Category Theory in Context

Translator

August 30, 2025

目录

1 范畴, 函子, 自然变换 **1**
1.1 抽象范畴与具体范畴 3

第 1 章　范畴, 函子, 自然变换

现代数学常出现「自然性」现象.

Samuel Eilenberg 和 Saunders Mac Lane,
"Natural isomorphisms in group theory"[?]

对 Abel 群 G, Abel 群 H 的**群扩张**为群 E, 嵌入 $G \hookrightarrow E$ 为正规子群, 满同态 $E \twoheadrightarrow H$ 将 H 表示为商群 E/G. 上述数据常以群同态图表示:

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow 0$$ [1]

存在同构 $E \cong E'$, 且其交换对 G 的嵌入与商映射到 H 时, 认为 G 和 H 的一对群扩张 E 和 E' 等价, 这一叙述某种意义上将于 § ??. H 的 *Abel* 群扩张等价类由 G 定义 Abel 群 $\mathrm{Ext}(H, G)$.

于 1941 年, Saunders Mac Lane 在 Michigan 大学演讲时, 针对素数 p 证明了

$$\mathrm{Ext}\left(\left[\frac{1}{p}\right]\Big/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}_p,$$

即 p–进整数群, 其中, $\left[\frac{1}{p}\right]\Big/\mathbb{Z}$ 为 Prüfer p–群. 他向 Samuel Eilenberg 解释这一结果时忘记了自己的演讲过程, Eilenberg 回想该计算结果为 p–进螺线 3 维球面补空间的同调, 由一个实心圆环序列的无穷交构成的空间, 每个环在前一个环内绕 p 次. 在梳理其中联系时, 二人发现了一个定理, 代数拓扑领域现在称其作**万有系数定理**, 该定理将同调 H_* 和上同调群 H^* 与一个空间 X 通过群扩张 [?]

$$0 \to \mathrm{Ext}\left(H_{n-1}(X), G\right) \to H^n(X, G) \to \mathrm{Hom}\left(H_n(X), G\right) \to 0 \tag{1.0.1}$$

联系了起来.

为获得万有系数定理更泛用的构造, Eilenberg 和 Mac Lane 不得不用证明一些表以群扩张的 Abel 群同构, 其能够扩张至经由极限或余极限构造的空间. 诚则确然, 正因图 (1.0.1) 述同态皆自然于拓扑空间间的连续映射.

「自然」一词在数学家口中意味着「不依赖任选而定义」. 例如, 定义有限维向量空间 V 及其**对偶**间的同构, 即由从 V 至基域 $\Bbbk$ 的线性映射构成的向量空间, 依赖于基

[1] 结尾的 0 不提供额外信息, 但开头的 0 断定了映射 $G \to E$ 是嵌入, 而这一嵌入映射又断定了其后的 $E \to H$ 为满射. 更准确地说, 这些群同态给出的序列**正合**, 也就是说, 前一个同态的像总恰为后一个同态的核.

的选择; 又如, 存在从 V 至其双对偶间的同构, 其定义不依赖基: 故而仅后述之映射定义*自然*.

为证明其特定群同构族扩张至极限和余极限, Eilenberg 和 Mac Lane 设法给出非正式概念「自然性」在数学上精确的定义, 为此他们引入了*自然变换*, 上述情形下 Abel 群的同态平行总和; 为描述自然变换的源与目标, 又引入了*函子*[2]; 而为普适定义函子的源和目标, 又引入「范畴」这一概念: 上述工作称以「自然等价的一般理论」**??**, 在 1945 年发表, 是为范畴论的诞生日.

范畴与函子最开始作为辅助记号提出, 这是因为自然性这一概念确需精确定义, 而现在, 其本身亦足够有趣、足够重要. 范畴论提出数学对象研究时的一种不同视角, 即不再过分关注对象本身, 而把更多精力放在对象间的关系上. 函子能够翻译数学对象的一种形式到另一种形式, 应用更为直接, 例如, Brouwer 不动点定理翻译拓扑中似乎棘手的问题为代数中的平凡问题 (即 $0 \neq 1$), 这正是我们目前转向的主题.

范畴将于 §**??** 以两种形式介绍: 其一作为宇宙分类数学对象, 其二其自身亦视作数学对象. 前者用于譬如定义更广义的*同构*概念, 使其能够专门用于各式各样的数学对象. 后者则引出, 那些公理定义下, 范畴必自对偶.[3] 因此, 正如 §**??** 所探索的, 从那些公理开始, 对关于所有范畴的定理, 其任何证明均具一对偶证明于对偶定理, 这一对偶定理由称作「反转所有箭头」的句法过程得到.

函子和自然变换于 §**??** 和 §**??** 引入, 其中举例, 旨在阐明个中用语及实际应用. 范畴论记号*同构 (Isomorphism)*、*左消态射 (Monomorphism)*、*右消态射 (Epimorphism)* 在特定函子类中不变, 尤其包括*范畴等价*, 将于 §**??** 引入. 切要剖之, 有了范畴等价, 得以精准表达某两种类型数学对象间「等同」的直觉: 矩阵范畴和有限维向量空间范畴间的等价, 相当于高中和大学的线性代数间的等价.

除提供新的语言以描述新兴数学现象, 范畴论亦引入新的证明工具: 图索法 (diagram chase). 著作 [?] 的导言中展示, *交换图*作为「新的证明工具」之一, 正逐渐成为同伦论的公理化处理手段. 图索法这一工具将介绍于 §**??**, 然后应用于 §**??** 以构建新的自然变换为给定自然变换的*纵复合*或*横复合*.

[2]群论中, 函子与自然同构于 1942 年的一份文献 [?] 内有简短介绍.

[3]确然如此, 对于射影平面几何, 其对偶性可确切述作公理化其结构的一阶逻辑定理.

1.1 抽象范畴与具体范畴

为所有数学理论构建可能平台: 只要这个理论有*名词*和*动词*, 即对象和态射, 且对态射来说有明确的复合

Barry Mazur, "When is one thing equal to some other thing?"[?]

定义 1.1.1. 范畴为含有

- **对象 (object)** 的总体 (collection) $X, Y, Z, \ldots$
- **态射 (morphism)** 的总体 $f, g, h, \ldots$

并使得

- 任意态射均唯定其**域 (domain)** 与**上域 (codomain)** 对象; 记号 $f \colon X \to Y$ 表示 f 为有域 X 与上域 Y 的态射.
- 任意对象均拥有唯定**恒等态射** $1_X \colon X \to X$.[4]
- 对任意态射对 f, g, 其中 f 的上域等于 g 的域, 总存在唯定**复合态射 (composite morphism)**[5] gf, 其域为 f 的域, 上域为 g 的上域, 即[6]:

$$f \colon X \to Y, \quad g \colon Y \to Z \qquad \rightsquigarrow \qquad gf \colon X \to Z.$$

的二元组. 其资料受制于如下两公理:

- 对任意 $f \colon X \to Y$, 恒有 $1_Y f = f 1_X = f$.
- 对任意可复合的态射三元组 f, g, h, 复合结果 $h(gf)$ 和 $(hg)f$ 认为等同, 均记作 hgf.

$$f \colon X \to Y, \quad g \colon Y \to Z, \quad h \colon Z \to W \qquad \rightsquigarrow \qquad hgf \colon X \to W.$$

亦即, 态射复合可结合, 存在幺, 其幺态射即保持双边幺的恒等态射.

注解 1.1.2. 范畴的对象与恒等态射存在双射对应, 且该对应唯定, 因为他们对态射复合保持双边幺. 故可定义范畴为态射总体, 拥有部分定义的复合运算, 存在特定态射用以识别复合对并保持双边幺, 参见 [?] 或 [?]. 但实践中, 同时指定对象和态射并不困难, 本书亦将如此处理.

---

[4]译注: 这里不意味着任意态射 $f \colon X \to Y$, 当 $X = Y$ 时有 $f = 1_X$. 用后文提到的记号, 这里更合理的说法是, 对任意对象 X, 均存在唯定幺态射 $1_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$.

[5]若至混淆, 则记号 $g \cdot f$ 不可简写如上.

[6]译注: 更明朗的写法:

$$\begin{aligned} (\cdot) \colon \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) &\to \mathrm{Hom}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto gf = g \cdot f \end{aligned}$$

传统上用其对象命名范畴; 同时通常来说, 更倾向于使用那些随之而来的结构保持态射更清晰的选择. 然而这一做法有违范畴论的基本哲学: 数学对象理应总与其间的态射一并考虑. 根据注解 1.1.2, 态射的代数决定了范畴, 故而在对象和态射之间, 后者更具首要地位.

例 1.1.3. 许多数学对象可组装为范畴.

(i) 集合范畴 Set 以集合为对象, 拥有具体域、上域的函数为态射.

(ii) 拓扑空间范畴 Top 以拓扑空间为对象, 连续函数为态射.

(iii) Set_* 和 Top_* 以指定基点的集合或拓扑空间为对象, 保持基点的 (连续) 函数为态射.

(iv) 群范畴 Group 以群为对象, 群同态为态射. 此例赋予「态射」这一通用术语以抽象范畴的数据. 环范畴 Ring 由交换幺环和环同态构成, 域范畴 Field 由域和域同态构成, 皆有相近定义.

(v) 给定幺环 R (未必交换), 左 R–模范畴 Mod_R 由左 R–模与模同态构成. 当环实为域 $\Bbbk$ 时, 该范畴进一步为线性空间范畴 $\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$; 而为 $\mathbb{Z}$ 时进一步为 Abel 范畴 $\mathsf{Ab} = \mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}}$, 因为 $\mathbb{Z}$–模实际就是 Abel 群.

(vi) 图范畴 Graph 以图为对象, 以图同态 (将顶点映到顶点, 边映到边, 同时保持连接关系的函数) 为态射. 另有有向图范畴 $\mathsf{DirGraph}$, 以有向图为对象, 其边画作箭头, 而态射则为有向图同态, 即必保持边的方向.

(vii) 流形范畴 Man 以光滑流形 (即无穷阶可微) 为对象, 光滑映射为态射.

(viii) 可测空间范畴 Mea 以可测空间为对象, 可测函数为态射.

(ix) 偏序集范畴 Poset 以偏序集为对象, 保序函数为态射.

(x) Ch_R 以 R–模的链复形为对象, 链同态为态射.

(xi) 对任意指配有常数、函数、关系符的字符集 σ, 以及所有在 σ 相关的一阶语言中良构的语句, 构成集 $\mathbb{T}$, 可有模型范畴 $\mathsf{Model}_{\mathbb{T}}$, 其对象为模型 $\mathbb{T}$ 的 σ–结构, 亦即配备了满足公理 $\mathbb{T}$ 的相应常数、关系、函数的集合. 而态射即通常的保持指定常数、关系、函数的映射. 这一范畴的特例包括前述的 (iv), (v), (vi), (ix), (x).

上述即*具体范畴 (concrete category)* 的全部例子, 即对象基于集合, 而态射为这些对象背后的集合间的函数, 尤其是「结构保持」态射. 具体范畴有一个更精确的定义, 于 **??** 给出. 此外, 「抽象」范畴亦很广泛:

例 1.1.4.

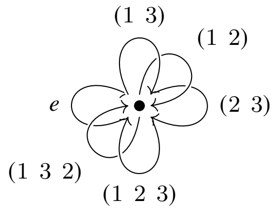
(i) 给定幺环 R, 范畴 Mat_R 以正整数为对象, 而其从 n 到 m 的态射集为值在 R 中的那些 $m \times n$ 矩阵构成的集. 态射复合由矩阵乘法

$$n \xrightarrow{A} m, \quad m \xrightarrow{B} k \qquad \rightsquigarrow \qquad n \xrightarrow{B\cdot A} k$$

完成, 其中单位矩阵体现为单位态射.

(ii) 一个群 G (或更宽泛地说, 一个幺半群) 定义一个范畴 $\mathsf{B}G$, 仅具唯一对象. 群元作为该范畴的态射, 分别代表该唯一对象上的不同自同态, 而态射复合即群乘法. 幺 $e \in G$ 即为单位态射.

$\mathsf{B}S_3 =$



(iii) 偏序集 $(\mathsf{P}, \leq)$ (或更一般地说, 预序集) 可视作范畴. P 的元素即范畴的对象, 而总存在唯一一个态射 $x \to y$ 当且仅当 $x \leq y$. 偏序关系或者说预序关系 $\leq$ 的传递性蕴含所需态射复合的存在性, 自反性蕴含单位态射的存在性.

(iv) 特别地, 任意序数 $\alpha = \{\beta | \beta < \alpha\}$ 均定义一个范畴, 其对象为那些比之小的序数. 例如, $\mathbb{0}$ 为无任何对象或态射的零范畴, $\mathbb{1}$ 为仅有一个对象且仅有单位态射的平凡范畴,[7] $\mathbb{2}$ 则为有两个对象, 同时除单位态射外有一个非单位态射的范畴, 传统上描摹作 $0 \to 1$. ω 为由图

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

自由生成的范畴, 其中, 任意非单位态射均可唯一分解为上示图中态射的复合. 自由生成的精准定义由例 ?? 给出.

(v) 集合本身亦可视作范畴, 以集合的元素作为对象, 而态射仅有必需的单位态射. 称某范畴**离散**当且仅当所有态射均为单位态射.

(vi) Htpy, 类似 Top, 以拓扑空间为对象, 但对象为连续映射的同伦类. 而 Htpy_* 须额外指定基空间、基连续映射的基点保持同伦类.

(vii) $\mathsf{Measure}$ 以可测空间为对象. 而态射选择为可测函数的等价类, 使得平行的一对函数等价, 当其域的差异为零测集.

上述种种, 道尽范畴论之哲学. 例 1.1.3 所陈范畴表明数学对象理应连带期间的态射一起探讨, 而列诸 1.1.4 者, 又说明态射并非总是函数.[8] 范畴的态射亦称**箭头**或**映射**, 尤其是在例 1.1.3 或 1.1.4 的背景下.

注解 1.1.5. Russell 悖论蕴含, 没有一个元素为「所有集合」的集合, 此亦定义 1.1.1 中采用模糊的「总体」一词之所咎. 事实亦如此, 例 1.1.3 中的所有例子, 其对象总体均非集合. Eilenberg 和 Mac Lane 如下处理这一潜在漏洞:

> … 整个范畴的概念本质上仅是辅助概念; 我们将基本概念本质上放在函子与自然变换上… 范畴的想法仅仅出于每个函数应有固定的类作为定义域和像而必须, 对范畴而言则表现为函子的定义域和像. 所以说范畴这个

[7] 译注: 这里说仅含单位态射, 并非「自然」, 而仅为规定, 反例见前文 $\mathsf{B}G$.

[8] Reid 的 *Undergraduate algebraic geometry* (《本科代数几何》) 强调, 态射并非总为函数, 原文 [?]:

「不认可该点的学生建议立即放弃, 转而修读一门范畴论阅读课程.」

> 概念完全可以摒弃, 而尝试构建一个更符直觉的起点, 这里面像「Hom」这样的函子就不定义在「所有」群的范畴上, 而仅仅基于可能给定的每个特定的群对. [?]

我们面临如此的集合论问题, 定义范畴概念后, 随着范畴理论发展得更远, 这一问题也会随之越发复杂. 基于这等因素, 范畴论学家的常见做法是在 Zermelo-Fraenkel 集合论公理系统的一个扩张里工作, 拥有额外的一些公理去区分「大集合」和「小集合」, 或者集合和类. 为范畴论寻觅最实用的集合论基础, 这一主题亦很迷人, 但很不幸, 这将离开我们的主题太久时间去探索.[9] 相反, 我们把这个问题压到箱底吧, 并不是说这些问题不重要或者无趣, 只是因为其太分散手头任务的注意力了.[10]

出于刚刚提及的理由, 有必要介绍用以描述范畴大小的形容词.

定义 1.1.6. 称范畴**小**, 当且仅当其态射总体不超出集合大小.

由注解 1.1.2, 小范畴的对象总体不超出集合大小. 若 C 是小范畴, 则有映射

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}\,\mathsf{C} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{dom}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{cod}"'] & \mathrm{Ob}\,\mathsf{C} \arrow[l, "\mathrm{id}" description] \end{tikzcd}$$

递送态射至其域和上域, 而递送对象至其单位态射.

例 1.1.3 中的范畴均非小, 其中每个范畴均携有太多对象. 但「局部而论」, 它们类似于小范畴, 具体陈述如下:

定义 1.1.7. 范畴称**局部小**, 若对所有对象对, 其间的态射总体不超过集合大小.

对局部小范畴, 从 X 到 Y 的所有态射这一总体习惯上记作[11]

$$\mathsf{C}(X,Y) \qquad \text{或} \qquad \mathrm{Hom}(X,Y) \tag{1.1.8}$$

局部小范畴中, 一对给定对象间的态射集通常称作 **Hom–集**, 无论其是否任何特定种类的「同态」集. 鉴于 (1.1.8) 中的记号的确方便, 尽管有时那些指定始终的态射总体大于集合, 亦用上述形式表记之.

给定范畴会提供一个背景, 得以回答:「一物何时同乎另一物?」在数学的几乎任何地方, 以精确的范畴式定义视同一范畴内同构两对象「相同」, 下面介绍同构:

定义 1.1.9. 范畴中, 称态射 $f\colon X \to Y$ 为**同构 (Isomorphism)**, 若存在态射 $g\colon Y \to X$ 使得 $gf = 1_X$ 且 $fg = 1_Y$. 此时称 X 和 Y 互为同构, 记作 $X \cong Y$.

自态射 (endomorphism) 即域与上域相同的态射, 而同构的自态射即称**自同构 (automorphism)**.

---

[9] 预印本 [?] 给出了激动人心的概述, 不过建议学完本书第 1—4 章后再去阅读.

[10] 如果不得已必须处理, 假设存在**不可达基数**的可数序列, 即不可数基数, 它们**正则**且**强极限**. 一基数 κ **正则**, 若所有少于 κ 的基数之并亦小于 κ. 而 κ **强极限**, 若 $\lambda < \kappa$ 蕴含 $2^\lambda < \kappa$. 不可达是指小于 κ 的集合在幂集运算与 κ–小并运算下封闭. 若 κ 不可达, 则 von Neumann 层次的 κ 阶段, 即秩小于 κ 的集合之集 V_κ, 是带选择公理的 Zermelo-Fraenkel 集合论 (ZFC) 的一个模型; 集合 V_κ 是一个 *Grothendieck* 宇宙. 假设存在一个不可达基数的可数序列, 即可在 V_κ 内部「使用集合论」, 而后根据需要随时扩大宇宙.

若 ZFC 一致, 那么该公理系统无法证明不可达基数的存在性, 甚至无法证明假设的一致性 (根据 Gödel 不完备性定理). 尽管如此, 从大基数公理的层垒观点来看, 不可达基数的存在性假设相对比较温和.

[11] Mac Lane 赞同 Emmy Noether 所强调的同态在抽象代数中的重要性, 尤其是商群上的同态, 在 Noether 第一同构定理中起了很大作用. 在他回忆中, 箭头记号首次出现于 1940 年, 可能要归因于 Hurewicz [?]. 记号 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 则首次现身于文献 [?], 用于表示一对 Abel 群间的同态集.

例 1.1.10.

(i) Set 中, 同构即**双射**.

(ii) Group, Ring, Field, Mod_R 中, 同构即双射同态.

(iii) Top 中, 同构即 **同胚 (homeomorphism)**, 即具连续逆的连续函数, 这一性质强于仅为双射连续函数.

(iv) Htpy 中, 同构即**同伦等价 (homotopy equivalence)**.

(v) 偏序 $(\mathsf{P}, \leq)$ 中, 反对称公理断言, $x \leq y$ 且 $y \leq x$ 蕴含 $x = y$, 亦即该范畴中仅单位态射为同构.

由例 1.1.10 的 (ii) 和 (iii) 有下述一般问题: 指定范畴, 同构何时恰为诱导底层集间双射的映射? 引理 ?? 将给出回答.

定义 1.1.11. 群胚 (groupoid) 为范畴, 其中全部态射均为同构.

例 1.1.12.

(i) **群**即仅一个对象的群胚.[12]

(ii) 给定空间 X, 其**基本群胚 (fundamental groupoid)** $\Pi_1 X$ 作为范畴, 以 X 上的点为对象, 以路径的终点保持同伦类为态射.

范畴 C 的**子范畴 (subcategory)** 定义作对象子总体与态射子总体, 使得任意限制进 D 的态射均仍能在其中找到域与上域, 亦能找到所有必需的恒等态射, 以及所有必需的态射复合. 例如存在子范畴 CRing ⊂ *Ring*, 即交换幺环范畴. 上述两范畴均含于 Rng, 一般的环范畴.

引理 1.1.13. *任意范畴 C 均含一极大群胚 (maximal groupoid), 该子范畴拥有所有 C 的对象, 但仅有所有必需的恒等态射.*

Proof. 练习 ??. □

举例比如 $\mathsf{Iso}_{\mathrm{iso}}$, 有限集双射范畴, 正是有限集映射范畴 Fin 的极大子群胚. 例 ?? 会解释群胚何以视作自然数的范畴化, 这提供了一个有利环境, 用以证明初等算数律.

习题.

习题 1.1.i .

(i) 考虑态射 $f: x \to y$, 证明若存在态射对 $g, h: y \rightrightarrows x$ 使得 $gf = 1_x$ 且 $fh =_y$, 则 $g = h$, 且 f 为同构.

(ii) 证明同构最多拥有一个逆态射.

[12]这并非仅为示例, 亦是其定义.[13]

[13]译注: 群 G 作为群胚, 唯一对象 $*$, 态射类即 $G = (\mathrm{Hom}(*, *), \circ)$, 其中 $\circ$ 即态射复合, 易证封闭性、结合性、幺元存在 (即 1_*)、逆元存在 (作为同构, 总存在逆态射). 另, 函子 $F\colon \mathsf{B}G \to \mathsf{Set}$ 恰好等价于 G 在 X 上的左作用, 将抽象对象 $*$ 映到具体集合 X.

习题 1.1.ii . 令 C 为范畴, 证明其同构总体定义了其一个子范畴, 即范畴 C 内的**极大群胚**.

习题 1.1.iii . 对任意范畴 C 与任意对象 $c \in \operatorname{Ob}\mathsf{C}$, 证明:

(i) 有范畴 c/C, 对象为域为 c 的态射 $f\colon c \to x$, 而从 $f\colon c \to x$ 到 $g\colon c \to y$ 的态射为上域间的映射 $h\colon x \to y$, 使得三角图

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[rr, "h"] & & y \end{tikzcd}$$

交换, 即 $g = hf$.

(ii) 有范畴 C/c, 对象为上域为 c 的态射 $f\colon x \to c$, 而从 $f\colon x \to c$ 到 $g\colon y \to c$ 的态射为域间的映射 $h\colon x \to y$, 使得三角图

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & y \arrow[dl, "g"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

交换, 即 $f = gh$.

范畴 c/C 和 C/c 分别称作 C 的**下切片范畴 (category under c)** 和**上切片范畴 (category over c)**

Bibliography