно используют значения $\sigma^2 = 2$ и $\omega_0 = 2\pi$ [35]. Иногда вейвлет Морле упрощается до вида, представленного в таблице 2.1. Тогда $m_t = 0$, $\sigma_t = \sigma/2$. Аналитические оценки для его центра и радиуса в спектральной области вывести затруднительно [11]. Условие (2.8) для вейвлета

³ Аналитичность во встречающемся здесь смысле будет использована также в разделах 5.3, 5.7. Сигнал f является аналитическим, если $He\{f\} = -if$, где $He\{f(t)\} = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int \frac{f(t-\tau)}{t} d\tau$ - преобразование Гильберта-Нуанга, а п.в. означает главное значение. Другое понятие аналитичности используется в анализе, оно подразумевает сходимость ряда Тейлора к значению функции в каждой точке.

Морле не выполняется, а значит обращение невозможно, однако для анализа он вполне пригоден.

Если информация о фазе сигнала не интересует исследователя, можно воспользоваться действительной вейвлет-функцией. Типичным примером является вторая производная гауссианы (рис. 2.4), называемая “мексиканской шляпой” (МНАТ) и в нормированном виде задаваемая формулой

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{3}\sigma} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}},$$

с преобразованием Фурье

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{-\sqrt{8}\sqrt[4]{\pi}\sigma^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{3}} \omega^2 e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

Часто используемые вейвлет-функции представлены в таблице 2.1.

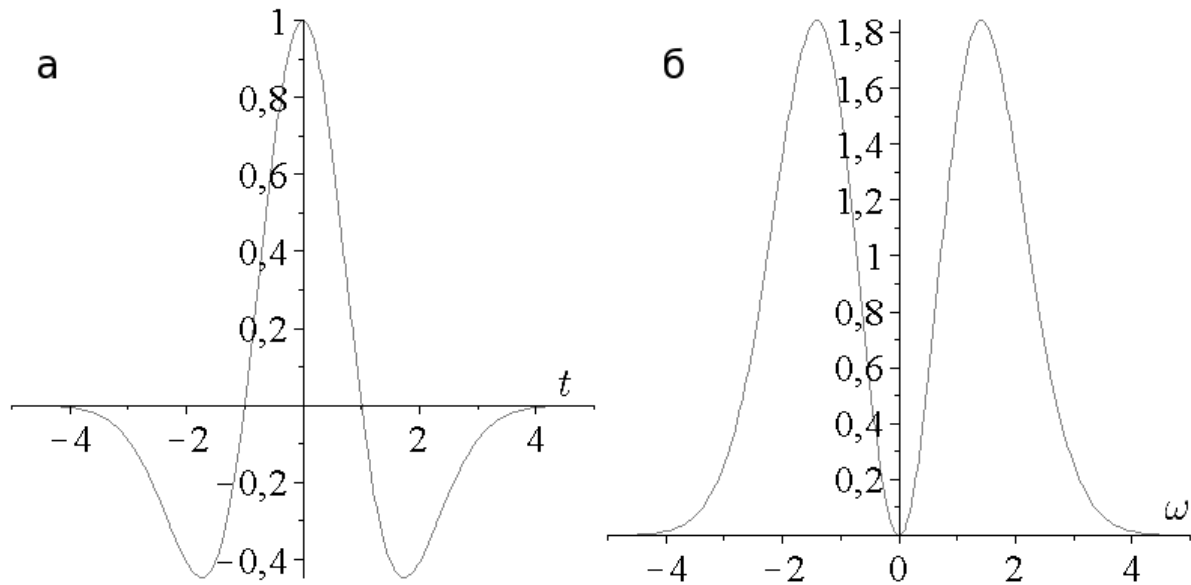


Рис. 2.4: МНАТ вейвлет (а) и его Фурье-преобразование (б).

Как уже говорилось, вейвлеты характеризуются своими средними значениями (2.6) и радиусами (2.7). Важной характеристикой является также количество нулевых моментов

$$p_t^k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt.$$

Говорят, что вейвлет имеет n нулевых моментов, если для всех $k = 0, \dots, n - 1$ они равны нулю. Первым нулевым моментом является условие допустимости (2.9). Можно показать, что если вейвлет имеет n нулевых моментов, то вейвлет-преобразование любого полинома до порядка $n - 1$ включительно будет равно нулю, а сам вейвлет может быть записан как производная n -го порядка некоторой быстро убывающей функции $\theta(t)$, несимметричной, если все остальные моменты ненулевые [35].

Название	Вид во временной области	Вид в частотной области
$Gauss^{(1)}(t)$	$-te^{-\frac{t^2}{2}}$	$i\sqrt{2\pi}\omega e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
$Gauss^{(2)}(t)$ (MHAT)	$(1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$	$-(i\omega)^2\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
$Gauss^{(n)}(t)$	$(-1)^{n-1}\frac{d^n}{dt^n}e^{-\frac{t^2}{2}}$	$(-1)^{n-1}(i\omega)^n\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
DOG (Diff. of gaussians)	$e^{-\frac{t^2}{2}} - 0.5e^{-\frac{t^2}{8}}$	$\sqrt{2\pi}(e^{-\frac{\omega^2}{2}} - e^{-2\omega^2})$
LP(Littlewood&Paley)	$(\pi t)^{-1}[\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)]$	$\begin{cases} 1 & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
Morlet	$e^{i\omega_0 t}e^{-\frac{t^2}{2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}}$
Paul	$\Gamma(n+1)\frac{i^n}{(i-n)^{n+1}}$	$\sigma_\omega\omega^n\sqrt{2\pi}e^{-\omega}$
HAAR	$\begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & t < 0, t > 1 \end{cases}$	$ie^{\frac{i\omega}{2}\frac{\sin^2(\omega/4)}{\omega/4}}$
FHAT	$\begin{cases} -1, t \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$	$\frac{4/3 \sin^3(\omega/3)}{\omega/3}$

Таблица 2.1: Часто используемые вейвлет-функции.

Квадрат модуля вейвлет-преобразования характеризует локальную частотно-временную энергию сигнала и называется *скейлограммой* (scalogram) Усреднённая по всем b энергия составляет *скейлеграмму* (scalegram). Это своего рода периодограмма с уменьшающимся для высоких частот разрешением. Если выделить хребты на скейлограмме, т.е. локальные максимумы по a и b , то соответствующий график будет называться *скелетоном* [11].

При анализе конечного во времени сигнала интегрирование заменяется суммированием. Если сигнал состоит из N отсчётов временного ряда

с равномерным шагом Δt $f_k = f(k\Delta t) = f(t_k)$, вейвлет-преобразование оценивается по формуле

$$W_\psi(a_i, b_j) = \frac{1}{\sqrt{a_i}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \psi^* \left(\frac{t_k - b_j}{a_i} \right) \quad (2.14)$$

на дискретном множестве сдвигов b_j и масштабов a_i , вопрос о выборе которых заслуживает особого внимания.

Масштабы дискретного сигнала имеет смысл выбирать в диапазоне

$$a_{min} = \frac{\Delta t}{\sigma_t}, \quad a_{max} = \frac{(N-1)\Delta t}{2\sigma_t},$$

где σ_t – радиус вейвлета единичного масштаба во временной области (2.7), так что гармонике Найквиста с периодом $2\Delta t$ соответствует вейвлет с эффективной шириной $2\sigma_t a_{min}$. Дискретизацию масштаба при этом можно выполнить с равномерным шагом

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{N_a - 1},$$

где N_a – желаемое число частотных срезов. Но лучше сделать логарифмическую выборку

$$a_i = a_{min} 2^{k\Delta a}, \quad k = 0 \dots N_a, \quad N_a = \frac{\log_2(N\Delta t/a_{min})}{\Delta a},$$

при этом рекомендуется выбирать $\Delta a \approx 2\sigma_\omega$, во избежание излишнего счёта с одной стороны, и потери частотного разрешения – с другой [11].

Смещение b_j ограничено снизу нулём $b_{min} \geq 0$, а сверху – длиной ряда $b_{max} \leq N\Delta t$. Для наилучшего временного разрешения можно использовать набор из $N_b = N$ сдвигов $b_j = 0, \Delta t \dots (N_b - 1)\Delta t$ с минимальным шагом Δt . Можно взять и меньше число сдвигов $N_b < N$ с равномерным шагом, не зависящим от масштаба

$$\Delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{N_b - 1}.$$

Вблизи границ временного ряда возникают краевые эффекты, поскольку там невозможно использовать всю длину анализирующего вейвлета. Чтобы избежать их влияния, следует сделать отступ от краёв на радиус вейвлета, выраженный в единицах Δb , т.е. на округлённое до большего число $N_s = [a_i \sigma_t / (2\Delta b)]$. Так мы получаем $N_b - 2N_s$ сдвигов для каждого масштаба. Поскольку с увеличением масштаба скорость изменения

сигнала обычно уменьшается, можно увеличивать временной шаг пропорционально масштабу, так что $\Delta b \sim a_i$. Это сокращает время счёта и используется в описываемом ниже диадном преобразовании.

Если интересующая исследователя область частот и характерный временной масштаб изменений в ней известны, всегда можно подобрать параметры вейвлета так, чтобы получить оптимальное, в рамках принципа неопределённости, разрешение в этой области.

Дискретизация непрерывного вейвлет-преобразования с произвольными наборами масштабов и сдвигов удобна для анализа сигнала, однако восстановление дискретного сигнала при этом затруднительно. Требуется создание специального базиса и изучение его избыточности.

2.5 Дискретное вейвлет-преобразование *Дискретным вейвлет-преобразованием* считают преобразование с диадными масштабами и сдвигами, когда дискретизация вейвлета осуществляется согласно правилу

$$\psi_{i,j}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^i}} \psi \left(\frac{t - j\Delta t a^i}{a^i} \right),$$

при этом сдвиг по времени $b_j = j\Delta t a^i$ выбирается пропорциональным масштабу a^i , который, в свою очередь, выбирается как степень двойки. Если в октаве $[2^i, 2^{i+1}]$ нужно обеспечить промежуточные масштабы, выбирают некоторое v и $a = 2^{1/v}$. При таком подходе вся частотно-временная плоскость оказывается покрыта прямоугольниками Гейзенберга в соответствии с их радиусами для каждого масштаба.

Для восстановления сигнала по дискретному преобразованию с вейвлет-функцией, удовлетворяющей условию допустимости (2.8), необходимо, чтобы существовали две конечные положительные константы A и B , характеризующие избыточность вейвлет-базиса, такие что

$$A \leq \frac{1}{t_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(a^k \omega)|^2 \leq B.$$

При этом набор $\psi_{i,j}$ называется *вейвлет-каркасом* или *фреймом* вейвлетов. Добеши [18] доказала, что для каркаса выполняется

$$A \leq \frac{C_\psi}{t_0 \ln a} \leq B.$$

Если границы каркаса равны $A = B$, то каркас называется жёстким, а если $A = B = 1$, то это ортонормированный базис, у которого нет избыточности.

◇ Пример 2.4): Базис на двумерной плоскости, состоящий из трёх векторов $o_1 = e_1$, $o_2 = -e_1/2 + e_2\sqrt{3}/2$, $o_3 = -e_1/2 - e_2\sqrt{3}/2$ – жёсткий каркас с границей $A = B = 3/2$, т.к. для любого вектора ρ

$$\sum_{k=1}^3 |(\rho \cdot o_k)|^2 = \frac{3}{2} \|\rho\|^2.$$



Коэффициенты дискретного вейвлет-преобразования вычисляются по формуле

$$W_\psi(a_i, b_j) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \psi_{i,j}^*(t_k) = f * \tilde{\psi}_{i,j},$$

где звёздочкой обозначена дискретная свёртка сигнала с функцией $\tilde{\psi}_{i,j}(t) = \psi_{i,j}^*(-t)$. Как и для непрерывного случая, можно ввести каркас масштабирующих функций $\varphi_{i,j}(t)$ и низкочастотную аппроксимацию сигнала

$$W_\varphi f(a_i, b_j) = f * \tilde{\varphi}_{i,j}.$$

Восстановление выполняется с использованием дискретной версии формулы (2.13)

$$f(k\Delta t) = \frac{\ln a}{C_\psi} \sum_{i=1}^I \frac{1}{a^i} W_\psi f(a_i, \cdot) * \psi_{i,j} + \frac{1}{C_\psi a_I} W_\varphi f(a_I, \cdot) * \varphi_{I,j}, \quad (2.15)$$

здесь точка обозначает переменную, по которой вычисляется свёртка.

Дискретный вейвлет-анализ не обладает инвариантностью относительно сдвига. Для её обеспечения создано двоичное вейвлет-преобразование, в котором дискретизируются только масштабы, а сдвиг непрерывен. Однако можно также построить полный ортонормированный базис на основе отмасштабированных и сдвинутых с параметрами $a^i = 2^i$ и $b_n^i = 2^i n$ вейвлетов для представления сигналов из $L_2(R)$. Так строятся вейвлет-базисы Хаара, Шеннона, Добеши и др. Рассмотрим подробнее разложение дискретных сигналов по такого рода базисам.

2.6 Каскады зеркальных фильтров Для вейвлетов, спроектированных подходящим образом, масштабирующие функции уровня i (масштаба 2^i) можно конструировать на основе масштабирующих функций предыдущего уровня $i-1$, сглаживая их с дискретной весовой функцией h низкочастотного фильтра, такой что $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$. Используя обозначения $\varphi_{i,k}(t) = \varphi(2^{-i}t - k)$, масштабирующую функцию следующего уровня

можно построить по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(t) = \sum_k h_k \varphi(2t - k), \quad \text{где} \quad h_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi \cdot \varphi_{-1,k}). \quad (2.16)$$

В частотной области такое сглаживание записывается как

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

При этом существует также фильтр g , позволяющий вычислять вейвлет-функции следующего уровня по масштабирующим функциям предыдущего уровня с использованием выражения

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi(t) = \sum_k g_k \varphi(2t - k), \quad \text{где} \quad g_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi \cdot \varphi_{-1,k}). \quad (2.17)$$

Или в частотной области

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

На основе записанных выше правил и конструируются вейвлет-базисы Хаара, Шеннона, Добеши. Создается система *зеркальных фильтров* – ФНЧ $h = \tilde{\psi}$ и ФВЧ $g = \tilde{\varphi}$ (тильдой обозначены сопряженные обращения соответствующих функций), последовательная фильтрация с которыми позволяет выполнять вейвлет-декомпозицию функции. На базе сопряженных зеркальных фильтров создаются *вейвлет-пакеты*, быстро и эффективно разбивающие сигнал на частотные составляющие. В частности, на этом основывается представленный ниже алгоритм с дырами (нулями) [35].

Пусть имеется четное число $N = 2M$ отсчетов сигнала f_0, f_1, \dots, f_{N-1} . Полный ортонормированный вейвлет-базис первого этапа строится на основе четных сдвигов Δ_{2k} двух порождающих функций – материнского ψ и *отцовского* φ вейвлетов. Матрица для всех $n = 0, 1, \dots, M - 1$ вида

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}(n) & \hat{\psi}(n) \\ \hat{\varphi}(n + M) & \hat{\psi}(n + M) \end{pmatrix}$$

должна быть унитарной (ее столбцы и строки – ортонормированные вектора). Множество материнских вейвлетов может быть построено из ортонормированного множества отцовских вейвлетов с использованием соотношения $\psi(k) = (-1)^{k-1} \varphi^*(1 - k)$. Таким образом, получается базис

$\Delta_{2k}\psi_{k=0}^{M-1} \cup \Delta_{2k}\varphi_{k=0}^{M-1}$. Материнские вейвлеты представляют высокочастотные компоненты, а отцовские – низкочастотные составляющие сигнала. Для разложения на первом этапе выполняется дискретная свертка сигнала f_d с векторами g и h , центрируемыми только в чётных точках. Она может быть записана с оператором сгущения (децимации) S в виде

$$S(f_d * h) = \{f_d * h(0), f_d * h(2), \dots, f_d * h(N-2)\}.$$

Так получаются два набора коэффициентов $A = S(f_d * g)$ и $D = S(f_d * h)$ низкочастотной и высокочастотной составляющих сигнала. Из этих коэффициентов можно восстановить сигнал по формуле

$$f_d = U(A) * \varphi + U(D) * \psi,$$

где U обозначает оператор разрежающей выборки, который удваивает размер вектора вставкой нуля между двумя смежными значениями ($U(2,3,5)=2,0,3,0,5$). Декомпозиция низкочастотной составляющей, в свою очередь, может быть выполнена на следующем этапе вейвлет-разложения, базис которого строится из базиса первого этапа (φ_1, ψ_1) по формуле $\varphi_2(n) = \varphi_1(n) + \varphi_1(n+M)$ (см. раздел 1.6), что эквивалентно $\hat{\varphi}_2(m) = \hat{\varphi}_1(2m)$ и т.д. Можно также воспользоваться каскадом фильтров и строить базис каждого следующего этапа по выводимым из (2.16), (2.17) формулам вида

$$\psi_l = \varphi_{l-1} * U^{l-1}\psi_l, \quad \varphi_l = \varphi_{l-1} * U^{l-1}\varphi_l.$$

Здесь использована степень оператора U . Если $N = 2^p$, так удастся построить p -этапную последовательность набора фильтров, дающую в итоге p высокочастотных срезов сигнала и одну низкочастотную аппроксимацию. Базис каждого уровня $i = 1, 2, \dots, p$, соответствующий масштабу 2^{-i} , даётся набором векторов в точках $j = 0, 1, \dots, (N/2^j) - 1$ в виде

$$\psi_{-i,j} = \Delta_{2^i j} \psi_{-i}, \quad \varphi_{-i,j} = \Delta_{2^i j} \varphi_{-i}.$$

Таким образом формируется система зеркальных фильтров g, h , которая позволяет построить т.н. *пирамиду* аппроксимаций A_i и детализаций D_i сигнала. Каждый уровень аппроксимации A_i вычисляется фильтрацией (свёрткой) предыдущего уровня аппроксимации A_{i-1} с g соответствующего уровня. Фильтрация сигнала с h позволяет последовательно нарезать сигнал на частотные слои – детализации, в низкочастотной аппроксимации при этом остаётся всё меньше высоких частот. С уменьшением частоты, для описания соответствующих детализаций и аппроксимаций требуется всё меньше точек. Восстановление сигнала выполняется с помощью двойственных фильтров \tilde{h} и \tilde{g} . Бывают случаи, когда

фильтры разложения и восстановления сигнала совпадают и порождают ортогональный базис. Если они не совпадают, но попарно ортогональны $g \perp \tilde{g}$ и $h \perp \tilde{h}$, то формируется биортогональный базис [99].

Под вейвлет-фильтрацией обычно понимают восстановление лишь полезных компонент сигнала после декомпозиции. Зная, к примеру, что шумы лежат в определённом частотном диапазоне, можно занулить вейвлет-коэффициенты соответствующих масштабов и восстановить сигнал без этих шумов. Нередко вводят порог для вейвлет-коэффициентов разных масштабов такой, что все коэффициенты ниже этого порога зануляются. Сигнал, восстановленный таким способом из значимых вейвлет-коэффициентов, можно считать подвергнутым некоторой нелинейной процедуре фильтрации. Подробно эти и другие случаи рассматриваются в соответствующей литературе [18], [35], [59], [81].

2.7 Кратно-масштабный анализ Вышесказанное обобщается концепцией кратно-масштабного анализа (КМА). Любой вейвлет порождает разложение $L_2(R)$ в прямую сумму подпространств. Для каждого $i \in Z$ обозначим через \mathbf{W}_i замыкание линейной оболочки, порожденной вейвлет-функциями одного масштаба

$$\mathbf{W}_i = \text{clos}_{L_2(R)}(\psi_{i,j} : j \in Z).$$

Тогда $L_2(R) = \sum_{i \in Z} \mathbf{W}_i$. Элементы этой суммы ортогональны для ортогонального вейвлета. Рассмотрим замкнутые подпространства, включающие оболочки всех масштабов меньше заданного

$$\mathbf{V}_i = \dots + \mathbf{W}_{i-2} + \mathbf{W}_{i-1} \quad i \in Z.$$

Они обладают следующими свойствами:

$$(1) \quad \dots \subset \mathbf{V}_{-2} \subset \mathbf{V}_{-1} \subset \mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_2 \subset \dots,$$

$$(2) \quad \bigcap_{i \in Z} \mathbf{V}_i = \{0\} \quad (3) \quad \text{clos}_{L_2(R)} \left(\bigcup_{i \in Z} \mathbf{V}_i \right) = L_2(R),$$

$$(4) \quad f \in \mathbf{V}_0 \leftrightarrow f(2^i \cdot) \in \mathbf{V}_i, \quad (5) \quad f \in \mathbf{V}_0 \leftrightarrow f(\cdot - j) \in \mathbf{V}_0.$$

Последнее свойство говорит о том, что все пространства являются масштабированными версиями одного и того же. Любая f может быть сколь угодно точно приближена своими проекциями $\text{Proj}_{\mathbf{V}_i} f$ на \mathbf{V}_i . При $i \rightarrow -\infty$ проекция $\text{Proj}_{\mathbf{V}_i} f$ содержит все меньше колебаний, которые срезаются в порядке уменьшения частот (увеличения периодов) и откладываются в пространствах \mathbf{W}_i . Если существует $\varphi \in \mathbf{V}_0$ такая, что

семейство $\varphi_{0,j}(t) = \varphi(t - j)$ образует ортонормированный базис в V_0 , то φ называется масштабирующей функцией.

Вейвлет-анализ, базирующийся на концепции КМА, напоминает кулинарию, когда с сигнала один за другим срезаются частотные слои, как листья с капусты.

2.8 Многомерный вейвлет-анализ Вейвлет-анализ легко обобщается на два и более измерений. Так, двумерный вейвлет имеет вид

$$\psi_{a,b_1,b_2} = \frac{1}{a} \psi \left(\frac{x_1 - b_1}{a}, \frac{x_2 - b_2}{a} \right).$$

При разложении двумерного пиксельного изображения, на каждом этапе на основе двумерных свёрток вычисляются три детализации и одна аппроксимация

$$a_{j+1} = a_j * hh, \quad d_{j+1}^1 = a_j * hg, \quad d_{j+1}^2 = a_j * gh, \quad d_{j+1}^3 = a_j * gg.$$

Сопряженные фильтры в сепарабельном случае вычисляются по соответствующим материнским и отцовским функциям, которые получаются умножением (вообще говоря, тензорным)

$$\phi^1 = \phi(x_1)\phi(x_2), \quad \psi^1 = \phi(x_1)\psi(x_2), \quad \psi^2 = \psi(x_1)\phi(x_2), \quad \psi^3 = \psi(x_1)\psi(x_2).$$

Такая факторизация позволяет вычислить коэффициенты, выполнив вначале свёртку по строкам, а затем по столбцам.

Появившийся в 80-х годах XX века и впитавший в себя идеи Фурье-анализа и квантовой механики вейвлет-анализ – мощное средство разложения сигнала по базисным функциям-всплескам. Его используют для исследования частотно-временного поведения меняющихся во времени сигналов, выделения слабых сигналов на фоне шумов. Он позволяет локализовать особенности, разрывы, оценивать гладкость и фрактальную размерность сигнала, эффективно представлять сигнал набором коэффициентов разложения, решать матричные уравнения [35]. Представление сигнала небольшим числом значимых вейвлет-коэффициентов нашло применение в алгоритмах сжатия данных. Хорошо известны компьютерные форматы видео и аудио данных MPEG4 и JPEG-2000, созданные на базе вейвлет-преобразования. Вейвлет-анализ был быстро адаптирован к дискретным вычислениям и широко применяется в Computer Science. Принцип его действия аналогичен действию уха, позволяющего услышать в музыкальном произведении вступающие и замолкающие инструменты, а также действию глаза, легко выделяющему контуры и

перепады изображения. Иногда его называют математическим микроскопом, поскольку масштабы подстраиваются под изменения сигнала. В астрономии вейвлет-анализ оказывается полезен при поиске планет у других звезд, пульсаров с появляющимися и исчезающими импульсами, транзитных событий, в исследованиях микроволнового фонового излучения ранней Вселенной и др. В геофизике он активно используется в сейсмологии, при изучении гравитационного, магнитного полей, изменения уровня моря и др. [92], [96].

► Пример 2.5): Наиболее мощными компонентами движения полюса Земли являются годовое и чандлеровское колебания. На рис. 2.5 представлен амплитудный спектр координат полюса и скейлограмма для X-координаты. Затухание чандлеровского колебания в 1930-е годы не находит отражение в Фурье-спектре (а) [85] и может быть выявлено только при частотно-временном анализе (б).

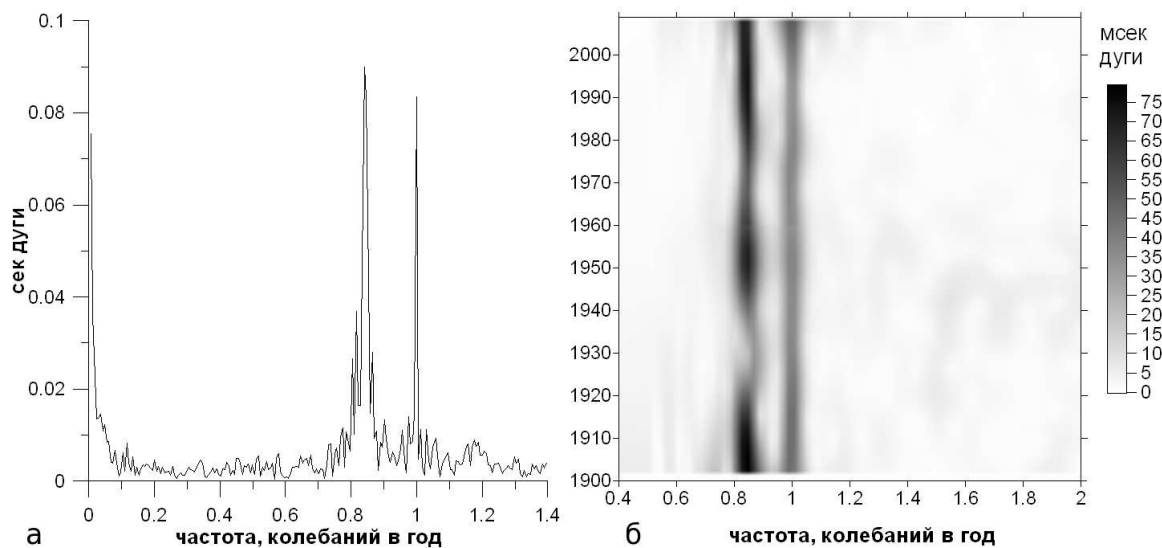


Рис. 2.5: Амплитудный спектр координат полюса (а) и скалограмма, полученная с вейвлетом Морле (б).

★ Упражнение 2-1): Покажите, что модифицированное окно Пантелеева (4.13) из упр. 4.3

$$\psi(t) = \frac{a}{2} e^{-a|t|} [\cos(at) - \sin(a|t|)],$$

где $a = \omega_0/\sqrt{2}$ – параметр, удовлетворяет необходимым свойствам вейвлет-функции, имеет нулевой первый момент и в частотной области

записывающееся в виде

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{\omega_0^2 w^2}{\omega_0^4 + \omega^4}.$$

Упражнение 2-2): Покажите, что Фурье-преобразование отмасштабированной и сдвинутой функции

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

может быть записано в виде

$$\hat{\psi}_{a,b} = \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a\omega) e^{-i\omega b}.$$

Упражнение 2-3): Используя теорему о свертке и упр. 2-2 покажите, что для колебания $f(t) = A \cos(\omega_0 t)$ вейвлет-преобразование имеет вид

$$W_\psi f(a, b) = (f * \tilde{\psi}_a)(b) = A \frac{\sqrt{|a|}}{2} \left(e^{i\omega_0 b} \hat{\psi}^*(a\omega_0) + e^{-i\omega_0 b} \hat{\psi}^*(-a\omega_0) \right),$$

и для действительной симметричной функции $\hat{\psi}(\omega)$ записывается как

$$W_\psi f(a, b) = A \sqrt{|a|} e^{i\omega_0 b} \hat{\psi}^*(a\omega_0) \cos(\omega_0 b).$$

Используя это соотношение для нахождения связи между шкалой вейвлета и периодом P , покажите, что для вейвлета Морле $P = a$, для МНАТ $P = \sqrt{2}\pi a$ [11].

Упражнение 2-4): Коэффициенты скейлограммы $|W_\psi|^2(a, b)$ масштабно-зависимы. Для волн одинаковой амплитуды, но разных частот они различны и зависят от a . Покажите, что избавиться от этой зависимости можно нормировкой скейлограммы – делением её на $a \|\psi_a\|^2$ для каждого a . Здесь $\|\psi_a\|^2$ – полная энергия отмасштабированного вейвлета, которая равна $a\sigma^2\pi$, где $\sigma^2 = 2$ для упрощенного (табл. 2.1) вейвлета Морле, и $2a\pi\sigma^2$ для МНАТ-вейвлета.

Глава 3

Сингулярный спектральный анализ

*Случалось, бывало,
что из горького горя
я счастье свое добывала.
В. Тушинова*

Еще одним интересным подходом к исследованию состава сигнала является сингулярный спектральный анализ (ССА). Этот метод иногда называют методом “гусеницы-ССА” [14]. Он позволяет выделить основные составляющие сигнала, разложив его по эмпирическим ортогональным функциям (ЭОФ) – базису, естественно возникающему из реализации самого сигнала [72],[93]. ССА (названный так по сингулярным числам) является обобщением метода главных компонент (МГК) для временных рядов. Он восходит к работам Такенса по динамическому хаосу [83], [104] и базируется на сингулярном разложении траекторной матрицы. Метод допускает обобщение на многомерные временные ряды. Его рассмотрение мы проведем на примере дискретных сигналов.

3.1 Алгоритм ССА Пусть сигнал представлен временным рядом $f(t_k)$, содержащим N отсчетов. ССА выполняется в четыре этапа, первые два служат для разложения, следующие два – для восстановления.

1) Выбирается число L (длина окна, параметр задержки, лаг) и формируется траекторная матрица, столбцы которой $\{\mathbf{x}_i\}$ представляют собой последовательно выбранные из временного ряда вектора размерности L

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_K] = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix}$$

В траекторной матрице L строк и $K = N - L + 1$ столбцов. Она является генкелевой, так как по боковым диагоналям $i + j = \text{const}$ стоят одинаковые элементы. Операция называется *вложением*.

2) Выполняется *сингулярное разложение* (singular value decomposition – SVD [55]) траекторной матрицы

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T, \quad (3.1)$$

где \mathbf{S} – диагональная матрица размерности $(L \times K)$, по главной диагонали которой в порядке убывания расположены *сингулярные числа* s_i матрицы \mathbf{X} ; столбцы матрицы \mathbf{U} – правые вектора, образующие базис пространства \mathcal{L}^L , порожденного столбцами \mathbf{X} (1-й сингулярный базис), столбцы матрицы \mathbf{V} – левые вектора, образующие базис линейного пространства \mathcal{L}^K , порожденного строками \mathbf{X} (2-й сингулярный базис) [6]. Размерности матриц \mathbf{U} – $(L \times L)$, \mathbf{V} – $(K \times K)$. Эти матрицы унитарны (эрмитово сопряжение эквивалентно обращению). Из разложения квадратной матрицы

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = (\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T)^T \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{S}^T \mathbf{S}\mathbf{V}^T \quad (3.2)$$

видно, что $\lambda_i = s_i^2$ – её *собственные числа*¹, а \mathbf{v}_i – собственные вектора, являющиеся строками унитарной матрицы поворота \mathbf{V}^T (столбцами \mathbf{V}).

3) Если матрица \mathbf{S} содержит d положительных сингулярных чисел s_i , то $Rg(\mathbf{X}) = d$ и каждому сингулярному числу можно сопоставить тройку $(s_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)$, и компоненту разложения

$$\mathbf{X}_i = s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

где, как следует из (3.1), $\mathbf{u}_i = \mathbf{X}\mathbf{v}_i/s_i$ – столбцы \mathbf{U} (собственные вектора преобразования $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$). При проведении вычислений с ковариационной матрицей \mathbf{A} (3.2) для получения \mathbf{X}_i вначале выполняется проектирование матрицы \mathbf{X} на вектора \mathbf{v}_i а затем свертка результата с этими векторами (см. раздел 8.7) [93].

Сгруппировав некоторым специальным образом тройки, полученные при сингулярном разложении, можно представить исходную матрицу в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_m},$$

где $\mathbf{X}_{I_l} = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_p}$ – группа, содержащая компоненты с индексами $I_l = \{i_1, \dots, i_p\}$. Таким образом, всё множество компонент $\{1, 2, \dots, d\}$

¹Напомним, что собственным числом λ и собственным значением (вектором) \mathbf{v} оператора \mathcal{A} с матрицей \mathbf{A} называют величины, удовлетворяющие равенству $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Набор собственных чисел называют спектром матрицы (см. раздел 3.5).

разбивается на m непересекающихся подмножеств в которых осуществляется *группировка*. Подробнее о ней будет сказано в разделе 3.3.

4) Если мы удачно сгруппировали сигнал, каждая компонента \mathbf{X}_{I_l} будет представлять собой некоторую аддитивную компоненту f . Матрица \mathbf{X}_{I_l} будет близка к генкелевой. Извлечем компоненту сигнала g^{I_l} , содержащуюся в матрице \mathbf{X}_{I_l} усреднением элементов вдоль побочных диагоналей $i + j = k + 2$. Переобозначив компоненты \mathbf{X}_{I_l} как y_{ij} , и числа $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$, получим отсчеты $g_k = g_k^{I_l}$ по формулам

$$g_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} y_{m,k-m+2}, & 0 \leq k < L^* - 1 \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} y_{m,k-m+2}, & L^* - 1 \leq k < K^* \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{m,k-m+2}, & K^* \leq k < N \end{cases}$$

Операция носит название *генкелизации*. Применяя её для каждой \mathbf{X}_{I_k} получаем представление исходного ряда в виде суммы m рядов $\tilde{f} = (g^{I_1}, \dots, g^{I_m})$, являющихся главными компонентами (ГК) сигнала.

3.2 Разделимость Для того, чтобы составной временной ряд, в простейшем случае двухкомпонентный $f = f^{(1)} + f^{(2)}$, удалось разделить на составляющие, должны разделиться соответствующие компонентам сингулярные числа. При этом большое значение имеет подходящий выбор параметра L . Он может быть выбран в диапазоне $2 \leq L \leq N - 1$, однако его нет смысла брать большим $N/2$, поскольку это просто соответствует транспонированию траекторной матрицы с $K > N/2$. Для разделения двух колебаний следует выбирать параметра L не меньшим наибольшего из их периодов.

Выделяют понятия *слабой* и *сильной разделимости*. Слабая разделимость имеет место, когда компоненты, составляющие временной ряд, ортогональны, т.е. при вложении в траекторную матрицу $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ порождают ортогональные базисы линейных подпространств $\mathcal{L}^{(L,1)} \perp \mathcal{L}^{(L,2)}$ и $\mathcal{L}^{(K,1)} \perp \mathcal{L}^{(K,2)}$. Если при некотором выборе L множество сингулярных чисел $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ не пересекается, говорят о сильной разделимости.

Имеется серия результатов, касающаяся понятий слабой и сильной разделимости рядов [14]. Можно показать, что слабо разделимы две компоненты, носители Фурье-спектров которых не пересекаются. При наличии сильной разделимости по N отсчётам удаётся разделить две гармоники или две модулированные экспонентой гармоники разных периодов, для этого числа K и L должны делиться нацело как на период первой,

так и второй гармоник. Строгая сильная разделимость является довольно редким случаем.

Наличие лишь слабой разделимости без сильной, вообще говоря, не позволяет разделить компоненты. Однако результаты, полученные в рамках т.н. *асимптотической разделимости*, смягчают это условие. Если с ростом N компоненты сигнала можно считать ортогональными с возрастающей точностью, они асимптотически разделимы. Компоненты, носители Фурье-спектров которых не пересекаются, всегда разделимы асимптотически. В рамках асимптотической разделимости удаётся выделить не только гармоники и модулированные экспонентой гармоники разных частот, но и отделить тренд, а также гауссовский шум как бесконечномерную, ортогональную остальным компонентам сигнала составляющую².

◇ Пример 3.1): Пусть $f^{(1)} = (1, -a, a^2)$ и $f^{(2)} = (1, a^{-1}, a^{-2})$, $a \neq 0$. Траекторные матрицы каждой из компонент имеют вид

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & a^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ -a^{-1} & a^{-2} \end{pmatrix}.$$

Слабая разделимость выполняется для $L = 2$, когда

$$f_1^{(1)} f_1^{(2)} + \dots + f_L^{(1)} f_L^{(2)} = 0,$$

$$f_1^{(1)} f_1^{(2)} + \dots + f_K^{(1)} f_K^{(2)} = 0,$$

Сильная разделимость имеет место только при $a \neq 1$. В общем случае траекторная матрица для суммы двух компонент имеет вид

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -a + a^{-1} \\ -a + a^{-1} & a^2 + a^{-2} \end{pmatrix} = (1 + a^2) \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + (1 + a^{-2}) \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T.$$

При сильной разделимости сингулярные числа однозначно определяют компоненты

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, -a)^T / \sqrt{1 + a^2}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 = (1, a^{-1})^T / \sqrt{1 + a^{-2}}.$$

Однако при $a = 1$ траекторная матрица

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + 2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T$$

имеет бесконечное множество диагональных разложений, из которых лишь

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, -1)^T / \sqrt{2} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 = (1, 1)^T / \sqrt{2}$$

соответствует разделённым компонентам. ◆

²Бесконечномерный шум отделяется приближенно.

3.3 Группировка Если сингулярные числа разделились, важно правильно сгруппировать их. При наличии большого числа компонент эта операция плохо формализуема. Её осуществляют на основе выявления сходства поведения компонент во времени или их частотного состава. Введем систему весов, зависящую от L

$$\omega_{i-1} = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq L^* \\ L^*, & L^* < i \leq K^* \\ N - i, & K^* < i < N \end{cases}$$

Данные веса пропорциональны числу вхождений i -го отсчета в траекторную матрицу. Назовем *взвешенной ω -корреляцией* величину

$$(f^{(1)}, f^{(2)})_{\omega} = \sum_{i=0}^N \omega_i f_i^{(1)} f_i^{(2)}.$$

Нулевая ω -корреляция $(f^{(1)}, f^{(2)})_{\omega} = 0$ обеспечивает разделимость компонент $f_n^{(1)}$ и $f_n^{(2)}$. Элементами симметричной матрицы ω -корреляций являются попарные ω -корреляции компонент сигнала. Она отражает сходство между компонентами и показывает, какие из сингулярных чисел следует сгруппировать.

Для выявления корреляции между $f^{(i)}$ и $f^{(j)}$ можно воспользоваться также графиком. На плоскости строят точки с координатами $(f_k^{(i)}, f_k^{(j)})$, если при этом получается циклическая правильная фигура, то компоненты объединяют.

Можно показать, что если *ранг ряда* $d = Rg(f)$ конечен (процесс конечномерен), матрица S будет содержать не более d отличных от нуля собственных чисел, при этом временной ряд может быть представлен линейной рекуррентной формулой (ЛРФ)

$$f_{i+d} = \sum_{k=1}^d a_k f_{i+d-k}, \quad (3.3)$$

соответствующей АР-модели (1.31). Любой ряд, являющийся комбинацией произведений полиномов, экспонент и косинусов является конечномерным. Данный результат позволяет прогнозировать ССА-компоненты на основе ЛРФ [14].

3.4 Многомерный ССА ССА легко реализуется для комплексного сигнала, при этом алгоритм не меняется. Обобщением ССА на случай векторных рядов является многоканальный ССА (МССА) (см. пример

3.3). Он позволяет выделять из сигнала частотно-временные (частотно-пространственные для карт) компоненты (области коррелированного поведения). Для каждого канала, i -й компоненты векторного временного ряда, строится траекторная матрица X_i . Затем все траекторные матрицы объединяются в одну блочную

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_N],$$

с которой и ведется работа. Зная структуру исходных матриц, легко восстановить все главные компоненты. Когда число каналов $N = 1$, МССА переходит в ССА. С другой стороны, ССА с параметром $L = 1$ переходит в МГК (см. упр. 3-1). В атмосферных и геофизических исследованиях МССА называют также расширенным методом разложения по эмпирическим ортогональным функциям [93].

3.5 Особенности ССА Чтобы понять, почему выделение главных компонент сигнала методом ССА представляет собой еще один вид спектрального анализа, обратимся к понятию о *спектре оператора* [44]. Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} из некоторого линейного пространства \mathcal{L} в себя состоит из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, таких что оператор $(\mathcal{A} - \lambda I)$ не имеет ограниченного обратного (I обозначает тождественный оператор $Iv = v$). Те λ , при которых оператор $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$, называемый *резольвентным*, существует и ограничен называются *регулярными*. В конечномерном пространстве $\sigma(\mathcal{A})$ состоит из собственных значений \mathcal{A} . В бесконечномерном гильбертовом пространстве H в спектр оператора входят все собственные значения, образующий точечный спектр, а также λ непрерывного спектра. Все собственные числа симметрического ограниченного линейного оператора действительны. Из такого оператора можно извлечь квадратный корень. К задаче отыскания собственных значений можно прийти, в частности, при поиске максимумов и минимумов квадратичной формы $(\mathcal{A}v \cdot v)$ на единичной сфере $\|v\| = 1$ [48].

Метод ССА основан на вычислении спектра матричного оператора $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ – ковариационной матрицы с лагом L (3.2). Т.е. нахождении такого преобразования (а именно, поворота) координат, которое приводит её к диагональному виду $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$. У положительно определённой матрицы все собственные числа положительны. Можно пользоваться SVD-разложением не квадратной матрицы \mathbf{A} , а прямоугольной генкелевой траекторной матрицы \mathbf{X} . Приводя её к диагональному виду \mathbf{S} мы работаем не с собственными значениями λ_i , а с неотрицательными сингулярными числами $s_i = \sqrt{\lambda_i}$ (см. раздел 8.4).

Построение траекторной матрицы в ССА, по сути, представляет собой перевод одномерного временного ряда в многомерный.

В пространстве \mathcal{L}^L при этом формируется некоторое геометрическое множество точек – концов векторов $\{\mathbf{x}_i\}$. Анализ корреляционных связей между этими векторами и приводит нас к ортогональному базису по которому осуществляется разложение. Наибольшему собственному числу соответствует тот орт базиса новой системы координат, на который приходится наибольшая проекция облака рассеяния (корреляций) сигнала в L -мерном пространстве вложения, – это и есть первая главная компонента, и т.д. Таким образом, находится своего рода эмпирически-оптимальный ортогональный базис, диагонализующий корреляционную матрицу \mathbf{A} . Отделимость компонент подразумевает конечномерную стационарную динамику процесса, т.е. возможность описания его дифференциальным уравнением с конечным числом постоянных параметров (см. гл. 4). Это лежит в основе представления ГК в виде ЛРФ (3.3).

Можно показать, что каждой ГК соответствует некоторая область частот, а сумма компонент полностью выбирает Фурье-спектр сигнала. Переупорядочив и сгруппировав сингулярные числа на основе характеристик спектров Фурье соответствующих ГК, можно получить ряд ГК, возрастающих по частоте. В случае нестационарности, т.е. переменности состава сигнала во времени, можно выполнять ССА в скользящем окне, как в (2.3) [93].

Немаловажен вопрос о статистической достоверности выделенных компонент. Несмотря на отсутствие явного метода определения точности, существуют разнообразные альтернативные подходы. Так, можно проверить, близок ли Фурье-спектр главной компоненты к спектру белого или цветного шума. В методе Монте-Карло-ССА³ на основе некоторых априорных предположений генерируются шумы заданных свойств и вычисляется их *сингулярный спектр* (набор сингулярных чисел). Затем проводится сравнение разложений для сигнала и для шума. Те сингулярные числа, которые с высокой достоверностью превосходят сингулярный спектр шума, считаются значимыми. ГК, соответствующие значимым числам, восстанавливаются и исследуются как несущие важную информацию о свойствах сигнала [93]. Остальные компоненты считаются шумовыми. ССА-фильтрация основана на подобном подходе, исключаящем шумовые ГК.

Проведем сравнение ССА с другими, уже известными нам методами анализа сигналов. Так базис Фурье ортогонален и стационарен, каждая гармоника имеет параметры неизменные во времени (при анализе случайного сигнала случайность переносится на эти параметры).

³Метод Монте-Карло основан на статистических испытаниях, см. раздел 7.16.

Базис Фурье диагонализует линейные инвариантные относительно сдвига преобразования. Каждый элемент вейвлет-базиса локализован как во времени, так и в пространстве, что делает его более гибким, но не очень удобным для прогнозирования сигнала. Компактные вейвлеты “почти” диагонализуют линейные инвариантные преобразования, что позволяет с их помощью, в комбинации с методом Галёркина, численно решать дифференциальные уравнения, получая разреженные матрицы с малым количеством ненулевых элементов. Базис главных компонент находится эмпирически, он ортогонален и удобен для аппроксимации и прогнозирования конечномерных составляющих сигнала. ССА обладает следующими отличительными особенностями:

а) Базис порождён самим сигналом.

б) Почти всегда по собственным числам удаётся определить такие параметры сигнала, как период, фаза, амплитуда и наблюдать их мгновенные изменения.

в) Практически отсутствуют граничные эффекты. Незначительные краевые эффекты возникают на этапе генерализации и связаны с разным числом элементов на боковых диагоналях матрицы \mathbf{X}_L .

Метод “гусеницы”-ССА возник на базе идей т.н. реконструкций – выборок из временного ряда, описывающего поведение некоторой динамической системы, последовательностей конечной длины L , которые используются при анализе траекторий этой системы в фазовом пространстве. С помощью таких реконструкций, согласно теореме Такенса, можно строить вложения или погружения многомерных многообразий и оценивать такие характеристики, как фрактальные размерности аттракторов нелинейных динамических систем, обобщённые энтропии и показатели Ляпунова⁴.

Описанный в данном разделе метод сингулярного разложения SVD широко используется при анализе корреляционных матриц, решении плохо обусловленных задач (гл. 8) и др. Он лежит в основе факторного анализа (упр. 3-2), метода спектрального анализа Писаренко и др.

► Пример 3.2): В [108] метод ССА с параметром $L=12$ лет применён к комплексному временному ряду $m = x - iy$ координат полюса x и y из бюллетеня ЕОР C01 международной службы вращения Земли и систем отсчета (МСВЗ) (см. примеры 2.5, 4.2). Первые ГК представлены на рис. 3.1. Хорошо отделился тренд, годовое и чандлеровское

⁴В данном курсе мы не рассматриваем методов анализа, используемых для выделения и моделирования хаотических (фрактальных) сигналов. Такие сигналы считаются не случайными, а квазидетерминированными, зачастую с нелинейным поведением [83].

колебания [85]. На рис. 3.1б приведена последовательность сингулярных чисел, типичная при ССА-разложении. Первые числа формируют группу значимых компонент, выделяющуюся на фоне убывающего склона последующих шумовых и высокочастотных компонент.



Рис. 3.1: Результат ССА-разложения для X-координаты полюса (а) и последовательность сингулярных чисел (б).

Пример 3.3): МССА в применении к глобальным спутниковым данным по изменениям гравитационного поля Земли (GRACE), уровня моря (Jason, Envisat, EOS), тропосферного CO_2 (AIRS, Aqua) позволил выделить в данных области коррелированного поведения, отделить тренд, периодические составляющие, отфильтровать шумы [109]. Это облегчает изучение происходящих на Земле климатических изменений. Мультфильмы с получаемыми результатами можно посмотреть на сайте <http://lnfm1.sai.msu.ru/~tempus/science/MSSA/index.htm>. На рис. 3.2 показан тренд изменений гравитационного поля с 01.2003 по 08.2010 (разность), полученный на основе МССА-обработки данных GRACE (ГК 2), выраженный в эквивалентном уровне воды. Эффект послеледникового поднятия PGR учтён при обработке. Заметное уменьшение гравитационного поля в некоторых областях Гренландии и Антарктиды, на Аляске, в Гималаях связано с таянием ледников. Пятно в районе Суматры связано с землетрясением, произошедшем в 2004 г. и изменившим гравитационное поле на ~ 18 мкГл. Фильтрация шумов данных GRACE выполнена исключением шумовых ГК с большими порядковыми номерами. Аналогичным образом получена карта изменений уровня моря по сводным данным альтиметрии с 11.1992 по 07.2009, рис. 3.3.

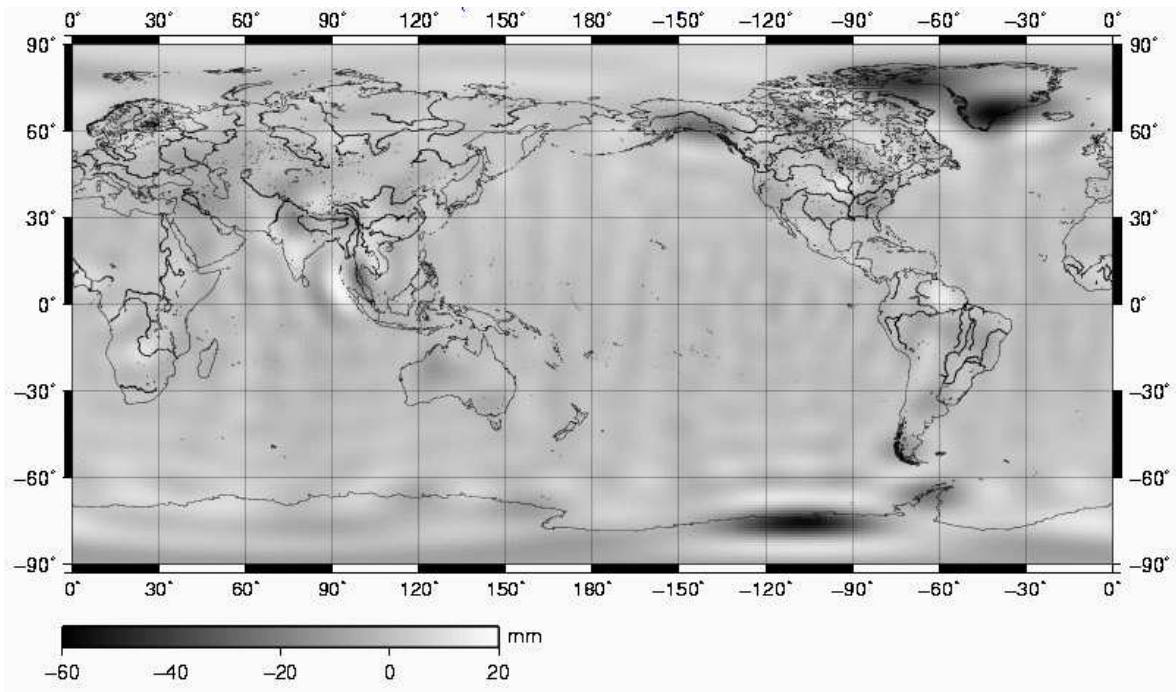


Рис. 3.2: Изменения гравитационного поля с 03.2003 по 08.2010 (разность), полученные на основе МССА-обработки данных GRACE (ГК 2), выраженные в эквивалентном уровне воды.

★ Упражнение 3-1): *Метод главных компонент.* Пусть имеется дискретный ряд векторных наблюдений $\{\mathbf{x}(t_k)\}$. Покажите, что решение задачи на отыскание нормированного вектора ϕ , максимизирующего выборочную оценку дисперсии случайной величины $z(t_k) = \phi^T \mathbf{x}(t_k)$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z^2(t_k) \rightarrow \max_{\phi}, \quad \phi^T \phi = 1$$

находится как решение задачи на максимальное собственное значение корреляционной матрицы $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$, а соответствующий собственный вектор совпадает с ϕ . При этом \mathbf{z} является главной компонентой. Для доказательства используйте метод множителей Лагранжа решения задачи условной оптимизации (см. раздел 7.15). В МГК главная компонента находится как максимальная полуось облака дисперсий [34].

Упражнение 3-2): *Многомерная каноническая корреляция.* Покажите, что для серии p -мерных $\{\mathbf{x}(t_k)\}$ и q -мерных $\{\mathbf{y}(t_k)\}$ векторных наблюдений задача поиска нормированных векторов ϕ и ψ , максимизирующих корреляцию между компонентами $z(t_k) = \phi^T \mathbf{x}(t_k)$

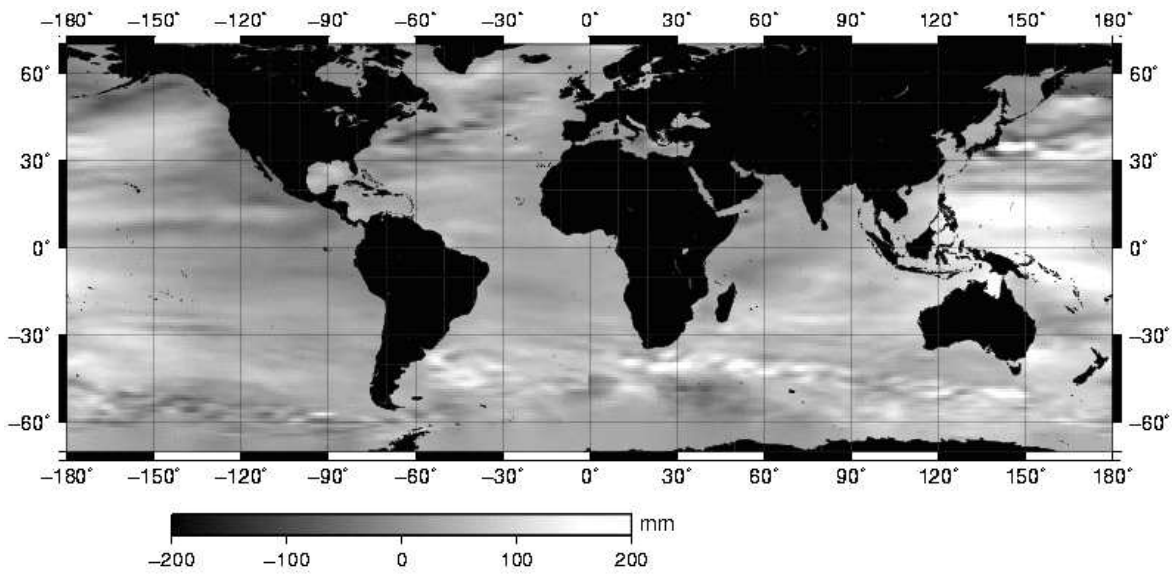


Рис. 3.3: Тренд изменения уровня моря с 11.1992 по 07.2009 по объединенным данным альтиметрии после МССА-обработки.

$$\text{и } \zeta(t_k) = \psi^T \mathbf{y}(t_k)$$

$$r^2 = \sum_{k=1}^N z(t_k) \zeta(t_k) = \mathbf{z}^T \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{R}_{\mathbf{xy}} \boldsymbol{\psi} \rightarrow \max_{\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}}, \quad \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} = 1, \quad \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} = 1,$$

может быть решена как задача на собственные значения

$$\mathbf{R}_{\mathbf{yx}} \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{xy}} \boldsymbol{\psi} = r^2 \mathbf{R}_{\mathbf{yy}} \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{R}_{\mathbf{xy}} \mathbf{R}_{\mathbf{yy}}^{-1} \mathbf{R}_{\mathbf{yx}} \boldsymbol{\phi} = r^2 \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \boldsymbol{\phi},$$

где \mathbf{R} – соответствующие корреляционные и кросс-корреляционные матрицы. Метод даёт характеристику линейной связи между двумя векторными рядами разной размерности и используется в *факторном анализе* [34].

Глава 4

Постановка задачи фильтрации, характеристики линейных фильтров

*Мы выбираем,
Нас выбирают,
Как это часто
Не совпадает!
М. Танич*

Рассмотрим основные характеристики линейного инвариантного во времени фильтра, который задаётся оператором свертки [39]

$$\Phi\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t - \tau)d\tau = h * f.$$

4.1 Основные характеристики линейных фильтров Одной из характеристик фильтра, которая уже нам известна (2.1), является отклик на δ -функцию Дирака или *импульсная характеристика* (*весовая функция*) фильтра

$$h(t) = \Phi\{\delta(t)\}.$$

Отклик на ступенчатую функцию Хевисайда

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

определяет характеристику, называемую *переходной функцией*

$$H(t) = \Phi\{\chi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\chi(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau.$$

Поскольку $d\chi(t)/dt = \delta(t)$, легко видеть, что¹

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \frac{d\chi(t-\tau)}{dt} d\tau = h(t).$$

Фильтр называется *каузальным* (причинным) или физически реализуемым, если $\Phi\{f(t)\}$ зависит только от значений $f(t)$ в прошлом. Импульсный отклик такого фильтра

$$h(t) = 0 \quad \text{для} \quad t < 0.$$

Пределы интегрирования в этом случае могут быть изменены

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Интеграл справа носит название интеграла Дюамеля. В дальнейшем в большинстве случаев мы будем работать с каузальными фильтрами. Рассмотрим тестовый входной сигнал e^{pt} , где p – комплексное число.

$$\Phi\{e^{pt}\} = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{p(t-\tau)}d\tau = e^{pt} \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-p\tau}d\tau = e^{pt}L\{h(t)\}, \quad (4.1)$$

здесь $L\{f\}$ – преобразование Лапласа. Характеристика фильтра

$$W(p) = L\{h(t)\}$$

носит название передаточной функции линейного фильтра. Видно, что комплексная экспонента – собственная (инвариантная) функция оператора свёртки, а передаточная функция задаёт собственные числа.

¹Здесь можно усмотреть аналогию с плотностью распределения в теории вероятностей, которая равна производной от функции распределения.

При замене $p = i\omega$ преобразование Лапласа переходит в преобразование Фурье (одностороннее для каузального фильтра)

$$W(i\omega) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \hat{h}(\omega),$$

после такой замены передаточная функция становится *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ) или просто *частотной характеристикой*. Записав её в виде

$$W(i\omega) = |W(i\omega)| e^{i \text{Arg}[W(i\omega)]} = \lambda(\omega) e^{i\varphi(\omega)},$$

с учетом (4.1), получаем

$$\Phi\{e^{i\omega t}\} = \Phi\{\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\} = |W(i\omega)| e^{i\omega t + i \text{Arg}[W(i\omega)]},$$

$$\Phi\{\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\} = \lambda(\omega) [\cos(\omega t + \varphi(\omega)) + i \sin(\omega t + \varphi(\omega))],$$

т.о. $\lambda(\omega)$ – *амплитудно-частотная характеристика* (АЧХ), отвечающая за изменение амплитуды гармонического сигнала, а $\varphi(\omega)$ – *фазово-частотная характеристика* (ФЧХ), определяющая изменение фазы гармонического сигнала при линейной фильтрации. Производная ФЧХ, взятая с обратным знаком $\tau = -\frac{d\lambda(\omega)}{d\omega}$, называется *групповой задержкой*. Отношение фазы к частоте называется *фазовой задержкой*. Для случая физически реализуемого фильтра с действительной $h(t)$ легко показать, что $\text{Re}[W(i\omega)]$ – чётная, а $\text{Im}[W(i\omega)]$ – нечётная функции, т.е. $W(i\omega)$ – аналитическая функция ². В этом случае из выражений

$$\lambda(\omega) = \sqrt{\text{Re}[W(i\omega)]^2 + \text{Im}[W(i\omega)]^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[W(i\omega)]}{\text{Re}[W(i\omega)]}$$

следует, что АЧХ – чётная, а ФЧХ – нечётная функции. В дискретном случае АФЧХ становится еще и периодической [42].

Записав теорему о свертке (1.13)

$$F\{h(t) * f(t)\} = \hat{h}(\omega) \hat{f}(\omega) = W(i\omega) \hat{f}(\omega),$$

²Аналитическая функция имеет одностороннее преобразование Фурье, т.е. оно равно нулю для отрицательных частот. Для односторонней функции $f(t)$ выполняется соотношение $\text{Re}(\hat{f}(\omega)) = \text{He}\{\text{Im}(\hat{f}(\omega))\} = (-1/\pi\omega) * \text{Re}(\hat{f}(\omega))$, где $\text{He}\{f(t)\}$ – преобразование Гильберта-Нуанга, см. раздел 2.4. Это можно доказать, представив одностороннюю функцию суммой четных и нечетных функций.

легко понять, что в частотной области фильтрация сводится к умножению Фурье-образа сигнала на частотную характеристику фильтра. Фильтр называется устойчивым тогда и только тогда, когда каждому ограниченному входному сигналу соответствует ограниченная функция на выходе. Можно показать, что необходимым и достаточным условием этого является ограниченность весовой функции фильтра [33]

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau < C < \infty.$$

4.2 Стационарная динамическая система как фильтр Рассмотрим динамическую систему (см. главу 6), задаваемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = f(t) \quad (4.2)$$

и начальным условием $x(t_0) = C_0$. Решением однородного уравнения (когда $f(t) = 0$) является

$$x(t) = C_0 e^{-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau}.$$

Решение неоднородного уравнения находится методом вариации постоянной $C(t)$, которая предполагается зависящей от времени. Оно имеет вид

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau} \int_{t_0}^t f(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} p(\xi) d\xi} d\tau + C_1 e^{-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau},$$

где C_1 находится из начальных условий. Пределы интегрирования здесь вытекают из условий задачи [63]. Обозначив второе слагаемое за $x_0(t)$, внося множитель первого слагаемого под интеграл, получаем

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^t h(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

здесь f – входное воздействие, а

$$h(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t p(\xi) d\xi}. \quad (4.3)$$

Если последняя функция зависит только от разности аргументов ($p(t) = p = const$ и система стационарна, т.е. инвариантна относительно сдвига), второй член запишется в виде свёртки, меняя порядок функций в

которой, приходим к уравнению траектории объекта в виде

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^t h(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad \text{где} \quad h(t) = e^{-\int_0^t p d\tau}.$$

Динамическая система называется *асимптотически устойчивой*, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) = 0.$$

Установившаяся траектория будет описываться интегралом-свёрткой

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

где мы положили $t_0 = 0$. Таким образом, динамическая система является фильтром входного воздействия.

◇ Пример 4.1): Для динамической системы первого порядка³ с постоянной времени T

$$T\dot{x}(t) + x(t) = u(t), \quad (4.4)$$

(в терминах (4.2) $p(t) = 1/T$ и $f(t) = u(t)/T$), установившееся решение имеет вид

$$x(t) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}} \frac{1}{T} u(t - \tau) d\tau,$$

откуда, считая $u(t)$ сигналом на входе, получим для $t \geq 0$

$$h(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}},$$

$$H(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}},$$

а передаточную функцию вычислим следующим образом

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}} e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-(p+\frac{1}{T})\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-\frac{pT+1}{T}\tau} d\tau = 0 - \frac{-T}{T(1+pT)} = \frac{1}{1+pT}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

³Такой системой, к примеру, описывается упрощенный гравиметр.

Обратим теперь внимание на то, что дифференциальное уравнение (4.4) в операторном виде может быть записано как

$$(TD + 1)x = u, \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{1 + TD}u.$$



Не теряя общности, можно сказать, что оператор дифференцирования D , замененный на p , даст передаточную функцию для любого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. В примере выше

$$W(p) = \frac{1}{1 + Tp}.$$

Возьмём линейное дифференциальное уравнение

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x^{(1)} + a_nx = b_0f^{(k)} + b_1f^{(k-1)} + \dots + b_{k-1}f^{(1)} + b_kf, \quad (4.6)$$

которое описывает динамическую систему с дифференциальным оператором

$$F(D) = \frac{A(D)}{B(D)} = \frac{a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n}{b_0D^k + b_1D^{k-1} + \dots + b_{k-1}D + b_k},$$

и траекторией

$$x(t) = \frac{1}{F(D)}f(t).$$

Ей соответствует фильтр, с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{F(p)} = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0p^k + b_1p^{k-1} + \dots + b_{k-1}p + b_k}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n}. \quad (4.7)$$

Можно показать, что фильтр, задаваемый такой дробно-рациональной передаточной функцией с действительными коэффициентами (с сосредоточенными параметрами), асимптотически устойчив тогда, когда действительная часть любого корня $A(p)$ отрицательна $Re(p_k) < 0$. Это означает, что передаточная функция устойчивого фильтра не имеет полюсов в правой полуплоскости C . Более того, все её полюсы и нули симметричны относительно действительной оси, поскольку корни многочленов с действительными коэффициентами либо действительны, либо попарно комплексно сопряжены.

По передаточной функции, зная корни характеристического уравнения (см. раздел 6.3), методом разложения Хевисайда можно определить

переходную функцию $H(t)$. Чтобы определить импульсную характеристику фильтра, необходимо взять обратное преобразование Лапласа передаточной функции

$$h(t) = L^{-1}\{W(p)\}.$$

Это возможно, если степень $A(p)$ больше степени $B(p)$. Для вычисления преобразования Лапласа, вообще говоря, нужно знать корни многочлена $A(p)$, определяющего особые точки (полюсы) на комплексной плоскости.

В случае переменных во времени коэффициентов линейного дифференциального уравнения, система перестаёт быть стационарной, и задача определения аналитической весовой функции, за редким исключением, оказывается неразрешимой. В нестационарном случае весовая функция зависит от двух аргументов (4.3). Оператор свёртки при этом, оставаясь линейным, перестаёт быть инвариантным во времени. Комплексные показательные функции не являются больше инвариантными (собственными) функциями такого преобразования. Несмотря на то, что у нестационарных операторов имеется передаточная функция как множитель при собственных функциях, отыскание последних, проходящих через фильтр (при бесконечно долгом воздействии) без изменения формы, становится совсем непростой задачей. Однако системы, коэффициенты которых медленно меняются во времени можно считать квазистационарными на небольших промежутках. При определённых условиях для работы с ними можно использовать аппарат, разработанный для стационарных систем.

4.3 Распространение на двумерный случай Все результаты, полученные в этом разделе, могут быть распространены на многомерные фильтры. В качестве примера двумерной фильтрации рассмотрим изображение, получаемое телескопом. Пусть истинное изображение, не искажённое приёмником, описывается функцией $f(x, y)$. Звезды на нём представляются точками $\delta(x - x_k, y - y_k)$ (см. пример. 6). Телескоп вследствие дифракции размывает изображение звезды. Оно приобретает вид, к примеру, эллипса с гауссовским распределением яркости⁴

$$g(x, y) = ke^{-\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} e^{-\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2}$$

с центром в (x_k, y_k) и полуосями σ_x и σ_y . Это, так называемая, функция рассеяния точки (ФРТ), характеризующая прибор, и являющаяся не чем иным, как двумерной импульсной характеристикой фильтра. Всё

⁴На самом деле дифракционная картина Эйри для точечного источника напоминает двумерную функцию $\text{sinc}(\cdot)$, см. упр. 1-11 [50]

изображение оказывается сглаженным

$$f_{\Phi}(x, y) = \Phi\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \zeta) f(\xi - x, \zeta - y) d\xi d\zeta. \quad (4.8)$$

Сглаживающая функция в общем случае носит название ядра свёртки, а интеграл (4.8) – интеграла Фредгольма (см. раздел 8.10) [15], [25].

4.4 Дискретные фильтры При работе с дискретным сигналом $f(k\Delta t) = f(k)$, свёртка записывается в виде суммы

$$\Phi\{f(k)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) f(k - n). \quad (4.9)$$

Для определения дискретной передаточной функции, вместо преобразования Лапласа используется аппарат Z -преобразования [33], [42], [75], [74] с базовыми функциями z^{-n}

$$W(z) = Z\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

У физически реализуемого фильтра $h(n) = 0$ при $n < 0$ и суммирование ведётся от нуля. Так, передаточная функция дискретизованного дифференциального уравнения (4.6) записывается в виде

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_{k-1} z + b_k}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}.$$

Для асимптотической устойчивости в дискретном случае все корни $A(z)$ должны лежать внутри единичного круга.

Частотная характеристика (АФЧХ) цифрового фильтра определяется как дискретное преобразование Фурье (см. раздел 1.6) от импульсной характеристики. ДПФ – это Z -преобразование на единичной окружности $z = e^{i2\pi/Nk\Delta t}$. При этом частотной характеристикой в z -плоскости, можно дать геометрическую интерпретацию. Проводятся радиус-векторы из всех нулей и полюсов передаточной функции в точку на единичной окружности $z = e^{i\omega_k}$. Амплитудно-частотная характеристика для выбранной частоты (точки) равна произведению расстояний от соответствующих точек вне единичной окружности, деленное на произведение расстояний от точек внутри неё. Фазово-частотная характеристика равна сумме полярных углов соответствующих векторов, направленных на

точку на окружности, причем для точек вне окружности углы берутся с плюсом, а внутри – с минусом. Для того, чтобы получить частотную характеристику на всех частотах нужно перемещаться по единичной окружности против часовой стрелки из точки $z = 1$ до $z = -1$ [33].

Дискретные фильтры с ограниченной во времени импульсной характеристикой называются фильтрами с *конечной* импульсной характеристикой (КИХ), они не имеют обратной связи и знаменатель $A(z) = \text{const}$. БИХ-фильтры, наоборот, имеют *бесконечные* во времени импульсные характеристики. Фильтры с ограниченной во времени переходной функцией называются фильтрами с конечной памятью.

При разработке КИХ-фильтров используют следующие подходы: взвешивание аналитических фильтров и их дискретизацию, метод частотной выборки, проектирование с использованием минимизации. БИХ-фильтры обычно проектируются в частотной области путем расчета нулей и полюсов, т.е. коэффициентов Z -преобразования. Возможна трансформация непрерывных фильтров из p -области⁵ в z -область, для чего используются: метод отображения дифференциалов (разностные схемы), билинейное преобразование

$$p \rightarrow \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})},$$

нелинейно преобразующее частоты, согласованное преобразование и др. [42]. При проектировании желательно, чтобы устойчивость оставалась инвариантным свойством, для чего мнимая ось p -области должна отображаться в единичную окружность z -области, при этом левая полуплоскость должна отображаться во внутренность этой окружности. В качестве КИХ-фильтров часто используются окна, отличительной особенностью которых является линейная ФЧХ. Известными примерами БИХ-фильтров являются фильтры Баттерворта с максимально плоской АЧХ и нулевыми производными её в нуле (упр. 4-2), фильтры Бесселя с максимально гладкой групповой задержкой в нуле, фильтры Чебышева, имеющие наименьшую максимальную ошибку аппроксимации в заданной полосе частот и равновеликие пульсации в остальной области и др.

Поскольку для фильтрации сигнала обычно используются импульсные характеристики или окна, стремящиеся по краям к нулю, бесконечные пределы в (4.9) заменяют на конечные. Это, а также конечность реальных сигналов приводит к граничным эффектам. Существует несколько способов вычисления свертки на краях. Один из них – дополнение

⁵Область переменной p в наших обозначениях в литературе иногда называется s -областью.

сигнала и окна нулями по краям. Другой – использование циклической свертки (1.20). Последнее особенно удобно в случае периодического сигнала. На основе БПФ разработаны алгоритмы быстрой свертки.

Всякий прибор, используемый в исследовании, вносит искажения. В ходе микроскопических исследований, томографии, спутниковой фотографии и др. исходная информация сглаживается. Если вычисление результата фильтрации по входному сигналу можно назвать прямой задачей, то вычисление входного сигнала по сглаженному отклику – обратная задача, решение которой связано с неоднозначностью, так называемой некорректностью. Мы обратимся к этой теме в главе 8.

Важной особенностью большей части реальных систем является присутствие случайных составляющих. Дифференциальному оператору $F(D)$ можно сопоставить интегральный оператор $F(D)^{-1}$. Распространить теорию воздействия этих операторов на случайные процессы очень важно, учитывая их роль в задачах фильтрации. В следующих разделах мы сделаем это, что откроет путь к синтезу оптимальных фильтров.

► Пример 4.2): Из уравнений Эйлера-Лиувилля для вращающейся Земли вытекает приближенное уравнение движения полюсов Земли [16]

$$\frac{i\dot{m}}{\sigma_c} + m = \varphi, \quad (4.10)$$

здесь $m = m_1 + im_2 \approx x_p - iy_p$, малые величины m_1, m_2 задают поправки к вектору угловой скорости (смещение полюса), x_p, y_p – координаты полюса в Земной системе координат, в правой части стоит возбуждающая функция $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, зависящая от моментов внешних сил, а также моментов инерции Земли, возмущений тензора инерции, относительных моментов количества движения и средней скорости вращения Земли $\Omega = 7.292 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Основным параметром уравнения является σ_c – комплексная чандлеровская частота, которая представляется в виде

$$\sigma_c = 2\pi f_c \left(1 + \frac{i}{2Q}\right),$$

где f_c – чандлеровская частота колебаний, Q – добротность. Точные значения этих величин не известны. Согласно оценкам, сделанным Вилсоном и Висенте [105], $f_c = 0.843$ цикла в год, $Q = 175$.

При входном воздействии $\varphi(t)$ решение уравнения (4.10) имеет вид

$$m(t) = e^{i\sigma_c t} m_0(t_0) - i\sigma_c \int_{t_0}^t \varphi(\tau) e^{i\sigma_c(t-\tau)} d\tau,$$

где $m_0(t_0)$ – константа, определяющаяся начальными условиями (см. пример 4.1). Влияние начальных условий для устойчивой системы со временем ($t_0 \rightarrow -\infty$) сходит на нет, и траектория полюса определяется частным решением неоднородной системы, имеющим вид интеграла-свертки. Таким образом, движение полюсов Земли есть ни что иное, как сглаженное входное воздействие $\varphi(t)$. Соответствующий фильтр может быть охарактеризован импульсной характеристикой

$$h(t) = -i\sigma_c e^{i\sigma_c t}, \quad (4.11)$$

или передаточной функцией

$$W(p) = \frac{\sigma_c}{ip + \sigma_c}. \quad (4.12)$$

. На рисунке 4.1 представлены АЧХ и ФЧХ системы (4.10) для двух разных значений Q и $f_c = 365/T_c$

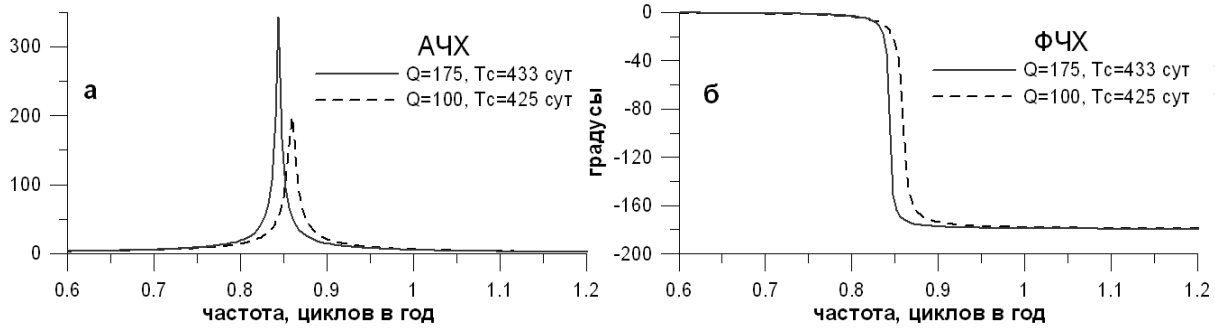


Рис. 4.1: АЧХ (а) и ФЧХ (б) системы (4.10) для двух разных значений чандлеровского периода T_c и добротности Q .

Пример 4.3): В.Л. Пантелеевым даны формулы следующих фильтров (окон), зависящих от параметра $\omega_0 = 2\pi f_0$ и их частотные характеристики

$$h(t) = \frac{\omega_0}{2} e^{-\omega_0 |t|}, \quad W(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \omega_0^2}.$$

$$h(t) = \frac{\omega_0}{4} (1 - \omega_0 |t|) e^{-\omega_0 |t|}, \quad W(\omega) = \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 + \omega_0^2)^2}.$$

$$h(t) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega_0 |t|}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\omega_0 |t|}{\sqrt{2}} \right), \quad W(\omega) = \frac{\omega_0^4}{\omega^4 + \omega_0^4}. \quad (4.13)$$

$$h(t) = \frac{\omega_0}{8} e^{-\frac{\omega_0 |t|}{\sqrt{2}}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \cos \frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \left(\omega_0 |t| + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \sin \frac{\omega_0 |t|}{\sqrt{2}} \right),$$

$$W(\omega) = \frac{\omega_0^8}{(\omega^4 + \omega_0^4)^2}.$$

$$h(t) = \frac{\omega_0}{4} [e^{-a\omega_0|t|}(a \cos b\omega_0 t + b \sin b\omega_0 t) + e^{-b\omega_0|t|}(b \cos a\omega_0 t + a \sin a\omega_0 |t|)],$$

$$a = \cos \frac{\pi}{8}, \quad b = \sin \frac{\pi}{8},$$

$$W(\omega) = \frac{\omega_0^8}{\omega^8 + \omega_0^8}.$$

Они получены из фильтров Баттерворта разных порядков двойной фильтрацией вперед и назад и не вносят фазовых искажений.

Вид окна (4.13) во временной и частотной областях для двух значений параметра представлен на рис. 4.2. Модифицированный фильтр Пантелеева (4.13) обладает также свойствами вейвлет-функции (упр. 2-1).

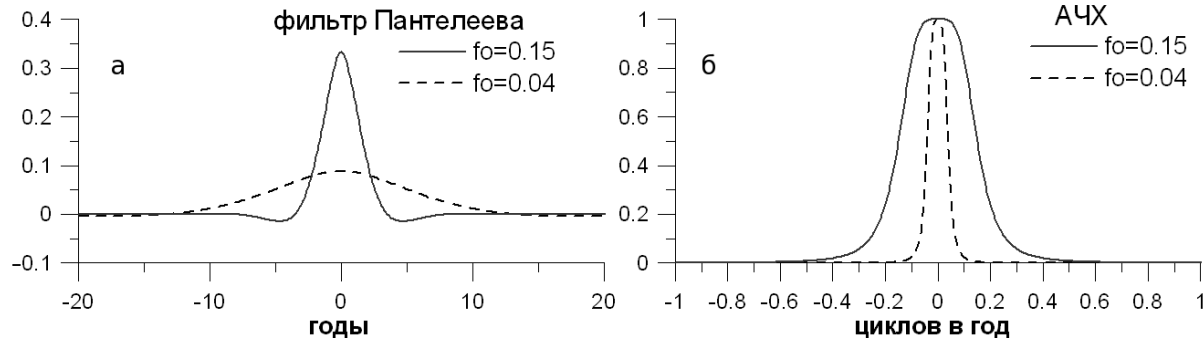


Рис. 4.2: Фильтр Пантелеева (4.13) во временной и частотной областях (4.10) для двух разных значений f_0 .

★ Упражнение 4-1): Покажите, что переход от исходного ряда $x(t_k)$ к ряду в приращениях $y(t_k) = x(t_{k+1}) - x(t_k)$ эквивалентен фильтрации с передаточной функцией $1 - e^{-i\omega}$.

Упражнение 4-2): Фильтры Баттерворта имеют наиболее плоскую АЧХ в полосе пропускания. Они полностью определяются порядком и частотой среза. Заданная частота среза не меняется с увеличением порядка, но АЧХ становится круче. Передаточная функция фильтра Баттерворта n -го порядка задается выражением

$$W(p) = B_n^{-1}(Tp),$$

где $1/T$ – величина, обратная частоте среза, а полином Баттерворта для четных степеней n имеет вид

$$B_n(x) = \prod_{k=1}^{n/2} (x^2 + 2x \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + 1),$$

для нечетных n

$$B_n(x) = (1+x) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (x^2 + 2x \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + 1).$$

В развернутой форме полином может быть записан как

$$B_n(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + x^n,$$

где коэффициенты обладают свойством симметрии

$$a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \dots, a_k = a_{n-k}.$$

Вычислите импульсную и переходную функцию, АЧХ и ФЧХ фильтра Баттерворта второго, третьего, четвертого порядков. Сравните с фильтрами Пантелеева из примера 4.3.

Упражнение 4-3): Запишите функцию влияния (Грина) для операторов [21]

$$Lf = 2f(x), Lf = \sin(x), Lf = \sin(x), Lf = \sin(x)f(x), Lf = f(x^2)$$

Упражнение 4-4): Из теоремы о производной очевидно, что АФЧХ операции взятия производной $W(i\omega) = i\omega$. Сравните аналитическую частотную характеристику с характеристиками для разностных схем вычисления производной

$$f'(t_0) = \frac{1}{2\Delta t} [f(t_0 + \Delta t) - f(t_0 - \Delta t)]$$

$$f'(t_0) = \frac{1}{2\Delta t} [3f(t_0) - 4f(t_0 - \Delta t) + f(t_0 - 2\Delta t)]$$

$$f'(t_0) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{25}{12} f(t_0) - 4f(t_0 - \Delta t) + 3f(t_0 - 2\Delta t) - \frac{4}{3} f(t_0 - 3\Delta t) + \frac{1}{4} f(t_0 - 4\Delta t) \right]$$

Упражнение 4-5): Вычислите передаточную функцию модели АРСС (1.31). Определите выражение для СПМ случайного сигнала АРСС.

Упражнение 4-6): Покажите, что для линейного преобразования, инвариантного относительно сдвига, каждый элемент базиса Фурье является собственным вектором.

Упражнение 4-7): Фильтрация с согласованным (matched) фильтром основана на вычислении корреляции с сигналом сравнения [51]. Запишите выражение такой фильтрации в виде свертки (см. упр. 1-9).

Упражнение 4-8): В *гомоморфной фильтрации* [43], [75] мультипликативный сигнал $f = g \cdot h$ переводится в спектральную область, где спектры логарифмируются $\log(\hat{f}) = \log(\hat{g} \cdot \hat{h}) = \log(\hat{g}) + \log(\hat{h})$ при $\hat{g} \neq 0$, $\hat{h} \neq 0$.

Если компоненты g и h имеют различные спектральные характеристики, они могут быть отделены друг от друга линейным фильтром. Для восстановления компонент нужно выполнить экспоненциальное преобразование и обратное преобразование Фурье (в дискретном случае – Z -преобразование). Фильтрацию можно выполнять также после выполнения обратного преобразования Фурье логарифма комплексной спектральной плотности

$$C(q) = F^{-1}\{\log(\hat{f}(\omega))\}(q) = F^{-1}\{\log(|\hat{f}(\omega)|) + \log(\text{Arg}(\hat{f}(\omega)))\},$$

которое носит название кепструм и зависит от переменной, называемой кефренси (термины получены перестановкой букв в словах spectrum и frequency).

Выполните гомоморфную фильтрацию для двух перемноженных сигналов, состоящих из гармоник разных частот.

Глава 5

Оптимальная фильтрация Винера-Колмогорова

*В меру радуйся удаче,
в меру в бедствиях горюй;
Смену волн познай, что в жизни
человеческой царит.
Архилох, перевод В. Вересаева*

Теория фильтрации тесно связана с теорией динамических систем и незаменима при создании систем автоматического управления, наведения, слежения, обнаружения и др. Поэтому математический аппарат, к рассмотрению которого мы переходим, находит широкое применение.

5.1 Общие положения В большинстве случаев реальные входные и выходные процессы содержат случайную компоненту и должны рассматриваться как случайные сигналы. Понятия интегрируемости и дифференцируемости требуется обобщить на случайные процессы. Для этого вначале вводятся понятия сходимости для случайных величин: сходимость x_n к x_0 при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица $P\{x_n \rightarrow x_0\} = 1$, сходимость по вероятности $\forall \varepsilon > 0 : P\{|x_n - x_0| > \varepsilon\} = 0$ и сходимость в среднеквадратическом смысле $\langle |x_n - x_0|^2 \rangle = 0$. Используя сходимость в среднеквадратическом, для процессов второго порядка¹ с ограниченным средним квадратом $M\{y^2\} < \infty$ производная и интеграл от случайного процесса определяются как

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \left| \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} - y'(t) \right|^2 \rangle &= 0, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \left| \sum_k y(t_k) \Delta t_k - \int y(t) dt \right|^2 \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

¹Процесс второго порядка имеет конечные первые и вторые моменты [7].

Производная и интеграл существуют не для каждого случайного процесса. Довольно сложная теория развита, в связи с этим предметом [31].

Для того, чтобы случайный процесс был интегрируемым, необходимо, чтобы преобразование Фурье его автоковариационной функции было равно нулю в нуле. Иначе, по теореме о производной (1.12), интеграл обратится в бесконечность. В частности, из этого следует, что идеальный белый шум с постоянной спектральной плотностью не может быть проинтегрирован в обычном смысле, более того, он не может существовать в природе, т.к. его средняя мощность бесконечна. Белым шумом обычно считается сигнал с постоянным спектром в широкой полосе частот. Понятие белого шума применимо, если все постоянные времени системы, например длительность переходного процесса, больше характерного времени корреляции входного воздействия. Для интегрирования по Винеровскому процессу разработан специальный аппарат интегрирования в смысле Ито и Стратоновича [47]. В стохастическом интегрировании важно положение точки вычисления функции на разбиении.

Можно показать, что понимая интеграл в смысле (5.1), для интегрируемых с квадратом, непрерывных в среднеквадратическом смысле процессов интегралы Римана и Стильеса можно писать в обычных обозначениях [51], что мы и будем делать.

Цель данной главы – познакомиться с постановкой и решением задачи синтеза оптимального линейного фильтра. Эта задача заключается в построении фильтра, выделяющего из сигнала полезную информацию и минимизирующего некоторый критерий: невязку или меру отклонения результата фильтрации от желаемого результата. В теории оптимальной фильтрации Винера-Колмогорова таким критерием выступает средний квадрат отклонения оценки полезного сигнала от его истинного значения. Такая задача была впервые решена для дискретного процесса в 1941 г. А. Колмогоровым и обобщена на случай непрерывных процессов в 1949 г. Н. Винером.

Для случайных процессов разработана теория канонических разложений [41]. Для стационарных случайных процессов одним из таких разложений оказывается разложение Фурье. Благодаря возможностям, которые открывает аппарат Фурье-преобразования, работа со стационарными сигналами и линейными фильтрами, собственными функциями которых являются комплексные гармоники, существенно упрощается. Для вывода фильтра нам понадобятся специальные понятия и методы, такие как формирующий фильтр, факторизация спектральной плотности, а также приёмы из ТФКП, с которыми мы познакомимся по ходу изложения.

5.2 Начальные моменты СПМ Будем рассматривать входной сигнал y и выходной сигнал x линейного фильтра с импульсной характеристикой $h(t)$ как действительные случайные процессы. Их можно охарактеризовать начальными (нецентральными) моментами второго порядка, которые для стационарных эргодических процессов приобретают вид

$$\begin{aligned}\phi_{yy}(\Delta t) &= \langle y(t)y(t + \Delta t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t + \Delta t)dt, \\ \phi_{xx}(\Delta t) &= \langle x(t)x(t + \Delta t) \rangle = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)y(t - \tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)y(t + \Delta t - \tau_2)d\tau_2 \right] dt, \\ \phi_{xx}(\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)\phi_{yy}(\Delta t - \tau_2 + \tau_1)d\tau_2.\end{aligned}$$

При выводе теории Винеровской фильтрации эти моменты обычно называют автокорреляционными функциями, мы тоже будем употреблять этот термин, хотя в отечественной литературе им принято называть нормированные и центрированные вторые моменты. В обозначениях главы 1

$$\phi_{xx}(\Delta t) = K_{xx}(\Delta t) + \langle x(t + \Delta t) \rangle \langle x(t) \rangle.$$

Введём в рассмотрение взаимную корреляционную функцию (нецентральный смешанный момент второго порядка)

$$\phi_{yx}(\Delta t) = \langle y(t)x(t + \Delta t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)y(t)y(t + \Delta t - \tau)d\tau \right] dt.$$

Переводя выражения в спектральную область, получим для спектральных плотностей

$$\begin{aligned}G_{yy}(\omega) &= F\{\phi_{yy}(\tau)\}, \\ G_{xx}(\omega) &= F\{\phi_{xx}(\tau)\} = W^*(i\omega)W(i\omega)G_{yy}(\omega) = |W(i\omega)|^2 G_{yy}(\omega), \quad (5.2) \\ G_{yx}(\omega) &= W(i\omega)G_{yy}(\omega).\end{aligned}$$

Спектральная плотность, являющаяся Фурье-преобразованием АКФ, — чётная, действительная, неотрицательная функция ω при действительных значениях аргумента (см. гл. 1).

5.3 Факторизация СПМ, формирующий фильтр Любой сигнал $x(t)$ с рациональным спектром (или с эмпирическим спектром, который аппроксимируется рациональной функцией)

$$G_{xx}(\omega) = \frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)}, \quad (5.3)$$

где A и B – полиномы² с действительными коэффициентами, содержащие только четные степени ω , может быть получен из белого шума $n(t)$. Фильтр, переводящий шум на входе в сигнал с заданными характеристиками, называется *формирующим фильтром*. Поскольку, как известно из (1.2), спектральная плотность белого шума – константа на всех частотах (считаем её единицей), используя выражение

$$G_{xx}(\omega) = |W(i\omega)|^2 G_{nn}(\omega) = |W(i\omega)|^2, \quad (5.4)$$

можно подобрать формирующий фильтр так, чтобы на выходе был сигнал $x(t)$ с заданной спектральной характеристикой. Чтобы понять, каким образом конструируется такой фильтр, познакомимся с некоторыми свойствами рациональной спектральной плотности и приёмом факторизации, который будет незаменим в дальнейшем.

Нам потребуется найти передаточную функцию $W(i\omega)$ устойчивого фильтра, квадрат модуля которой равен СПМ (5.4). Поиск такой комплексной функции напоминает извлечение квадратного корня. Основная теорема алгебры, доказанная Ф. Гауссом в докторской диссертации, гласит, что полином первого порядка имеет комплексный корень. Для её использования расширим ω до комплексной переменной на плоскости C . В предыдущем разделе была введена передаточная функция аргумента p . В данном разделе, опираясь на [33], мы не будем писать аргумент p , в то же время, передаточная функция будет записываться как функция $i\omega$ где $w \in C$. Из контекста будет видно, когда $i\omega = p$ представляет всю плоскость, а когда мы возвращаемся к действительному аргументу ω функции $G_{xx}(\omega)$.

Обратим внимание на то, что в формуле (5.3) знаменатель $A(\omega^2)$ не может иметь действительных корней, иначе $G = G_{xx}(\omega)$ будет иметь полюс на действительной оси, обращающий интеграл от спектральной плотности в бесконечность, что невозможно для сигнала конечной мощности (предполагается, что общие множители числителя и знаменателя в (5.2) сокращены). Поскольку G – четная функция, каждому её корню w_k

²Наличие только четных степеней частоты, связанное с четностью СПМ, отличает полиномы в (5.3) от полиномов в (4.7).

соответствует также корень $-w_k$, т.к. в $A(\omega^2)$ и $B(\omega^2)$ входят только чётные степени ω . Как говорилось в разделе 4.2, корни многочленов с действительными коэффициентами либо действительны, либо попарно комплексно сопряжены. Действительные либо чисто мнимые корни встречаются только парами $(u_k, -u_k)$ и $(iv_k, -iv_k)$, а комплексные корни – четверками $(\omega_k, \omega_k^*, -\omega_k, -\omega_k^*)$. Из сказанного следует, что знаменатель (5.3) может быть представлен в виде произведения

$$A(\omega^2) = c \Pi_k (\omega - \omega_k)(\omega - \omega_k^*)(\omega + \omega_k)(\omega + \omega_k^*) \times \Pi_m (\omega - iv_m)(\omega + iv_m)$$

и разложен на множители

$$A(\omega^2) = \pm Q(\omega)Q(-\omega),$$

$$Q(\omega) = \sqrt{c} \Pi_k (\omega - \omega_k)(\omega + \omega_k^*) \times \Pi_m (\omega - iv_m).$$

Все корни многочлена $Q(\omega)$ лежат в верхней полуплоскости и симметричны относительно мнимой оси.

$$G(\omega) = \frac{\pm B(\omega^2)}{Q(\omega)Q(-\omega)} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)Q(-\omega)}.$$

Отметим, что числитель $B(\omega^2)$ не может менять знак, т.к. для всех действительных ω $G(\omega) \geq 0$, т.е. любой действительный корень u_k , который может иметь $B(\omega^2)$, должен быть кратным корнем чётного порядка, $\pm B(\omega^2)$ – многочлен от w^2 с действительными коэффициентами. Таким образом, из всего вышесказанного следует, что рациональная спектральная плотность как положительная функция $G(\omega)$ действительной переменной, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|G(\omega)||}{a + \omega^2} < \infty,$$

может быть *факторизована*, т.е. разложена на две функции комплексной переменной

$$G(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$$

такие, что

1) $H_1(\omega)$ – ограниченная и аналитическая в нижней полуплоскости функция, не имеющая нулей и особых точек в нижней полуплоскости.

2) $H_2(\omega)$ – ограниченная и аналитическая в верхней полуплоскости функция, не имеющая нулей и особых точек в верхней полуплоскости.

3) Для действительных ω выполняется

$$H_1(\omega) = H_2^*(\omega).$$

Вернёмся к (5.4). С использованием факторизации спектральной плотности

$$G(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega) = |H_1(\omega)|^2,$$

получим для формирующего фильтра, переводящего белый шум в сигнал $x(t)$, передаточную функцию устойчивой стационарной линейной системы

$$W(i\omega) = H_1(\omega).$$

Обратим внимание на то, что передаточную функцию можно рассматривать как функцию ω (будем отмечать её тильдой)

$$\tilde{W}(\omega) = W(i\omega), \quad (5.5)$$

которая получается поворотом комплексной плоскости аргумента $i\omega$ на 90° по часовой стрелке. Если $W(i\omega)$ устойчивой системы не имеет полюсов в правой полуплоскости, то соответствующая ей $\tilde{W}(\omega)$ не имеет полюсов в нижней полуплоскости.

◇ Пример 5.1): Сигнал $x(t)$ с рациональной спектральной плотностью

$$G_{xx}(\omega) = \frac{1 + a^2\omega^2}{(1 + b^2\omega^2)(1 + c^2\omega^2)} = \frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)},$$

которая факторизуется как

$$H_1(\omega) = \frac{1 + ai\omega}{(1 + bi\omega)(1 + ci\omega)},$$

$$H_2(\omega) = \frac{1 - ai\omega}{(1 - bi\omega)(1 - ci\omega)},$$

может быть получен из белого шума со спектральной плотностью $G_{nn} = 1/\pi$ с использованием формирующего фильтра

$$\tilde{W}(\omega) = W(i\omega) = \sqrt{\pi}H_1(\omega).$$



5.4 Постановка задачи оптимальной фильтрации Прийдя к соглашению относительно обозначений, введя необходимые понятия формирующего фильтра и факторизации, мы можем приступить к задаче синтеза оптимального фильтра в постановке Винера, которая предполагает следующее:

1) Сигнал $y(t)$ содержит полезную составляющую $x(t)$ и шум $u(t)$, оба процесса стационарны и имеют отличительные характеристики

$$y(t) = x(t) + u(t).$$

2) Искомый фильтр должен выполнять над входным сигналом линейную операцию, выделяя полезный сигнал.

3) Фильтр должен быть физически реализуемым³, т.е. импульсная характеристика оптимального фильтра $h(t) = 0$ при $t < 0$.

4) Критерием выбора наилучшего возможного фильтра служит среднее квадратическое значение разности между истинным сигналом и его оценкой на выходе фильтра. Разность выразим в виде

$$\varepsilon(t+T) = x(t+T) - \bar{x}(t+T) = x(t+T) - \int_0^{\infty} h(\tau)y(t-\tau)d\tau, \quad (5.6)$$

здесь под T подразумевается смещение, $T = 0$ при строгой (чистой) фильтрации, $T > 0$ при фильтрации с упреждением (прогнозом), $T < 0$ при фильтрации с интерполяцией⁴. Для среднего квадрата отклонения запишем

$$\begin{aligned} < \varepsilon(t+T)^2 > = < x(t+T)x(t+T) > - \\ & - 2 \int_0^{\infty} h(\tau)[< x(t+T)x(t-\tau) > + < x(t+T)u(t-\tau) >]d\tau + \\ & + \int_0^{\infty} h(\tau_1)d\tau_1 \int_0^{\infty} h(\tau_2) < [x(t-\tau_1)+u(t-\tau_1)][x(t-\tau_2)+u(t-\tau_2)] > d\tau_2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

что с использованием корреляционных функций и обозначений

$$\phi_{yx}(t) = \phi_{xx}(t) + \phi_{ux}(t) = \phi_{xx}(t) + \phi_{xu}(-t),$$

³Каузальность не была отправным пунктом в работе Винера, но в приложениях реального времени она необходима.

⁴Линейная фильтрация позволяет решать и более общие задачи, например дифференцировать сигнал.

$$\phi_{yy}(t) = \phi_{xx}(t) + \phi_{ux}(t) + \phi_{xu}(t) + \phi_{uu}(t),$$

с учётом того, что $\phi_{xu}(t) = \langle x(\tau), u(\tau + t) \rangle$, можно переписать в виде

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \phi_{xx}(0) - 2 \int_0^\infty \phi_{yx}(T + \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^\infty h(\tau_1) d\tau_1 \int_0^\infty h(\tau_2) \phi_{yy}(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2. \quad (5.8)$$

5.5 Вывод уравнения Винера-Хопфа Решим задачу минимизации выражения (5.8) с использованием методов вариационного исчисления. Для нахождения весовой функции фильтра, минимизирующей средний квадрат отклонения, необходимо найти экстремум функционала $\mathcal{F}(h) = \langle \varepsilon^2(h) \rangle$ методом Эйлера, приравняв первую вариацию (слабый дифференциал Гато [25]) нулю

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathcal{F}(h) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(h + \epsilon\eta) - \mathcal{F}(h)}{\epsilon} = \\ &= \left. \frac{d\mathcal{F}(h + \epsilon\eta)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{d\langle \varepsilon^2(h + \epsilon\eta) \rangle}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где ϵ – малый параметр, а $\eta(t)$ – некоторая добавочная функция. Смысл записанного выражения состоит в том, что для того, чтобы $h(t)$ минимизировала функционал (5.6) необходимо, чтобы для любой функции сравнения $h(t) + \epsilon\eta(t)$ значение функционала было больше. Разложение функционала в ряд Тейлора по степеням малого параметра ϵ показывает, что необходимым условием минимума является равенство нулю первого члена разложения – первой вариации при $\epsilon \rightarrow 0$. Соответствующее дифференцирование (5.8) и вычисление предела дает выражение

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\langle \varepsilon^2(h + \epsilon\eta) \rangle}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \\ &= 2 \int_0^\infty \eta(\tau) \left[\int_0^\infty h(\tau_1) \phi_{yy}(\tau - \tau_1) d\tau_1 - \phi_{yx}(T + \tau) \right] d\tau = 0, \end{aligned}$$

которое должно выполняться для любого $\eta(t)$. Отсюда необходимым и достаточным условием для того, чтобы h минимизировала (5.7), будет

$$\phi_{yx}(t + T) = \int_0^\infty h(\tau) \phi_{yy}(t - \tau) d\tau, \quad \text{при} \quad t \geq 0. \quad (5.10)$$

Записанное выражение носит название *уравнения Винера-Хопфа*.

5.6 Решение уравнения Винера-Хопфа в спектральной области Во временной области решение интегрального уравнения (5.10) с лёгкостью находится лишь в случае, когда y – белый шум. Тогда, если $\phi_{yy}(t) = c\delta(t)$, где $c = const$, импульсная характеристика оптимального фильтра равна $\phi_{yx}(t+T)/c$. В дискретном случае из корреляционных матриц можно составить линейную матричную систему и искать её решение. В общем случае аналитическое решение уравнения Винера-Хопфа проще искать в спектральной области, для чего перепишем задачу с использованием спектральных корреляционных функций. Если обозначить через $W(i\omega)$ передаточную функцию искомого фильтра, с учетом того, что упреждение на T (смещение фазы сигнала во временной области) сводится в спектральной области к домножению \hat{x} на $e^{i\omega T}$ (упр. 1-1), получим для случая взаимно независимых сигнала и шума ($\phi_{xu} = \phi_{ux} = 0$) выражение полной СПМ ошибки

$$G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |W(i\omega)|^2 G_{uu}(\omega) + |W(i\omega) - e^{i\omega T}|^2 G_{xx}(\omega),$$

здесь первое слагаемое – погрешность от шумов, а второе обусловлено отличием операции, выполняемой фильтром, от операции идеального упреждения (5.2), (5.6). В случае, когда сигнал и шум коррелированы, в выражении появятся дополнительные члены и оно приобретёт вид

$$G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |W(i\omega)|^2 G_{uu}(\omega) + |W(i\omega) - e^{i\omega T}|^* W(i\omega) G_{xu}(\omega) + \\ + |W(i\omega) - e^{i\omega T}| W^*(i\omega) G_{ux}(\omega) + |W(i\omega) - e^{i\omega T}|^2 G_{xx}(\omega) \quad (5.11)$$

где звёздочкой обозначено комплексное сопряжение $W^*(i\omega) = W(-i\omega)$. Средний квадрат полной ошибки получим из выражения⁵

$$\langle \varepsilon^2(\omega) \rangle = \int_0^\infty G_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) d\omega = \\ \int_0^\infty [|W(i\omega)|^2 G_{uu}(\omega) + |W(-i\omega) - e^{-i\omega T}| W(i\omega) G_{xu}(\omega) + \\ + |W(i\omega) - e^{i\omega T}| W(-i\omega) G_{ux}(\omega) + |W(i\omega) - e^{i\omega T}|^2 G_{xx}(\omega)] d\omega. \quad (5.12)$$

Представим теперь передаточную функцию фильтра в экспоненциальном виде (4.1)

$$W(i\omega) = \lambda(\omega) e^{i\varphi(\omega)},$$

⁵Интегрирование проводится только по положительным частотам, с учетом симметричности G .

перепишем выражение (5.12) в виде

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2 \rangle = & \int_0^\infty [\lambda^2(G_{xx} + G_{ux} + G_{xu} + G_{uu}) + G_{xx} - \\ & - \lambda(G_{xx} + G_{ux})e^{i(\omega T - \varphi)} - \lambda(G_{xx} + G_{xu})e^{-i(\omega T - \varphi)}]d\omega. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Поскольку $G_{ux}^* = G_{xu}$ (1.33), можно представить также в экспоненциальном виде скобку

$$G_{yx} = G_{xx} + G_{ux} = \gamma(\omega)e^{i\alpha(\omega)},$$

после чего, преобразовав по формуле Эйлера (1.7) выражение

$$\gamma\lambda \left(e^{i(\omega T - \varphi + \alpha)} + e^{-i(\omega T - \varphi + \alpha)} \right) = 2\gamma\lambda \cos(\omega T - \varphi + \alpha), \quad (5.14)$$

и обозначив

$$G_{yy} = G_{xx} + G_{ux} + G_{xu} + G_{uu},$$

приходим к выражению

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \int_0^\infty [\lambda^2 G_{yy} + G_{xx} - 2\gamma\lambda \cos(\omega T - \varphi + \alpha)]d\omega,$$

которое принимает минимальное значение, когда косинус максимален, т.е.

$$\varphi(\omega) = \alpha(\omega) + \omega T.$$

Дополнив далее до квадрата

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^2 \rangle = & \int_0^\infty [\lambda^2 G_{yy} + G_{xx} - 2\gamma\lambda]d\omega = \\ & = \int_0^\infty \left[\left(\lambda\sqrt{G_{yy}} - \frac{\gamma}{\sqrt{G_{yy}}} \right)^2 + G_{xx} - \frac{\gamma^2}{G_{yy}} \right] d\omega, \end{aligned}$$

видим, что минимум доставляет амплитудно-частотная характеристика

$$\lambda(\omega) = \frac{\gamma(\omega)}{G_{yy}(\omega)} = \frac{\gamma(\omega)}{G_{xx}(\omega) + G_{ux}(\omega) + G_{xu}(\omega) + G_{uu}(\omega)}.$$

Однако передаточная функция с определёнными выше амплитудной и фазовой частотными характеристиками не является, вообще говоря, физически реализуемой. Запишем её в виде

$$\begin{aligned} W(i\omega) &= \frac{\gamma(\omega)}{G_{yy}(\omega)} e^{i(\alpha(\omega) + \omega T)} = \\ &= \frac{G_{xx}(\omega) + G_{ux}(\omega)}{G_{xx}(\omega) + G_{ux}(\omega) + G_{xu}(\omega) + G_{uu}(\omega)} e^{i\omega T} = \frac{G_{yx}(\omega)}{G_{yy}(\omega)} e^{i\omega T}. \end{aligned}$$

Как было показано в (5.4), для сигнала $y(t) = x(t) + u(t)$ может быть построен формирующий фильтр $W_1(i\omega)$, переводящий белый шум $n(t)$ в $y(t)$. Обратный к нему фильтр $W_1^{-1}(i\omega)$ будет обеляющим, т.е. подав на вход $y(t)$, на выходе получим белый шум. Согласно подходу к решению задачи Винера, сформулированному Бодэ и Шенноном, при оптимальной фильтрации нужно, подействовав на сигнал $y(t)$, обелить его, а затем, подействовав на получившийся белый шум $n(t)$, дать на выходе оптимальную сглаженную оценку, в общем случае, с упреждением $\bar{x}(t+T)$. В рамках такого подхода, передаточная функция оптимального фильтра, принимающего на входе $n(t)$, строится как произведение

$$W_2(i\omega) = W(i\omega)W_1(i\omega).$$

Однако этой передаточной функции соответствует некаузальный фильтр. Чтобы иметь физически реализуемый фильтр, импульсная характеристика

$$h_2(t) = F^{-1}\{W_2(i\omega)\}$$

должна обнуляться для отрицательных t

$$h_3(t) = \begin{cases} h_2(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ей соответствует передаточная функция $W_3(i\omega) = F\{h_3(t)\}$, используя которую, мы получаем оптимальный фильтр, действующий на сигнал $y(t)$ в виде

$$W_{opt}(i\omega) = \frac{W_3(i\omega)}{W_1(i\omega)}.$$

5.7 Решение уравнения Винера-Хопфа методами ТФКП Покажем, как получить оптимальный фильтр, решив уравнения Винера-Хопфа (5.10) методами ТФКП. Перепишем уравнение Винера-Хопфа в виде

$$f(t) = -\phi_{yx}(t+T) + (h * \phi_{yy})(t).$$

Мы знаем, что $f(t) = 0$ при $t \geq 0$. С использованием Фурье-преобразования можем записать

$$\hat{f}(\omega) = -e^{i\omega T} \hat{\phi}_{yx}(\omega) + W(i\omega) \hat{\phi}_{yy}(\omega),$$

или, с использованием спектральных обозначений M , в виде

$$\hat{f}(\omega) = W(i\omega) G_{yy}(\omega) - e^{i\omega T} G_{yx}(\omega).$$

Будем рассматривать далее передаточную функцию $\tilde{W}(\omega)$ (5.5) устойчивой системы, получающуюся поворотом нулей и полюсов $W(i\omega)$ по часовой стрелке, так что все они переходят в верхнюю полуплоскость. Выполнив факторизацию спектральной плотности

$$G_{yy}(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega),$$

введём обозначение

$$H_3(\omega) = \frac{G_{yx}(\omega)}{H_2(\omega)},$$

тогда уравнение Винера-Хопфа переписется в виде

$$\frac{\hat{f}}{H_2(\omega)} = \tilde{W}(\omega) H_1(\omega) - e^{i\omega T} H_3(\omega).$$

Для дальнейших преобразований нам необходимо познакомиться со следующей теоремой:

Δ Если $f(t)$ – интегрируемая функция, которая равна нулю на интервале $(0, \infty)$ и имеет преобразование Фурье, тогда

$$\hat{f}(\omega) = F\{f(t)\}$$

является ограниченной *аналитической* функцией в верхней полуплоскости (см. раздел 2.4). Обратно, если преобразование Фурье является аналитическим и ограниченным в верхней полуплоскости, обратное преобразование Фурье

$$f(t) = F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}$$

– функция, равная нулю на $(0, \infty)$. Аналогичные утверждения можно получить, заменив интервал на $(-\infty, 0)$ и нижнюю полуплоскость – верхней. ▲

Воспользовавшись приведённой теоремой, помня о свойствах H_2 , можно заключить, что \hat{f}/H_2 – аналитическая в верхней полуплоскости функция, не имеющая в ней нулей и полюсов, в большинстве практических случаев ограниченная там же. Поэтому её обратное

Фурье-преобразование равно нулю на $(0, \infty)$, что обеспечивает выполнение условия уравнения Винера-Хопфа, которое теперь можно записать в виде

$$F^{-1}\{\tilde{W}(\omega)H_1(\omega)\} = F^{-1}\{e^{i\omega T}H_3(\omega)\}.$$

Поскольку $\tilde{W}(\omega)$ и $H_1(\omega)$ – аналитические и ограниченные в нижней полуплоскости функции, импульсная характеристика

$$g(t) = F^{-1}\{\tilde{W}(\omega)H_1(\omega)\}$$

равна нулю на интервале $(-\infty, 0)$. Значит выражение для оптимальной передаточной функции физически реализуемой системы будет иметь вид

$$W_{opt}(i\omega) = \tilde{W}_{opt}(\omega) = \frac{1}{H_1(\omega)}F_{(0,\infty)}\{g(t)\} = \frac{1}{H_1(\omega)}F_{(0,\infty)}\{F^{-1}\{e^{i\omega T}H_3(\omega)\}\}.$$

Обозначение $F_{(0,\infty)}$ введено, чтобы подчеркнуть, что интегрирование ведётся в пределах $(0, \infty)$, т.е. выполняется одностороннее Фурье-преобразование.

Важным аспектом оптимальной фильтрации является возможность исследовать её точность. Погрешность оптимальной линейной фильтрации может быть определена подстановкой полученного решения для оптимального фильтра в (5.12) или (5.8). Однако в этих формулах предполагается, что такие характеристики, как корреляционные функции и их спектры известны. На практике они оцениваются по конечным интервалам наблюдений и аппроксимируются аналитическими выражениями с погрешностями, которые также будут вносить свой вклад. Так что оценка ошибки будет иметь свою собственную погрешность. Решение задачи в спектральной области для сигнала, заданного на конечном интервале, подразумевает его разложение в ряд Фурье, содержащий бесконечное число членов. Исследование сходимости этого решения довольно сложно. На практике, когда необходимо ограничиться конечным приближением, оно считается удовлетворительным, если вычисленная ошибка изменяется с увеличением числа членов незначительно. Реализовать фильтр можно численно с помощью ЭВМ, но для быстрогодействия бывает полезно воплотить его в “железе”.

◇ Пример 5.2): Сигнал $x(t)$ со спектральной плотностью

$$G_{xx}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

смешивается с белым шумом, имеющим единичную спектральную плотность

$$G_{uu} = 1.$$

Определим оптимальный фильтр для выделения сигнала, в предположении некоррелированности сигнала и шума $G_{ux} = G_{xu} = 0$.

Автокорреляционная функция сигнала $x(\omega)$

$$\phi_{xx}(t) = F^{-1}\{G_{xx}(\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{1 - (i\omega)^2}\right\} = \frac{e^t\chi(-t) - e^{-t}\chi(t)}{2}.$$

Факторизация позволяет разделить G_{xx} на две функции

$$\frac{1}{1 + i\omega} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1 - i\omega}$$

с особыми точками в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Формирующий фильтр для полезного сигнала x даётся передаточной функцией

$$W_x(i\omega) = \tilde{W}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}.$$

Для сигнала, смешанного с шумом, спектральная плотность будет задаваться выражением

$$G_{yy}(\omega) = G_{xx}(\omega) + G_{uu}(\omega) = \frac{2 + \omega^2}{1 + \omega^2}.$$

Факторизация позволяет разделить G_{yy} на две функции

$$H_1(\omega) = \frac{\sqrt{2} + i\omega}{1 + i\omega} \quad \text{и} \quad H_2(\omega) = \frac{\sqrt{2} - i\omega}{1 - i\omega}.$$

Формирующий фильтр, переводящий белый шум $n(t)$ в $y(t)$, имеет вид

$$W_1(i\omega) = H_1(\omega) = \frac{\sqrt{2} + i\omega}{1 + i\omega}.$$

С использованием введённых в (5.14) обозначений, при $T = 0$ получим

$$\alpha(\omega) = 0, \quad \lambda(\omega) = \frac{1}{2 + \omega^2},$$

откуда передаточная функция оптимального фильтра для $y(t)$ равна

$$W(i\omega) = \frac{G_{yx}}{G_{yy}} = \frac{G_{xx}}{G_{yy}} = \lambda(\omega)e^0 = \frac{1}{2 + \omega^2}.$$

Фильтр Винера может быть реализован методом Боде-Шеннона – обелением наблюдаемого сигнала $y(t) = x(t) + u(t)$ с последующей оптимальной обработкой. Фильтру с передаточной функцией

$$\begin{aligned} W_2(i\omega) = H_3(\omega) &= \frac{G_{yx}}{H_2} = W(i\omega)W_1(i\omega) = \\ &= \frac{\sqrt{2} + i\omega}{(1 + i\omega)(2 + \omega^2)} = \frac{1}{(1 + i\omega)(\sqrt{2} - i\omega)} \end{aligned}$$

соответствует некаузальная импульсная характеристика

$$\begin{aligned} h_2(t) &= F^{-1}\{W_2(i\omega)\} = \\ &= \frac{e^{-t}\chi(t) + e^{\sqrt{2}t}\chi(-t)}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)[e^{-t}\chi(t) + e^{\sqrt{2}t}\chi(-t)]. \end{aligned}$$

Обнуляя для отрицательных аргументов импульсную характеристику

$$h_3(t) = h_2(t)\chi(t) = \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

получаем передаточную функцию каузального устойчивого фильтра

$$W_3(i\omega) = F\{h_3(t)\} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1 + p}, \quad W_3(i\omega) = \frac{\sqrt{2} - 1}{1 + i\omega},$$

что даёт нам передаточную функцию оптимального фильтра Винера

$$W_{opt}(i\omega) = \frac{W_3(i\omega)}{W_1(i\omega)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + i\omega}.$$

Импульсная характеристика для него дается выражением

$$h_{opt}(t) = F^{-1}\{W_{opt}(i\omega)\} = (\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}t}.$$



Основная сложность при реализации подхода Боде-Шеннона связана с факторизацией спектральной плотности. Для рациональной спектральной плотности факторизация возможна. Как показано выше, H_1 , H_2 , H_3 могут быть получены исследованием нулей и полюсов G_{yy} . Если спектральную плотность невозможно факторизовать, нужно использовать квазиоптимальный фильтр (оценить интервал стационарности, характеристики на нем, аппроксимировать спектр дробно-рациональной функцией).

5.8 Многомерный случай Задача поиска оптимального фильтра может быть обобщена на многомерный случай [54]. В дискретном случае все выражения принимают матричную форму. При этом каузальному фильтру соответствует передаточная функция без особенностей (полюсов) вне единичного круга $D = \{\omega : |\omega| \leq 1\}$. Задача поиска оптимального фильтра Винера решается поэтапно.

1) Вычисляется передаточная функция оптимального некаузального фильтра

$$\tilde{\mathbf{W}}(\omega) = \mathbf{W}_T(\omega) \frac{\mathbf{G}_{yx}(\omega)}{\mathbf{G}_{yy}(\omega)},$$

здесь $\mathbf{W}_T(\omega)$ – матричная передаточная функция задержки (упреждения).

2) Производится факторизация спектральной плотности

$$\mathbf{G}_{yy}(\omega) = \mathbf{H}_1(\omega)\mathbf{H}_2(\omega),$$

тогда

$$\tilde{\mathbf{W}}(\omega) = \frac{\mathbf{R}(\omega)}{\mathbf{H}_1(\omega)},$$

где

$$\mathbf{R}(\omega) = \tilde{\mathbf{W}}_2(\omega) = \mathbf{W}_T(\omega)\mathbf{H}_3(\omega) = \mathbf{W}_T(\omega) \frac{\mathbf{G}_{yx}(\omega)}{\mathbf{H}_2(\omega)}.$$

3) Производится сепарация, т.е., в случае матриц, их разделение на верхнетреугольную (каузальную) и нижнетреугольную

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{R}_+(\omega) + \mathbf{R}_-(\omega),$$

так что \mathbf{R}_+ не имеет особенностей вне D .

4) Оптимальная передаточная функция получается в виде

$$\mathbf{W}_{opt}(\omega) = \frac{\mathbf{R}_+(\omega)}{\mathbf{H}_1(\omega)}.$$

Такая последовательность операций позволяет получить устойчивый (благодаря факторизации) каузальный (благодаря сепарации) оптимальный фильтр.

Фильтр Винера предполагает, что входной процесс стационарен и к нему можно применить методику работы с эргодическими процессами, когда вероятностные характеристики процесса в фазовом пространстве могут быть получены анализом его поведения во времени (см. раздел 1.9). Модель задаётся спектральной плотностью или корреляционным

оператором (передаточной функцией формирующего фильтра). Точное решение уравнения Винера-Хопфа существует для марковских процессов. Все совместные функции распределения таких процессов могут быть выведены из двумерных совместных плотностей. Необходимым и достаточным условием марковости является транзитивность автокорреляционной функции $\phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0)$.

Как уже говорилось в разделе 1.9, полностью описываются с помощью среднего, дисперсии и АКФ только гауссовские процессы, у которых совместные плотности распределения нормальны. Гауссовские процессы с экспоненциальной АКФ (см. пример 5.3) либо с дробно-рациональной (факторизуемой) спектральной плотностью являются марковскими. Они могут быть получены из белого гауссовского шума с использованием формирующего фильтра с дробно-рациональной передаточной функцией. Их АКФ дифференцируема в нуле конечное число раз. В природе же наблюдается большое число немарковских процессов, которые могут быть продифференцированы бесконечное число раз (например сглаженный сигнал силы тяжести). Они могут быть лишь приближены марковскими процессами.

Для процессов, зашумлённых гауссовским белым шумом, доказано, что оценка, доставляемая оптимальным винеровским фильтром, минимизирует квадрат отклонения наилучшим возможным образом в классе линейных и нелинейных оценок. В реальных условиях стационарность сигнала не соблюдается, однако существуют способы построения квазиоптимальных и адаптивных фильтров. Когда интервал, на котором процесс можно считать приближенно стационарным, известен и относительно продолжителен, на нём можно смело строить фильтр по методу Винера-Колмогорова.

На практике чрезвычайно важно как следует обдумать задачу и подобрать подходящий критерий оптимальности, возможно, многопараметрический. Вывести аналог уравнения Винера-Хопфа для оптимального фильтра из условия экстремума (5.9) можно и для более общих функций математического ожидания и дисперсии ошибки, чем с средний квадрат ошибки, для произвольных канонических разложений нестационарных процессов и даже для нелинейных операторов. Однако решение такого уравнения представляет собой задачу большой сложности, которое даже в простейших случаях, если и удастся найти, то лишь численно [68].

► Пример 5.3): В работах [87], [88] проведено моделирование вертикальной качки корабля. Используются данные октана⁶, полученные в

⁶Октан – прибор на основе лазерных гироскопов, измеряющий крен, тангаж и вертикальные перемещения корабля.

ходе 23-й Геофизической экспедиции ГИН РАН на судне “Академик Николай Страхов” в 2006 г. На рис. 5.1а представлены вертикальные перемещения на одном из галсов в Индийском океане. На рис. 5.1б представлена соответствующая оценка СПМ по методу Блекмана-Тьюки с окном Бартлетта и дробно-рациональная модель для неё. Для АКФ использовалась экспоненциальная модель $\phi(t) = e^{-\alpha t} + e^{-\beta t}[a \cos(\omega_1 t) + b \sin(\omega_1 t)]$, параметры которой α , β , ω_1 , a и b подбирались нелинейным МНК. Эта модель соответствует формирующему фильтру 3-го порядка с уравнением

$$\ddot{x} + (2\alpha + \beta)\ddot{x} + (2\alpha\beta + \alpha^2 + \omega_1^2)\dot{x} + \alpha(\alpha^2 + \omega_1^2)x = \alpha(\alpha^2 + \omega_1^2)n$$

и характеристическими числами $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -\beta + i\omega_1$. Доминирующий период волнения ~ 12 сек обусловлен океанской зыбью.

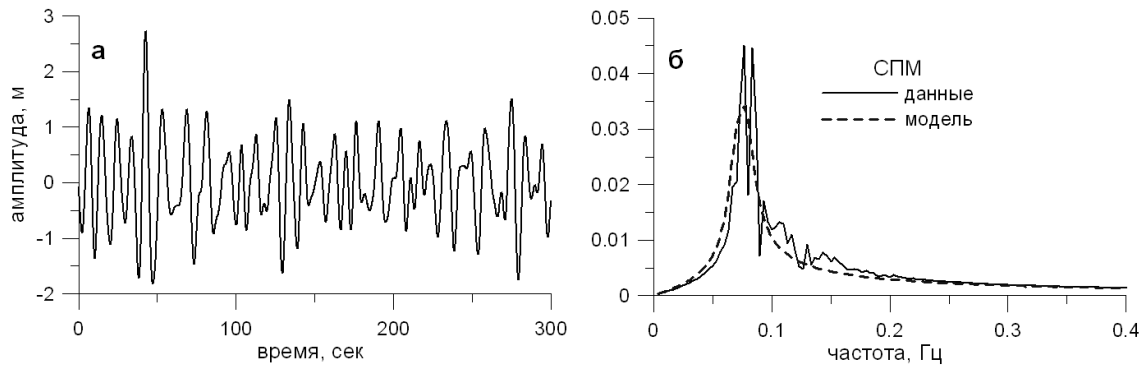


Рис. 5.1: Вертикальная качка корабля (а) и её СПМ (б).

Пример 5.4): В работе [101] фильтр Винера применен для обработки остаточных разностей пульсарного тайминга с целью построения пульсарной шкалы времени. Использовано предположение о некоррелированности шумов разных пульсаров.

★ Упражнение 5-1): Постройте оптимальный фильтр для выделения сигнала x , смешанного с шумом u , со спектральными плотностями

$$G_{xx}(\omega) = \frac{1}{(1 + \omega^2)}, \quad G_{uu}(\omega) = \frac{2\omega^2}{(1 + \omega^4)}.$$

Упражнение 5-2): Опираясь на аппарат характеристических функций (упр. 1-5) докажите, что плотность распределения $p(\xi)$ случайной величины, равной сумме двух независимых случайных величин с плотностями $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi)$, определяется как свёртка

$$p(\xi) = p_1(\xi) * p_2(\xi).$$

Глава 6

Фильтрация Калмана-Бьюсси

*Каждый выбирает для себя
Женщину, религию, дорогу.
Дьяволу служить или пророку
Каждый выбирает для себя.
Ю. Левитанский*

Реальность даёт почву для постановки бесконечного числа исследовательских задач. Выбор задачи и модели для неё обычно имеет свои основания. Полезно понимать, в чём они состоят. Критериями для выбора нередко выступают доступность для рационального решения формальным методом и минимальность модели. Она должна достаточно хорошо приближать реальность и быть при этом максимально простой. В этом разделе мы познакомимся с динамическими системами – одним из фундаментальных понятий формальной теории, лежащим в основе кибернетики и нашедшим широкое применение, во многом благодаря присущему ему свойству минимальности.

6.1 Динамические системы В 60-х годах XX века Калманом и Бьюсси был развит рекуррентный подход к оптимальной фильтрации. Авторы исходили из понятия о *динамической системе* как о системе, в которую вводится нечто (вещество, энергия, информация) и в некоторые моменты времени выводится что-то (непрерывно или дискретно). Для предсказания выхода недостаточно знать текущий вход, но нужно знать всю предысторию входного воздействия. Вместо этого удобно представить, что предшествующее *входное воздействие* приводит систему в некоторое *состояние*, которое вместе с текущим входным воздействием определяет текущий *выход* и влияет на будущий. Таким образом вводится понятие о состоянии системы и параметрах (переменных) состояния, которые его определяют. Состояние фиксирует некоторый минимум необходимой информации. Термин “динамическая” становится применим

к системе, как только знание начального состояния $x(t_1)$ и входного воздействия $u(t_2, t_1)$ на отрезке времени $[t_1, t_2]$ становится необходимым и достаточным условием для того, чтобы знать состояние $x(t_2)$. Очевидно, что область определения параметра t (в нашем случае – времени) при этом считается упорядоченной ($t_2 > t_1$). Систему с её состояниями можно представлять как некоторое хранилище информации, а её функционирование, вход и выход – как некоторый поток причинно-следственных связей из прошлого в будущее [22]. В физике последовательность изменений состояний объекта называют *траекторией в фазовом пространстве*.

Часто естественным образом понятно где причина а где следствие. Но иногда отличить вход от выхода затруднительно. В этом случае включение обеих компонент одновременно в вектора входа и выхода позволяет модели самой “определить”, действительно ли та или иная переменная является входом, а также имеет ли место *обратная связь*, когда выход вновь поступает на вход.

В связи с рассмотрением динамических систем могут ставиться задачи устойчивости, управления, идентификации, оптимизации, эквивалентности, структуры, декомпозиции, синтеза и др. [2], [4], [39]. Так, задача идентификации заключается в построении математической модели динамической системы по наблюдаемым входному и выходному сигналам и оцениванию её параметров. Задача оценивания состояния связана с определением траектории объекта, при этом объект должен быть наблюдаемым. Входной процесс, которым можно управлять, называется *контролем* или *управлением*. Задача теории оптимального управления заключается в том, чтобы найти такой управляющий процесс, который приведет объект в заданную точку фазового пространства быстрее всего (в нужный момент) или заставит объект двигаться по желаемой траектории, обладающей заданными свойствами оптимальности (гладкости, энергоэкономичности и т.п.). Неуправляемая часть входного процесса называется *возмущением*. Этот термин был впервые введен в небесной механике и в дальнейшем получил широкое распространение. К примеру, при движении судна управление осуществляется посредством двигателей и руля, а возмущающими факторами выступают волнение, снос от ветра и прочее [40]. Как уже говорилось, термин “кибернетика” буквально означает управление кораблём [10].

Когда входные и выходные сигналы принадлежат конечным дискретным множествам или алфавитам, теория динамических систем переходит в теорию автоматов [27], [86].

Тесная связь теории динамических систем с теорией фильтрации становится понятной из примера 4.1 и того, что динамическая система,

задаваемая дифференциальным уравнением (4.6), представляет собой фильтр. До сих пор мы описывали линейный фильтр при помощи импульсной характеристики $h(t)$ в виде интеграла свёртки либо с помощью передаточной функции в частотной области. Однако каузальный фильтр можно записать и дифференциальным уравнением (4.6), связывающим входные и выходные переменные. Импульсная характеристика представляет собой его решение, когда входным сигналом служит δ -импульс. Метод Калмана-Бьюсси состоит в том, что оптимальная оценка полезного сигнала находится не как выходная величина интеграла свёртки, а как решение дифференциального уравнения с соответствующими параметрами, входным сигналом и начальными условиями [8].

6.2 Модель наблюдений и состояний Запишем систему дифференциальных уравнений первого порядка для динамической системы

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t) \quad (6.1)$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ – состояние системы (n -вектор), $\mathbf{G}(t)$ – матрица обратной связи ($n \times n$), $\mathbf{u}(t)$ – входное управляющее воздействие (m -вектор), $\mathbf{F}(t)$ – соответствующая ему матрица ($n \times m$). Напомним, что дифференциальное уравнение порядка n заменой переменных может быть сведено к системе n уравнений первого порядка вида (6.1). Уравнение (6.1) неоднородно и нестационарно, оно носит название *модели состояний*.

Рассмотрим уравнение (канала)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t), \quad (6.2)$$

представляющее собой выражение для наблюдаемого l -компонентного вектора $\mathbf{y}(t)$. В нём $\mathbf{C}(t)$ – матрица наблюдений ($l \times n$), а $\mathbf{r}(t)$ – шум, или погрешности наблюдений. Уравнение (6.2) носит название *модели наблюдений*. В теории управления даются понятия наблюдаемости и управляемости динамической системы [39]. Напомним, что система *наблюдаема*, когда из вектора \mathbf{y} можно извлечь информацию обо всех компонентах \mathbf{x} однозначно для всех t , и *управляема*, когда возможно найти минимум функционала оптимального управления и привести траекторию системы в заданную точку. Наблюдаемость системы является необходимым условием для построения фильтра Калмана.

6.3 Операционный подход. Характеристики многоканальной системы. Рассмотрим однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{G}\mathbf{x}(t), \quad (6.3)$$

его решение записывается в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{G}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0),$$

где матричная экспонента может быть разложена в ряд

$$e^{\mathbf{G}t} = \mathbf{I} + \mathbf{G}t + \frac{\mathbf{G}^2 t^2}{2!} + \dots,$$

а функция

$$\Phi(t - t_0) = e^{\mathbf{G}(t-t_0)}$$

называется *переходной матрицей* системы. Она удовлетворяет исходному уравнению

$$\frac{d\Phi(t - t_0)}{dt} = \mathbf{G}\Phi(t - t_0), \quad (6.4)$$

а также уравнению

$$\frac{d\Phi(t - t_0)}{dt} = -\Phi(t - t_0)\mathbf{G},$$

откуда сразу вытекает свойство

$$\Phi(0) = \mathbf{I}.$$

Переходную матрицу легко найти как решение исходного уравнения, применив к (6.4) преобразование Лапласа (операционный метод). С учетом того, что

$$L\{f'(t)\} = pL\{f\}(p) - f(0 + 0),$$

где f – некоторая функция, например $\Phi(t)$, обозначив матричную передаточную функцию системы (6.3) $\mathbf{W}_x(p) = L\{\Phi(t)\}$, получим

$$p\mathbf{W}_x(p) - \mathbf{I} = \mathbf{G}\mathbf{W}_x(p),$$

откуда

$$\mathbf{W}_x(p) = (p\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1},$$

и, наконец,

$$\Phi(\tau) = L^{-1}\{\mathbf{W}_x(p)\} = L^{-1}\{(p\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\}.$$

Собственные частоты (числа) решения определяются корнями знаменателя $\mathbf{W}_x(p)$, т.е. являются корнями определителя (характеристического уравнения)

$$\det |p\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0. \quad (6.5)$$

В нестационарном случае переходную матрицу нельзя считать функцией разности $(t - t_0)$, но следует считать функцией двух параметров $\Phi(t, t_0)$. Можно показать, что она обладает свойствами

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t),$$

$$\Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t, t_0).$$

Запишем исходную систему (6.1), (6.2) в терминах пространства состояний

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t), \quad (6.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t). \quad (6.7)$$

Решением неоднородного уравнения (6.6) является комбинация общего решения однородного уравнения (невозмущенного движения) и частного решения неоднородного (возмущенного движения)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{F}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (6.8)$$

Как известно из примера 4.1, для асимптотически устойчивой системы влияние начальных условий со временем сходит на нет $\mathbf{x}_0(-\infty) = 0$.

Сопоставляя запись (6.7) через решение, в котором не проявляются начальные условия,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{F}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{r}(t),$$

с интегральной записью фильтра

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t, \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{r}(t),$$

приходим к записи каузальной матричной импульсной характеристики через переходную матрицу

$$\mathbf{h}(t, \tau) = \mathbf{C}(t)\Phi(t, \tau)\mathbf{F}(\tau).$$

Которая для каузальной системы равна нулю при $t < \tau$, ($\mathbf{h}(t, \tau) = \mathbf{h}(t - \tau)$ только в стационарном случае). Соответствующая передаточная функция для системы (6.6), (6.7) с постоянными параметрами приобретает вид

$$\mathbf{W}_y(p) = \mathbf{C}\mathbf{W}_x(p)\mathbf{F} = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{F}.$$

◇ Пример 6.1): Запишем динамическую модель вращающейся Земли (4.10) в матрично-векторном виде в терминах пространства состояний

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{G}\mathbf{m} + \mathbf{F}\varphi, \quad (6.9)$$

где $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, а матрицы легко получить в виде

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} = -\mathbf{F},$$

где α и β – действительная и мнимая части чандлеровской частоты

$$\sigma_c = \alpha + i\beta = 2\pi f_c + i\frac{\pi f_c}{Q}.$$

Решение уравнения $\det |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$ дает характеристические числа системы (6.9)

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\alpha.$$

Переходная матрица системы может быть найдена в виде

$$\Phi(t, t_0) = \Theta(t)\Theta^{-1}(t_0),$$

где $\Theta(t) = \mathbf{H}\mathbf{J}(t)c$ – фундаментальная матрица решений однородной системы. Пусть константа $c = 1$. Матрица \mathbf{H} , столбцами которой являются собственные вектора \mathbf{G} (вычисляются из условия $(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{G})\mathbf{h}_i = 0$), может быть получена в виде

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{J}(t)$, по диагонали которой стоят линейно независимые компоненты решения, имеет вид

$$\mathbf{J}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Вычисления дают для переходной матрицы (6.9) выражение [16]

$$\Phi(t, t_0) = e^{-\beta(t-t_0)} \begin{pmatrix} \cos \alpha(t-t_0) & -\sin \alpha(t-t_0) \\ \sin \alpha(t-t_0) & \cos \alpha(t-t_0) \end{pmatrix}.$$

◆

6.4 Предварительные соглашения Работая с векторными случайными процессами, мы будем характеризовать их матричными ковариационными функциями и спектральными плотностями. Так, если $\mathbf{u}(t)$ – белый шум, его автоковариационная функция отлична от нуля только для нулевого смещения и может быть представлена в виде¹

$$\phi_{\mathbf{u}\mathbf{u}}(t + \tau, t) = \langle \mathbf{u}(t + \tau) \mathbf{u}^T(t) \rangle = \mathbf{Q}(t) \delta(\tau),$$

где $\mathbf{Q}(t)$ – ковариационная матрица размерности $(m \times m)$, по диагонали которой стоят дисперсии компонент $\mathbf{u}(t)$, а вне её – нули. Ковариационные матрицы белых шумов мы будем писать как функции времени $\mathbf{Q}(t)$, с учетом возможной нестационарности процесса. Иногда аргумент будет опущен и матрица будет записана просто как \mathbf{Q} . Отметим, что используемая здесь матричная автоковариационная функция скорее должна называться начальным моментом второго порядка.

Если шум коррелированный (цветной), его можно представить как выход динамической системы (формирующего фильтра, раздел 5.3), на вход которой поступает белый шум $\mathbf{n}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \mathbf{M}(t)\zeta(t) + \mathbf{N}(t)\mathbf{n}(t), \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{H}(t)\zeta(t) + \mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Объединение написанных выше уравнений с уравнениями исходной динамической системы (6.6), (6.7) увеличивает размерность, но не меняет формы уравнений. Таким образом, не теряя общности, мы можем считать входной сигнал $\mathbf{u}(t)$ в (6.6) белым шумом. Погрешности наблюдений $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$ мы также считаем случайными некоррелированными процессами.

Найдём взаимную ковариационную функцию для входного сигнала $\mathbf{u}(t)$ и состояния системы $\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{x}\mathbf{u}}(t_2, t_1) &= \langle \mathbf{x}(t_2) \mathbf{u}^T(t_1) \rangle = \\ &= \left\langle \left(\mathbf{\Phi}(t_2, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_2} \mathbf{\Phi}(t_2, \tau) \mathbf{F}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right) \mathbf{u}^T(t_1) \right\rangle, \end{aligned} \quad (6.11)$$

переносим математическое ожидание $\langle \rangle$ под знак интеграла и помня, что входной шум белый, некоррелированный с начальным состоянием $\mathbf{x}(t_0)$,

¹В отличие от предыдущих определений задержка τ теперь входит в первый множитель.

получим

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{xu}}(t_2, t_1) &= \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_2, \tau) \mathbf{F}(\tau) < \mathbf{u}(\tau) \mathbf{u}^T(t_1) > d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t_2} \Phi(t_2, \tau) \mathbf{F}(\tau) \mathbf{Q} \delta(\tau - t_1) d\tau. \quad (6.12)\end{aligned}$$

Следовательно, для каузального фильтра

$$\phi_{\mathbf{xu}}(t_2, t_1) = \begin{cases} 0, & t_1 > t_2 \\ \frac{1}{2} \mathbf{F}(t_2) \mathbf{Q}, & t_1 = t_2 \\ \Phi(t_2, t_1) \mathbf{F}(t_1) \mathbf{Q}, & t_0 < t_1 < t_2. \end{cases} \quad (6.13)$$

Коэффициент $1/2$ при $t_1 = t_2$ возникает оттого, что мы берём половину площади у правой граничной точки интеграла. Несложно показать, что взаимная ковариационная функция входного сигнала и сигнала $\mathbf{y}(t)$ на выходе уравнения (6.7) записывается в виде

$$\phi_{\mathbf{yu}}(t_2, t_1) = \mathbf{C}(t_2) \phi_{\mathbf{xu}}(t_2, t_1)$$

для некоррелированных $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$.

Для вывода оптимального фильтра Калмана-Бьюсси нам понадобится тот факт, что дисперсионная матрица

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}}(t) = < \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t) > = \phi_{\mathbf{xx}}(t, t)$$

подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mathbf{D}_{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t) \mathbf{D}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}_{\mathbf{x}}(t) \mathbf{G}^T(t) + \mathbf{F}(t) \mathbf{Q} \mathbf{F}^T(t). \quad (6.14)$$

Δ Доказательство: Рассмотрим производную

$$\frac{d\mathbf{D}_{\mathbf{x}}(t)}{dt} = < \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \mathbf{x}^T(t) > + < \mathbf{x}(t) \frac{d\mathbf{x}^T(t)}{dt} >, \quad (6.15)$$

здесь первый член правой части есть результат перестановки второго. Поскольку

$$< \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \mathbf{x}^T(t) > = < [\mathbf{G}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t) \mathbf{u}(t)] \mathbf{x}^T(t) >,$$

переходя к ковариационным функциям, получаем

$$\left\langle \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \mathbf{x}^T(t) \right\rangle = \mathbf{G}(t)\phi_{\mathbf{xx}}(t, t) + \mathbf{F}(t)\phi_{\mathbf{ux}}(t, t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{D}_{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\mathbf{Q}\mathbf{F}^T(t), \quad (6.16)$$

откуда в одно действие получается (6.14), с учётом сходства членов в правой части уравнения (6.15). ▲

6.5 Уравнение Винера-Хопфа в нестационарном случае, принцип ортогональности. Уравнение Винера-Хопфа (5.10) было получено нами в стационарном случае. Записать уравнение Винера-Хопфа для нестационарного случая, в предположении, что фильтрация осуществляется без задержки или упреждения ($T = 0$), можно в виде

$$\phi_{\mathbf{xy}}(t_2, t_0) = \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_1) \phi_{\mathbf{yy}}(t_1, t_0) dt_1, \quad \text{при} \quad t_2 \geq t_0. \quad (6.17)$$

В нестационарном случае теряется инвариантность во времени. Теперь весовая функция и ковариационные функции зависят от двух переменных, а не от разности между ними (4.3). В стационарном же случае $\phi(t_1 - t_0) = \phi(t_0, t_1)$ (см. гл. 1) и (5.10) легко получить из (6.17), выполнив замену $\tau = t_2 - t_1$ и $t = t_2 - t_0$, учитывая, что $\phi_{yy}(t) = \phi_{yy}(-t)$ (четна), $\phi_{yx}(t) = \phi_{xy}(-t)$ (зеркально симметрична).

Уравнение Винера-Хопфа (6.17) можно вывести из следующего предположения: будем искать линейный фильтр наблюдений \mathbf{h} , дающий линейную оценку для сигнала $\mathbf{x}(t_2)$, ортогональную невязке $\varepsilon(t_2)$ (отклонению истинного сигнала от его оценки). Статистический характер задачи требует введения осреднения

$$\left\langle \varepsilon(t_2) \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_0) \mathbf{y}(t_0) dt_1 \right\rangle = 0.$$

Для любой непрерывной импульсной характеристики это условие влечёт ортогональность невязки и наблюдений

$$\left\langle \varepsilon(t_2) \mathbf{y}(t_0) \right\rangle = 0,$$

что и обеспечивается уравнением Винера-Хопфа

$$\left\langle \left(\mathbf{x}(t_2) - \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_1) \mathbf{y}(t_1) dt_1 \right) \mathbf{y}(t_0) \right\rangle = 0, \quad \text{при} \quad t_2 \geq t_0.$$

Геометрически условие ортогональности состоит в том, что оптимальная оценка является проекцией истинного значения полезного сигнала на множество всех возможных линейных операций над наблюдениями заданного типа (см. рис. 8.2). Невязка при этом оказывается минимальным расстоянием от этого множества до истинного значения \mathbf{x} .

6.6 Вывод уравнений непрерывного фильтра Калмана-Бьюсси Используя приведенные выше свойства, выведем оптимальный фильтр Калмана-Бьюсси, который по принимаемому сигналу $\mathbf{y}(t)$ даёт оценку сигнала $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Будем искать фильтр из условия минимизации среднего квадрата отклонения оценки сигнала $\bar{\mathbf{x}}(t)$ от истинного значения $\mathbf{x}(t)$ (всех его компонент) на основе уравнения Винера-Хопфа (6.17) для нестационарного случая. В отличие от фильтра Винера, будем искать решение в терминах пространства состояний.

Запишем исходные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t)\end{aligned}\tag{6.18}$$

и автоковариационные матричные функции белых шумов

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}(t)\mathbf{u}^T(\tau) \rangle &= \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau), \\ \langle \mathbf{r}(t)\mathbf{r}^T(\tau) \rangle &= \mathbf{R}(t)\delta(t - \tau).\end{aligned}$$

С учётом некоррелированности шума и сигнала, легко видеть, что

$$\phi_{\mathbf{xy}}(t_2, t_0) = \langle \mathbf{x}(t_2)[\mathbf{C}(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{r}(t_0)]^T \rangle = \phi_{\mathbf{xx}}(t_2, t_0)\mathbf{C}^T(t_0)\tag{6.19}$$

$$\phi_{\mathbf{yy}}(t_1, t_0) = \mathbf{C}(t_1)\phi_{\mathbf{xx}}(t_1, t_0)\mathbf{C}^T(t_0) + \mathbf{R}(t_1)\delta(t_1 - t_0).\tag{6.20}$$

Продифференцируем теперь уравнение Винера-Хопфа (6.17) по t_2 , считая t_1 и t_0 параметрами (см. приложение Б)

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{xy}}(t_2, t_0)}{\partial t_2} = \mathbf{h}(t_2, t_2)\phi_{\mathbf{yy}}(t_2, t_0) + \int_{-\infty}^{t_2} \frac{\partial \mathbf{h}(t_2, t_1)}{\partial t_2} \phi_{\mathbf{yy}}(t_1, t_0) dt_1, \quad t_2 \geq t_0.\tag{6.21}$$

Рассмотрим по отдельности левую и правую части (6.21).

1) Распишем

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{xy}}(t_2, t_0)}{\partial t_2} = \frac{\partial \phi_{\mathbf{xx}}(t_2, t_0)}{\partial t_2} \mathbf{C}^T(t_0) = \langle \frac{d\mathbf{x}(t_2)}{dt_2} \mathbf{x}^T(t_0) \rangle \mathbf{C}^T(t_0).$$

Подставляя вместо производной правую часть первого уравнения (6.18), получим для левой части (6.21)

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{xy}}(t_2, t_0)}{\partial t_2} = [\mathbf{G}(t_2)\phi_{\mathbf{xx}}(t_2, t_0) + \mathbf{F}(t_2)\phi_{\mathbf{ux}}(t_2, t_0)] \mathbf{C}^T(t_0).$$

При $t_2 > t_0$ второй член справа обнуляется (см. 6.13), и на основании (6.17), (6.19) можно записать

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{xy}}(t_2, t_0)}{\partial t_2} = \mathbf{G}(t_2)\phi_{\mathbf{xx}}(t_2, t_0)\mathbf{C}^T(t_0) = \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{G}(t_2)\mathbf{h}(t_2, t_1)\phi_{\mathbf{yy}}(t_1, t_0)d(t_1)$$

2) Первый член в правой части (6.21), с учетом (6.20), можно представить как

$$\mathbf{h}(t_2, t_2)\phi_{\mathbf{yy}}(t_2, t_0) = \mathbf{h}(t_2, t_2)\mathbf{C}(t_2)\phi_{\mathbf{xx}}(t_2, t_0)\mathbf{C}^T(t_0), \text{ при } t_2 \geq t_0$$

откуда, с учетом (6.19), подставляя (6.17) вместо $\phi_{\mathbf{xx}}(t_2, t_0)\mathbf{C}^T(t_0)$, получаем при $t_2 \geq t_0$

$$\mathbf{h}(t_2, t_2)\phi_{\mathbf{yy}}(t_2, t_0) = \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_2)\mathbf{C}(t_2)\mathbf{h}(t_2, t_1)\phi_{\mathbf{yy}}(t_1, t_0)dt_1.$$

Объединяя полученные выражения для составляющих левой и правой части, из (6.21) выводим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_2} \left[\mathbf{h}(t_2, t_2)\mathbf{C}(t_2)\mathbf{h}(t_2, t_1) + \frac{\partial \mathbf{h}(t_2, t_1)}{\partial t_2} - \mathbf{G}(t_2)\mathbf{h}(t_2, t_1) \right] \phi_{\mathbf{yy}}(t_1, t_0)dt_1 = \\ = 0, \text{ при } t_2 \geq t_0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Тождество выполняется, когда выражение в квадратных скобках равно нулю, т.о. получаем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет оптимальная импульсная характеристика

$$\frac{\partial \mathbf{h}(t_2, t_1)}{\partial t_2} = \mathbf{G}(t_2)\mathbf{h}(t_2, t_1) - \mathbf{h}(t_2, t_2)\mathbf{C}(t_2)\mathbf{h}(t_2, t_1). \quad (6.23)$$

Оптимальная оценка получается фильтрацией наблюдений

$$\bar{\mathbf{x}}(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_1)\mathbf{y}(t_1)dt_1. \quad (6.24)$$

Продифференцируем это выражение

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(t_2)}{dt_2} = \mathbf{h}(t_2, t_2)\mathbf{y}(t_2) + \int_{-\infty}^{t_2} \frac{\partial \mathbf{h}(t_2, t_1)}{\partial t_2} \mathbf{y}(t_1) dt_1.$$

Подставив в полученное выражение (6.23), получим

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(t_2)}{dt_2} = \mathbf{h}(t_2, t_2)\mathbf{y}(t_2) + \int_{-\infty}^{t_2} [\mathbf{G}(t_2)\mathbf{h}(t_2, t_1) - \mathbf{h}(t_2, t_2)\mathbf{C}(t_2)\mathbf{h}(t_2, t_1)] \mathbf{y}(t_1) dt_1.$$

Воспользуемся (6.24), записав t вместо t_2 , имеем

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{h}(t, t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{G}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{h}(t, t)\mathbf{C}(t)\bar{\mathbf{x}}(t).$$

Сгруппировав члены и переобозначив $\mathbf{p}(t) = \mathbf{h}(t, t)$, получим итоговое уравнение

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{p}(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\bar{\mathbf{x}}(t)], \quad (6.25)$$

в котором известны все коэффициенты, кроме $\mathbf{p}(t)$. Выражение в скобках называют обновляющим процессом. Можно показать (см. приложение В), что

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{h}(t, t) = \mathbf{D}_\varepsilon(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t), \quad (6.26)$$

здесь $\mathbf{D}_\varepsilon(t) = \langle \varepsilon_{\mathbf{x}}^2(t) \rangle = \langle (\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t))^2 \rangle$ – ковариационная матрица ошибки (отклонений оптимальной оценки от истинного значения полезного сигнала), зная которую мы получим итоговое решение. Для этого продифференцируем ошибку

$$\frac{d\varepsilon_{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \frac{d(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} - \frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt}.$$

Подставив выражения для первого (6.18) и второго (6.25) слагаемого, с использованием второго уравнения (6.18), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \mathbf{G}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t) - \mathbf{G}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{p}(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\bar{\mathbf{x}}(t)] = \\ &= \mathbf{G}(t)[\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)] - \mathbf{p}(t) [\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) - \mathbf{C}(t)\bar{\mathbf{x}}(t)] + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t) = \\ &= [\mathbf{G}(t) - \mathbf{p}(t)\mathbf{C}(t)]\varepsilon_{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{p}(t)\mathbf{r}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Видно, что $\varepsilon_{\mathbf{x}}(t)$ – вектор состояния системы, возбуждаемой взвешенной суммой белых шумов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$.

Выведем дифференциальное уравнение для $\mathbf{D}_{\varepsilon}(t)$

$$\frac{d\mathbf{D}_{\varepsilon}(t)}{dt} = \left\langle \frac{d\varepsilon_{\mathbf{x}}(t)}{dt} \varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t) \right\rangle + \left\langle \varepsilon_{\mathbf{x}}(t) \frac{d\varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t)}{dt} \right\rangle. \quad (6.28)$$

Используя выведенное выше соотношение (6.27), для первого слагаемого получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\varepsilon_{\mathbf{x}}(t)}{dt} \varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t) \right\rangle = & \left\langle [\mathbf{G}(t) - \mathbf{p}(t)\mathbf{C}(t)]\varepsilon_{\mathbf{x}}(t)\varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t) - \right. \\ & \left. - \mathbf{p}(t)\mathbf{r}(t)\varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{u}(t)\varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Опираясь на дифференциальное уравнение (6.27) и вывод (6.13), можно получить формулы для ковариаций

$$\phi_{\mathbf{r}\varepsilon_{\mathbf{x}}}(t, t) = \left\langle \mathbf{r}(t)\varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t) \right\rangle = \frac{1}{2}(-\mathbf{p}(t)\mathbf{R})^T = -\frac{1}{2}\mathbf{R}\mathbf{p}^T(t) = \phi_{\varepsilon_{\mathbf{x}}\mathbf{r}}^T(t, t)$$

и

$$\phi_{\mathbf{u}\varepsilon_{\mathbf{x}}}(t, t) = \left\langle \mathbf{u}(t)\varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t) \right\rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(t)\mathbf{Q})^T = \frac{1}{2}\mathbf{Q}\mathbf{F}^T(t),$$

где учтена симметричность матриц \mathbf{Q} и \mathbf{R} . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\varepsilon_{\mathbf{x}}(t)}{dt} \varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t) \right\rangle = \\ = [\mathbf{G}(t) - \mathbf{p}(t)\mathbf{C}(t)]\mathbf{D}_{\varepsilon}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{p}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{p}^T(t) + \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}^T(t). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Для второго слагаемого (6.28), с учётом симметричности ковариационной матрицы ошибки, будем иметь

$$\begin{aligned} \left\langle \varepsilon_{\mathbf{x}}(t) \frac{d\varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t)}{dt} \right\rangle = & \left\langle \left(\frac{d\varepsilon_{\mathbf{x}}(t)}{dt} \varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t) \right)^T \right\rangle = \\ = \mathbf{D}_{\varepsilon}(t)[\mathbf{G}^T(t) - \mathbf{C}^T(t)\mathbf{p}^T(t)] + & \frac{1}{2}\mathbf{p}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{p}^T(t) + \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}^T(t), \end{aligned}$$

откуда для выражения (6.28) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{D}_{\varepsilon}(t)}{dt} = & [\mathbf{G}(t) - \mathbf{p}(t)\mathbf{C}(t)]\mathbf{D}_{\varepsilon}(t) + \mathbf{D}_{\varepsilon}(t)[\mathbf{G}^T(t) - \mathbf{C}^T(t)\mathbf{p}^T(t)] + \\ & + \mathbf{p}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{p}^T(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}^T(t). \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение (6.26) для $\mathbf{p}(t)$, приходим, наконец, к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{D}_\varepsilon(t)}{dt} &= \mathbf{G}\mathbf{D}_\varepsilon - \mathbf{D}_\varepsilon\mathbf{G}^T - \mathbf{D}_\varepsilon\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{D}_\varepsilon - \mathbf{D}_\varepsilon\mathbf{C}^T(\mathbf{R}^{-1})^T\mathbf{C}\mathbf{D}_\varepsilon + \\ &\quad + \mathbf{D}_\varepsilon\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{R}^{-1})^T\mathbf{C}\mathbf{D}_\varepsilon + \mathbf{F}\mathbf{Q}\mathbf{F}^T = \\ &= \mathbf{G}(t)\mathbf{D}_\varepsilon(t) - \mathbf{D}_\varepsilon(t)\mathbf{G}^T(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}^T(t) - \mathbf{D}_\varepsilon(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{D}_\varepsilon(t), \end{aligned} \quad (6.31)$$

которое, при начальном условии

$$\mathbf{D}_\varepsilon(t_0) = \langle \varepsilon_{\mathbf{x}}(t_0)\varepsilon_{\mathbf{x}}^T(t_0) \rangle$$

однозначно определяет $\mathbf{D}_\varepsilon(t)$ при $t \geq t_0$, а значит и $p(t)$ из (6.26).

Квадратичное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t)$$

носит название уравнения Риккати [63]. Матричному уравнению Риккати (6.31) удовлетворяет ковариационная матрица ошибки для оптимального фильтра Калмана-Бьюсси. Методы решения этого уравнения разработаны для случая конечномерных матриц.

Таким образом, непрерывный фильтр Калмана-Бьюсси выведен нами для нестационарного случая при условии некоррелированности шумов с полезным сигналом. Основные соотношения даются формулами (6.25), (6.26), (6.31). Схема модели состояний, наблюдений и фильтра Калмана-Бьюсси представлена на рис. 6.1.

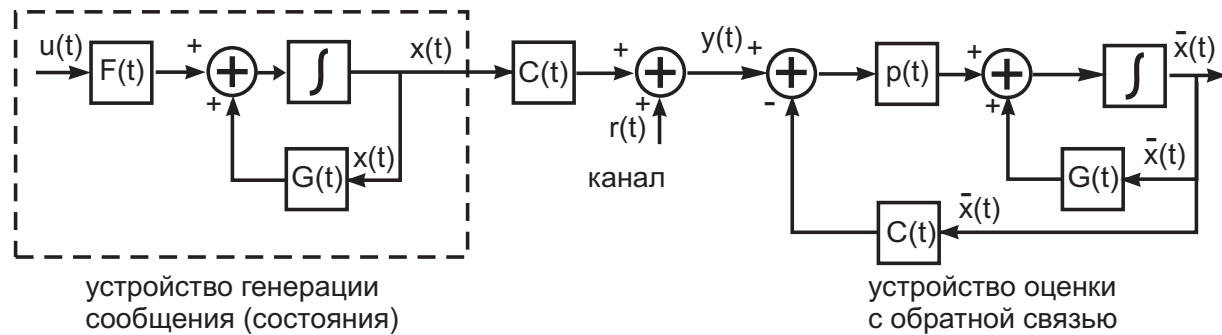


Рис. 6.1: Схема модели состояний, наблюдений и фильтра Калмана-Бьюсси.

Отметим, что фильтром Калмана-Бьюсси называют именно фильтр для непрерывного случая. Дискретный фильтр обычно называют просто фильтром Калмана.

По заданной модели системы в терминах пространства состояний, зная ковариационные матрицы шумов, можно определить дисперсионную матрицу (6.31), коэффициент передачи $\mathbf{p}(t)$ (6.26) и вычислить оценку $\bar{\mathbf{x}}(t)$ (6.25). При постоянных матрицах \mathbf{G} , \mathbf{F} , \mathbf{C} , \mathbf{R} , \mathbf{Q} в ходе фильтрации вначале будет наблюдаться переходный процесс, а затем со временем матрица ошибок и матрица коэффициентов передачи придут к постоянным значениям, так что левая часть дисперсионного уравнения $\dot{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}}(t)$ станет равной нулю. В стационарном случае фильтры Калмана и Винера эквивалентны.

6.7 Вывод соотношений дискретного фильтра Калмана Перейдём к выводу соотношений для дискретного фильтра Калмана. Они могут быть получены дискретизацией соотношений для непрерывного случая. Вначале построим дискретно-разностную систему на основе исходных непрерывных дифференциальных уравнений (6.18) в терминах пространства состояний

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_{i+1}) &= \mathbf{A}(t_i)\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{B}(t_i)\mathbf{u}(t_i), \\ \mathbf{y}(t_i) &= \mathbf{C}(t_i)\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{r}(t_i),\end{aligned}\tag{6.32}$$

где, согласно (6.8)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t_i) &= \Phi(t_{i+1}, t_i), \\ \mathbf{B}(t_i) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Как видно из (6.8), записанная система сама по себе эквивалентна некоторому дискретному каузальному (последующие сигналы не влияют на предыдущие) фильтру. В стационарном случае с увеличением времени k вклад $\mathbf{x}(t_i)$ в $\mathbf{x}(t_{i+k})$ будет уменьшаться, если $\mathbf{A}^k \rightarrow 0$. Дискретный стационарный фильтр будет асимптотически устойчив, когда все собственные числа матрицы системы – решения характеристического уравнения $\det |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ лежат внутри единичного круга, т.е. $|\lambda_i| < 1$ (см. раздел 4.4). Выведем оптимальный фильтр для дискретного случая [39].

Пусть для начального момента имеется априорная оценка состояния $\mathbf{x}^-(t_0)$. Построим уравнение регрессии между невязкой $\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^-(t_0)$ и погрешностью наблюдений $\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}^-(t_0)$

$$\varepsilon(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^-(t_0) = \mathbf{K}(t_0)[\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{C}(t_0)\mathbf{x}^-(t_0)].\tag{6.33}$$

Существование регрессии видно из (6.25). Уравнение регрессии можно переписать для среднего квадрата отклонения вычисленного значения

от наблюдений

$$\mathbf{K} < (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)^T > = < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)^T >,$$

аргумент времени для краткости опущен. С использованием (6.33) можно записать

$$\mathbf{K} < (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)^T > = < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)^T >,$$

расписав эту формулу подробнее, приходим к

$$\begin{aligned} \mathbf{K}[\mathbf{C} < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > \mathbf{C}^T + < \mathbf{r}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > \mathbf{C}^T + \\ + \mathbf{C} < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)\mathbf{r}^T > + < \mathbf{r}\mathbf{r}^T >] = \\ = < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > \mathbf{C}^T + < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)\mathbf{r}^T >. \end{aligned}$$

Учитывая некоррелированность $\mathbf{r}(t)$ и $\varepsilon(t)$, выражение для матрицы регрессии с использованием обозначения для априорной матрицы дисперсии $\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0) = \phi_{\varepsilon\varepsilon}^-(t_0, t_0)$, которую полагаем известной, принимает вид

$$\mathbf{K}(t_0)[\mathbf{C}(t_0)\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0)\mathbf{C}^T(t_0) + \mathbf{R}(t_0)] = \mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0)\mathbf{C}^T(t_0), \quad (6.34)$$

или

$$\mathbf{K}(t_0) = \mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0)\mathbf{C}^T(t_0)[\mathbf{C}(t_0)\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0)\mathbf{C}^T(t_0) + \mathbf{R}(t_0)]^{-1}.$$

С использованием регрессионной связи можно выполнить коррекцию априорной оценки $\mathbf{x}^-(t_0)$ следующим образом

$$\mathbf{x}^+(t_0) = \mathbf{x}^-(t_0) + \mathbf{K}(t_0)[\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{C}(t_0)\mathbf{x}^-(t_0)].$$

Выражение для дисперсии апостериорной оценки \mathbf{x}^+ можно записать в виде

$$\mathbf{D}_\varepsilon^+(t_0) = < [\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^+(t_0)][\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^+(t_0)]^T >,$$

что преобразуется как

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\varepsilon^+ &= < [\mathbf{x} - \mathbf{x}^- - \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)][\mathbf{x} - \mathbf{x}^- - \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)]^T > = \\ &= < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > + \mathbf{K} < (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)^T > \mathbf{K}^T + \\ &\quad - \mathbf{K} < (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > - < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)^T > \mathbf{K}^T. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Рассмотрим все члены записанной формулы по отдельности:

1) Первое слагаемое – априорная дисперсия

$$< (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > = \mathbf{D}_\varepsilon^-.$$

2) С учетом некоррелированности сигнала и шума

$$\begin{aligned}\mathbf{K} < (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)^T > \mathbf{K}^T = \\ = \mathbf{K} < (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)^T > \mathbf{K}^T = \\ = \mathbf{K} [\mathbf{C} < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > \mathbf{C}^T + < \mathbf{r}\mathbf{r}^T >] \mathbf{K}^T = \\ = \mathbf{K} (\mathbf{C}\mathbf{D}_\varepsilon^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R}) \mathbf{K}^T.\end{aligned}$$

3) Третье слагаемое преобразуется как

$$\begin{aligned}\mathbf{K} < (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > = \mathbf{K} < (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > = \\ = \mathbf{K}\mathbf{C} < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > = \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{D}_\varepsilon^-.\end{aligned}$$

4) Четвёртое – как транспозиция третьего

$$\begin{aligned}< (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-)^T > \mathbf{K}^T = < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)[\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{x}^-]^T > \mathbf{K}^T = \\ = < (\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^-)^T > \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T = \mathbf{D}_\varepsilon^- \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T.\end{aligned}$$

При этом выражение для апостериорной дисперсии (6.35) запишется в виде

$$\mathbf{D}_\varepsilon^+ = \mathbf{D}_\varepsilon^- + \mathbf{K} (\mathbf{C}\mathbf{D}_\varepsilon^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R}) \mathbf{K}^T - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{D}_\varepsilon^- - \mathbf{D}_\varepsilon^- \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T.$$

Учитывая (6.34), получаем итоговое выражение

$$\mathbf{D}_\varepsilon^+ = \mathbf{D}_\varepsilon^- + \mathbf{D}_\varepsilon^- \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{D}_\varepsilon^- - \mathbf{D}_\varepsilon^- \mathbf{C}^T \mathbf{K}^T = \mathbf{D}_\varepsilon^- - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{D}_\varepsilon^-.$$

Таким образом, по априорной оценке дисперсии и состояния получаем уточнённые оценки.

Используя исходные уравнения, находим априорную оценку вектора состояния в следующий момент времени

$$\mathbf{x}^-(t_{i+1}) = \mathbf{A}(t_i)\mathbf{x}^+(t_i)$$

и априорную оценку погрешности для него

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_{i+1}) &= < [\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}^-(t_{i+1})][\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}^-(t_{i+1})]^T > = \\ &= < [\mathbf{A}(t_i)\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{B}(t_i)\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{A}(t_i)\mathbf{x}^+(t_i)] \cdot \\ &\quad \cdot [\mathbf{A}(t_i)\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{B}(t_i)\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{A}(t_i)\mathbf{x}^+(t_i)]^T > = \\ &= \mathbf{A}(t_i)\mathbf{D}_\varepsilon^+(t_i)\mathbf{A}^T(t_i) + \mathbf{B}(t_i)\mathbf{Q}(t_i)\mathbf{B}^T(t_i).\end{aligned}$$

Далее процедура уточнения повторяется.

6.8 Алгоритм дискретной фильтрации Калмана Таким образом, фильтрация Калмана в дискретном случае состоит из пяти основных этапов и двух подготовительных:

1) Для начального момента времени определяются априорная оценка состояния $\mathbf{x}^-(t_0)$ и ковариация $\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0)$.

2) Уточнение вектора состояния выполняется по формуле

$$\mathbf{x}^+(t_0) = \mathbf{x}^-(t_0) + \mathbf{K}(t_0)[\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{C}(t_0)\mathbf{x}^-(t_0)],$$

уточнённая ковариационная матрица получается как

$$\mathbf{D}_\varepsilon^+(t_0) = \mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0) - \mathbf{K}(t_0)\mathbf{C}(t_0)\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0),$$

где

$$\mathbf{K}(t_0) = \mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0)\mathbf{C}^T(t_0)[\mathbf{C}(t_0)\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_0)\mathbf{C}^T(t_0) + \mathbf{R}(t_0)]^{-1}.$$

Перечисленные подготовительные этапы можно заменить предварительными наблюдениями и оценкой апостериорного вектора состояния и ковариации методом наименьших квадратов [16]. Будем считать, что у нас имеются апостериорные оценки состояния и ковариации для момента t_k . Для начального состояния они получаются указанным выше способом, для последующих моментов они получаются рекуррентно из предыдущих значений. Перечислим пять основных этапов фильтрации Калмана.

1) Оценка фазового вектора экстраполируется по формуле

$$\mathbf{x}^-(t_{i+1}) = \mathbf{A}(t_i)\mathbf{x}^+(t_i).$$

2) Затем вычисляется априорная ковариационная матрица для момента времени t_{i+1}

$$\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_{i+1}) = \mathbf{A}(t_i)\mathbf{D}_\varepsilon^+(t_i)\mathbf{A}^T(t_i) + \mathbf{B}(t_i)\mathbf{Q}(t_i)\mathbf{B}^T(t_i).$$

3) Вычисляется матрица усиления

$$\mathbf{K}(t_{i+1}) = \mathbf{D}_\varepsilon^-(t_{i+1})\mathbf{C}^T(t_{i+1})[\mathbf{C}(t_{i+1})\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_{i+1})\mathbf{C}^T(t_{i+1}) + \mathbf{R}(t_{i+1})]^{-1}.$$

4) Уточняется оценка фазового вектора

$$\mathbf{x}^+(t_{i+1}) = \mathbf{x}^-(t_{i+1}) + \mathbf{K}(t_{i+1})[\mathbf{y}(t_{i+1}) - \mathbf{C}(t_{i+1})\mathbf{x}^-(t_{i+1})]$$

5) Вычисляется апостериорная ковариационная матрица этой оценки

$$\mathbf{D}_\varepsilon^+(t_{i+1}) = \mathbf{D}_\varepsilon^-(t_{i+1}) - \mathbf{K}(t_{i+1})\mathbf{C}(t_{i+1})\mathbf{D}_\varepsilon^-(t_{i+1}).$$

Мы рассмотрели уравнения калмановской фильтрации для случая, когда оценки получаются в тех же точках, что и наблюдения. Однако с использованием (6.18) можно вывести уравнения для оценок $\mathbf{x}^+(t_i + T)$, где при $T > 0$ (упреждение) фильтрация переходит в прогнозирование, при $T < 0$ (задержка) – в интерполяционное сглаживание.

Достоинствами фильтра Калмана, является то, что он рекуррентен, удобен для реализации на компьютере и не требует выполнения трудоёмкой операции факторизации спектральной плотности. Однако для некаузальных фильтров метод Калмана неудобен.

Для фильтра Калмана не так важна стационарность, как конечномерность процесса. Конечномерный случайный процесс допускает формирующий фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением. Для стационарного процесса такое уравнение имеет постоянные во времени коэффициенты. Модель случайного процесса может быть задана дробно-рациональным выражением для спектра. Перейти к дифференциальному уравнению при этом, как показано в (4.6), не составляет труда. Несмотря на то, что фильтр Калмана выводится в предположении нестационарности, на практике необходимо учитывать переходный процесс и понимать, что из-за неопределённости начального состояния к оптимальности можно лишь приблизиться.

Если предполагается, что динамическая модель объекта до конца не известна, т.е. у исследователя нет достаточных данных об объекте, используется адаптивная модификация фильтра Калмана с настраиваемой моделью, которую мы рассматривать не будем [54].

6.9 Нелинейный фильтр Калмана В областях, где широко используется калмановская фильтрация, а именно в спутниковой навигации, лазерной и радиолокации, баллистике, навигации, бурении, в геодезических исследованиях, робототехнике и др., часто встают задачи не только нестационарные, но и нелинейные. Если уравнения состояния и наблюдений записываются в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_{i+1}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_i)) + \mathbf{B}(t_i)\mathbf{u}(t_i), \\ \mathbf{y}(t_i) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i)) + \mathbf{r}(t_i),\end{aligned}\tag{6.36}$$

где \mathbf{f} и \mathbf{g} – нелинейные функции, для применения калмановской фильтрации выражения необходимо линеаризовать. Взяв начальное приближение $\bar{\mathbf{x}}(t_i)$ и разложив в ряд с точностью до членов первого порядка

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_i)) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(t_i)) + \frac{d\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(t_i))}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_i) - \bar{\mathbf{x}}(t_i)) + O((\mathbf{x}(t_i) - \bar{\mathbf{x}}(t_i))^2),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i)) = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(t_i)) + \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i))}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_i) - \bar{\mathbf{x}}(t_i)) + O((\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t_i))^2),$$

мы можем перейти к линеаризованной системе

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{v}(t_i),$$

$$\mathbf{z}(t_i) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t_i) + \mathbf{r}(t_i),$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_i))}{d\mathbf{x}}, \quad \mathbf{C} = \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i))}{d\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{z}(t_i) = \mathbf{y}(t_i) - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(t_i)) + \mathbf{C}(t_i)\bar{\mathbf{x}}(t_i), \quad \mathbf{v}(t_i) = \mathbf{B}(t_i)\mathbf{u}(t_i) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(t_i)) - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t_i).$$

Для того, чтобы работать с нелинейной моделью было проще, иногда используют т.н. неминимальный фильтр, основанный на рассмотрении задачи в пространстве избыточной размерности. К примеру, если \mathbf{f} содержит квадратичную и кубическую части, можно разделить их на два уравнения, увеличив размерность системы. Это полезно также когда процесс не в точности марковский, а содержит зависимости от конечного числа предыдущих отсчетов.

Бывают случаи, когда параметры объекта необходимо оценивать вместе с вектором состояния. В таком случае постоянные параметры добавляются к вектору состояния, подлежащему оцениванию, как дополнительные компоненты. В модели состояний (6.1) появляются уравнения, приравнивающие производные соответствующих компонентов нулю. Возникающая при этом нелинейная задача может решаться методом квазилинеаризации, инвариантного погружения² и др. [62].

Полученные в данной и предыдущей главах линейные алгоритмы обработки, основанные на критерии минимума квадрата отклонения, являются наилучшими среди линейных и нелинейных тогда, когда случайные процессы – гауссовские (нормальные). Если это не так, они всё же остаются наилучшими среди линейных алгоритмов.

Можно показать, что в случае гауссовских процессов полученные по минимуму среднеквадратической ошибки точечные оценки совпадают с оценками, доставляющими максимум апостериорной плотности вероятности, т.е. байесовскими оценками, минимизирующими симметричную выпуклую функцию риска (см. приложение Г).

Методика работы с сигналами в негауссовских шумах активно разрабатывается в области оптимального приема и радиосвязи [51], но выходит за рамки нашего курса [60].

²Метод инвариантного погружения предложен В. Амбарцумяном в 1943 г.

Представленные в этой и предыдущей главе подходы подразумевают физическую интерпретацию модели. Методы, которым будет посвящена следующая глава, дают поразительные результаты, но зачастую не позволяют получить вразумительную физическую интерпретацию, если она не заложена изначально.

► Пример 6.2): В примерах 4.2, 6.1 представлена модель вращения Земли. Фильтр Калмана может быть использован для прогнозирования параметров ориентации Земли (ПОЗ) – движения полюса Земли и скорости её вращения. На рисунке 6.2а приведено сравнение X-координаты полюса и результата численного интегрирования [38] эффективных угловых моментов атмосферы ААМ и океана ОАМ (движение + масса по гипотезе обратного барометра). На рис. 6.2б сопоставлены изменения ААМ и продолжительности суток LOD (после вычитания тренда и модели зональных приливов). Хорошее совпадение говорит в пользу использования ААМ и ОАМ при прогнозировании ПОЗ с помощью фильтра Калмана. Разработанный в NASA JPL калмановский прогноз скорости вращения Земли получил первое место на конкурсе прогнозов EOP PSS [95].

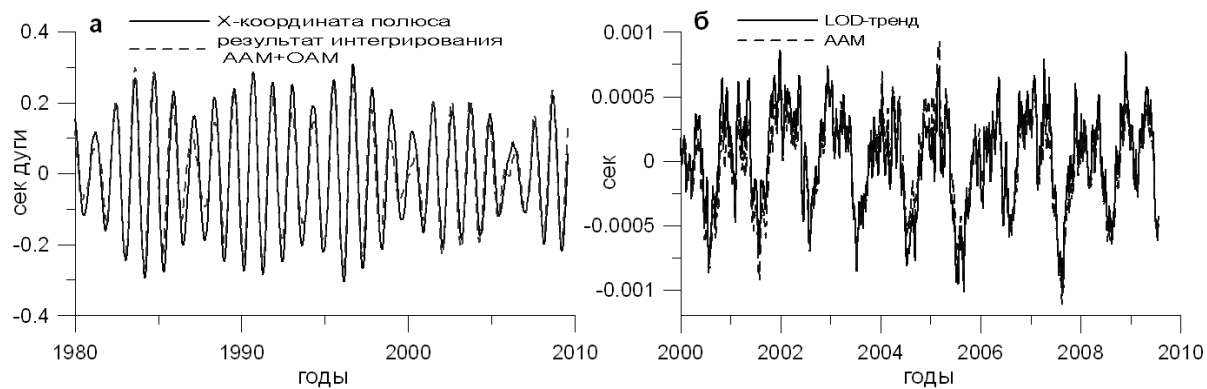


Рис. 6.2: Сравнение координат полюса с результатами численного интегрирования ААМ+ОАМ.

★ Упражнение 6-1): Покажите, что для множества линейных преобразований $A : y \rightarrow x$ над случайными сигналами оптимальный оператор для получения оценки $\bar{x} = \bar{A}y$, доставляющей минимум квадрату невязки, может быть выведен из условия равенства нулю среднего от скалярного произведения

$$\langle (y \cdot (x - \bar{A}y)) \rangle = 0.$$

Упражнение 6-2): *Средняя квадратическая коллокация*. Опираясь на упр. 6-1, покажите, что матрица линейной регрессии $\bar{\mathbf{H}}$, связывающая случайные наблюдения l с вектором случайных параметров $\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{l}$ и соответствующая оптимальная оценка этих параметров $\bar{\mathbf{s}}$ могут быть получены из условия минимизации ковариационной матрицы ошибки $\mathbf{Q}_{\epsilon\epsilon} = \langle (\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}})(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}})^T \rangle$ в виде

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{Q}_{sl}\mathbf{Q}_{ll}^{-1}, \quad \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_{sl}\mathbf{Q}_{ll}^{-1}\mathbf{l},$$

где \mathbf{Q}_{sl} – кроссковиариационная матрица полезного и наблюдаемого сигналов, а \mathbf{Q}_{ll} – ковариационная матрица наблюдений [16].

Упражнение 6-3): Пусть θ_k и ζ_k – некоррелированные между собой стационарные последовательности с нулевыми средними и спектральными плотностями

$$G_\theta(\omega) = \frac{1}{|e^{i\omega} + c_1|^2}, \quad G_\zeta(\omega) = \frac{1}{|e^{i\omega} + c_2|^2},$$

где $c_1, c_2 < 1$. Докажите, что такие случайные сигналы могут задаваться моделью АРСС (1.31) в виде

$$\theta_{k+1} = c_1\theta_k + \varepsilon_1(k+1), \quad \zeta_{k+1} = c_2\theta_k + \varepsilon_2(k+1),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – белые шумы. Покажите, что оптимальное оценивание полезного сигнала θ_k по наблюдениям смеси $\xi_k = \theta_k + \zeta_k$, может быть выполнено по формулам

$$m_{k+1} = c_1m_k + \frac{1 + c_1(c_1 - c_2)\gamma_k}{2 + (c_1 - c_2)^2\gamma_k}(\xi_{k+1} - (c_1 - c_2)m_k - c_2\xi_k),$$

$$\gamma_{k+1} = c_1^2\gamma_k + 1 - \frac{(1 + c_1(c_1 - c_2)\gamma_k)^2}{2 + (c_1 - c_2)^2\gamma_k},$$

где $m_k = M\{\theta_k\}$ – математическое ожидание, а $\gamma_k = M\{(\theta_k - m_k)^2\}$ – дисперсия оценки. Их начальные значения могут быть получены в виде

$$m_0 = \frac{1 - c_2^2}{2 - c_1^2 - c_2^2}\xi_0, \quad \gamma_0 = \frac{1}{2 - c_1^2 - c_2^2},$$

поскольку ковариации равны

$$M\{\theta_k^2\} = \frac{1}{1 - c_1^2}, \quad M\{\theta_k\zeta_k\} = \frac{1}{1 - c_1^2}, \quad M\{\zeta_k^2\} = \frac{2 - c_1^2 - c_2^2}{(1 - c_1^2)(1 - c_2^2)}.$$

Упражнение 6-4): Запишите выражения для оценивания параметров движущегося объекта

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v, & \frac{dv}{dt} &= u \\ y_1 &= x + r_1, \\ y_2 &= y + r_2,\end{aligned}$$

где u – белый шум с дисперсией Q , а $r_{1,2}$ – белый шум с дисперсионной матрицей S .

Упражнение 6-5): Найдите выражения калмановской оценки для системы

$$x_1(i+1) = x_2(i)$$

$$x_2(i+1) = 0.5x_3(i) + u(i)$$

$$y(i+1) = x_1(i) + r(i),$$

где u и r – белые шумы с дисперсиями $\sigma_u^2 = 1$, $\sigma_r^2 = 3$ [51].

Глава 7

Нейронные сети и методы оптимизации

*Времена не выбирают,
В них живут и умирают.
А. Кушнер*

Искусственные нейронные сети (НС) возникли благодаря исследованиям мозга. Человеческий мозг содержит 10^{11} нейронов, связь между которыми обеспечивают около 10^{15} синапсов. Устройство мозга, позволяющее быстро решать задачи огромной сложности, таит в себе немало загадок. Но даже первые попытки реализации базовых принципов его функционирования, предпринятые во второй половине XX в. с привлечением скоростных ЭВМ, показали отличные возможности НС при решении задач интерполяции, аппроксимации, распознавания, классификации, прогнозирования, сжатия данных, идентификации систем, управления, ассоциации и др. [37], [57].

7.1 Модели нейрона, персептрон В XX веке появились первые модели нейрона. В 1943 г. Мак-Каллок и Питтс впервые предложили использовать НС в качестве вычислительных машин. *Искусственный нейрон* – это система, преобразующая входной вектор \mathbf{x} в выходной сигнал y по правилу

$$y = f(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b) \quad (7.1)$$

где \mathbf{w} – вектор *весовых коэффициентов*, характеризующий степень реакции нейрона на различные компоненты входного сигнала, b – смещение или *поляризация* (порог), f – *функция активации* или передаточная функция нейрона, рис. 7.1а. Аргумент функции активации $u = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + b$ называют индуцированным локальным полем нейрона или потенциалом активации.

Простейшей моделью нейрона является *персептрон* Розенблатта. Функция активации такого нейрона – ступенчатая функция Хевисайда

$$f(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

Отклик персептрона является пороговой булевой функцией. Её обычно аппроксимируют непрерывной функцией сходного поведения.

Часто используемой непрерывной функцией активации является сигмоидальная функция. Различают униполярную (логистическую)

$$f(u) = \frac{1}{1 + e^{-\beta u}} \quad (7.3)$$

и биполярную (гиперболический тангенс)

$$f(u) = \tanh(\beta u) \quad (7.4)$$

сигмоидальные функции. При $\beta \rightarrow \infty$ униполярная сигмоидальная функция стремится к функции Хевисайда (7.2), а биполярная – к нечётной пороговой функции

$$f(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

Используются также линейная функция активации $f(u) = u$, кусочно-линейная функция и др.

Перепишем формулу выходного сигнала нейрона в виде

$$y = f(u) = f\left(\sum_{j=1}^N w_j x_j + b\right) = f\left(\sum_{j=1}^N w_j x_j + w_0\right) = f\left(\sum_{j=0}^N w_j x_j\right),$$

где N – размерность входного вектора, а дополнительный член $x_0 = 1$ соответствует поляризации $w_0 = b$. Таким образом, мы переходим к пространству размерности $N + 1$ с фиксированной нулевой координатой входного вектора x_0 . Если f – ступенчатая функция (7.2), то нейрон осуществляет классификацию (рис. 7.16) входного вектора $\mathbf{x} \in R^N$ по принципу его принадлежности к одной или другой части полупространства, на которые R^N разбивает гиперплоскость $\sum_{j=1}^N w_j x_j + b = 0$. Такая гиперплоскость отстоит от начала координат на расстояние $r = b/||\mathbf{w}'||$.

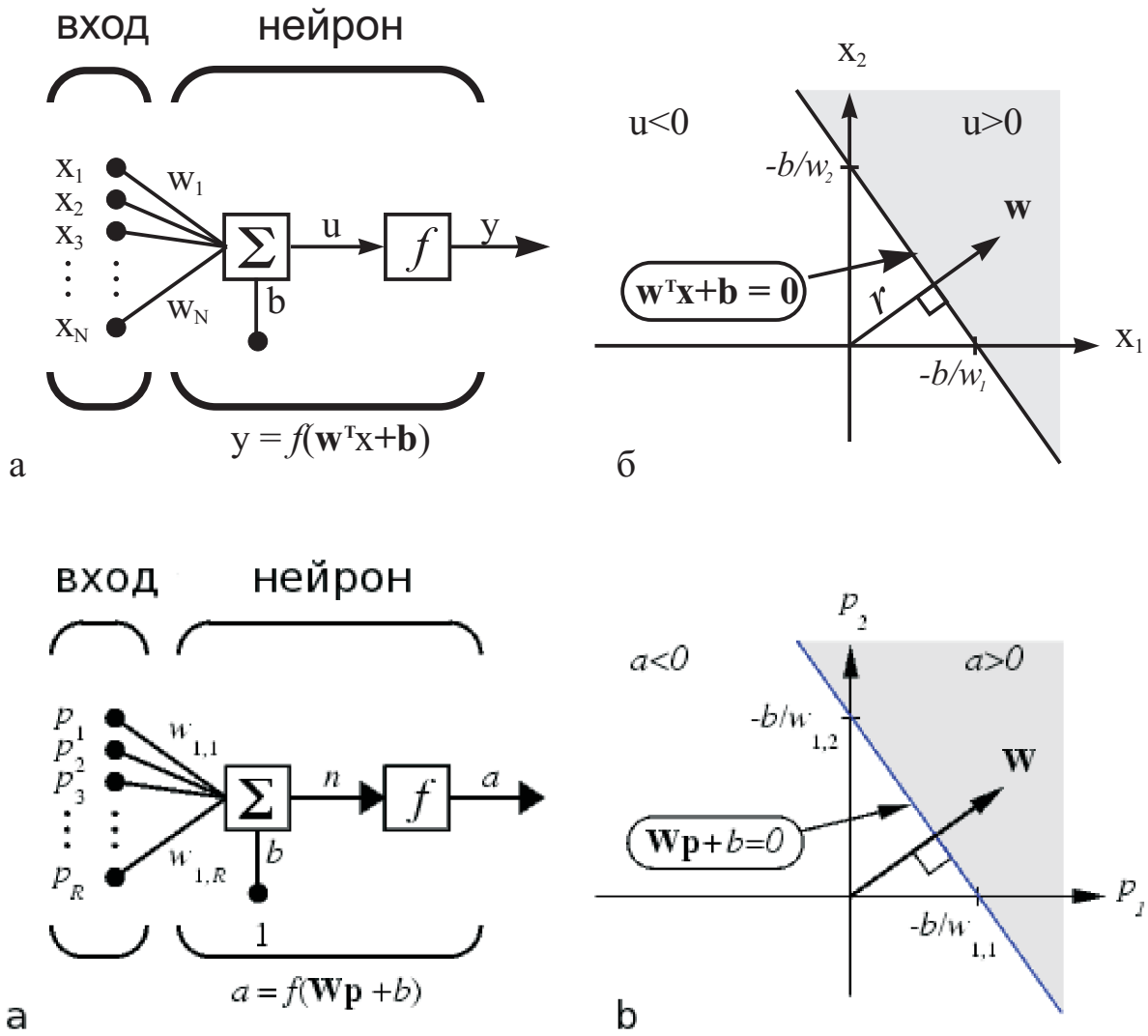


Рис. 7.1: Модель нейрона (а), персептрон как классификатор (б) [91].

При переходе к R^{N+1} разбиение осуществляется гиперплоскостью (многомерной плоскостью), проходящей через начало координат $\sum_{j=0}^N w_j x_j = 0$.

Поскольку вектор весов \mathbf{w} – нормаль (перпендикуляр) к гиперплоскости, скалярное произведение входного вектора \mathbf{x} на вектор весов соответствует проекции входного вектора на этот перпендикуляр. Таким образом, с точностью до нормы вектора весов, потенциал активации равен расстоянию r входного вектора от соответствующей гиперплоскости

$$u = \sum_{j=0}^N w_j x_j = \mathbf{w}^T \mathbf{x} = r \|\mathbf{w}\|.$$

Можно вычислять аргумент функции активации не как скалярное произведение, а как расстояние между вектором весов и входным вектором. Нейрон, функционирующий по правилу

$$y = f(u) = f(\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|),$$

называется *радиальным* и может классифицировать входной вектор по принципу принадлежности к сферической окрестности точки в R^N . Для радиальных нейронов в качестве функции активации часто применяют функцию Гаусса

$$f(u) = e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}. \quad (7.6)$$

Или для векторного случая – функцию более общего вида

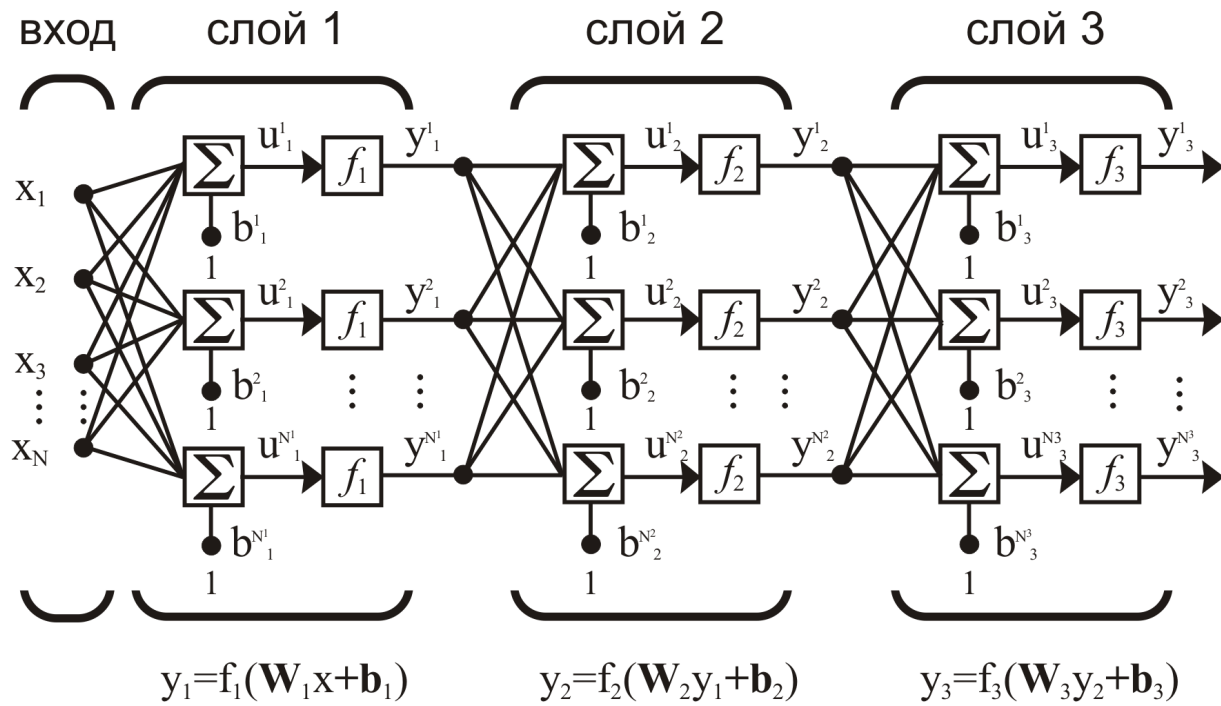
$$y = f(\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\|) = \exp \left[-(\mathbf{x} - \mathbf{w})^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{w}) \right],$$

здесь \mathbf{Q} – масштабирующая матрица. Используют также мультиквадратичную функцию $f(u) = \sqrt{u^2 + c^2}$ и обратную мультиквадратичную функцию $f(u) = 1/\sqrt{u^2 + c^2}$ [57].

7.2 Многослойные нейронные сети Отдельные нейроны объединяют в нейронные сети, состоящие из слоёв, рис. 7.2. *Слоем* называется группа нейронов с одинаковыми функциями активации. В многослойной сети существуют *входной слой*, с которого поступает входной вектор \mathbf{x} , *скрытые промежуточные слои* и *выходной слой*, с которого снимается выходной вектор \mathbf{y} . На вход каждого нейрона скрытого слоя поступает один и тот же входной вектор, а на выходе слоя формируется векторный сигнал, содержащий в качестве компонент выходы каждого из нейронов слоя. Размерность такого выходного вектора равна числу нейронов в слое. Многослойная сеть прямого распространения функционирует по следующему принципу: входной вектор \mathbf{x} со входного слоя поступает на вход каждого из нейронов первого скрытого слоя, выходной вектор этого слоя становится входом следующего промежуточного слоя и т.д. Пройдя обработку каскадом промежуточных слоёв, вектор поступает на выходной слой, число нейронов в котором определяет размерность результирующего выходного вектора \mathbf{y} . Формула преобразования входного вектора \mathbf{x} в выходной вектор \mathbf{y} для часто используемой трехслойной архитектуры сети (входной слой не считается) может быть записана в виде.

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_3 (\mathbf{W}_3 \mathbf{f}_2 (\mathbf{W}_2 \mathbf{f}_1 (\mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_3),$$

где \mathbf{W}_i – матрица весов, строки которой соответствуют нейронам i -го слоя, \mathbf{b}_i – вектор смещений, \mathbf{f}_i – векторная функция активации i -го слоя.



$$y = f_3(\mathbf{W}_3 f_2(\mathbf{W}_2 f_1(\mathbf{W}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2) + \mathbf{b}_3)$$

Рис. 7.2: Архитектура трехслойной нейронной сети [91].

Можно показать, что сеть с любым числом линейных слоев (все функции активации линейны) сводится к однослойной линейной НС, реализующей схему дискретной адаптивной линейной фильтрации. Линейная сеть со скалярным выходным сигналом сводится к одному нейрону – ADALINE (adaptive linear element)¹.

Многослойные сети прямого распространения на базе сигмоидальной функции активации называются *сигмоидальными сетями*. Они реализуют схему нелинейной фильтрации. На основе гладкой дифференцируемой сигмоидальной функции активации строятся многослойные персептроны.

Нейронная сеть, входной слой которой содержит радиальные нейроны а выходной – линейные, называется сетью на основе радиальных базисных функций.

Из сказанного в разделе 7.1 следует, что НС могут использоваться для разбиения многомерного пространства гиперплоскостями (персептрон) или сферами (радиальные нейроны) на конечное число областей и

¹В.Г. Сурдин, шутя, предложил называть сеть на базе одного нейрона “Амёба” – в честь этого простейшего одноклеточного организма.

для классификации векторов в нем. Если однослойной сетью не всегда удаётся разделить множества объектов, имеющие сложную конфигурацию в R^N , то многослойная сеть может, преобразовав входные множества, сделать их разделимыми (рис. 7.4).

Для оценки *мощности* функций классификации используется т.н. *мера Вапника-Червоненкиса* [57]. Так, для правила (7.1), эта мера равна $(N + 1)$, где N – размерность входного пространства. Это означает, что в R^N гиперплоскостями можно отделить друг от друга не более $(N + 1)$ образов. К примеру, однослойная сеть из простейшего персептрона ещё не может решить задачу XOR (исключающего или). Возможности многослойной сети по классификации объектов существенно шире.

7.3 Теорема об аппроксимации Универсальная теорема об аппроксимации, являющаяся обобщением теоремы Вейерштрасса о представлении функции сходящимся рядом полиномов и теоремы Колмогорова о суперпозиции, гласит, что любая непрерывная функция $y(\mathbf{x})$, заданная на N -мерном гиперкубе может быть сколь угодно точно приближена функцией \bar{y} вида

$$\bar{y}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \alpha_i f \left(\sum_{j=1}^N w_{ij} x_j + b_i \right), \quad (7.7)$$

где f – ограниченная, монотонно возрастающая, непрерывная функция. Или же может быть приближена функцией вида

$$\bar{y}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \alpha_i f(\|\mathbf{x} - \mathbf{w}_i\|), \quad (7.8)$$

где f – ограниченная, непрерывная, интегрируемая функция с ненулевым интегралом. Очевидно, что (7.7) может быть реализована на базе двухслойной сигмоидальной НС, первый слой которой формирует нелинейный базис, а выходной слой восстанавливает функцию, используя коэффициенты её проекции на этот базис (координаты α_i). Выражение (7.8) может быть реализовано НС на основе радиальных базисных функций. Таким образом, уже двухслойные сети названных типов являются универсальными аппроксиматорами. Теорема об аппроксимации обеспечивает существование подходящей сети, но ничего не говорит о том, как настроить её параметры. Важнейшим этапом при создании нейронной сети является её обучение.

7.4 Обучение При обучении НС осуществляется подбор параметров всех нейронов. Существует два типа обучения сети – с учителем и без.

При обучении *без учителя*, которое будет подробнее описано в разделе 7.8, параметры подбираются либо на основе корреляции между входными и выходными данными (обучение по Хеббу), либо на основе конкуренции нейронов между собой.

При обучении *с учителем* имеется набор входных данных \mathbf{X} и ожидаемых выходных сигналов сравнения \mathbf{D} . С использованием методов оптимизации, путем повторения циклов обучения, параметры нейронов сети настраиваются так, чтобы заданные входные сигналы приводили к откликам, как можно более близким к ожидаемым. Начальные значения параметров (весов) сети могут подбираться случайно. Их значения уточняются исходя из сравнения полученных выходных сигналов с сигналами сравнения, т.е. по принципу коррекции ошибок.

В ходе обучения минимизируется функция погрешности (целевая функция) E , обычно имеющая вид

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \|\mathbf{Y}^k - \mathbf{D}^k\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \sum_{i=1}^M (y_i^k - d_i^k)^2, \quad (7.9)$$

где L – количество предъявляемых обучающих выборок, M – число нейронов выходного слоя.

Один цикл предъявления полного набора примеров обучения называется *эпохой обучения*. В *последовательном режиме* примеры обучения следуют один за другим и корректировка весов производится после предъявления каждого примера. При этом бывает полезным менять последовательность предъявления примеров от эпохи к эпохе. Режим, когда корректировка параметров НС производится после подачи в сеть всех примеров обучения эпохи, называется *пакетным режимом* обучения. Проверку результатов обучения удобно осуществлять на тестовой последовательности примеров \mathbf{S} , отличающейся от обучающей \mathbf{D} . Рассмотрим подробнее некоторые алгоритмы обучения.

Однослойная персептронная сеть обучается с учителем по правилу Видроу-Хоффа

$$\begin{aligned} w_{ij}(t + \Delta t) &= w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}, \\ \Delta w_{ij} &= x_j(d_i - y_i). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Здесь $w_{ij}(t)$ – весовой коэффициент i -го нейрона, связанный с j компонентой входного вектора \mathbf{x} на итерации обучения t . Выходной сигнал нейрона y_i и ожидаемое значение d_i для персептрона Розенблатта принимают только двоичные значения 0 или 1.

Когда пороговая функция активации аппроксимирована сигмоидальной функцией (7.3), правило (7.10) может быть получено как частный случай применения градиентного метода оптимизации. Пусть параметры однослойной НС представлены матрицей \mathbf{W} . Считая функцию $E(\mathbf{W})$ непрерывной, поправки к весам можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(t + \Delta t) &= \mathbf{W}(t) + \Delta \mathbf{W}, \\ \Delta \mathbf{W} &= \eta \mathbf{P}(\mathbf{W}),\end{aligned}\tag{7.11}$$

где η - коэффициент обучения, $\mathbf{P}(\mathbf{W})$ - направление в многомерном пространстве. В классическом методе наискорейшего спуска (раздел 7.11) это направление обратно градиенту целевой функции

$$\mathbf{P}(\mathbf{W}) = -\nabla E.$$

Такой алгоритм применим для однослойной сети с непрерывной (дифференцируемой) функцией активации. На его основе разработан алгоритм обратного распространения ошибки для обучения многослойной сети.

7.5 Алгоритм обратного распространения ошибки Если процесс обучения однослойной сети достаточно прозрачен, то для обучения скрытых слоев необходимо как-то определить ошибку на их выходе. Для использования алгоритма обратного распространения ошибки нейроны сети должны иметь непрерывные и дифференцируемые функции активации. Именно поэтому функцию активации Хевисайда (7.2) в многослойном персептроне аппроксимируют сигмоидальной функцией с достаточно большим значением параметра β .

Пусть обучение внешнего слоя выполнено по формуле (7.11). Для определения поправок к параметрам предыдущего слоя можно воспользоваться такой же формулой, предварительно определив погрешность на выходе этого слоя. Перевести погрешность на предыдущий уровень можно, подав на бывший выход, используемый теперь как вход, отклонение выходного сигнала сети от ожидаемого и заменив функции активации их производными.

Рассмотрим в качестве примера двухслойную сеть с N -мерным входом и M -мерным выходом, компоненты которого определяются выражением

$$y_k = f_2 \left(\sum_{i=0}^K w_{ki}^2 \nu_i \right) = f_2 \left[\sum_{i=0}^K w_{ki}^2 f_1 \left(\sum_{j=0}^N w_{ij}^1 x_j \right) \right].$$

Верхним индексом обозначен номер слоя. Целевая функция для одного

тестового сигнала записывается в виде

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M (y_k - d_k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \left[f_2 \left(\sum_{i=0}^K w_{ki}^2 \nu_i \right) - d_k \right]^2$$

градиент для внешнего слоя содержит компоненты

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ki}^2} = (y_k - d_k) \frac{df_2(u_k^2)}{du_k^2} \nu_i = \delta_k^2 \nu_i,$$

где $u_k^2 = \sum_{j=0}^K w_{kj}^2 \nu_j$, и далее $u_i^1 = \sum_{j=0}^N w_{ij}^1 x_j$. Он определяет поправки к параметрам w_{ki}^2 выходного слоя. Поправки к параметрам w_{ij}^1 первого слоя определяются по формуле

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}^1} = \sum_{k=1}^M (y_k - d_k) \frac{df_2(u_k^2)}{du_k^2} w_{ki}^2 \frac{df_1(u_i^1)}{du_i^1} x_j = \delta_i^1 x_j.$$

Таким образом, при использовании алгоритма обратного распространения ошибки важным оказывается вычисление градиента на каждом уровне. Для этого удобно использовать сопряженные графы сети, направления дуг в которых изменены на обратные к исходным направлениям сети и им сопоставлены коэффициенты – производные функций активации по входным сигналам. Теория графов даёт методы построения сопряжённых графов и простые способы вычисления градиентов-весов.

Обучение сигмоидальных сетей (многослойных персептронов) по методу обратного распространения ошибки идёт быстрее, если функция активации антисимметрическая (7.3). Входной сигнал при этом бывает полезно отмасштабировать или нормализовать так, чтобы его значения лежали в диапазоне $[-1, 1]$ и имели нулевое среднее по обучающему множеству. Также желательно, чтобы целевые значения d_i приходились на внутреннюю часть сигмоидальной функции активации и отстояли от её границ. В противном случае алгоритм обратного распространения будет устремлять свободные параметры в бесконечность, что замедлит сходимость.

Важную роль в алгоритме обратного распространения ошибки играет коэффициент обучения η . Слишком малое значение приводит к длительному обучению, большое – к “перепрыгиванию” минимума и необходимости возврата. Возможно адаптивное изменение коэффициента в процессе обучения. Так, если поправка некоторого веса сети несколько раз подряд

имеет один знак из-за малой кривизны вблизи экстремума целевой функции, есть смысл увеличить параметр скорости η . Можно изменять значение скорости в зависимости от значений целевой функции. К примеру, если погрешность $\varepsilon(t) = \sqrt{E(t)}$ на шаге обучения t окажется большей, чем $k_w \varepsilon(t - \Delta t)$, где k_w - коэффициент допустимого прироста погрешности, можно уменьшить коэффициент η по правилу $\eta(t) = \eta(t - \Delta t)p_d$, где p_d - коэффициент уменьшения. Если же погрешность не превысит $k_w \varepsilon(t - \Delta t)$, таким же образом следует увеличить коэффициент обучения. Подбирать η для каждого слоя сети можно с использованием правила

$$\eta_i \leq \min \left(\frac{1}{n_i} \right),$$

где n_i - количество входов i -го нейрона в слое. В многослойной сети каждый последующий слой сети зачастую обучается быстрее предыдущего, поэтому разумно увеличивать коэффициенты скорости обучения для предшествующих слоёв.

Целью обучения с учителем является настройка параметров НС и отыскание глобального минимума функции ошибки E (7.9). Многократное определение поправок к параметрам сети приводит к уменьшению отклонения выходных сигналов от сигналов сравнения \mathbf{D} . Обучение прекращается при достижении некоторого заданного уровня погрешности. Доказано, что алгоритм обратного распространения ошибки является эффективным², его вычислительная сложность линейно зависит от числа весов в сети. Тем не менее, обучение может оказаться длительным, особенно при наличии большого числа локальных минимумов. Сложности, связанные с отысканием глобального минимума целевой функции, нашли отражение в т.н. “*проклятии размерности*” (Бэллман), которое состоит в том, что, с увеличением размерности входного вектора, сложность задачи отыскания глобального минимума возрастает экспоненциально. Т.е. функция, определённая в пространстве большей размерности, скорее всего, значительно сложнее функции в пространстве меньшей размерности. Картина минимумов и максимумов с ростом количества настраиваемых параметров существенно усложняется. Для ускорения обучения и предотвращения застревания в локальных минимумах используются специальные детерминированные и стохастические алгоритмы оптимизации (см. раздел 7.10).

7.6 Погрешность и структура НС *Погрешность обобщения* НС определяется на рабочих данных и во многом зависит от *погрешности*

²Алгоритм эффективен, если его вычислительная сложность возрастает полиномиально с ростом размерности.

обучения сети на данных **D**. Однако связь между ними не так проста. Ошибка обобщения нейронной сети зависит от *ошибки аппроксимации*, обусловленной ограниченной мощностью сети, и от *ошибки оценивания*, являющейся следствием ограниченности объёма информации, содержащейся в примерах обучения. Длительное обучение, хотя и сопровождается непрерывным уменьшением целевой функции E , может привести к ухудшению обобщающих свойств сети, её адаптации к шумам. При этом на фоне непрерывно уменьшающейся функции ошибок, вычисляемой в процессе обучения, ошибка обобщения вначале уменьшается, а потом может начать увеличиваться, рис. 7.3. Отследить момент, когда обучение следует прекратить помогает тестовая последовательность **S**. Считается,

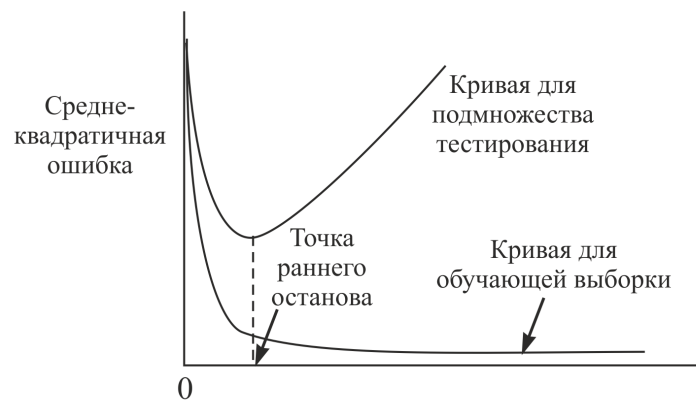


Рис. 7.3: Погрешности обучения и обобщения НС [57].

что погрешность обобщения зависит от отношения количества обучающих выборок L к значению некоторого параметра μ , отражающего меру сложности сети и тесно связанного с числом связей в ней. Предложено определять верхнюю и нижнюю границы этой меры по формуле

$$2 \left\lceil \frac{K}{2} \right\rceil N \leq \mu \leq 2N_w(1 + \lg N_n),$$

где квадратными скобками обозначена целая часть числа, N — размерность входного вектора, K — число нейронов скрытого слоя, N_n — общее число нейронов сети, N_w — число весов сети. Видно, что нижнее значение приблизительно равно количеству весов, связывающих входной и скрытый слой, а верхняя граница превышает удвоенное количество весов в сети. В качестве меры сложности можно использовать число весов сети. Хорошее качество обобщения достигается, когда количество обучающих выборок в несколько раз превышает эту величину [37].

На качество решения нейронной сетью ставящейся перед ней задачи сильно влияет число слоев и число нейронов в них. Недостаточное количество нейронов не позволит достичь необходимой степени обобщения для сложного сигнала. Слишком большое число нейронов, наоборот, приведёт к адаптации к шумам.

Применение теоремы Колмогорова о непрерывной функции (см. раздел 7.3) для часто встречающейся двухслойной сети, трансформирующей N -мерное множество входных данных в M -мерный выходной вектор, даёт для скрытых слоев оптимальное число нейронов $(2N + 1)$.

Для подбора архитектуры сети могут использоваться специальные методы наращивания либо редукции сети. Связи между нейронами, не влияющие существенно на работу сети, могут быть удалены. Обычно веса таких связей после обучения практически не отличаются от нуля. Существуют специальные методы их обнаружения. Полезно бывает заложить в НС априорные данные о структуре моделируемого объекта, если таковые имеются. Для оптимизации архитектуры НС можно воспользоваться популяционными алгоритмами оптимизации (раздел 7.16).

Многое при создании нейронной сети не поддается формализации и базируется на эвристических правилах. Однако их продуманное использование при создании и обучении сети чаще всего оправдывается отличными результатами. Рассмотрим ещё несколько примеров НС.

7.7 Другие виды НС На базе многослойного персептрона, являющегося универсальным аппроксиматором (7.7), реализуются сети классификации и шифрования. Сеть шифрования имеет два слоя и настраивается, чтобы воспроизводить входной сигнал. Закодированный сигнал снимается с первого скрытого слоя малой размерности, а его расшифровка выполняется выходным слоем.

Радиальные нейронные сети, состоящие из одного слоя радиальных нейронов и линейного выходного слоя, также являются универсальными аппроксиматорами (7.8). На базе радиальных сетей строятся сети регуляризации, радиальный слой которых реализует функции Грина [57] (см. пример 8.10). Процесс обучения радиальных сетей заключается в подборе центров радиальных нейронов и весов выходного слоя. Для подбора центров используются алгоритмы кластеризации с последующим уточнением положения центров по входным данным. После чего задача подбора весов решается псевдообращением матриц Пенроуза (см. раздел 8.3). Обучение радиальных сетей обычно менее трудоёмко, чем сигмоидальных сетей. Алгоритм обратного распространения ошибки также применяется к ним, однако вероятность попадания в локальные минимумы значительно выше, чем для персептронных сигмоидальных сетей.

Радиальные сети используются для классификации. При этом число радиальных нейронов первого слоя часто выбирается бóльшим, чем размерность входного вектора для того, чтобы перевести входное множество в пространство признаков. В нём исходно неразделимые гиперплоскостями множества становятся разделимыми с помощью линейного выходного слоя, рис. 7.4.

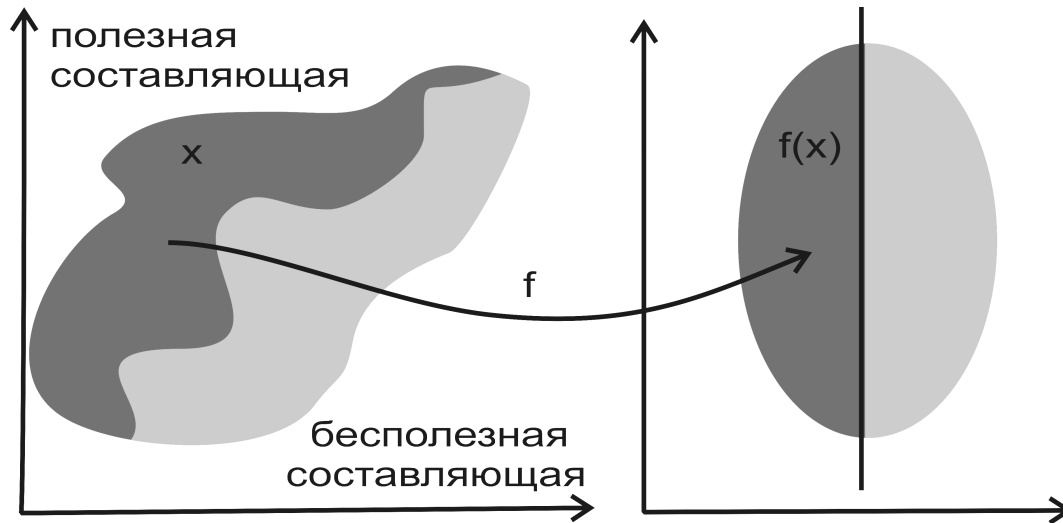


Рис. 7.4: Достижение разделимости переводом в пространство признаков.

Машины опорных векторов служат для выполнения нелинейного преобразования входного пространства в пространство признаков и нахождения оптимальных гиперплоскостей, классифицирующих объекты с минимальными ошибками (рис. 7.1).

Сеть Вольтерра преобразует входной сигнал по формуле

$$y_n = \sum_{i=1}^N x_i \left[w_i + \sum_{j=1}^N x_j \left(w_{ij} + \sum_{k=1}^N x_k (w_{ijk} + \dots) \right) \right],$$

где каждая сумма соответствует фильтрации L -компонентного входного сигнала \mathbf{x} линейным фильтром первого порядка с импульсной характеристикой, которую задает фильтр следующего уровня и т.д. Формула может быть переписана в виде разложения Вольтерра, содержащего

линейные, квадратичные, кубические и т.д. члены

$$y_n = \sum_{i=1}^N w_i x_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \\ + \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_k=1}^N w_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}. \quad (7.12)$$

Такая сеть может быть использована для идентификации любого нелинейного объекта, фильтрации шумов, прогнозирования сигнала.

Работа *рекуррентных сетей* основана на подаче выходного сигнала сети с задержкой на вход. Хотя, по всей видимости, такого рода сети не встречаются в природе, их использование после обучения по специальным алгоритмам оказывается полезным. В частности, с их помощью можно решать задачу идентификации дискретной динамической системы с обратной связью. Успешно используют рекуррентные сети в прогнозировании курсов ценных бумаг.

В природе не наблюдаются нейроны, обучающиеся на основе алгоритма обратного распространения ошибки. Естественные связи между нейронами не позволяют быстро выполнять передачу сигнала в обратном направлении. Сказанное не умаляет достоинств названного алгоритма. Возможности сетей, базирующихся на его использовании, колоссальны. Тем не менее, в природе чаще встречаются нейронные сети, обучающиеся на иных принципах.

7.8 НС, обучающиеся без учителя В естественных нейронных сетях, по всей видимости, связи между нейронами усиливаются при их одновременной активизации. Это нашло отражение в модели Хебба, предложившего правило обучения без учителя, в котором веса нейрона изменяются пропорционально входному и выходному сигналу

$$\Delta w_{ij} = \eta y_i x_j.$$

В матричном виде можно записать

$$\Delta \mathbf{W} = \eta \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \eta \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} = \eta \mathbf{C} \mathbf{W},$$

где \mathbf{C} - корреляционная матрица входного сигнала. Для стабилизации обучения нужно использовать коэффициент забывания γ , правило

$$w_{ij}(t + \Delta t) = w_{ij}(t)(1 - \gamma) + \Delta w_{ij}$$

и нормировать весовой вектор на каждом шаге, так чтобы $\|\mathbf{w}\| = 1$.

Для простейшего персептрона, обучающегося по правилу Хебба, доказана *теорема Новикова*, согласно которой персептрон можно научить классифицировать объекты двух линейно разделимых множеств за конечное число корректировок весов [27].

Хеббовские или корреляционные сети находят широкое применение при решении задач анализа главных компонент сигнала, для сжатия данных и т.п.

Ещё одним примером обучения без учителя являются *сети с самоорганизацией* на основе конкуренции. Такие сети состоят из большого числа обрабатывающих входной сигнал нейронов со случайными начальными параметрами \mathbf{w}_i . Нейрон, для которого расстояние $\|\mathbf{x} - \mathbf{w}_i\|$ в выбранной метрике оказывается минимальным, становится победителем. Он подвергается обучению вместе с нейронами из некоторой его окрестности. В алгоритме Кохонена обучение i -го нейрона проводится по правилу

$$\mathbf{w}_i(t + \Delta t) = \mathbf{w}_i(t) + \eta_i(t)\rho(i, k)[\mathbf{x} - \mathbf{w}_i(t)],$$

где $\rho(i, k)$ - мера соседства, например гауссовская

$$\rho(i, k) = e^{-\frac{d_{ik}^2}{2\lambda^2}},$$

здесь λ - уровень соседства, а d_{ik} - расстояние нейрона i от нейрона-победителя k , которое может выбираться по карте сети. В алгоритме нейронного газа более эффективным, чем алгоритм Кохонена, соседство больцмановское

$$\rho(i, k) = e^{-\frac{d_{ik}}{\lambda}}, \quad (7.13)$$

а d_{ik} зависит от величины расстояния $\|\mathbf{x} - \mathbf{w}_i\|$ (выигрывает нейрон, чьи веса ближе всего к \mathbf{x}). Сети с самоорганизацией применяются для кодирования изображений. Ассоциативные карты, формирующиеся в процессе самообучения таких сетей, позволяют обнаружить сходства между объектами, что используется для запоминания и группировки информации. Еще более полезными оказываются самоорганизующиеся нейронные сети, построенные на базе теории нечетких множеств, которые могут с произвольной точностью аппроксимировать любую нелинейную функцию многих переменных, решать задачи классификации и сжатия данных [57].

7.9 Модульные сети. Области применения НС. Нейронные сети могут объединяться в глобальную многомодульную сеть. Отдельные модули, называемые экспертами, обучаются одновременно и специализируются для работы с особенно сложными областями входного пространства.

Решения экспертов пропускаются через сеть шлюзов, где принимается итоговое решение. Такая сеть имеет преимущество в скорости обучения, и с большей вероятностью принимает верные решения в спорных случаях. Сеть шлюзов может образовывать дерево решений. Одноуровневое дерево иногда называют “пеньком решений”. Каждое звено может принимать *строгое решение* (да/нет), но при этом теряется часть информации. Звенья, принимающие *мягкие решения*, сохраняют информацию о расстоянии объекта от классифицирующей гиперплоскости вплоть до принятия окончательного решения.

Спектр практического применения нейронных сетей очень широк. Они используются в робототехнике, для создания сенсоров и движущихся роботов, для распознавания речи, образов, текста, для сжатия данных, в системах автоматического пилотирования и локации, для поиска нефти и газа, для прогнозирования экономических и бизнес-процессов, землетрясений, сбоев электроэнергии, в системах контроля, в технологиях автоматического поиска и обработки данных Data Mining, и т.п. Можно с уверенностью сказать, что столь широкие возможности НС связаны с их способностью выполнять нелинейную фильтрацию входных объектов. Существенным преимуществом НС является распараллеливание вычислений, способность к запоминанию информации, способность работать даже при повреждении некоторых звеньев. Несмотря на то, что НС является своего рода “чёрным ящиком” и понять правило (скрытый закон) её функционирования не всегда возможно, использование НС всё же может существенно помочь в построении модели объекта или явления благодаря выделению существенных переменных и определению важных параметров. Строгая теория НС базируется на результатах теории автоматов [27]. И хотя фон Нейман говорил, что язык мозга – это не язык математики, мы видим, что своего рода математические принципы заложены в его работе. Не исключено, что когда-нибудь ЭВМ на основе НС заменят собою исследователя.

7.10 Методы оптимизации Алгоритмы обучения нейронных сетей с учителем основаны на методах оптимизации. Оставшуюся часть главы мы посвятим оптимизационным задачам и методам их решения в применении к НС. Такие задачи возникают во многих областях, в частности, в теории управления, при создании динамических систем, при синтезе фильтров и др. Методы их решения остаются те же.

Вообще говоря, при отыскании оптимума функции обычно стоит две задачи: а) отыскать аргумент, на котором он достигается, и б) вычислить оптимальное значение. Будем считать, что методика вычисления значения известна, и сконцентрируем внимание на первой задаче.

Методы оптимизации делятся на непрерывные и дискретные, табличные и итеративные, детерминированные и стохастические, условные и безусловные. Рассмотрим вначале детерминированные безусловные дискретные итеративные алгоритмы.

В окрестности оптимума (без потери общности будем считать его минимумом³) целевую функцию можно разложить в ряд

$$E(\mathbf{w} + \Delta \mathbf{w}) = E(\mathbf{w}) + \mathbf{g}^T(\mathbf{w})\Delta \mathbf{w} + \frac{1}{2}\Delta \mathbf{w}^T \mathbf{H}(\mathbf{w})\Delta \mathbf{w} + \dots, \quad (7.14)$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{w}) = \nabla E$ – вектор градиента, а $\mathbf{H}(\mathbf{w}) = \nabla^2 E$ – матрица Гессе производных второго порядка. На это разложение до членов второго порядка (рис. 7.5а) опирается большинство методов оптимизации.

7.11 Методы наискорейшего спуска В алгоритме наискорейшего спуска перемещение осуществляется по направлению, обратному градиенту,

$$\Delta \mathbf{w}_k = -\eta_k \mathbf{g}_k,$$

где k – номер итерации, η_k – параметр скорости обучения. От этого параметра зависит, будет ли спуск плавным и медленным, либо зигзагообразным и быстрым.

В алгоритме наискорейшего спуска с моментом поправки к параметрам определяются модифицированной формулой

$$\Delta \mathbf{w}_k = -\eta_k \mathbf{g}_k + \alpha \Delta \mathbf{w}_{k-1},$$

где коэффициент момента α , управляющий обратной связью, подбирается в интервале $[0, 1)$ так, чтобы в случае попадания в локальный минимум, когда $\mathbf{g} \approx 0$, удалось бы из него выбраться. При этом процесс обучения не должен разойтись. Параметры η и α могут меняться от шага к шагу, от нейрона к нейрону, от слоя к слою, быть разными для разных компонент.

Еще одной модификацией является метод наискорейшего спуска с минимизацией вдоль направления. В нём коэффициент η_k подбирается так, чтобы на каждой итерации достигался минимум вдоль направления градиента. Движение происходит по ортогональным направлениям. Вблизи минимума сходимость метода наискорейшего спуска может быть медленной.

³Смена знака целевой функции переводит задачу максимизации в задачу минимизации.

7.12 Ньютоновские методы Метод Ньютона основан на разложении целевой функции до членов второго порядка. Приравнивание нулю производной целевой функции (7.14) по $\Delta \mathbf{w}$ дает выражение

$$\Delta \mathbf{w}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k,$$

лежащее в основе целого класса ньютоновских алгоритмов оптимизации. Записанный выше алгоритм, называемый также методом Ньютона-Рафсона, обеспечивает движение к минимуму квадратичной поверхности гиперпараболоида, аппроксимирующей гиперповерхность целевой функции в точке, рис. 7.5б. Алгоритм требует положительной определенности Гессиана на каждом шаге, т.е. выпуклости целевой функции.

Метод Гаусса-Ньютона основан на линеаризации функции ошибки

$$\mathbf{e}(\mathbf{w} + \Delta \mathbf{w}) = \mathbf{e}(\mathbf{w}) + \mathbf{J} \Delta \mathbf{w},$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = (\nabla \mathbf{E})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_1}{\partial w_1} & \frac{\partial e_1}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial e_1}{\partial w_n} \\ \frac{\partial e_2}{\partial w_1} & \frac{\partial e_2}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial e_2}{\partial w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial e_M}{\partial w_1} & \frac{\partial e_M}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial e_M}{\partial w_n} \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

для вектора ошибок с компонентами $e_i = y_i - d_i$ и Якобиана \mathbf{J} . В этих обозначениях, выполняя подстановку $E = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e}$ в (7.14), получаем для градиента и аппроксимирующей Гессиан матрицы выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{J}^T \mathbf{e}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{J}^T \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Минимизируя квадратичную функцию линеаризованной ошибки (приравнивая производную нулю), получаем выражение для корректировки весов

$$\Delta \mathbf{w}_k = -(\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k)^{-1} \mathbf{J}_k^T \mathbf{e}_k. \quad (7.17)$$

Метод Гаусса-Ньютона не предполагает знания Гессиана, но лишь Якобиана. Тем не менее, требуется невырожденность матрицы \mathbf{G} , т.е. Якобиан должен иметь ранг M (по числу параметров). Это условие выполняется не всегда. Оценка (7.17) является МНК-оценкой при линейном выходе модели. Выражение $\mathbf{J}^+ = (\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k)^{-1} \mathbf{J}_k^T$ называют псевдообратной матрицей для \mathbf{J} (см. раздел 8.3). Если она плохо обусловлена, функция ошибок будет иметь овражистую структуру и поиск минимума может существенно осложниться. В этом случае необходима фильтрация поисковой

стратегии на основе исследования сингулярных чисел псевдообратной матрицы Пенроуза или регуляризации (см. гл. 8). Метод регуляризации нашёл воплощение в следующем алгоритме.

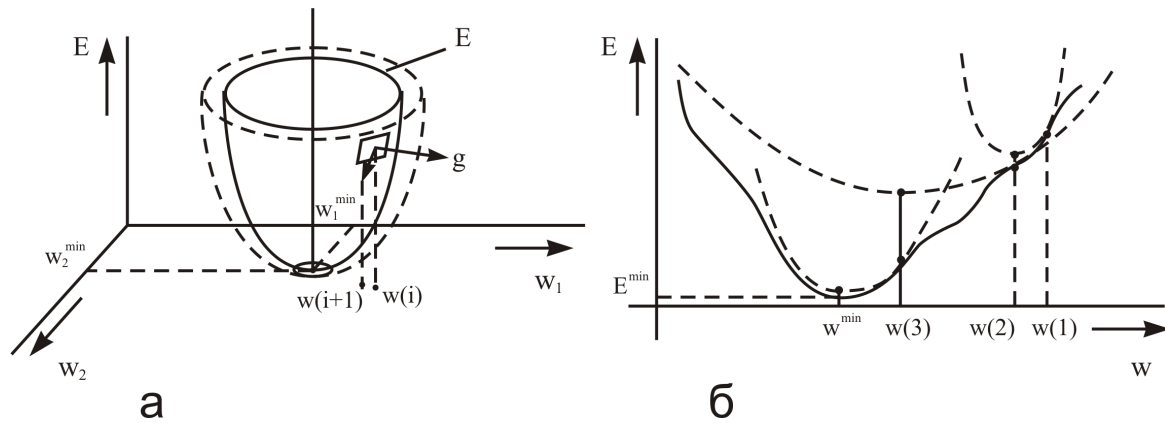


Рис. 7.5: Гиперболоид аппроксимации функции ошибки (7.14) (а), поиск минимума на основе аппроксимаций второго порядка (б) [62].

7.13 Метод Левенберга-Марквардта В алгоритме Левенберга-Марквардта Гессиан аппроксимируется с учетом регуляризирующего фактора на основе информации, содержащейся в градиенте. Выражение для аппроксимирующей Гессиан матрицы при этом имеет вид

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \nu \mathbf{I}, \quad (7.18)$$

в котором компоненты Гессиана более высокого порядка заменяются регуляризирующим фактором $\nu \mathbf{I}$, где параметр Левенберга-Марквардта ν – малая положительная константа, а \mathbf{I} – единичная матрица. Это обеспечивает положительную определённость \mathbf{G} . При $\nu = 0$ алгоритм превращается в метод Гаусса-Ньютона, а при $\nu = \infty$ в метод наискорейшего спуска с нулевым шагом. Параметру ν в начале алгоритма придается значение, много большее максимального собственного значения матрицы $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$. Минимизация выполняется в направлении $-\mathbf{g}/\nu$. Затем значение ν уменьшается, и все более существенную роль начинает играть первое слагаемое в (7.18). На определенном этапе алгоритм превращается в алгоритм Гаусса-Ньютона с квадратичной сходимостью к оптимальному решению.

7.14 Квазиньютоновские методы Квадратичный рост сложности алгоритмов, основывающихся на аппроксимации (7.14) второго поряд-

ка, часто оказывается непрактичным. При значительном количестве параметров НС вычисления становятся чрезвычайно трудоёмкими. Среди квазиньютоновских методов, использующих аппроксимацию второго порядка и оценки градиента без обращения Гессиана, известен метод, представляющий собой нечто среднее между методом наискорейшего спуска и методом Ньютона, обладающий линейной скоростью сходимости. Это *метод сопряженных градиентов* (направлений). Он широко используется для настройки НС больших размеров.

Для положительно определённой матрицы Гессиана можно найти множество сопряжённых векторов \mathbf{s}_i , таких что

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_j = 0, \quad i \neq j.$$

Для единичной матрицы все \mathbf{s}_i ортогональны. По сопряжённым направлениям можно разложить траекторию спуска из начальной точки в точку минимума. Замена градиентного спуска спуском по сопряжённым направлениям обеспечивает достижение минимума за $n = \text{rank}(\mathbf{H})$ шагов, здесь n – число попарно сопряжённых векторов. Формула для приращения параметров на шаге k приобретает вид

$$\Delta \mathbf{w}_k = \lambda_k \mathbf{s}_k,$$

где коэффициент λ_k определяется положением локального минимума вдоль направления \mathbf{s}_k

$$\lambda_k = \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H} \mathbf{e}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H} \mathbf{s}_k}.$$

При таком подходе на каждом шаге алгоритма градиент \mathbf{g}_{k+1} оказывается ортогонален ко всем ранее использованным сопряжённым направлениям, поэтому, начав с направления градиента, каждое следующее сопряжённое направление можно вычислять по формуле

$$\mathbf{s}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + \gamma_{k+1} \mathbf{s}_k,$$

где параметр γ может быть вычислен по формуле

$$\gamma_{k+1} = \frac{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H} \mathbf{g}_{k+1}}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H} \mathbf{s}_k},$$

в которой требуется знать \mathbf{H} . Если Гессиан неизвестен, для оценки параметра можно использовать формулу Флетчера-Ривза

$$\gamma_{k+1} = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1}}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k},$$

или Полака-Рибьера

$$\gamma_{k+1} = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^T (\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k)}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}.$$

Следует использовать неотрицательные оценки γ_{k+1} . Обе формулы одинаково хороши для квадратичной функции стоимости. В неквадратичном случае предпочтительнее формула Полака-Рибьера [62], [37].

В алгоритме переменной метрики Дэвидсона вблизи некоторого локального минимума на поверхности ошибок вместо Гессиана используется его приближение \mathbf{G} . Обозначив прирост градиента на k -ом шаге $\mathbf{r}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$ и обратные матрицы $\mathbf{V}_k = \mathbf{G}_k^{-1}$, можно записать итерационные формулы, по которым уточняется \mathbf{V}_k в алгоритме DFP

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k-1} + \frac{\Delta \mathbf{w}_k \Delta \mathbf{w}_k^T}{\Delta \mathbf{w}_k^T \mathbf{r}_k} - \frac{\mathbf{V}_{k-1} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T \mathbf{V}_{k-1}^T}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{V}_{k-1} \mathbf{r}_k},$$

либо BFGS

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k-1} + \left[1 + \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{V}_{k-1} \mathbf{r}_k}{\Delta \mathbf{w}_k^T \mathbf{r}_k} \right] \frac{\Delta \mathbf{w}_k \Delta \mathbf{w}_k^T}{\Delta \mathbf{w}_k^T \mathbf{r}_k} - \frac{\Delta \mathbf{w}_k \mathbf{r}_k^T \mathbf{V}_{k-1} \mathbf{r}_k \mathbf{w}_k^T}{\Delta \mathbf{w}_k^T \mathbf{r}_k}.$$

Формулы выводятся на основе итерационного выражения

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{k-1} + \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T$$

и леммы об инвертировании положительно определённых матриц (равенства Вудбурри) \mathbf{A}, \mathbf{B} , удовлетворяющих условию $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{C}^T$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{C} (\mathbf{D} + \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{B}.$$

При начальном значении $\mathbf{V}_0 = 1$ можно обеспечить положительную определенность матрицы, аппроксимирующей Гессиан, и быструю сходимость алгоритма.

Качество работы алгоритмов можно проверять на сложных поверхностях, таких как “овраг” Розенброка

$$E = 100(w_1^2 - w_2)^2 + (1 - w_1)^2.$$

Большое количество практических оптимизационных задач имеют овражистую структуру, особенно в случае большой размерности пространства параметров. Иногда удаётся агрегировать характеристики и выполнять минимизацию целевой функции в пространстве меньшей размерности относительно новых параметров \mathbf{z} , однозначно зависящих от векторов исходных параметров

$$\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{w} \in R^N, \quad \mathbf{z} \in R^K, \quad K < N.$$

7.15 Условная оптимизация Для настройки некоторых НС используется оптимизация с ограничениями. Если необходимым условием минимума в задаче безусловной оптимизации является экстремум

$$\frac{dE(w)}{dw} = 0,$$

то в задаче условной минимизации минимум

$$\bar{w} = \operatorname{argmin}_w E(w)$$

может достигаться на границе области задания параметров.

В большинстве случаев решение базируется на методе нахождения седловой точки многочлена Лагранжа (минимума по параметрам, максимума по множителям Лагранжа) [48]. К примеру для задачи линейного программирования

$$\mathbf{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \min$$

функция Лагранжа может быть записана в виде

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{C}\mathbf{x}) = \mathbf{u}\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \mathbf{u}\mathbf{C})\mathbf{x}.$$

Её решение даётся парой $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$, такой что для любых $\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{u} \geq 0$

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \leq \mathbf{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \leq \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0),$$

$\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$ являются решениями исходной и двойственной задач и находятся обычно симплекс-методом [6].

Любое равенство можно записать как два нестрогих неравенства. Задача условной минимизации $\mathbf{E}(\mathbf{w})$ при ограничениях

$$g_i(\mathbf{w}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad g_i(\mathbf{w}) = 0, \quad i = m + 1, \dots, s$$

может быть также решена методом штрафных функций: минимизацией расширенного функционала

$$\mathbf{E}(\mathbf{w}) + \sigma \sum_{i=1}^s g_i^+(\mathbf{w})^p,$$

где $g_i^+(\mathbf{w}) = \max\{g_i(\mathbf{w}); 0\}$ для $i = 1, \dots, m$ и $g_i^+(\mathbf{w}) = |g_i(\mathbf{w})|$ для $i = m + 1, \dots, s$, p – степень, σ – параметр штрафования.

Целевая функция нередко представляет собой линейную свертку компонент некоторого вектора $\mathbf{f}(\mathbf{w})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(\mathbf{w}).$$

Если стоит задача минимизации целевой функции при ограничениях $f_i(\mathbf{w}) \leq c_i$, то решение такой задачи по Парето ищется минимизацией

$$\max_i \alpha_i (f_i(\mathbf{w}) - c_i) \longrightarrow \min.$$

В стохастическом случае в целевых функциях появляются операции осреднения.

Такие критерии как максимум или сумма модулей невязки не обладают дифференцируемостью, в отличие, к примеру, от квадратичных критериев. В первом случае строят целевые функционалы со среднестепенной структурой

$$\sum_{i=1}^N [\alpha_i (f_i(\mathbf{w}) - c_i)]^p \longrightarrow \min,$$

где степень $p = 2$ для квадратичного критерия, и, с увеличением степени, функциональность критерия приближается к максимуму. Критерий модуля невязки используется для достижения робастности (см. прил. Г), для его минимизации применяют методы линейного программирования.

Наложение ограничений и введение штрафных членов в целевую функцию часто становится причиной плохой обусловленности. Это, в свою очередь, приводит к овражистой структуре поверхности целевой функции. Подходам к решению плохо обусловленных задач посвящена глава 8.

7.16 Популяционные алгоритмы Перейдём к рассмотрению стохастических дискретных алгоритмов оптимизации, среди которых наиболее интересны популяционные алгоритмы. К ним относят генетические алгоритмы, возникшие в 70-е годы XX в., и алгоритмы искусственного отжига, появившиеся в 80-х гг. Все стохастические методы основаны на случайных испытаниях Монте-Карло. Их существенным преимуществом является возможность непосредственного использования нелинейных моделей.

Искусственный отжиг базируется на моделировании процесса переплавки в доменной печи, в ходе которой вещество кристаллизуется,

принимая конфигурации с минимальной энергией. Предварительно формируется некоторое исходное множество случайных моделей. На первом этапе система доводится до точки плавления, характеризующейся высокой температурой T . Температура, является параметром, связанным с энергией, которую определяет целевая функция. Температуру начинают плавно уменьшать. При каждом значении T в пространстве поиска происходят случайные скачки. Вероятность перехода в состояние с меньшей энергией (целевой функцией) единична, а в состояние с большей энергией распределена по Больцману (7.13). При высокой температуре, вероятность перескакивания из состояния с низкой энергией в состояние с большей энергией выше, чем при низкой температуре. В ходе такого отжига с высокой вероятностью будет найдена траектория, приводящая к глобальному минимуму энергии.

Генетические алгоритмы основаны на эволюционных законах естественного отбора и позволяют решать дискретные задачи глобальной оптимизации.

- На первом этапе формируется *популяция* состоящая из нескольких особей – моделей, параметры которых закодированы генами, объединёнными в хромосому. Как численные значения параметров, так и структура НС может быть закодирована двоичным кодом, кодом Грея или некоторым алфавитом и конкатенирована в цепочку геномов. Важной характеристикой особи является её функция приспособленности к среде или *фитнесс-функция*, которую стараются максимизировать.

- На втором этапе осуществляется *селекция* особей для скрещивания. Выделяют различные стратегии скрещивания, основанные на анализе сходства хромосом. Панмиксия предполагает, что любые две особи могут образовать “брачную пару”. При инбридинге пары образуют особи с близкими генетическими кодами (в смысле расстояния Хемминга или др.), при аутбридинге скрещиваются особи с непохожими генами. Ассоциативное скрещивание предполагает отбор пар на основе фитнес-функции. Положительное скрещивание подразумевает, что пары образуют особи со сходными значениями функции приспособленности, отрицательное – когда потомство дают особи с различающейся приспособленностью. При селективном скрещивании некоторые особи отстраняются от процесса создания потомства. Считается, что особи с лучшими значениями функции приспособленности принесут лучшее потомство, поэтому им даётся шанс на размножение. Для отбора можно использовать правило рулеточного колеса или турниры. При селекции разумнее опираться не на численное значение фитнес-функции, а на ранг особи в популяции.

- Третий этап – *скрещивание* или кроссинговер, который заключает-

ся в выборе участков генетического кода родителей и объединении их в хромосому новой особи.

- На четвертом этапе в геном некоторых новых особей вводятся *мутации*. Для этого с некоторой малой вероятностью случайно изменяются значения битов в генетическом коде. Вероятность мутации должна быть небольшой, чтобы новое поколение не оказалось плохо приспособленным. Этот этап важен для преодоления застревания эволюции в локальных оптимумах на пути к глобальному.

- Пятый этап формирования новой популяции базируется на фундаментальном уравнении популяционной генетики, называемом уравнением жизни, рождения и гибели

$$m_{t+\Delta t} = m_t + n_t - d_t.$$

В нем число особей, живущих в момент $t + \Delta t$, определяется числом живших в предшествующий момент m_t , числом родившихся n_t и умерших d_t . Важным параметром при этом является интервал перекрытия поколений, определяющий то, какие из представителей прошлых поколений остаются в живых, а какие погибают. Сохранение наиболее приспособленных “стариков” в живых помогает избежать опасности вырождения новых поколений. Функция приспособленности новой особи вычисляется на основе её реконструкции по генетическому коду, который должен удовлетворять условиям допустимости. Циклы селекции и воспроизводства многократно повторяются. В процессе эволюции появляются всё более и более приспособленные организмы (модели). Поиск глобального оптимума идёт случайным образом, часто довольно долго, но всё же значительно быстрее, чем при простом переборе.

Применительно к НС генетические алгоритмы используются обычно не для подбора весов нейронов, а для определения структуры НС и числа нейронов в ней. Это позволяет уменьшить пространство поиска и соответствует предположению, согласно которому генетическая информация в природе не несёт конкретных сведений, необходимых для приспособления особи к среде, но передаёт умение обучаться.

Основные вычислительные затраты при оптимизации связаны с необходимостью многократно вычислять целевую функцию. В случае сложной структуры поверхности решений для поиска глобального минимума следует комбинировать стохастические и детерминированные методы.

Поскольку рассмотреть всё множество алгоритмов оптимизации в рамках нашего курса не представляется возможным, за дополнительными сведениями по этой обширнейшей теме рекомендуем обратиться

к литературе по конечномерным методам оптимизации и исследованию операций [48], [58], [62].

► Пример 7.1): В [85] для прогнозирования ПОЗ (см. упр. 6.2) используется трехслойная нейронная сеть. Два промежуточных слоя содержат по 7 нейронов, и выходной слой состоит из одного нейрона с линейной функцией активации. Сеть принимает 300 входных отсчетов временного ряда и один за другим прогнозирует 60 отсчетов на будущее. Обучение сети проводится на основе выборки из временного ряда за прошлые 6 лет двадцати векторов по 300 отсчетов. Настройка осуществляется на основе алгоритма обратного распространения ошибки по методу Левенберга-Марквардта. Обучающими данными сравнения выступают вектора по 60 отсчетов, следующие за выборочными входными данными. Обучение проводится за 20 эпох. Метод участвовал в конкурсе прогнозирования ЕОР РСС [95], где получил бронзовые медали.

★ Упражнение 7-1): Построить целевую функцию для решения задачи синтеза оптимального фильтра низких частот с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{(c_1 + c_2p + c_3p^2 + c_4p^3)(c_5 + c_6p + c_7p^2 + c_8p^3)},$$

обладающей следующими свойствами: в диапазоне частот от 0 до ω_1 коэффициент передачи (АЧХ) составляет от 0.7 до 1. На частоте $\omega_2 > \omega_1$ он равен 0.707, а при $\omega_3 > \omega_2$ – меньше 0.005.

Глава 8

Фильтрация и решение обратных задач

Мефистофель
Наметили вы или нет
Призвание и факультет?
Студент
Я б стать хотел большим ученым
И овладеть всем потаенным,
Что есть на небе и земле.
Естествознаньем в том числе.
И. Гёте, “Фауст”,
перевод Б. Пастернака

Обратные задачи возникают в тех случаях, когда нужно восстановить причины явлений по их наблюдаемым следствиям. В случае динамических систем – это восстановление входного сигнала по наблюдаемому выходному, либо определение устройства системы. Любой прибор можно рассматривать как динамическую систему, поэтому восстановление истинной картины явления по данным, полученным приборами, является обратной задачей. Всякое определение параметров модели по данным наблюдений также можно считать обратной задачей. Помимо искажений, которые вносят приборы, любые наблюденияотягчены погрешностями. Присутствие шумов наблюдений делает обратные задачи существенно не равнозначными прямым. В большинстве случаев они оказываются неустойчивыми. Простое обращение уравнений модели может быть столь чувствительным к малейшим погрешностям наблюдений или ошибкам в самой модели, что степень неопределенности решения окажется колоссальной.

Сложность обратных задач заключается не столько в нахождении решения, сколько в том, что многие из возможных решений

не соответствуют оригиналу. Как при реконструкции архитектурного памятника требуется привлечение источников дополнительной информации, также и при решении обратных задач требуются дополнительные (априорные) сведения, уменьшающие неопределённость относительно исходного объекта. Никакие математические хитрости не могут заменить собой отсутствие информации [50], [52], [64].

Обратные задачи встречаются повсеместно. В качестве примеров можно привести оценивание спектра случайного временного ряда, восстановление гравитационного поля на некоторой высоте h_0 по его сглаженным значениям на большей высоте $h_1 > h_0$, восстановление изображений, трёхмерных полей в задачах томографии, картирование поверхности звёзд по кривым блеска, построение модели Вселенной по флуктуациям фона реликтового излучения и подсчётам числа галактик и др.

◇ Пример 8.1): Знаменитым примером решения обратной задачи в небесной механике является открытие Нептуна в 1846 г. [5], [19]. Задача Ньютона определения поля сил, в котором материальная точка движется по законам Кеплера под действием тяготения, принадлежит к редкому классу обратных задач для которых существует точное решение. Пусть уравнения движения планеты имеют вид

$$\ddot{x} = X(x, y), \quad \ddot{y} = Y(x, y),$$

и допускают первые интегралы

$$w_1 = r - ex = p, \quad w_2 = x\dot{y} - \dot{x}y = c,$$

здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e – эксцентриситет. Необходимое и достаточное условие того, что исходные уравнения допускают *интеграл площадей* $w_2 = c$ имеет вид

$$\frac{\partial w_2}{\partial \dot{x}} X + \frac{\partial w_2}{\partial \dot{y}} Y + \frac{\partial w_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \dot{y} = 0,$$

или

$$xY - yX = 0.$$

Отсюда находим правые части исходных уравнений

$$X = xV(x, y), \quad Y = yV(x, y),$$

где $V(x, y)$ – произвольная функция. Для её определения используем *уравнение траектории* планеты $w_1 = p$

$$\ddot{w}_1 = \frac{c^2}{r^3} + \frac{x}{r} X + \frac{y}{r} Y - eX = 0.$$

Откуда имеем

$$V(x, y) = -\frac{c^2}{p} \frac{1}{r^3},$$

и окончательная форма уравнений движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -\frac{mc^2}{p} \frac{x}{r^3}, \quad m\ddot{y} = -\frac{mc^2}{p} \frac{y}{r^3}.$$

Правые части этих уравнений представляют собой проекции силы, вызывающей движение планеты с постоянной секторной скоростью по эллиптической орбите [9]. Из наблюдений за движением планеты можно определить местонахождение источника сил притяжения. ♦

Жак Адамар сформулировал в 1932 г. условия корректности задачи:

- 1) решение должно существовать;
- 2) решение единственно;
- 3) решение непрерывно зависит от исходных данных.

Обратные задачи чаще всего неоднозначны, неустойчивы, не удовлетворяют одному или нескольким из названных условий и поэтому называются некорректно поставленными. Они требуют специальных подходов, о которых мы поговорим в данной главе.

В классической физике и математике наибольшее внимание уделяется обратным задачам для систем линейных алгебраических и интегральных уравнений. Интегральные уравнения дискретизируются для численного решения (4.9), (6.32), превращаясь в системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Классические методы создавались для работы в первую очередь с детерминированными функциями. Распространение их на случайные процессы происходило позже и далеко не завершено. На практике мы всегда сталкиваемся со случайностью, поэтому необходимо научиться использовать теорию и для этого случая. Методы линейной алгебры применимы и к стохастическим сигналам, но работа ведется с математическими ожиданиями и требует особой аккуратности. Методы математической статистики, разработанные для решения задач оценивания параметров распределений, представляют собой естественные подходы к обратным задачам со случайными данными. Их рассмотрение вносит ясность в понимание сути обратных задач, но требует дополнительных сведений, вынесенных в приложение В [50].

8.1 Совместность СЛАУ Рассмотрим линейную систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{8.1}$$

с матрицей \mathbf{C} размерности $(m \times n)$. Выражение (8.1) соответствует преобразованию \mathcal{C} , которое переводит вектор \mathbf{x} из линейного пространства \mathcal{L}^n в вектор \mathbf{y} из линейного пространства \mathcal{L}^m . Стоит задача отыскания решения \mathbf{x} для заданного \mathbf{y} , которая может считаться обратной. Каждое из уравнений системы (8.1) представляет собой уравнение гиперплоскости. Найти общие точки всех гиперплоскостей возможно только в случае, если система совместна. В линейной алгебре доказывается [6], а в функциональном анализе обобщается [25] *теорема Фредгольма*, согласно которой система (8.1) совместна тогда и только тогда, когда каждое решение транспонированной (в общем случае сопряжённой) однородной системы $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ удовлетворяет условию $\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y} = 0$.

Напомним, что множество $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^n$, которое преобразуется в нулевые вектора из \mathcal{L}^m (множество решений однородной системы $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$) называется ядром преобразования \mathcal{C} или нуль-пространством и обозначается \mathbf{KerC} . Это линейное подпространство. Таким же образом в пространстве \mathcal{L}^m можно указать множество векторов $\boldsymbol{\eta}$, которые переводятся транспонированным (сопряжённым) преобразованием \mathcal{C}^T в нулевые вектора из \mathcal{L}^n . Это множество \mathbf{KerC}^T решений транспонированной (сопряжённой) однородной системы. Последнее ортогонально множеству значений \mathcal{C} , обозначаемому \mathbf{ImC} .

Геометрическая интерпретация теоремы Фредгольма состоит в том, что если вектор \mathbf{y} имеет ненулевую проекцию на базис \mathbf{KerC}^T , то он не может принадлежать \mathbf{ImC} и система (8.1) не может быть решена.

◇ Пример 8.2): Система из одного уравнения $ax_1 + bx_2 + cx_3 = y$, хотя бы с одним коэффициентом не равным нулю, сопоставляет множеству векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ из \mathcal{R}^3 значение y из \mathcal{R}^1 и задает плоскость в \mathcal{R}^3 . Ядром \mathbf{KerC} является множество векторов плоскости, параллельной заданной и проходящей через начало координат. Система разбивает пространство \mathcal{R}^3 на сумму $\mathbf{KerC} \oplus \mathbf{ImC}^T$. Областью значений $\mathcal{J} = \mathbf{ImC}^T$ сопряженного оператора оказывается множество векторов \mathbf{z} , перпендикулярных плоскости. Действительно, по теореме Фредгольма система $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\eta} = \mathbf{z}$ совместна тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}^T \mathbf{z} = 0$, где \mathbf{x} – вектор из множества $\mathcal{K} = \mathbf{KerC}$ решений однородной исходной системы. Таким образом, пространство \mathcal{R}^3 разбивается на два ортогональных подпространства: \mathcal{K} – векторов, лежащих в плоскости, задаваемой исходным уравнением, и \mathcal{J} – векторов, перпендикулярных плоскости, проекция на которые решений исходной системы нулевая. Система совместна при любом y , поскольку ядром сопряженного оператора являются нулевые значения $\boldsymbol{\eta}$. ♦

8.2 Обусловленность Плохо обусловленной системой вида (8.1) называется такая система, для которой небольшие неточности задания \mathbf{y} могут привести к существенным ошибкам решения \mathbf{x} . Предположим, что \mathbf{C} – квадратная невырожденная матрица. Рассмотрим возмущенную систему, получаемую из (8.1) добавлением небольших величин к коэффициентам матрицы

$$\mathbf{y} = (\mathbf{C} + \delta\mathbf{C})\mathbf{x}.$$

Если при малых возмущениях $\delta\mathbf{C}$ система может оказаться вырожденной, то матрица системы (8.1) называется почти вырожденной. Иными словами, матрица \mathbf{C} почти вырождена, когда в малой её окрестности есть вырожденная матрица $\mathbf{C} + \delta\mathbf{C}$. Это серьёзный случай плохой обусловленности. В случае вырожденности \mathbf{C} система получает бесконечное множество решений.

На практике матрица \mathbf{C} чаще всего известна приближённо. Если она почти вырождена, точность, с которой она известна, может оказаться недостаточной для ответа на вопрос – вырождена она на самом деле или нет. В этом случае обратная задача оказывается сильно неустойчивой.

Пусть вектор \mathbf{y} известен не точно, а с абсолютной погрешностью $\Delta\mathbf{y}$. Т.е. задан центр \mathbf{y} окрестности с радиусом $\Delta\mathbf{y}$, в которой может лежать истинное значение вектора. В этом случае обратную задачу можно рассматривать как отыскание прообраза этой окрестности. В линейной задаче прообразом сферической окрестности будет эллипсоид в \mathcal{L}^n . В случае плохой обусловленности, некоторые из полуосей этого эллипсоида будут велики, а соответствующие компоненты \mathbf{x} иметь очень большие погрешности.

◇ Пример 8.3): Система уравнений

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &= y_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 &= y_2, \end{aligned} \tag{8.2}$$

задаёт две прямые на плоскости, рис. 8.1. Решением СЛАУ является точка пересечения этих прямых. Если вектор \mathbf{y} известен с погрешностью $\Delta\mathbf{y} = (\Delta y_1, \Delta y_2)^T$, решение будет лежать в области, ограниченной прямыми

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &= y_1 + \Delta y_1, & a_1x_1 + b_1x_2 &= y_1 - \Delta y_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 &= y_2 + \Delta y_2, & a_2x_1 + b_2x_2 &= y_2 - \Delta y_2. \end{aligned}$$

В случае плохой обусловленности системы, прямые окажутся почти параллельными. Неопределённость точки пересечения по одной из диагоналей параллелограмма, которым в рассмотренном случае является окрестность решения, будет очень велика. Если неопределённость кроется в

матрице системы, прямые не только сдвигаются, но и поворачиваются, окрестность становится более сложной фигурой.

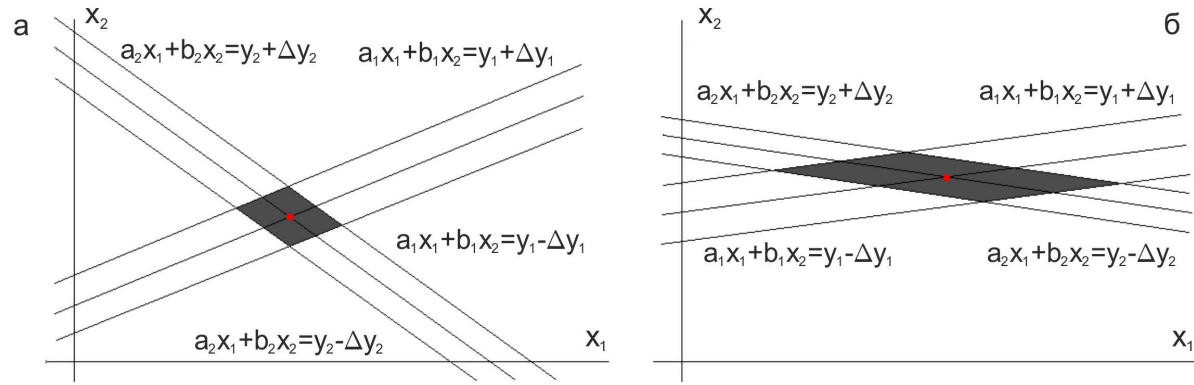


Рис. 8.1: Область допустимых значений задачи (8.2), обусловленной лучше (а) и хуже (б).

Может возникнуть впечатление, что если прямые перпендикулярны, то система обусловлена лучше всего. Угол между прямыми действительно связан со степенью вырожденности матрицы. Однако, поскольку обусловленность – более широкое понятие, можно привести примеры, когда прямые перпендикулярны, а обусловленность плохая. Так, если среди коэффициентов и свободных членов системы встречаются сильно различающиеся по величине (например $a_1 = 10^3, b_1 = 0, y_1 = 1, a_2 = 0, b_2 = 10^{-3}, y_2 = -10^{-3}$), система может оказаться плохо обусловленной даже в случае перпендикулярности прямых. ♦

В связи с вышесказанным встаёт вопрос об отыскании меры обусловленности системы. Можно показать, что такой мерой может служить величина

$$m(\mathbf{C}) = \|\mathbf{C}\| \cdot \|\mathbf{C}^{-1}\|,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает некоторую матричную норму. В частности, для спектральной нормы¹, мерой обусловленности служит отношение наибольшего из собственных чисел матрицы \mathbf{C} к наименьшему

$$m(\mathbf{C}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

8.3 Псевдорешения В общем случае матрица \mathbf{C} системы (8.1) не квадратная. Когда $m < n$, разумное решение можно получить лишь как

¹Спектральная норма квадратной положительно определённой матрицы равна её наибольшему собственному числу.

исключение. При $m \geq n$ скорее всего (если матрица \mathbf{C} имеет более n линейно независимых строк) удовлетворить всем уравнениям одновременно не удастся. Следует ли в этом случае выбрать совместную подсистему уравнений и решить её, а остальные уравнения отбросить?

На самом деле следует найти такое множество точек, ни одна из которых, возможно, не удовлетворяет ни одному из уравнений (8.1), однако все точки, в некотором смысле, близки к решению каждого. Здесь мы сталкиваемся с понятием об обобщенном решении или псевдорешении, минимизирующем норму невязки $(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})$. Невязка тоже может считаться элементом решения, которое можно интерпретировать как поиск таких поправок к \mathbf{y} , которые делают систему совместной.

Минимизация обычно выполняется по евклидовой норме, т.е. ищется минимум квадрата отклонения. Необходимое условие экстремума

$$d(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}) = -2d\mathbf{x}^T\mathbf{C}^T(\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}) = 0 \quad (8.3)$$

приводит к *нормальной системе* уравнений

$$\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{C}^T\mathbf{y},$$

которая всегда совместна ($\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ симметрична, если $\mathbf{C}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{C}\boldsymbol{\eta}^T)\mathbf{C}\boldsymbol{\eta} = 0$, $\mathbf{C}\boldsymbol{\eta} = 0$ и выполнено условие теоремы Фредгольма $\boldsymbol{\eta}^T\mathbf{C}^T\mathbf{y} = 0$). Решение нормальной системы и является *псевдорешением* (8.1). Если матрица $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ невырождена и допускает обращение, оно может быть записано в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^+\mathbf{y}.$$

Здесь мы ввели в рассмотрение \mathbf{C}^+ – обобщенную обратную (псевдообратную) матрицу, удовлетворяющую свойству

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{C}^+\mathbf{C}.$$

В случае, если \mathbf{C} имеет линейно независимые столбцы, она даётся выражением $\mathbf{C}^+ = (\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T$, а если линейно независимы строки, – выражением $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}$. При этом \mathbf{C}^+ состоит из m столбцов высоты n , т.е. совпадает с размерностью \mathbf{C}^T .

Однако, если матрица $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ вырождена, то решение неединственно. Оно может быть записано с использованием псевдообратной матрицы Пенроуза² в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^+\mathbf{y} + (\mathbf{I} - \mathbf{C}^+)\mathbf{c}, \quad (8.4)$$

²Понятие обобщенного (псевдо) обращения интегрального оператора введено Фредгольмом в 1903 г. Метод псевдообращения матриц разработан Муром в 1920 и обобщен Пенроузом в 1955 г.

где \mathbf{I} – единичная матрица размеров $(n \times m)$, а \mathbf{c} – произвольный вектор. В записанном выражении первое слагаемое является частным решением нормальной системы, а второе слагаемое – общим решением сопряженной однородной нормальной системы $\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Какое же из решений выбрать?

Нормальным псевдорешением называется такое решение, которое имеет минимальную норму. Доказано, что каждая система нормальных уравнений имеет единственное нормальное псевдорешение

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^+ \mathbf{y}. \quad (8.5)$$

Остаётся вопрос, – как определить псевдообратную матрицу, если $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ не может быть обращена? В общем случае \mathbf{C}^+ определяется как матрица, столбцы которой – нормальные псевдорешения систем линейных уравнений вида

$$\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{e}_i, \quad (8.6)$$

где \mathbf{e}_i – i -й столбец единичной матрицы порядка m .

◇ Пример 8.4): Системе из двух уравнений $x = 1$, $x = 2$ соответствует нормальная система $2x = 3$ и псевдорешение $x = 2/3$.

Пример 8.5): Система из одного уравнения $\alpha x = \beta$ при $\alpha \neq 0$ имеет псевдорешение, совпадающее с решением. Если $\alpha = 0$, то любое x даёт невязку с нормой $|\beta|$. Нормальным псевдорешением будет x с минимальной нормой, т.е. 0. Таким же образом находится псевдорешение системы с нулевой матрицей бóльшей размерности.

Пример 8.6): Система из m уравнений

$$y_i = kx_i + b, \quad i = 1 \dots m$$

может быть представлена m точками на плоскости с координатами (x_i, y_i) . Если воспринимать x_i и 1 как коэффициенты в строках матрицы \mathbf{C} , то отыскание k и b – параметров прямой, проходящей в смысле минимума невязки как можно ближе ко всем точкам, и будет в данном случае решением обратной задачи. Поскольку система несовместна (если все точки не сливаются в одну) такая прямая будет псевдорешением СЛАУ вида (8.1), см. также приложение Е. ♦

8.4 SVD-разложение Рассмотрим структуру псевдорешения и псевдообратной матрицы в сингулярном базисе. Для этого выполним разложение (3.1) матрицы преобразования по сингулярным числам

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T. \quad (8.7)$$

Как известно из главы 3, по диагонали матрицы \mathbf{S} размерности $(m \times n)$ в порядке убывания расположены сингулярные числа s_i матрицы \mathbf{C} . Столбцы матрицы \mathbf{U} размерности $(m \times m)$ образуют второй (столбцовый) сингулярный базис в \mathcal{L}^m , а столбцы матрицы \mathbf{V} размерности $(n \times n)$ – первый (строковый) сингулярный базис в \mathcal{L}^n . Обе матрицы унитарны $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ и $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$ [6].

Для матрицы нормальной системы запишем

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = (\mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T)^T \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T, \quad (8.8)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ – диагональная матрица. Вдоль её главной диагонали упорядоченно по убыванию расположены собственные числа матрицы нормальной системы $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Каждое из них равно квадрату соответствующего сингулярного значения \mathbf{C} , $\lambda_i = s_i^2$. Эти числа неотрицательны для самосопряженного положительно полуопределённого преобразования (8.8) и характеризуют степень обусловленности матрицы. Их полный набор называют спектром матрицы (см. раздел 3.5), а выражение (8.8) есть не что иное, как преобразование координат (поворот), приводящее матрицу к диагональному виду. Это означает, что можно выбрать базис, в котором матрица нормальной системы будет иметь диагональный вид

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{p} = \mathbf{S}^T \theta, \quad (8.9)$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{V}^T \mathbf{x}$, $\theta = \mathbf{U}^T \mathbf{y}$. В этом базисе главных компонент, который иногда называется сингулярным базисом или базисом Карунена-Лоэва, найти псевдорешение не составляет труда (см. также раздел 8.7).

Еще раз подчеркнём, что понятия спектра и собственных значений определены для квадратных матриц. Для неквадратных матриц определены сингулярные числа. Ниже мы будем работать как с собственными числами λ_i матрицы нормальной системы (8.8), так и с сингулярными числами $s_i = \sqrt{\lambda_i}$ прямоугольной матрицы \mathbf{C} исходной системы (8.1).

В случае невырожденности $\mathbf{\Lambda}$ псевдообратная матрица \mathbf{S}^+ будет представлять из себя матрицу размерности $(n \times m)$ все значения в которой нули, за исключением диагональных элементов квадратного блока (размером $(n \times n)$, если $m \geq n$), расположенного в верхней левой части матрицы. По его диагонали стоят числа $1/s_i$. Мерой обусловленности задачи является отношение $m(\mathbf{S}) = s_1/s_n$. Если спектр матрицы нормальной системы лежит в большом диапазоне значений, задача оказывается неустойчивой. Один из методов решения в этом случае заключается в отсечении малых сингулярных чисел. Задается некоторая величина $\varepsilon > 0$ и все сингулярные числа $|s_i| < \varepsilon$ в матрице \mathbf{S} зануляются.

Когда $rg(\mathbf{\Lambda}) = k < n$, нормальная система несовместна, одно или несколько собственных значений обращаются в ноль, а число обусловленности – в бесконечность. В этом случае матрица нормальной системы может быть записана в виде

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_n, \lambda_n, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0).$$

Она не допускает прямого обращения, и столбцы псевдообратной матрицы должны быть найдены как нормальные псевдорешения систем (8.6). Первые k столбцов \mathbf{S}^+ будут иметь отличные от нуля элементы $1/s_i$, $i = 1, \dots, k$, стоящие на главной диагонали матрицы. Остальные $n - k$ столбцов равны нулю. Какими бы они не были, они не меняют невязку, а нормальное псевдорешение требует, чтобы они имели минимальную норму. Таким образом, псевдообратная матрица вырожденной диагональной системы представляет из себя матрицу размерности $n \times m$ с отличной от нуля диагональю квадратного блока размером $(k \times k)$

$$\mathbf{S}^+ = \begin{pmatrix} s_1^{-1} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & s_k^{-1} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Пользуясь полученным результатом и опираясь на сингулярное разложение, записать псевдообратную матрицу исходной системы (8.1) можно в виде

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{V}\mathbf{S}^+\mathbf{U}^T. \quad (8.11)$$

Может быть использована т.н. вторая форма сингулярного разложения

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{P}^T$$

получающаяся из исходной (8.7) взятием первых k столбцов \mathbf{U} , первых k строк \mathbf{V} и ненулевого блока матрицы \mathbf{S} размером $k \times k$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = \mathbf{U}(\mathbf{I}_m^k)^T \mathbf{D} \mathbf{I}_n^k \mathbf{V}^T = \mathbf{I}_m^k \mathbf{U} \mathbf{D} (\mathbf{V} \mathbf{I}_n^k)^T = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{P}^T,$$

где матрица \mathbf{I}_n^k представляет собой блок единичной матрицы размером $k \times n$. Домножение некоторой матрицы слева на \mathbf{I}_n^k , если оно определено, оставляет в матрице k строк, а домножение справа приписывает $n - k$ нулевых столбцов. В этом случае псевдообратная матрица \mathbf{D}^+ будет квадратной и решение запишется в виде

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{P}\mathbf{D}^+\mathbf{Q}^T, \quad \text{где} \quad \mathbf{D}^+ = \mathbf{diag}\left(\frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \dots, \frac{1}{s_k}\right).$$

Для нормальной матрицы (8.8) псевдообращение запишется в виде

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{S}^{+T} \mathbf{S}^+ \mathbf{V}^T.$$

8.5 Геометрия псевдорешения Дадим геометрическую интерпретацию псевдорешения. Покажем, что операция $\mathbf{C}^+ \mathbf{C} \mathbf{x}$ представляет собой проектирование вектора \mathbf{x} на подпространство, составленное всеми линейными комбинациями вида $\mathbf{C}^T \mathbf{y}$, рис. 8.2. Действительно, опираясь на пояснения к теореме Фредгольма (пример 8.2), можно заметить, что пространство \mathcal{L}^n разделяется преобразованием $\mathcal{C} : \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}^m$ на два ортогональных подпространства: нуль пространство $\mathcal{K} = \mathbf{Ker} \mathbf{C}$ и область значений сопряженного оператора $\mathcal{J} = \mathbf{Im} \mathbf{C}^T$ – множество линейных комбинаций вида $\mathbf{C}^T \mathbf{y}$ для любых \mathbf{y} . Базисом в пространстве \mathcal{L}^n можно выбрать первый сингулярный базис. При этом базисом подпространства \mathcal{K} окажутся строки матрицы \mathbf{V} , соответствующие нулевым собственным числам, а подпространства \mathcal{J} – ненулевым. Любой вектор из \mathcal{L}^n может быть представлен суммой двух компонент $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{J}$, $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{K}$. Поскольку $\mathbf{C} \mathbf{x}_1 = 0$, образом \mathbf{x} в \mathcal{L}^m будет $\eta = \mathbf{C} \mathbf{x}_0$. Операция $\mathbf{C}^+ \eta$ даст такой прообраз в \mathcal{L}^n , который имеет минимальную норму, т.е. все его компоненты³, связанные с \mathcal{K} , будут равны нулю. Таким образом $\mathbf{C}^+ \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ – проекция⁴ \mathbf{x} на \mathcal{J} .

Отсюда, первое слагаемое в (8.4) представляет собой псевдорешение системы (8.1) – проекцию \mathbf{x} на \mathcal{J} , а второе слагаемое $(\mathbf{I} - \mathbf{C}^+) \mathbf{c}$ при любом векторе \mathbf{c} есть проекция последнего на \mathcal{K} . В нормальном псевдорешении второе слагаемое (8.4) делается равным нулю, в него не включаются вектора, представляющие собой комбинации базисных векторов нуль-пространства.

Отсечение малых собственных чисел при вычислении псевдорешения плохо обусловленной задачи означает зануление всех тех компонент \mathbf{x} в первом сингулярном базисе, неопределённость которых максимальна.

8.6 Обратные задачи для дискретных моделей наблюдений Рассмотрим обобщённую дискретную модель наблюдений

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{u}, \\ \langle \mathbf{u} \rangle &= \mathbf{a}, \quad \text{cov}(\mathbf{u}) = \mathbf{Q}, \end{aligned} \tag{8.12}$$

где \mathbf{H} – матрица преобразования размерности $(m \times n)$, \mathbf{u} – шум наблюдений с известным средним \mathbf{a} и ковариационной матрицей

³Если не накладывать условие минимальности на норму, компоненты прообраза в \mathcal{K} , вообще говоря, могут быть произвольными.

⁴Одним из основных свойств оператора проектирования является то, что повторное проектирование не меняет результат, $\text{Proj}(\text{Proj}(x)) = \text{Proj}(x)$.

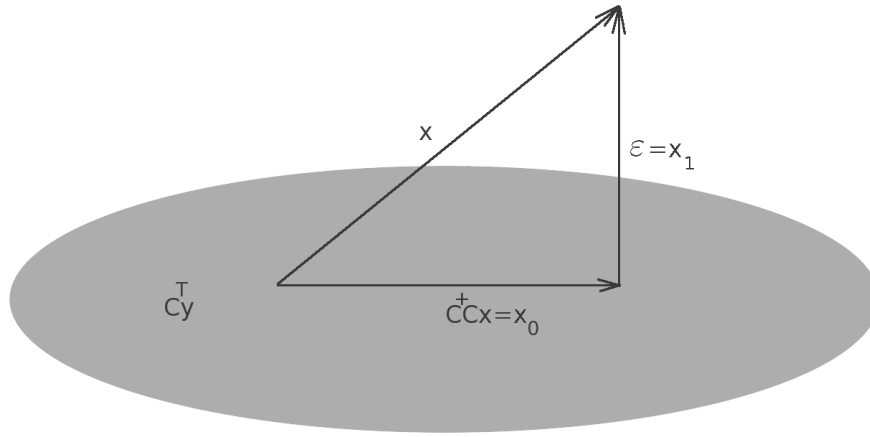


Рис. 8.2: Оценивание как проектирование на область значений сопряжённого оператора, ортогональную ядру исходного оператора, которому принадлежит невязка.

$\text{cov}(\mathbf{u}) = \langle (\mathbf{u} - \mathbf{a})(\mathbf{u} - \mathbf{a})^T \rangle$. В общем случае, матрица \mathbf{Q} недиагональна. Она становится диагональной, когда ошибки наблюдений независимы, и в данных нет скрытых систематических ошибок, неучтённых моделью. Обратная задача будет состоять в отыскании n компонент вектора \mathbf{x} по m -мерному вектору наблюдений \mathbf{y} . Её можно считать задачей нахождения псевдорешения СЛАУ вида $\mathbf{z} \pm \Delta \mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}$, где $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{u} -$ шум наблюдений, представляющий собой реализацию векторной случайной величины с естественными флуктуациями относительно среднего \mathbf{a} .

Для нахождения оценки $\bar{\mathbf{x}}$ модели (8.12) в случае полной ковариационной матрицы \mathbf{Q} применим обобщённый МНК [16]. Решается задача минимизации взвешенной суммы квадратов отклонений вычисленных значений от наблюдаемых

$$(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) \rightarrow \min, \quad (8.13)$$

Оптимальная оценка даётся выражением

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q} (\mathbf{z} - \mathbf{a}),$$

а ковариационная матрица оценки определяется как

$$\text{cov}(\bar{\mathbf{x}}) = (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H})^{-1}.$$

Матрица нормальной системы уравнений

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H}$$

иногда называется информационной матрицей Фишера (см. прил. Г).

Модель (8.12) может быть приведена к *стандартной модели* с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \\ \langle \mathbf{n} \rangle &= 0, \quad \text{cov}(\mathbf{n}) = \mathbf{I}_n, \end{aligned} \quad (8.14)$$

заменой переменных следующего вида

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{Q}}}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{Q}}}, \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{\mathbf{Q}}}. \quad (8.15)$$

Извлечение корня из ковариационной матрицы \mathbf{Q} , возможно, ввиду её положительной определённости и невырожденности. Минимизация суммы квадратов невязок [38] приводит в стандартной модели к выражению (8.3)

$$\mathbf{C}^T(\mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}) = 0, \quad (8.16)$$

из которого вытекает нормальная система уравнений и общеизвестное решение

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y}, \quad \text{cov}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1}. \quad (8.17)$$

Действие на любой объект \mathbf{x} нулевого оператора (8.16) может быть записано в виде

$$(\mathbf{C}\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}) = 0. \quad (8.18)$$

Это выражение представляет собой ни что иное, как условие ортогональности невязки $(\mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}})$ и модели. Невязка принадлежит ядру сопряжённого оператора $\mathbf{Ker} \mathbf{C}^T$ (8.16), которое ортогонально области значений оператора \mathbf{C} . МНК-оценка является проекцией наблюдений \mathbf{y} на класс линейных комбинаций вида $\mathbf{C}\mathbf{x}$. Расстояние от \mathbf{y} до $\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}$ минимально. С условием ортогональности мы уже сталкивались на примере уравнения Винера-Хопфа (6.17) и псевдообращения Мура-Пенроуза, рис. 8.2).

Если в модели (8.12) шум белый и все компоненты равнозначны, т.е. все u_i взаимно независимы и имеют одну и ту же дисперсию σ^2 , то матрица ковариации имеет диагональный вид $\mathbf{Q} = \sigma^2 \mathbf{I}$, и замена переменных (8.15) при переходе к (8.14) может быть записана в виде

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\sigma}(\mathbf{z} - \mathbf{a}), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{a}), \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{H}}{\sigma},$$

в этом случае, матрица Фишера и ковариационная матрица принимают вид

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H}, \quad \text{cov}(\bar{\mathbf{x}}) = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}. \quad (8.19)$$

Интересным подходом к решению задачи, когда погрешность предполагается присутствующей как в наблюдениях, так и в матрице данных, является метод наименьших квадратов с ошибками в матрице (Total Least Squares), который представлен в приложении Е.

8.7 Модель в спектральной области Осуществим перевод стандартной модели (8.14) в спектральную область главных компонент (8.9). Для этого домножим уравнения на \mathbf{U}^T и сделаем замену переменных

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^T \mathbf{C} \mathbf{x} &= \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \mathbf{x} = \mathbf{I} \mathbf{S} \mathbf{p} = \mathbf{S} \mathbf{p}, \\ \theta &= \mathbf{U}^T \mathbf{y}, \quad \zeta = \mathbf{U}^T \mathbf{n}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{V}^T \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\theta &= \mathbf{S} \mathbf{p} + \zeta, \\ \langle \zeta \rangle &= 0, \quad \text{cov}(\zeta) = \mathbf{I}_n,\end{aligned}\tag{8.20}$$

где θ – разложение \mathbf{y} по главным компонентам (каноническим координатам) p_i объекта $\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{p}$, упорядоченным по точности восстановления. Вектора \mathbf{v}_i называют также эмпирическими ортогональными функциями. МНК-оценка в спектральной области и её ковариационная матрица в невырожденном случае принимают вид, см. (8.9),

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{S}^T \theta = \mathbf{S}^{-1} \theta, \quad \text{cov}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{\Lambda}^{-1}.\tag{8.21}$$

Когда задача плохо обусловлена, обратная задача нахождения исходного вектора \mathbf{x} сильно неустойчива. Компоненты оценки $\bar{\mathbf{x}}$ могут иметь огромную дисперсию и оказаться сильно коррелированными. Вот тут-то и оказываются полезными методы отыскания псевдорешения, описанные выше. Нормальное псевдорешение получается в виде (8.5).

Вопрос о нахождении и исключении из системы тех компонент, которые делают её неразрешимой либо вносят в решение наибольшую неопределённость – это вопрос фильтрации. Он может быть решен нахождением сингулярного базиса и занулением тех компонент решения, которые вносят наибольшую неопределённость, т.е. компонент решения в подпространстве \mathcal{K} .

Область допустимых оценок (ОДО) как некоторый прообраз окрестности наблюдений \mathbf{y} (см. пример 8.2) в случае гауссовских шумов будет эллипсоидом (см. прил. Г). Оси выбранной в (8.20) системы координат параллельны осям эллипсоида ОДО. Компоненты \mathbf{p} ортогональны и не коррелируют между собой. В методе псевдообращения Мура-Пенроуза

оценка получается умножением наблюдений на псевдообратную матрицу (8.10), в разложение которой входят $1/s_i$, поэтому в системе главных компонент наименьшим сингулярным числам соответствуют наибольшие дисперсии – длины осей эллипсоида ОДО. Таким образом, отсечение малых сингулярных чисел уменьшает неопределённость обратного решения [50]. Можно найти более гладкий метод фильтрации. Пример винеровской фильтрации главных компонент дан в приложении Д.

8.8 Регуляризация плохо обусловленных систем Еще одним способом преодоления плохой обусловленности является добавление к матрице Фишера небольшой поправки $\alpha \mathbf{I}_n$, тогда матрица восстановления \mathbf{x} по \mathbf{y} в (8.17) приобретает вид (см. раздел 7.13)

$$(\mathbf{F} + \alpha \mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{C}^T. \quad (8.22)$$

Это так называемое регуляризованное решение, где α – малый параметр регуляризации, заметно влияющий на малые собственные числа матрицы $\mathbf{F} + \alpha \mathbf{I}_n$. О методе регуляризации будет сказано в разделе 8.12.

8.9 Общие замечания, дилемма смещения и дисперсии Обратная задача поставлена, когда указаны

- 1) модель формирования данных
- 2) априорная информация об объекте
- 3) смысл, вкладываемый в понятие обратного решения
- 4) понятие о качестве решения.

Для выполнения 1-го пункта достаточно сформулировать прямую задачу. Модель должна быть достаточно полной. Примером не совсем правильного подхода является вычитание фона, полученного по далёким от исследуемого объекта частям астрономического снимка, перед обработкой. Разумнее включить модель фона в схему оценивания.

Примером априорной информации может служить условие $\mathbf{x} \geq 0$ для фото или ПЗС-изображения (освещённость не может быть отрицательной). Часто априорную информацию трудно формализовать. Наблюдателю иногда кажется, что у него больше априорной информации, чем есть на самом деле. Не следует допускать иллюзий, что из наблюдений можно извлечь больше информации, чем в них содержится. При решении обратных задач бывает полезным принцип Оккама “не усложняй сущностей без надобности”. Из двух решений – простого и сложного, одинаково хорошо согласующихся с наблюдениями, разумно выбрать простое.

Решение обратной задачи подобно детективной работе. Область поисков сужается указанием группы людей, к которой принадлежит преступник, заданием предпочтений в этой группе. Неверная априорная информация чаще всего приводит к смещению оценки “не туда”.

4-й пункт требует определения того, что для нас важно в решении. В статистике Фишером введены три критерия оценки:

- *несмещённость* – отсутствие систематической ошибки;
- *состоятельность*, т.е. увеличение точности с увеличением размеров выборки;

- *эффективность* – наиболее сильное свойство, подразумевающее достижение наименьшей возможной дисперсии в выбранном классе оценок.

Если смещение оценки $b = \langle \bar{x} \rangle - \langle x \rangle$ стремится к нулю при увеличении размеров выборки, говорят об асимптотической несмещённости. Если рассеяние оценки не превосходит рассеяния любой другой оценки из данного класса, то она эффективна. Для разных задач могут быть важны разные свойства.

К примеру, МНК задумывался Гауссом и Лежандром как метод определения параметров орбит. Вообще говоря, в стандартной модели (8.14) параметр x считается случайным. Случайными являются ошибки наблюдений, для которых предполагается статистическая независимость и нулевое среднее. Распределение ошибок, в общем случае, может быть неизвестно и быть негауссовским. Доказано, что в случае линейной независимости столбцов матрицы системы, МНК-оценка является несмещённой и эффективной оценкой в классе линейных оценок. Если известно, что распределение ошибок гауссовское, то МНК-оценка оказывается эффективной в классе всех линейных и нелинейных оценок. Столбцы матрицы системы содержат значения базисных функций. Всё то, что не вписывается в модель, т.е. имеет нулевую проекцию на базисные функции, – отбрасывается. Таким образом, задав модель и выполняя МНК-оценивание, мы неявно осуществляем фильтрацию.

Важную особенность решения обратных задач отражает *дилемма смещения и дисперсии*. Рассмотрим её на примере МНК-оценки.

Близость оценки $\bar{\mathbf{x}}$ к истинному значению можно охарактеризовать матрицей рассеяния

$$\mathbf{\Omega} = \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \rangle,$$

след которой

$$\text{tr}(\mathbf{\Omega}) = \sum_{k=1}^n \langle (x_k - \bar{x}_k)^2 \rangle$$

также характеризует отклонение и является ни чем иным, как суммой средних квадратов отклонений для компонент $\bar{\mathbf{x}}$.

По теореме Гаусса-Маркова МНК-оценка обладает наименьшей дисперсией в классе линейных несмещённых оценок. Для неё матрица

рассеяния может быть записана как

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{cov}(\mathbf{x}) = \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \rangle = \mathbf{F}^{-1}.$$

Прибавляя и вычитая среднее, перепишем $\mathbf{\Omega}$ следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \langle (\mathbf{x} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle - \bar{\mathbf{x}})^T \rangle = \\ &= \langle (\mathbf{x} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle)(\mathbf{x} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle)^T \rangle + \langle (\langle \bar{\mathbf{x}} \rangle - \bar{\mathbf{x}})(\langle \bar{\mathbf{x}} \rangle - \bar{\mathbf{x}})^T \rangle + \\ &+ \langle (\mathbf{x} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle)(\langle \bar{\mathbf{x}} \rangle - \bar{\mathbf{x}})^T \rangle + \langle (\langle \bar{\mathbf{x}} \rangle - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle)^T \rangle = \\ &= (\langle \bar{\mathbf{x}} \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle)(\langle \bar{\mathbf{x}} \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle)^T + \langle (\bar{\mathbf{x}} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle)(\bar{\mathbf{x}} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle)^T \rangle, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где учтена некоррелированность $\mathbf{b} = \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle$ и $\langle (\bar{\mathbf{x}} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle) \rangle$. Таким образом, приходим к выражению

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbf{D} \quad (8.24)$$

где $\mathbf{D} = \langle (\bar{\mathbf{x}} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle)(\bar{\mathbf{x}} - \langle \bar{\mathbf{x}} \rangle)^T \rangle$ – дисперсионная матрица оценки $\bar{\mathbf{x}}$, а \mathbf{b} – её смещение. Выведенное соотношение отражает дилемму смещения и дисперсии, вследствие которой дополнительная фильтрация (см. прил. Д) оценки наименьших квадратов может привести к уменьшению общей дисперсии, но при этом в жертву приносится несмещённость.

Это относится ко всякого рода решениям обратных задач. В качестве примеров можно привести оценивание СПМ (1.28), где использование смещенной оценки АКФ или корреляционного окна приводит к уменьшению погрешности оценок спектра, ценой смещения. Введение регуляризующего члена в (8.22) или отсечение малых сингулярных чисел при псевдообращении (8.11) также вводит смещение в оценку, уменьшая дисперсию.

Всегда нужно четко представлять, из какой модели мы исходим. Какие параметры являются случайными, каковы априорные сведения об объекте. Если в модели (8.14) матрица связывает случайные величины, то это задача регрессии. Дополнительная информация, включенная в модель, влияет на математическое ожидание оценки. Получаемая в рамках такой модели несмещенная оценка будет выглядеть сдвинутой относительно среднего модели, не включающей дополнительную информацию, при этом она, вероятно, будет обладать меньшей дисперсией [102].

Оценивание погрешности решения обратной задачи, вообще говоря, затруднительно, поскольку трудно сказать, какая ошибка вводится вместе с дополнительной информацией. Даже если мы сможем оценить разброс (дисперсию) оценки в области, из которой она выбирается, вряд ли

удастся оценить ошибку, связанную с ограничениями на область значений, которые мы вводим применением регуляризации либо отсечением малых сингулярных чисел при псевдообращении Пенроуза.

8.10 Модели на основе интегральных уравнений Перейдём к рассмотрению моделей на основе интегральных уравнений. Рассмотрим пример, когда сигнал \mathbf{y} формируется линейным фильтром в присутствии шумов наблюдений. Модель наблюдений, в предположении стационарности входного сигнала, может быть записана в виде

$$\mathbf{y}(\xi) = \int_a^b \mathbf{h}(\xi - \xi') \mathbf{x}(\xi') d\xi' + \mathbf{u}(\xi), \quad (8.25)$$

где \mathbf{h} – ядро свёртки, ξ – координаты задачи. Обратная задача определения \mathbf{x} по наблюдениям (8.25) известна под названием деконволюции⁵, или обратной свёртки. На наш взгляд, более удачными названиями являются обратная фильтрация или восстановление сигнала (объекта).

Перейдём в спектральную область, считая шум стационарным,

$$\hat{\mathbf{y}}(\omega) = \mathbf{W}(\omega) \hat{\mathbf{x}}(\omega) + \hat{\mathbf{u}}(\omega). \quad (8.26)$$

Напомним, что передаточная функция⁶ $\mathbf{W}(\omega)$ задаёт собственные числа интегрального преобразования типа свёртки (см. гл. 4). Область частот с малыми абсолютным значением передаточной функции соответствует частотному диапазону, в котором АЧХ инверсного (обратного) оператора \mathbf{W}^{-1} велика. Именно в этом диапазоне компоненты обратного решения получают наибольшую погрешность, поскольку в реальных приложениях в нём сосредоточена существенная часть спектральной плотности шума $\hat{\mathbf{u}}(\omega)$, усиливающегося инверсным оператором. Для уменьшения неопределенности в этой области требуется фильтрация.

8.11 Корректирующая фильтрация Пантелеева Предположим, что спектры полезного сигнала $\hat{\mathbf{x}}(\omega)$ и шума $\hat{\mathbf{u}}(\omega)$ существуют, лежат в разных областях частот, и можно воспользоваться фильтром с передаточной функцией $\mathbf{W}_{\text{ft}}(\omega)$ и нулевым фазовым искажением для отделения первого слагаемого в (8.26) от второго. Тогда для решения обратной задачи следует использовать преобразование

$$\hat{\mathbf{x}}(\omega) = \mathbf{W}_{\text{corr}}(\omega) \hat{\mathbf{y}}(\omega), \quad (8.27)$$

⁵В общем случае рассматривают интегральные уравнения Фредгольма с нестационарным ядром $\mathbf{h}(\xi, \xi')$, либо уравнения Вольтерра, в котором $b = \xi' > a$ [25]. Мы ограничимся свёрткой – англ convolution.

⁶Здесь и ниже мы называем передаточной функцией АФЧХ как функцию ω .

где оператор

$$\mathbf{W}_{\text{corr}}(\omega) = \frac{\mathbf{W}_{\text{ft}}(\omega)}{\mathbf{W}(\omega)}$$

назовём корректирующим, т.е. одновременно фильтрующим и обращающим. Коррекцию можно интерпретировать как дополнение обращения фильтрацией, приводящей к уменьшению АЧХ обратного преобразования в области наибольшей неопределённости обратного решения. Т.о., используя для построения \mathbf{W}_{ft} априорные сведения о свойствах сигнала и шума, можно избежать неконтролируемого усиления шумов наблюдений и их проникновения в решение обратной задачи. Конечно, те частотные компоненты, которые полностью подавлены, восстановить не удастся. Важной, но трудной задачей является восстановление компонент, подавленных до уровня шумов.

В рамках подхода (8.27) можно воспользоваться оператором

$$\mathbf{W}_{\text{corr}}(\omega) = \frac{\mathbf{W}^*(\omega)}{\mathbf{W}^*(\omega)\mathbf{W}(\omega) + \hat{\mathbf{u}}(\omega)/\hat{\mathbf{x}}(\omega)},$$

здесь и далее звёздочкой $*$ обозначено сопряжение. Этот оператор приближается к инверсному оператору $\mathbf{W}^{-1}(\omega)$ там, где отношение спектров сигнала к шуму стремится к бесконечности. Если на всех частотах отношение сигнала к шуму постоянно и равно $1/\alpha$, мы приходим к выражению

$$\mathbf{W}_{\text{corr}}(\omega) = \frac{\mathbf{W}^*(\omega)}{\mathbf{W}^*(\omega)\mathbf{W}(\omega) + \alpha\mathbf{I}}, \quad (8.28)$$

которое может быть получено в рамках теории регуляризации (см. раздел 8.12).

◇ Пример 8.7): Корректирующая фильтрация предложена В.Л. Пантелеевым для восстановления значений силы тяжести из морских гравиметрических наблюдений [88], [100]. Она может использоваться для восстановления возбуждающих функций по наблюдениям движения полюса Земли (пример 8.12) и для других задач.

Пусть модель наблюдений задаётся дифференциальным уравнением первого порядка

$$T\dot{y}(t) + y(t) = x(t) + u(t),$$

где T – постоянная времени. Положим, что частотные диапазоны полезного сигнала $x(t)$ и шумов $u(t)$ различаются и могут быть разделены фильтром Пантелеева (4.13). В таком случае решение обратной задачи

получается фильтрацией наблюдений с корректирующим окном Пантелеева

$$h_{corr}(t) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}|t|} \left(\cos \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t + \sin \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}|t| - 2T \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \sin \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t \right). \quad (8.29)$$



8.12 Регуляризация Филлипса-Тихонова В 1963 г. для решения некорректных задач А.Н. Тихоновым⁷ был предложен алгоритм регуляризации⁸ [52]. Независимо от него в 1962 г. аналогичный подход был предложен Д.Л. Филлипсом, и этот метод решения обратных задач получил название *регуляризации Филлипса-Тихонова*. Суть подхода состоит в том, что для сужения класса обратных решений, возможных в рамках неопределённости модели и шумов, используется стабилизация решения посредством некоторого дополнительного слагаемого регуляризации. Метод пригоден для решения задач, в которых априорно известно, что решение принадлежит некоторому замкнутому множеству (компакту) и обладает определёнными свойствами гладкости. В методе регуляризации для поиска обратного решения $\bar{\mathbf{x}}$, удовлетворяющего априорным условиям и одновременно доставляющего минимум квадрату отклонения оценки $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}})$ от наблюдений, минимизируется *функционал Тихонова*

$$E(\mathbf{x}) = E_s(\mathbf{y}(\mathbf{x})) + \alpha E_r(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \rightarrow \min. \quad (8.30)$$

Первое слагаемое функционала соответствует стандартной ошибке

$$E_s(\bar{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ – расстояние в заданной метрике (норма отклонения), которое может быть выписано в виде скалярного произведения.

Второе слагаемое в (8.30) представляет собой *стабилизатор* E_r , умноженный на параметр регуляризации α . Это своего рода штраф за сложность модели, в котором положительная величина α регулирует плату за отклонение от априорных условий, а функция $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ задает эти априорные условия. Регуляризацию Тихонова можно воспринимать как условную задачу оптимизации с дополнительным условием $E_r \rightarrow \min$ и

⁷Подробнее о жизни А.Н. Тихонова, по инициативе которого был организован факультет ВМиК МГУ, можно узнать в [53]

⁸Термин регуляризация означает улучшение свойств решения. В анализе он также подразумевает овыщукление [2].

параметром Лагранжа α . Если требуется, чтобы функция $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ обладала определённого рода гладкостью, стабилизатор может быть записан как

$$E_r(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \|F_r(D)\mathbf{g}(\mathbf{x})\|^2,$$

где $F_r(D)$ – некоторый специальный дифференциальный оператор [57].

Пусть модель формирования данных является линейной и задаётся оператором \mathbf{A} , который может быть матричным (8.12) или интегральным (8.25)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u}.$$

Аргумент \mathbf{x} может представлять собой как вектор параметров (матричный случай), так и векторную функцию (интегральный случай). Решение обратной задачи требует нахождения оптимального по Тихонову решения $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$ и оценки $\bar{\mathbf{y}}_\alpha = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_\alpha$ как функции этого решения. Для этого необходимо найти минимум функционала (8.30) по \mathbf{x} .

Не ограничивая общности, можно выписать слагаемое стандартной ошибки в виде

$$E_s(\mathbf{x}) = ([\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}] \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}]),$$

где скобками (\cdot) обозначено скалярное произведение. К примеру, в пространстве $L_2^C(R)$ (интегрируемых с квадратом функций) оно принимает вид

$$E_s(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{y}(\xi) - \mathbf{A}\mathbf{x}(\xi)]^* \cdot [\mathbf{y}(\xi) - \mathbf{A}\mathbf{x}(\xi)] d\xi,$$

а в линейном векторном пространстве – вид

$$E_s(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}). \quad (8.31)$$

Для случайных сигналов следует ввести операцию математического ожидания.

Запишем стабилизатор в виде

$$E_r(\mathbf{x}) = (F_r(D)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty) \cdot F_r(D)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\infty)),$$

здесь \mathbf{x}_∞ – априорная модель, отклонение от которой минимизируется, $F_r(D)$ – некоторый дифференциальный оператор. Обозначение \mathbf{x}_∞ связано с тем, что при $\alpha \rightarrow \infty$ решение задачи определяется только слагаемым регуляризации, как если бы в функционале Тихонова вообще не было слагаемого стандартной ошибки. Наоборот, когда $\alpha \rightarrow 0$, влияние стабилизатора на решение становится пренебрежимо мало.

Априорные предположения о решении могут сводиться к предположению о классе функций, к которому оно принадлежит. Так, поиск принадлежащего L_2 решения, имеющего минимальную норму и соответствующего наблюдениям \mathbf{y} , приводит к стабилизатору вида $E_r = \|\mathbf{x}\|^2$. Поиск решения с минимальной нормой, принадлежащего пространству Соболева W_2^1 (функций, имеющих интегрируемые с квадратом первые производные), приводит к стабилизатору $E_r = (\|\mathbf{x}\|^2 + \|\dot{\mathbf{x}}\|^2)$.

Проведем вычисления на примере функций из $L_2^C(R)$. Стабилизатор для этого пространства имеет вид

$$E_r(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} [F_r(D)(\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}_{\infty}(\xi))]^* \cdot [F_r(D)(\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}_{\infty}(\xi))] d\xi.$$

При поиске оптимальной функции $\bar{\mathbf{x}}$ задача минимизации функционала Тихонова решается с использованием обобщённых производных (5.9). Равенство нулю первой вариации функционала Тихонова является необходимым, а положительность второй – достаточным условием для того, чтобы решение $\bar{\mathbf{x}}_{\alpha}$ доставляло минимум функционалу (8.30)

$$\bar{\mathbf{x}}_{\alpha} = \arg \min \{E(\mathbf{x})\}.$$

Вычислим первую вариацию функционала Тихонова (8.30), составленного из соответствующих слагаемых,

$$\left. \frac{dE(\mathbf{x} + \epsilon \delta \mathbf{x})}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) d\xi + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} F_r^*(D) F_r(D)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a) d\xi,$$

и приравняем её нулю

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha F_r^*(D) F_r(D)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\infty}) - \mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})] d\xi = 0.$$

С учётом того, что α – любое число из интервала $(0, \infty)$, и подынтегральное выражение должно обнуляться для всех ξ , получаем условие минимума

$$\alpha F_r^*(D) F_r(D) \mathbf{x} - \alpha F_r^*(D) F_r(D) \mathbf{x}_{\infty} = \mathbf{A}^* \mathbf{y} - \mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Из него получаем соотношение для оптимальной регуляризированной оценки

$$[\mathbf{A}^* \mathbf{A} + \alpha F_r^*(D) F_r(D)] \bar{\mathbf{x}}_{\alpha} = \mathbf{A}^* \mathbf{y} + \alpha F_r^*(D) F_r(D) \mathbf{x}_{\infty}. \quad (8.32)$$

Итоговое решение записывается в операторном виде

$$\bar{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\mathbf{A}^* \mathbf{y} + \alpha F_r^*(D) F_r(D) \mathbf{x}_\infty}{\mathbf{A}^* \mathbf{A} + \alpha F_r^*(D) F_r(D)}. \quad (8.33)$$

В случае, когда \mathbf{A} является линейным интегральным оператором и допускает обратное представление в виде обратной передаточной функции⁹, либо дифференциального оператора $F(D) = \mathbf{A}^{-1}$ (см. 4.6), выражение (8.32) можно записать в виде

$$L(D) \bar{\mathbf{x}}_\alpha = \varphi_\alpha(\mathbf{y}), \quad (8.34)$$

в обозначениях

$$\begin{aligned} L(D) &= 1 + \alpha F^*(D) F(D) F_r^*(D) F_r(D), \\ \varphi_\alpha(\mathbf{y}) &= F(D) \mathbf{y} + \alpha F^*(D) F(D) F_r^*(D) F_r(D) \mathbf{x}_\infty. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Решение дифференциального уравнения (8.34) можно записать в виде

$$\mathbf{x}_\alpha(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \varphi_\alpha(\mathbf{y}') d\mathbf{y}', \quad (8.36)$$

где функция Грина \mathcal{G} определяется из условия

$$L(D) \mathcal{G}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}').$$

Уравнение (8.36) представляет собой линейный фильтр и превращается в стационарном случае в уравнение свёртки.

Таким образом для случая интегрального оператора \mathbf{A} обратная задача сводится к решению интегрального уравнения. Метод регуляризации приводит интегро-дифференциальному выражению (8.33). Если допустить возможность представления $\mathbf{A} = 1/F(D)$, то из (8.34) становится видно, что помимо инверсной операции (дифференцирования наблюдений) $F(D) \mathbf{y}$ в правой части (8.34), метод регуляризации приводит к дополнительным слагаемым (8.35) и интегрированию (8.36) или сглаживанию решения (8.36). Значит решение можно интерпретировать как обращение оператора \mathbf{A} и одновременную дополнительную фильтрацию наблюдений. По аналогии с (8.27) такую операцию можно назвать регуляризующим фильтром.

⁹Такое представление возможно, если оператор невырожден и известны его собственные функции.

Вычисления для случая линейного векторного пространства ведут к выражению, по сути, не отличающемуся от (8.33). Сопряжение в этом случае будет эквивалентно транспонированию (8.31). Для линейных систем вида (8.14) выше предлагалось регуляризованное решение (8.22). Оно может быть получено из условия экстремума функционала Тихонова, если $\mathbf{x}_\infty = 0$ и стабилизатор $E_r = \|\mathbf{x}\|^2$ (см. пример 8.8). Несложно показать, что при $\alpha \rightarrow 0$ регуляризованное решение (8.22) стремится к нормальному псевдорешению. Регуляризация позволяет включить его в семейство непрерывных по параметру решений, в то время как нормальное псевдорешение, полученное псевдообращением Мура-Пенроуза, не является непрерывной функцией от матрицы системы. Всё же прямой необходимости во введении регуляризирующих функционалов для отыскания решения в \mathcal{L}^n нет. Этот аппарат, в основном, разработан для бесконечномерных пространств. Решение, тем не менее, может быть найдено с использованием (8.22) в процессе итераций с уменьшающимся значением параметра регуляризации, согласованным с обобщенной невязкой [64].

Подведём итог. При решении обратных задач необходима их коррекция, или наложение ограничений на класс возможных решений на основе априорных данных об объекте. Такие ограничения лучше вводить на основании реальных физических предположений. Мы рассмотрели псевдообращение Мура-Пенроуза, метод корректирующей фильтрации Пантелеева, метод регуляризации Тихонова. С уверенностью можно сказать, что все они основаны на чрезвычайно простых идеях, в основе которых лежат принципы фильтрации.

◇ Пример 8.8): Для системы (8.14), в которой модель задана приближенно матрицей \mathbf{C} , с погрешностями ε_C , а наблюдения отягчены белым шумом с единичной средней квадратической ошибкой (СКО) ($\sigma = 1$), поиск сопоставимого по точности регуляризованного решения $\bar{\mathbf{x}}$ ведется по итерационной схеме

$$\bar{\mathbf{x}}_\alpha = (\mathbf{C}^T \mathbf{C} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y},$$

где $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$ – решение, соответствующее значению параметра регуляризации α , из уменьшающейся последовательности. Значение α подбирается в соответствии с критерием обобщенной невязки [64]

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_\alpha\| = \sigma + \varepsilon_C \|\bar{\mathbf{x}}_\alpha\|,$$

где используется евклидова норма $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$.

Пример 8.9): Некорректная операция дифференцирования является обратной задачей по отношению к интегральной задаче свёртки.

Пусть последняя задана в виде интегрального стационарного оператора свёртки A , с ядром K

$$y = Ax = \int_a^b K(t - \tau)x(\tau)d\tau = K * x.$$

Тогда задача дифференцирования может быть регуляризована.

а) При поиске решения из L_2 минимизация (8.30) приводит к операторному выражению

$$x = \frac{A^*y}{A^*A + \alpha}.$$

В частотной области решение записывается в виде

$$\hat{x} = \frac{W^*\hat{y}}{W^*W + \alpha} = W_{reg}\hat{y},$$

где $W(\omega) = F\{K(t)\}$, – передаточная функция свёртки, а W_{reg} – регуляризирующий оператор, (см. (8.28)). Регуляризованное решение, в свою очередь, может быть переписано во временной области в виде свёртки наблюдений с регуляризирующим ядром $K_{reg}(t) = F^{-1}\{W_{reg}(\omega)\}$

$$\bar{\mathbf{x}} = K_{reg} * \mathbf{y}.$$

б) При поиске решения из W_1^2 условие минимума приобретает вид

$$\frac{dE}{dx} = (A^*A + \alpha)x - A^*x + \alpha\ddot{x} = 0,$$

и в частотной области решение записывается в виде

$$\hat{x} = \frac{W^*\hat{y}}{W^*W + \alpha(1 + \omega^2)} = W_{reg}\hat{y}.$$

Параметр регуляризации подбирается итерационно, согласованно с обобщенной невязкой [64]

$$p(\alpha) = \|y - Ax_\alpha\| - \sigma - \varepsilon\|x_\alpha\| \approx 0,$$

где σ – погрешность наблюдений, ε – погрешность задания оператора.

Пример 8.10): Интересным примером использования (8.36) являются т.н. нейронные сети регуляризации. После дискретизации (3) функции $\varphi(\alpha, \mathbf{y})$ (8.35), её отсчёты становятся координатами разложения по функциям Грина (8.36). Реализовать функции Грина можно на основе радиальных, а коэффициенты разложения – на основе линейных нейронов.

Регуляризованное решение можно вычислять с помощью нейронных сетей на основе радиальных базисных функций (см. раздел 7.7). ♦

► Пример 8.11): В работе [97] с использованием метода регуляризации определены координаты изображений квазара в известном астрономическом объекте Q2237+0305, носящем название “крест Эйнштейна”, и исследованы вариации блеска компонент этой гравитационной линзы. Подобные исследования позволяют оценить массу тёмной материи в линзирующей галактике и размеры горизонта событий сверхмассивной чёрной дыры в центре квазара [90].

Пример 8.12): Восстановление возбуждающих функций по движению полюса Земли (см. примеры 4.2, 6.2) является некорректно поставленной задачей (дифференцирования наблюдений). Для её решения необходима корректирующая процедура. Для выделения чандлеровского возбуждения, помимо того необходимо освободиться от годового колебания и от влияния компонент на соседних частотах, в т.ч. шумов. В [108] по данным с 1846 г. бюллетеня ЕОР С01 МСВЗ тремя способами выполнено восстановление чандлеровского возбуждения:

а) Методом ССА выделена чандлеровская компонента (пример 3.2), которая обработана фильтром Вилсона, аппроксимирующим инверсный к (4.12) оператор

$$\chi(t) = \frac{ie^{-i\pi f_c \Delta t}}{\sigma_c \Delta t} \left[m_{t+\frac{\Delta t}{2}} - e^{i\sigma_c \Delta t} m_{t-\frac{\Delta t}{2}} \right], \quad (8.37)$$

где $\Delta t/2$ – шаг между наблюдениями (0.05 года).

б) Годовая компонента подобрана МНК и вычтена из исходного ряда, после чего выполнена регуляризация в частотной области с использованием выражения (8.28)

$$W_{reg}(\omega) = \frac{W^*(\omega)}{W^*(\omega)W(\omega) + \alpha}, \quad (8.38)$$

где передаточная функция W дана выражением (4.12). Параметр регуляризации $\alpha = 500$ подобран так, чтобы результат был сопоставим с полученным методом а).

в) В частотной области применена корректирующая фильтрация Пантелеева (пример 8.7) с центром на чандлеровской частоте и параметром $f_0 = 0.04$ выбранным так, чтобы нижние и верхние частоты, включая годовую, подавлялись.

На рис. 8.3а представлены АЧХ трех названных методов. Результаты восстановления чандлеровского возбуждения представлены на рис. 8.3б

для x -координаты полюса (для y картина аналогична). Три метода дали схожие результаты. В полученном возбуждении наблюдаются амплитудные модуляции. В большинстве случаев чандлеровское возбуждение усиливается синхронно с замедлением скорости вращения Земли (увеличением продолжительности суток LOD), которое обусловлено усилением приливов в 18.6-летнем цикле регрессии узлов орбиты Луны. Это видно из сравнения кривой для возбуждения с 18.6-летней волной модели МСВЗ для зональных приливов в LOD, которая показана кривой вдоль оси абсцисс.

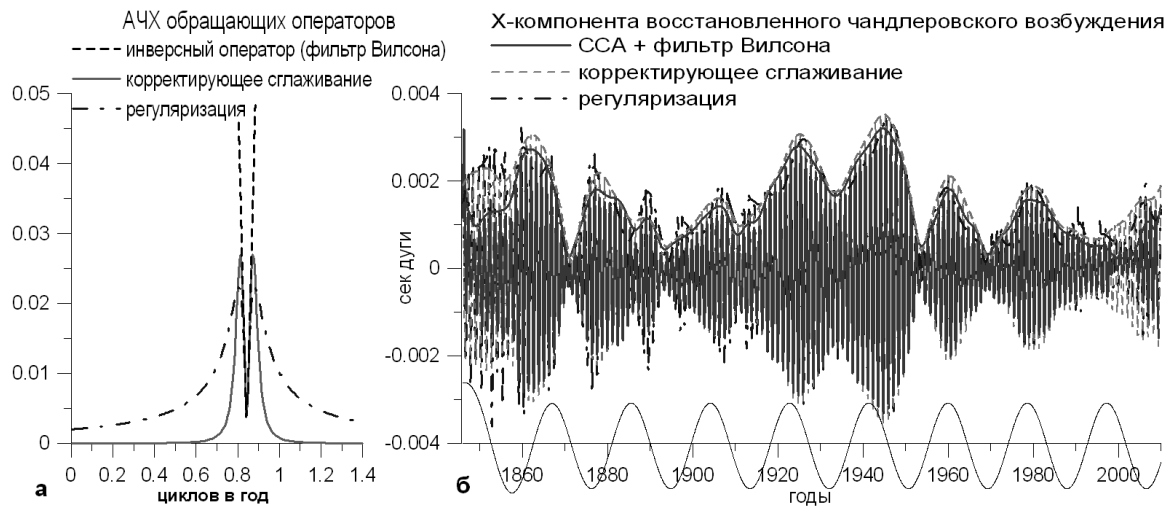


Рис. 8.3: АЧХ инверсных операторов (а) и результат восстановления чандлеровского возбуждения (б).

Упражнение 8-1): Рассмотрите систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + n_1 &= 4, \\ 3x_1 - 8x_2 + n_2 &= 14, \end{aligned} \quad (8.39)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(0, 1)$ – векторная случайная величина со стандартным нормальным распределением. И систему

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + n_1 &= 4, \\ 3x_1 + 8x_2 + n_2 &= 14, \end{aligned} \quad (8.40)$$

с теми же характеристиками шума [6]. Найдите меры обусловленности, обрисуйте ОДО задач, вычислите нормальные псевдорешения. Постройте их на плоскости. Вычислите псевдорешение, обнулив наименьшее собственное число в задаче с наихудшей обусловленностью. Предложите дополнительное уравнение, которое могло бы улучшить обусловленность.

Заключение

*Оставьте расти вместе то и другое до жатвы;
и во время жатвы я скажу жнецам: соберите прежде
плевелы и свяжите их в снопы, чтобы сжечь их,
а пшеницу уберите в житницу мою.*

Матфей 13:30

Фильтрация находит применение в самых разнообразных областях и, по сути, заключается в некотором действии над объектом, сохраняющем в нем лишь полезные составляющие. Мы рассмотрели математические подходы к фильтрации. Традиционно к ним относят интерполяцию, сглаживание, прогнозирование. Оценивание параметров некоторого объекта также можно считать задачей фильтрации. При распознавании образов, например, по космическим снимкам, на основании оценивания существенных параметров-признаков определяется класс объекта. Таким образом, граница между распознаванием, выделением сигнала из шумов, оцениванием и классификацией оказывается весьма условной, а фильтрация – одна из основных операций, необходимых для решения этих и множества других задач.

Временные ряды встречаются в геофизике, астрономии, медицине, биологии, экономике, социологии и др. Изложенные методы анализа временных рядов могут оказаться мощным инструментом в руках исследователя. Их корректное применение может служить для получения новой полезной информации и построения прогнозов. Нами рассматривались как скалярные, так и многомерные временные ряды. В большинстве случаев аргументом было время. Однако, им может быть практически любая переменная: координата, некоторая численная характеристика объекта, и др. Термин временной ряд скорее подразумевает дискретность, нежели то, что аргументом является именно время. Интересной возможностью является замена (параметризация) аргумента, в том числе и времени. Этому можно посвятить отдельное исследование.

Все методы анализа основаны на разложении сигнала в определенном базисе, а значит, на выделении корреляций. Определение каждой компоненты (координаты) – уже своего рода фильтрация. Корреляционный анализ широко используется. Сопоставление процессов позволяет

выявить их связь, однако корреляция сама по себе не может показать, что является причиной, а что следствием. Так (см. пример 1.5) на протяжении последнего миллиона лет таяние льдов в эпохи межледниковья сопровождалось увеличением концентрации углекислоты в атмосфере. Однако причинно-следственные связи здесь еще не до конца выяснены, что и вызывает споры по вопросам изменения климата. Для понимания причин необходимо физическое исследование, построение динамической модели, эксперимент. Следует помнить, что корреляционный анализ – полезный инструмент в рамках линейной теории. В нелинейных динамических системах (фильтрах) частоты входного сигнала могут преобразоваться в отличные от исходных частоты выходного сигнала [29].

Большая часть изложенных методов разработана в рамках линейной теории, наиболее развитой к настоящему времени. К сожалению, линейные задачи можно считать лишь первым, или даже нулевым приближением реальности. Ещё многое предстоит сделать по разработке нелинейных моделей и методов фильтрации.

Наблюдая за природой, никогда не перестаёшь находить примеры удивительно простого, и, вместе с тем, оптимального способа действий. Несмотря на то, что природа сопротивляется исследователю, всё же она честна и не меняет своих правил. Изучение живых организмов, безусловно, очень плодотворно, в том числе для построения новых моделей. Использование математических моделей мозга и эволюции уже нашло широкое применение в науке и технике. Любопытным примером фильтрации в природе является процесс рождения и гибели живых существ (естественный отбор), вероятно, направленный на решение некоторой оптимизационной задачи¹⁰.

Именно астрономия, с древности считавшаяся наукой, находящейся на вершине математического знания, является подходящей областью для проверки и развития математических теорий. Ведь, как заметил Н. Винер, проверка математических моделей на обществе и человеке не слишком результативна, т.к. условия всё время меняются. Если Галилей полагал, что язык природы – это язык математики, то фон Нейман считал, что язык мозга и язык математики отличаются. Но ведь человеческий мозг порожден природой! В нашем восприятии и понимании существует множество парадоксов, имеющих сходство с противоположностью между частотным и временным разрешением в принципе неопределенности Гейзенберга. Разрешить их предоставим будущему.

Обратные задачи заключаются в восстановлении причин явлений

¹⁰Впрочем, судя по всему, картина минимумов и максимумов в этой задаче непрерывно меняется.

по наблюдаемым следствиям. Эти важнейшие, и вместе с тем довольно сложные задачи могут быть решены только при наличии хорошей модели системы и дополнительных сведений об искомом объекте. При решении обратных задач фильтрация оказывается незаменимой, поскольку помогает отсеять неправдоподобные сценарии.

Компьютерные средства, появившиеся в XX в., дают существенные преимущества исследователям сегодняшнего дня. Известный математик Г.М. Фихтенгольц выделял четыре уровня понимания задачи, когда:

- 1) ничего не понимаешь: ни задачи, ни того, как ее решать
- 2) задача кажется элементарной
- 3) понимаешь трудности, связанные с решением задачи
- 4) можешь преодолеть трудности и проблемы.

Огромное расстояние между вторым и третьим уровнем быстрее всего можно преодолеть, используя компьютерное моделирование. Однако работа с современным компьютером порою напоминает увлекательную игру, от которой иногда всё же следует отвлекаться для того, чтобы осмыслить происходящее и оптимизировать стратегию научного исследования.

Материалы по данному курсу лекций доступны в интернете по адресу <http://lnfm1.sai.msu.ru/grav/russian/lecture/filtr/index.htm>

Остается только пожелать, чтобы слушатели осваивали изложенные приёмы на практике, приближаясь к наивысшей степени мастерства на пути к открытиям.

Приложения

*Крошка сын к отцу пришёл,
и спросила кроха:
- Что такое хорошо
и что такое плохо? -
В. Маяковский*

Приложение А

Выведем преобразование Фурье функции Гаусса [21]

$$f(t) = ae^{-bt^2} \quad a, b = \text{const} > 0.$$

Для этого запишем преобразование Фурье в виде

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2 - i\omega t} dt.$$

Преобразуем показатель по формуле

$$-bt^2 - i\omega t = -b \left(t^2 + \frac{i\omega}{b} t \right) = -b \left(t^2 + \frac{i\omega}{2b} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4b}.$$

Обозначив $z = \sqrt{b} \left(t^2 + \frac{i\omega}{2b} \right)$, получим

$$\hat{f}(\omega) = a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b \left(t^2 + \frac{i\omega}{2b} \right)^2} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} dt = \frac{a}{\sqrt{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} \int_{(L)} e^{-z^2} dz,$$

где (L) – прямая в комплексной плоскости, параллельная вещественной оси и проходящая через точку $z = i \frac{\omega}{2\sqrt{b}} = iy$. Покажем, что интеграл

$$I_y = \int_{(L)} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2} dx$$

на самом деле не зависит от x . Для этого продифференцируем I_y по параметру y

$$\frac{dI_y}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} e^{-(x+iy)^2} dx = -2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2} (x+iy) dx,$$

последний интеграл берется

$$\frac{dI_y}{dy} = ie^{-(x+iy)^2} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = ie^{-(x^2+y^2)} e^{-2ixy} \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = 0.$$

Итак $I_y = \text{const}$. Полагая $y = 0$ мы приходим к известному интегралу

$$\int_{(L)} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I.$$

Для его вычисления воспользуемся вспомогательным интегралом

$$K = \int_{(\Omega)} e^{-x^2-y^2} d\Omega,$$

где Ω – полная комплексная плоскость. Выписывая двукратный интеграл по $\Omega = dxdy$, видим, что

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2.$$

Интеграл K можно вычислить в полярных координатах по $d\Omega = \rho d\varphi d\rho$

$$K = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{e^{-\rho^2}}{-2} \Big|_0^{\infty} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi,$$

откуда

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

и, в результате,

$$\hat{f}(\omega) = a \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}.$$

Приложение Б

Дифференцирование интеграла с переменным верхним пределом и подынтегральной функцией, зависящими от параметра дифференцирования, осуществляется по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^{\psi(t)} f(u, t) du = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_a^{\psi(t+\Delta t)} f(u, t + \Delta t) du - \int_a^{\psi(t)} f(u, t) du \right).$$

Когда $\psi(t)$ – непрерывная (будем считать, монотонно возрастающая) функция, к примеру $\psi(t) = t$, выражение в правой части можно разбить на составляющие

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\psi(t)}^{\psi(t+\Delta t)} f(u, t + \Delta t) du + \int_a^{\psi(t)} f(u, t + \Delta t) du - \int_a^{\psi(t)} f(u, t) du \right)$$

и записать его с использованием первообразной $F(\cdot)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{F(\psi(t + \Delta t), t + \Delta t) - F(\psi(t), t + \Delta t)}{\Delta t} + \int_a^{\psi(t)} \frac{f(u, t + \Delta t) - f(u, t)}{\Delta t} du \right).$$

Поскольку производная первообразной – исходная функция f , переписав предел через производные, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^{\psi(t)} f(u, t) du = f(\psi(t), t) \frac{d\psi(t)}{dt} + \int_a^{\psi(t)} \frac{\partial f(u, t)}{\partial t} du.$$

Это выражение носит название обобщенной формулы Лейбница. С его помощью можно продифференцировать уравнение Винера-Хопфа (6.21).

Приложение В

Выведем выражение 6.26 для матричной импульсной характеристики. Для этого преобразуем ковариационную матрицу ошибок оптимальной фильтрации

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\varepsilon = & \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \rangle = \\ & \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^T \rangle - \langle \bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}^T \rangle - \langle \mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}^T \rangle + \langle \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}^T \rangle = \\ & \phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}} - \phi_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}} - \phi_{\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}} + \phi_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Поскольку

$$\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{h}(t_0, \tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau,$$

перепишем выражение для матрицы ошибок в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\varepsilon(t_2, t_0) = & \phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_2, t_0) - \phi_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(t_2, t_0) - \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{h}(t_0, \tau) \phi_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_2, \tau) d\tau + \\ & + \int_{-\infty}^{t_2} \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{h}(t_2, t_1) \mathbf{h}(t_0, \tau) \phi_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, \tau) d\tau dt_1 = \phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_2, t_0) - \phi_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(t_2, t_0) - \\ & - \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{h}(t_0, \tau) \left(\phi_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_2, \tau) - \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_1) \phi_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, \tau) dt_1 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Выражение в скобках равно нулю в силу того, что при оптимальной фильтрации выполняется уравнение Винера-Хопфа (6.17)

$$\phi_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_2, \tau) = \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_1) \phi_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, \tau) dt_1, \quad \text{при} \quad t_2 \geq \tau. \quad (9.3)$$

Таким образом,

$$\mathbf{D}_\varepsilon(t_2, t_0) = \phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_2, t_0) - \phi_{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(t_2, t_0). \quad (9.4)$$

Прежде чем выполнять дальнейшие преобразования подставим в уравнение Винера-Хопфа выражения для ковариационных функций, выведенных для случая некоррелированности сигнала и шума

$$\phi_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_2, t_0) = \phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_2, t_0) \mathbf{C}^T(t_0),$$

$$\phi_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(t_1, t_0) = \mathbf{C}(t_1)\phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_0)\mathbf{C}^T(t_0) + \mathbf{R}(t_1)\delta(t_1 - t_0).$$

С учетом правила интегрирования δ -функции и, т.к. $t_2 \geq t_0$,

$$\phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_2, t_0)\mathbf{C}^T(t_0) = \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_1)\mathbf{C}(t_1)\phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_0)\mathbf{C}^T(t_0)dt_1 + \mathbf{h}(t_0, t_0)\mathbf{R}(t_0).$$

Домножим (9.4) справа на $\mathbf{C}^T(t_0)$ и преобразуем, подставив полученный выше результат

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\varepsilon(t_2, t_0)\mathbf{C}^T(t_0) &= \phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_2, t_0)\mathbf{C}^T(t_0) - \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_1)\phi_{\mathbf{y}\mathbf{x}}(t_1, t_0)\mathbf{C}^T(t_0)dt_1 = \\ &= \phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_2, t_0)\mathbf{C}^T(t_0) - \int_{-\infty}^{t_2} \mathbf{h}(t_2, t_1)\mathbf{C}(t_1)\phi_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_0)\mathbf{C}^T(t_0)dt_1 = \mathbf{h}(t_0, t_0)\mathbf{R}(t_0). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Таким образом, итоговое выражение для импульсной характеристики в момент t_0 приобретает вид

$$\mathbf{h}(t_0, t_0) = \mathbf{D}_\varepsilon(t_2, t_0)\mathbf{C}^T(t_0)\mathbf{R}^{-1}(t_0).$$

Нам, в основном, будет интересна матрица импульсной характеристики для случая $t_2 = t_0$

$$\mathbf{h}(t_0, t_0) = \mathbf{D}_\varepsilon(t_0, t_0)\mathbf{C}^T(t_0)\mathbf{R}^{-1}(t_0).$$

Приложение Г

Статистические подходы к решению обратных задач можно разделить на классический и байесовский [24], [50]. Выбор подхода зависит от того, знаем ли мы что-либо об исходном объекте, например, что он непрерывен или положителен. От априорной информации зависит, удастся ли справиться с неустойчивостью и множественностью решений обратной задачи.

Томас Симпсон (1710-1761), работавший ткачом и дававший частные уроками математики, опубликовал в 1755 г. статью, в которой был представлен метод нахождения неизвестного детерминированного параметра x_0 на основе вероятностной модели случайной величины Y и её наблюдаемой реализации $y_0(x_0)$. Этот метод позволяет по заданной модели формирования данных в виде плотности распределения $p_Y(y|x_0)$ получить оценку \bar{x}_0 – случайную функцию случайных данных.

В 1763 г., уже после смерти священника Томаса Байеса (1702-1761), была опубликована его теорема

$$p_X(x|y) = \frac{p_X(x)p_Y(y|x)}{p_Y(y)}, \quad (9.6)$$

позволяющая по априорной вероятности $p_Y(y|x)$ найти апостериорную $p_X(x|y)$. Для использования Байесовского подхода необходимо знать:

а) Априорную плотность распределения $p_Y(y|x)$, которая определяется моделью формирования данных. В случае модели (8.12) плотность вероятности измерений \mathbf{y} при параметрах объекта \mathbf{x} может быть рассчитана, если известна плотность вероятности шума \mathbf{n} .

б) Плотность распределения параметров объекта $p_X(x)$.

в) Плотность распределения $p_Y(y)$, которую можно получить интегрированием числителя (9.6) по всем x .

Если все три плотности известны, несложно вычислить апостериорную плотность $p_X(x|y)$, которую можно использовать для нахождения точечной оценки \bar{x} как среднего или медианы распределения, а также интервала разброса \bar{x} для соответствующего уровня достоверности.

Функция $p_Y(y|x)$ представляет собой априорную условную плотность распределения. После того, как выполнены наблюдения y_0 , эта же функция, рассматриваемая уже как функция неизвестного x , носит название функции правдоподобия $L(y_0|x)$. Всегда положительную функцию плотности вероятности можно прологарифмировать и перевести произведение в сумму с использованием монотонной функции логарифма.

Прологарифмируем выражение (9.6)

$$\ln[p_X(x|y)] = \ln[p_X(x)] + \ln[p_Y(y|x)] - \ln[p_Y(y)].$$

Для конкретных наблюдений можно записать это выражение через логарифм функции правдоподобия

$$\ln[p_X(x|y_0)] = \ln[p_X(x)] + \ln[L(y_0|x)] + \text{const.}$$

Введём в рассмотрение функцию $\Omega(x, \bar{x})$, определяющую потери при получении оценки \bar{x} для истинного значения объекта x и имеющую минимум в точке $x = \bar{x}$. Функцией потерь может быть, к примеру, квадрат ошибки. Интегрируя функцию потерь с плотностью вероятности $p_Y(y|x)$ по всем y , получим условный риск, а с плотностью вероятности $p_X(x)$ по всем x – средний риск. Используя формулу Байеса можно получить оценку, минимизирующую средний риск – оценку минимального риска. Отметим, что байесовская процедура используется при оптимальной фильтрации Винера-Колмогорова и Калмана-Бьюсси [8], [29].

Как правило, информация о $p_X(x)$ наиболее труднодоступна. Предположим, что она неизвестна. В этом случае часто используют т.н. гипотезу Байеса – считают величину x равномерно распределённой в области возможных значений. Именно гипотеза Байеса вызывает споры. На каком основании считать равномерно распределённым x , а не e^x или x^2 , которые также неизвестны? Данная гипотеза подменяет теорию вероятностей субъективной теорией вероятностей [50].

Гипотеза Байеса решает проблему нехватки информации введением предположения о том, что объект x – из заданного вероятностного ансамбля, из совокупности объектов с заданными свойствами. Примерами использования этой гипотезы могут служить *метод максимальной энтропии* (ММЭ) и метод регуляризации. В последнем, при неизвестной $p_X(x)$ предполагают, что

$$\ln[p_X(x|y_0)] = \ln[p_Y(y_0|x)] + \alpha E_r(x),$$

где α – параметр, а $E_r(x)$ – функционал, определяющий гладкость решения. Таким образом ищется компромисс между точностью описания эксперимента и гладкостью решения. Задача третьего слагаемого – в устранении резких осцилляций неустойчивого обратного решения.

В *методе максимального правдоподобия*¹¹ (ММП) ищут оценку \bar{x} , доставляющую $L(y_0|x)$ максимум. При этом наблюдения y_0 принимают

¹¹ММП не следует путать с ММЭ.

за наиболее вероятные. Для использования метода правдоподобия нет необходимости знать $p_Y(y)$, $p_X(x)$ в (9.6) или функцию потерь $\Omega(x, \bar{x})$.

Взятый с обратным знаком логарифм функции правдоподобия

$$J(y_0|x) = -\ln[L(y_0, x)]$$

представляет собой информацию в смысле Шеннона. Среднее значение информации по случайным наблюдениям

$$E(x) = \langle J(y|x) \rangle = \int_Y -\ln[L(y, x)] L(y, x) dy$$

представляет собой энтропию x . На практике выборочные пространства дискретны и интегрирование заменяется суммированием.

При большом числе параметров и малом числе наблюдений ММП-оценка может быть неоптимальна. Не следует забывать, что статистики $J(y|x)$ и $L(y|x)$ – также случайные функции наблюдений y . Имея одно наблюдение y_0 , мы имеем единственную реализацию случайной величины Y . ММП требует экстремального соответствия $L(y_0|x)$ и $J(y_0|x)$ объекту x . Ясно, что единичные реализации этих статистик не представительны и их значения могут существенно отклоняться от истинных. Значение $J(y_0|x)$ скорее будет находиться вблизи среднего значения $J(y|x)$, чем вблизи минимального ($L(y_0|x)$), соответственно, – максимального). Слишком хорошее объяснение данных противоречит их статистическим свойствам.

Когда число наблюдений велико и выборка наблюдений представительна, ММП вполне пригоден. К примеру, для часто используемого (8.12) m -мерного нормального априорного закона распределения

$$p_Y(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{Q}|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right], \quad (9.7)$$

шенноновская информация приобретает вид

$$J(y_0|x) = \frac{1}{2} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \text{const},$$

и требование максимума правдоподобия равносильно требованию минимума взвешенной суммы квадратов невязок

$$(\mathbf{y}_0 - \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{a}) \longrightarrow \min.$$

Являясь основным критерием МНК (8.13), это условие можно интерпретировать также как минимизацию информации, содержащейся в остаточных разностях. Впрочем МНК не требует знания закона распределения ошибок (см. раздел 8.9).

Выяснить максимальную точность оценки неизвестных параметров позволяет информационная матрица Фишера, элементы которой в общем случае могут быть записаны как

$$F_{ik} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \ln[p(\mathbf{y}_0|\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial x_k} \ln[p(\mathbf{y}_0|\mathbf{x})] \right\rangle .$$

Отметим, что мера информации по Фишеру отличается от меры по Шеннону. При весьма общих условиях (см. [50]) положительно определённая матрица Фишера может быть записана как

$$\mathbf{F} = \left\langle -\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \ln[p(\mathbf{y}_0|\mathbf{x})] \right\rangle .$$

В МНК она равна $\mathbf{H}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H}$, см. раздел 8.6. Для нормального распределения (9.7) ОДО задачи (8.12) приобретает вид m -мерного эллипсоида.

Если остаточные разности выходят за границу 3σ , т.е. наблюдения отягчены выбросами, необходимо использовать *робастное* оценивание, обеспечивающее бóльшую устойчивость [61], [28]. Для этого можно воспользоваться критерием минимума не квадрата а модуля отклонений. Поскольку этот критерий не дифференцируем, необходимо итерационно решать задачу линейного программирования (см. раздел 7.15). Можно воспользоваться ММП, предположив, что при малых погрешностях ε закон распределения нормален

$$p(\varepsilon) = \frac{\beta}{\sigma} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right), \quad \varepsilon \leq \sigma a,$$

а по краям имеет вид распределения Лапласа

$$p(\varepsilon) = \frac{\beta}{\sigma} \exp\left(-\frac{a}{\sigma} \left(|\varepsilon| - \frac{a\sigma}{2}\right)\right), \quad \varepsilon > \sigma a.$$

В ММП могут использоваться и другие модели распределений.

Приложение Д

Отсечение малых собственных чисел при псевдообращении Мура-Пенроуза (8.4) есть не что иное, как фильтрация путём домножения спектра матрицы на прямоугольное окно. Более гладкая фильтрация может дать лучшие результаты.

Будем искать МНК-оценку вектора $\bar{\mathbf{x}}$ модели (8.12), близкую к истинному значению, и способ фильтрации, дающий устойчивую оценку с наименьшей СКО (9.7).

Для этого воспользуемся моделью (8.20) в спектральной области и будем искать оптимальный фильтр Винера, минимизирующий средний квадрат отклонения оценки вектора параметров от истинного значения. Разместим весовые коэффициенты фильтра по главной диагонали матрицы $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$. Взвешенную оценку получим как

$$\bar{\mathbf{x}}_w = \mathbf{V}\mathbf{W}\bar{\mathbf{p}}.$$

На основании (8.20), (8.21), (8.24) эта оценка будет иметь матрицу рассеяния

$$\mathbf{\Omega}_w = \mathbf{D}_w + \mathbf{b}_w \mathbf{b}_w^T,$$

в которой смещение и дисперсия определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_w &= \langle \bar{\mathbf{x}}_w \rangle - \langle \mathbf{x} \rangle = \mathbf{V}\mathbf{W} \langle \bar{\mathbf{p}} \rangle - \mathbf{V}\mathbf{p} = \\ &= \mathbf{V}\mathbf{W} \langle \mathbf{p} + \mathbf{S}^{-1}\zeta \rangle - \mathbf{V}\mathbf{p} = \mathbf{V}(\mathbf{W} - \mathbf{I}_n)\mathbf{p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_w &= \langle (\bar{\mathbf{x}}_w - \langle \mathbf{x}_w \rangle)(\mathbf{x}_w - \langle \mathbf{x}_w \rangle)^T \rangle = \\ &= \mathbf{V}\mathbf{W}\mathbf{S}^{-1} \langle \zeta \zeta^T \rangle \mathbf{S}^{-1}\mathbf{W}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{W}^2\mathbf{V}^T. \end{aligned}$$

Тогда матрица рассеяния может быть записана в виде

$$\mathbf{\Omega}_w = \mathbf{V}[\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{W}^2 + (\mathbf{W} - \mathbf{I}_n)\mathbf{p}\mathbf{p}^T(\mathbf{W} - \mathbf{I}_n)^T]\mathbf{V}^T,$$

в котором второй член обусловлен смещением. Удачно выбрав \mathbf{W} можно уменьшить дисперсию \mathbf{D}_w , т.е. отклонение оценки от объекта. Компоненты с большой дисперсией, соответствующие малым собственным числам, неинформационны, их необходимо отфильтровать.

Будем минимизировать сумму квадратов отклонения фильтрованной оценки от истинной

$$\text{tr}(\mathbf{\Omega}_w) = \text{tr}(\mathbf{D}_w) + \mathbf{b}_w^T \mathbf{b}_w \longrightarrow \min,$$

$$\mathbf{tr}(\mathbf{\Omega}_w) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{w_k^2}{\lambda_k} + (1 - w_k)^2 p_k^2 \right).$$

Здесь при вычислениях использован тот факт, что след матрицы не меняется при повороте системы координат. Вычислим первую и вторую производные по w_k , w_l

$$\dot{\mathbf{tr}}_k(\mathbf{\Omega}_w) = \frac{2w_k}{\lambda_k} - 2(1 - w_k)p_k^2,$$

$$\ddot{\mathbf{tr}}_{kl}(\mathbf{\Omega}_w) = 2\delta_{kl} \left(\frac{1}{\lambda_k} + p_k^2 \right).$$

Здесь δ_{kl} – символ Кронекера. Вторая производная всюду неотрицательна, следовательно условие минимума выполняется, когда первая производная равна нулю, т.е. когда

$$w_k = \frac{\lambda_k p_k^2}{1 + \lambda_k p_k^2},$$

что и определяет коэффициенты фильтра. При больших собственных числах λ_k и канонических координатах p_k , когда $\lambda_k \gg p_k^{-2}$, веса w_k близки к единице и плавно приближаются к нулю с уменьшением λ_k и p_k .

Так строится фильтр Винера для собственных чисел, при применении которого уменьшается влияние уравнений, вносящих наибольшую неопределённость в решение обратной задачи [50].

Приложение Е

Метод наименьших квадратов с ошибками в матрице в англоязычной литературе именуют Total Least Squares (TLS) [82]. Будем искать оценку вектора $\bar{\mathbf{X}}_{tls}$ в модели

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} - \mathbf{N} &= (\mathbf{C} + \delta\mathbf{C})\mathbf{X}, \\ <vec(\mathbf{N}, \delta\mathbf{C})> = \mathbf{0}, \quad \text{cov}(\mathbf{N}) = \mathbf{I}_N, \quad \text{cov}(\delta\mathbf{C}) = \mathbf{I}_C, \end{aligned} \quad (9.8)$$

отличающейся от (8.14) размерностью и тем, что предполагаются ошибки в матрице \mathbf{C} . Размерность \mathbf{C} и $\delta\mathbf{C}$ — $m \times n$, матрицы наблюдений \mathbf{Y} и шумов \mathbf{N} — $m \times d$, вектора неизвестных \mathbf{X} — $n \times d$, где $n < m$. Операция векторизации $vec(\cdot)$ в (9.8) превращает матрицу в вектор последовательным размещением столбцов матрицы друг под другом.

Для получения решения следует минимизировать форму

$$E = vec(\mathbf{N})^T vec(\mathbf{N}) + vec(\delta\mathbf{C})^T vec(\delta\mathbf{C}) = tr(\mathbf{N}^T \mathbf{N}) + tr(\delta\mathbf{C}^T \delta\mathbf{C}) \rightarrow min.$$

Доказана теорема [98], согласно которой решение можно получить с использованием SVD-разложения блочной матрицы

$$[\mathbf{C} \ \mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ n+d & m-(n+d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T = \mathbf{U}_1 \mathbf{S} \mathbf{V}^T,$$

где

$$\mathbf{S} \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ d \end{matrix},$$

в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}_{tls} &= -\mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_{22}^{-1}, \\ [\bar{\mathbf{C}} \ \bar{\mathbf{Y}}] &= \mathbf{U}_{11} \mathbf{S}_1 [\mathbf{V}_{11}^T \mathbf{V}_{21}^T], \\ E &= tr(\mathbf{S}_2^2). \end{aligned} \quad (9.9)$$

При условии невырожденности \mathbf{V}_{22} .

На рис. 9.4 из работы [98] представлено сравнение стандартного МНК-решения и TLS-решения в простейшем случае $m = 20$, $n = d = 1$, $[\mathbf{C} \ \mathbf{Y}] = [a, b]$. Используя результаты раздела 8.7, записывая матрицу поворота к системе координат главных компонент в двумерном случае как

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix},$$

получаем решение для наклона прямой в методе TLS в виде $\bar{x}_{tls} = \text{tg}(\alpha)$. Т.о. TLS-решение получается выделением главных полуосей облака рассеяния точек и проведением прямой, ортогональной наименьшей полуоси, связанной с наименьшим сингулярным числом матрицы \mathbf{S} , см.(8.21). TLS допускает естественное обобщение на случай плохо обусловленных систем, поскольку отсечение малых и нулевых сингулярных чисел в рамках такого подхода не составляет затруднений.

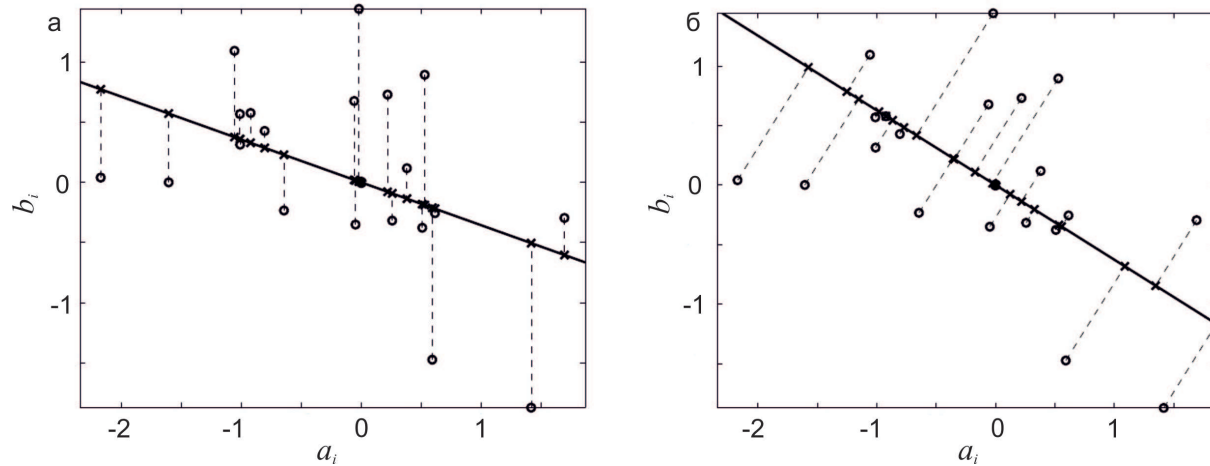


Рис. 9.4: Прямая, наклон которой подобран решением МНК (а) и решением TLS (б) [98].

Методика итерационного TLS-решения с использованием минимизации функции Лагранжа для E и методика решения в вырожденном случае с использованием регуляризации Тихонова рассмотрены в [103].

Сокращения

АР – авторегрессия

АРСС – процесс авторегрессии и скользящего среднего

АКФ – автокорреляционная функция

АФЧХ – амплитудно-фазовая частотная характеристика

АЧХ – амплитудно-частотная характеристика

БИХ – фильтр с бесконечной импульсной характеристикой

БПФ – быстрое преобразование Фурье

ДПФ – дискретное преобразование Фурье

КИХ – фильтр с конечной импульсной характеристикой

КМА – кратно-масштабный анализ

ЛРФ – линейная рекуррентная формула

МГК – метод главных компонент

МГЭИК – Межправительственная группа экспертов

по изменению климата

ММЭ – метод максимальной энтропии

ММП – метод максимального правдоподобия

МНК – метод наименьших квадратов

МСВЗ – Международная служба вращения Земли и систем отсчёта

МССА – многоканальный сингулярный спектральный анализ

НС – нейронные сети

ОДО – область допустимых оценок

ПОЗ – параметры ориентации Земли

СКО – средняя квадратическая ошибка

СВАН – спектрально-временной анализ

СПМ – спектральная плотность мощности

СС – скользящее среднее

ССА – сингулярный спектральный анализ

ТФКП – теория функций комплексной переменной

ФРТ – функция рассеяния точки

ФЧХ – фазово-частотная характеристика

ЭОФ – эмпирические ортогональные функции

AAM – Atmospheric Angular Momentum

LOD – Length of day

OAM – Oceanic Angular Momentum

TLS – Total Least Squares

SVD – Singular Value Decomposition

Список литературы

Русскоязычные источники

- [1] Александров П.С. Введение в теорию групп. М., Наука, 1980
- [2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин В.М. Оптимальное управление. М., Физматлит, 2005
- [3] Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., Мир, 1976
- [4] Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. М., Наука, 1989
- [5] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М., ВИНТИ, 1985
- [6] Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М., Наука, 1983
- [7] Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М., Мир, 1980
- [8] Ван Трис Г., Теория обнаружения, оценок и модуляции. М., Советское радио, 1972
- [9] Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твёрдого тела. М., Физматлит, 2007
- [10] Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М., Наука, 1983
- [11] Витязев В.В. Вейвлет-анализ временных рядов. СПбГУ, 2001, <http://www.astro.spbu.ru/astro/publications/vityazev/wavelet.pdf>

-
- [12] Витязев В.В. Анализ неравномерных временных рядов, учебное пособие. СПбГУ, 2009,
<http://www.astro.spbu.ru/astro/publications/vityazev/uneven.pdf>
 - [13] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., Наука, 1988
 - [14] Голяндина Н.Э. Метод “Гусеница-SSA”: анализ временных рядов; прогноз временных рядов. СПб., ВВМ, 2004
 - [15] Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Некорректные задачи астрофизики. М., Наука, 1985
 - [16] Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. СПб., Наука, 1997
 - [17] Дженкинс Г. Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения 1,2. М. Мир, 1971
 - [18] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.-Ижевск, РХД, 2004
 - [19] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., Наука, 1978
 - [20] Зорич В.А. Математический анализ, М., Наука, 1981
 - [21] Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. М., Наука, 1972
 - [22] Калман Р., Фолб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., УРСС, 2004
 - [23] Кей С.М., Марпл С.Л. Современные методы спектрального анализа. ТИНЭР, т. 69, N 11, стр. 5, 1981
 - [24] Кендалл М. Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973
 - [25] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976
 - [26] Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Постмаркет, М., 2000
 - [27] Кудрявцев В.Б., С.В. Алёшин, А.С. Подколзин Введение в теорию автоматов. М., Наука, 1985

- [28] Кянев А.В., Лукин Г.В. Математические методы обработки неопределённых данных. М., Физматлит, 2006
- [29] Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., Радио и связь, 1989
- [30] Лейзер Д. Создавая картину Вселенной. М., Мир, 1988
- [31] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М., Наука, 1974
- [32] Лукаш Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М., Финансы и статистика, 2003
- [33] Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р.Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Издательство иностранной литературы, М., 1958
- [34] Любушин А.А. Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. М., Наука, 2007
- [35] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М., Мир, 2005
<http://blanche.polytechnique.fr/~mallat/book.html>
- [36] Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М., Мир, 1990
- [37] Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. М., Финансы и статистика, 2004
- [38] Пантелеев В.Л. Математическая обработка наблюдений, курс лекций. М., МГУ, 2001
<http://lnfm1.sai.msu.ru/grav/russian/lecture/mon/mon.htm>
- [39] Пантелеев В.Л. Наблюдение и управление динамическими объектами, курс лекций. М., МГУ, 2001
<http://lnfm1.sai.msu.ru/grav/russian/lecture/nudo/nudo.htm>
- [40] Пантелеев В.Л. Основы морской гравиметрии. М., Недра, 1983
- [41] Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., ГИТТ, 1957
- [42] Рабинер П., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., Мир, 1978

- [43] Рангайян Р.М. Анализ биомедицинских сигналов. М., Физматлит, 2007, <ftp://ftp.ieee.org/uploads/press/rangayyan/>
- [44] Садовничий В.А. Теория операторов. М., Дрофа, 2001
- [45] Серебрянников М.Г. Гармонический анализ. М.-Л., Гостехиздат, 1948
- [46] Свешников А.Г., Тихонов А.Н., Теория функций комплексной переменной, М., Наука, 1970
- [47] Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, М., МГУ, 1966
- [48] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М., Физматлит, 2008
- [49] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М., МФТИ, 2000
- [50] Теребиж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач. М., Физматлит, 2005
- [51] Тихнов В.И. Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М., Радио и связь, 2004
- [52] Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М., Физматлит, 1995
- [53] Тихонова А.А., Тихонов Н.А. Андрей Николаевич Тихонов, М., Собрание, 2006
- [54] Фомин В.Н. Оптимальная и адаптивная фильтрация. СПбГУ, 2003
- [55] Форсайт Дж., Малькольм М., Мюллер К. Машинные методы математических вычислений. М., Мир, 1980
- [56] Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. М., Бином, 2008
- [57] Хайкин С. Нейронные сети, полный курс. М.-СПб.-Киев, Вильямс, 2006
- [58] Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации в теории управления. СПб., Питер, 2004

- [59] Чуи К. Введение в Вейвлеты, М., Мир, 2001
- [60] Ширяев А.Н. Вероятность 1,2. М., МЦМНО, 2007
- [61] Шурыгин А.М. Прикладная стохастика: робастность, оценивание, прогноз. М., Финансы и статистика, 2005
- [62] Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М., Мир, 1975
- [63] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., УРСС, 1998
- [64] Ягола А.Г., Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи геофизики, курс лекций. М., 2008

Англоязычные источники

- [65] Artificial neural nets and genetic algorithms. Wein, Springer, 2003
- [66] Bremaud Pierre. Mathematical principles of signal processing: Fourier and wavelet analysis. NY., Springer, 2002
- [67] Gencay R., Selcuk F., Whitcher B., An introduction to wavelets and other filtering methodes in finance and economics. San Diego, Acad. press, 2002
- [68] Gibson G. Nonlinear automatic control. NY., McGraw-Hill, 1963.
- [69] Gubbins G. Time Series Analysis and Inverse Theory for Geophysicists. Cambrige univ. press, 2004
- [70] Howell T. Non-linear time series: A dynamical system approach. Oxford, 2004
- [71] Jekeli C. GS 875: Spectral Methods in Gravimetric Geodesy. OSU, Columbus, 2007, <http://geodesy.geology.ohio-state.edu/course/gs875.2007/>
- [72] Jolliffe I.T. Principal component analysis. Springer, 2002
- [73] Keller W. Wavelets in Geodesy and Geodynamics. De Gruyter, 2004

- [74] Mesco A. Digital filtering: Applications in geophysical exploration for oil. Pitman advanced publication program, Academiai Kiado, Budapest, 1984
- [75] Oppenheim Alan V., Ronald W. Schafer, Digital Signal Processing. Prentice hall signal processing series., NJ., Prentice Hall, 2009.
- [76] Percival D.B. Spectral analysis for physical applications. Cambridge univ. press, 1993
- [77] Percival D.B. Wavelet methods for time series analysis. Cambridge univ. press, 2000
- [78] Priestley M.B. Non-linear and non-stationary time series analysis. London acad. press, 1988
- [79] Saaty T.S., Bram J. Nonlinear mathematics. Dover publ., NY, 1964
- [80] Schaffrin B., Adjustment Notes, Advanced Adjustment Notes, Lectures compiled by K. Snow, OSU, Columbus, 2009
- [81] Strang G., T. Nguyen Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge, 1996
- [82] Van Huffel S. and Lemmerling Ph. (edt.) Total least squares and errors-in-variables modeling: analysis, algorithms and applications. London, Kluwer Academic, 2002
- [83] Walden A.T., Guttorp P. Statistics in the environmental & Earth sciences, NY.-Toronto, John Wiley & sons, 1992

Список дополнительных статей с примерами

- [84] Гурштейн А.А. (ред.) Историко-астрономические исследования. Вып. XX, стр. 336-372. М., Наука, 1988
- [85] Зотов Л. В. Вращение Земли: анализ вариаций и их прогнозирование, диссертация, М., ГАИШ МГУ, 2005,
<http://lnfm1.sai.msu.ru/~tempus/disser/index.htm>
- [86] Козлов В.Н. Элементы математической теории зрительного восприятия М., МГУ, 2001.

- [87] Кудрявцева Н.С. Моделирование возмущающих ускорений при гравиметрических наблюдениях на море, курсовая работа. ГАИШ МГУ, М., 2007
- [88] Пантелеев В.Л., Левицкая З.Н., Чеснокова Т.С., Логинов А.В. Моделирование возмущающих ускорений опоры при гравиметрических исследованиях на море. Вестник Московского университета Серия 3. Физика. Астрономия. N 3, 2003
- [89] Тутуков А.А. Краски диктует жизнь. Мытищи, 2010, <http://www.pereplet.ru/avtori/tutukov.html>
- [90] Черепашук А.М. Гравитационное микролинзирование и проблема скрытой массы. М., СОЖ, 2001, <http://www.astronet.ru/db/msg/1168050>
- [91] Beale Mark Hudson, Martin T. Hagan, Howard B. Demuth, Matlab Neural Network Toolbox User's Guide. 2010, <http://www.mathworks.com/help/toolbox/nnet/index.html>
- [92] Donner Reik V., Susana M. Barbosa (eds.) Nonlinear Time Series Analysis in the Geosciences. Springer, 2008
- [93] Ghil M. et al. Advanced spectral methods for climatic time series, Reviews of geophysics 40, 1, 2001
- [94] IPCC Assessment Report 2007, AR 4, www.ipcc.ch/publications_and_data/ar4/wg1/en/contents.html
- [95] Kalarus M., H. Schuh, W. Kosek, O. Akyilmaz, Ch. Bizouard, D. Gambis, R. Gross, B. Jovanovic, S. Kumakshev, H. Kutterer, L. Ma, P. J. Mendes Cerveira, S. Pasynok, L. Zotov Achievements of the Earth Orientation Parameters Prediction Comparison Campaign. Journal of Geodesy, Volume 84, Number 10, pp. 587-596, 2010
- [96] Klees Roland, Roger Haagmans (eds.) Wavelets in Geosciences. Springer, 2000
- [97] Koptelova E., Shimanovskaya E., Artamonov B., Yagola A. Analysis of the Q2237+0305 light-curve variability with regularization technique. Mon. Not. R. Astron. Soc. 381, pp. 1655–1662, 2007
- [98] Markovsky I. and S. Van Huffel, Overview of total least squares methods. Signal Processing, vol. 87, pp. 2283–2302, 2007

- [99] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim, Jean-Michel Poggi, Wavelet Toolbox 4 User's Guide. 2010,
<http://www.mathworks.com/help/toolbox/wavelet/index.html>
- [100] Panteleev V.L., Chesnokova T.S. Problem deconvolution in inertial gravimetry. Moscow University Physics Bulletin, Vol. 66, N 1., 2011
- [101] Rodin A.E., The optimal filters for the construction of the ensemble pulsar time. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 387:1583-1588, arXiv:0807.1255, 2008
- [102] Schaffrin B. On Penalized Least-Squares: Its Mean Squared Error and a Quasi-Optimal Weight Ratio. Recent Advances in Linear Models and Related Areas Essays in Honour of Helge Toutenburg. Springer, 2008
- [103] Schaffrin B., Snow K., Total Least-Squares regularization of Tykhonov type and an ancient racetrack in Corinth. Linear Algebra and its Applications Vol. 432, Issue 8, pp. 2061-2076, 1 April 2010
- [104] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence, Dynamical Systems and Turbulence, Springer-Verlag, NY., pp. 366-381, 1981
- [105] Vicente R., Wilson C. On long-period polar motion. Journal of Geodesy, Vol. 76, N. 4, pp. 199-208, 2002
- [106] Vityazev V.V. The Time Interferometer: spectral analysis of gapped time series from the standpoint of interferometry. Statistical Challenges in Modern Astronomy, Penn State University, 1996.
<http://www.astro.spbu.ru/astro/win/personal/staff/vityazev.html>
- [107] Zotov L. Comparative Analysis of Benthic Foraminiferal Isotopic Records From Atlantic and Pacific Oceans Over the Past 1 Myr. AGU Chapman Conference on Abrupt Climate Change, OSU, Columbus, 2009
- [108] Zotov L., Dynamical modeling and excitation reconstruction as fundamental of Earth rotation prediction. Artificial satellites, Vol. 45, N 2, pp. 95-106, Warsaw, 2010
- [109] Zotov L., C.K. Shum. Singular spectrum analysis of GRACE observations, American Institute of Physics, Proceedings of the 9th Gamow summer school, Odessa, 2009

Зотов
Леонид Валентинович

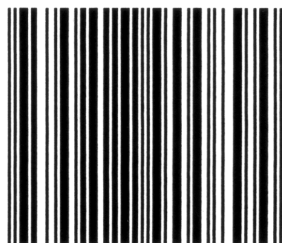
ТЕОРИЯ ФИЛЬТРАЦИИ И ОБРАБОТКА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Курс лекций

Подписано в печать 08.12.2010
Объём 12.5 п.л. Тираж 100 экз.
Заказ N 192

Физический факультет МГУ
имени М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
Отпечатано в отделе оперативной печати
физического факультета МГУ

ISBN 978-5-8279-0089-4



9 785827 900894