CHONGQING UNIVERSITY

高等代数课程报告

从集合论到线性空间——关于线性空间八条公理的思考

教师 舒永录

学院 物理学院

班级 强基物理 01

学号 20225847

姓名 陈骁睿

2023 年 12 月 17 日

摘　要

本文抛弃传统线性代数中线性空间八条公理。采用抽象代数的思想，从集合论开始，经过群论，自底向上构建体系，得到线性空间的定义。再证明线性空间满足那八条性质。

按照定义顺序，主要包括：集合，映射，笛卡尔积，运算，代数系统，群，阿贝尔群，环，域，线性空间。

目录

从集合论到线性空间

1　前言说明

本文章使用 overleaf 编写，借用了上交的 LaTeX 模板。除模板外的所有内容均为本人编写，也算是作者本人的对 LaTeX 书写论文的练习和熟悉。

作者本人仅仅为物理专业的普通大二学生，数学爱好者，非数学专业。文中难免出现错误和不严谨之处，忘多多包涵，有问题也欢迎批评指正。

本文并非是一篇论文，只是一次普通的期末报告。不会严格按照论文的格式书写。而是比较注重展示数学之美以及自认为的严谨性（所以会把参考文献写在文中，方便追根溯源）。

本文的写作主要参考《离散数学》,《量子计算：一种一种应用方法》，蓝以中的《高等代数》，丘维声的《高等代数》。

2　集合论

无论是高中还是大学，数学的第一门课几乎都是从集合开始的。有趣的是，由于罗素悖论的存在，对于集合的定义似乎并不完备，当然这并不是这篇文章想要讨论的。这里使用最传统的表述：

> 一个集合是具有某种共同性质的东西组成的一个整体。

2.1　函数和映射

这里的定义参考了丘维声的《高等代数》，并使用自己的语言进行简写。可能不够严谨。

定义 2.1. f 是集合 S 到集合 S' 的一个映射

$$f : S \to S' \iff \forall a \in S, \exists 唯一 b \in S', f(a) = b$$

> 在线征集“存在唯一”的符号表达 ()

在传统意义上，当 S 和 S' 为数域时，我们称 f 为函数。

在《离散数学》的教材中，并不区分函数和映射（想来是因为计算机函数往往非常抽象，不仅和数域无关，甚至不是一个映射），秉承程序员的自我修养，本文把函数和映射统称映射。

关于映射，有一些基本的定义。

定义 2.2. 映射 f 是单射，当且仅当

$$\forall x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2 \Longleftrightarrow f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$$

定义 2.3. 映射 f 是满射，当且仅当

$$\forall y \in S', \exists x \in S, y = f(x)$$

定义 2.4. 映射 f 是双射，当且仅当 f 是满射又是单射

2.2 笛卡尔积

定义 2.5. 笛卡儿积 $A \times B$ 满足

$$A \neq \oslash, B \neq \oslash, A \times B := (a, b) | a \in A, b \in B.$$

特别的

定义 2.6.

$$\begin{cases} A \times A := A^2. \\ A \times A^k := A^{k+1}, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

这是一个递归定义，事实上，若 A 为数域，就可以定义传统的向量空间，但这并非本文想要讨论的。

2.3 运算

这里参考蓝以中的《高等代数》和《离散数学》，并进行改写。

定义 2.7. 映射 $f : A^n \to B$ 称为集合 A 上的一个 n 元运算

定义 2.8. 映射 $f : A \times A \to A$ 称为集合 A 内的一个代数运算

注意到，在后一个定义中，f 是二元运算，且满足封闭性。

事实上蓝以中的教材中只给出了“代数运算”的定义，对于“运算”的定义来自《离散数学》。

接下来对代数运算作进一步讨论

2.3.1 代数运算

设 $*$ 是集合 R 内的一个代数运算,

定义 2.9. 若 $\forall x, y \in R, x * y = y * x$ 称 $*$ 满足交换律。

定义 2.10. 若 $\forall x, y, z \in R, (x * y) * z = x * (y * z)$ 称 $*$ 满足结合律。

定义 2.11. 若 $\exists x_0 \in R, \forall x \in R, x_0 * x = x_0$ 称 x_0 为零元，记为 0

定义 2.12. 若 $\exists x_1 \in R, \forall x \in R, x_1 * x = x$ 称 x_1 为幺元（或单位元），记为 1

定义 2.13. 若 $\exists x_1\ x_2 \in R, x_1 * x_2 = 1$ 称 x_1, x_2 互为逆元, x_1, x_2 的逆元分别记为 x_2^{-1}, x_1^{-1}

> 事实上，这里的集合 R 可以看作实数集 $\mathbb{R}$, 运算 $*$ 可以看作实数的乘法 $\times$，此时上述五条均满足

其实更严谨的定义需要分左右讨论，即左零元、右零元，左幺元、右幺元，左逆元、右逆元。但可以证明其唯一性，故上述定义亦完备。

3 群论

以下论述主要参考于本人辅修计算机科学与技术专业时学的《离散数学》，教材作者是左孝凌、李为鉴、刘永才，1982 年 9 月由上海科学技术文献出版社出版。我对定义使用当且仅当 (iff) 重新表述，从代数系统开始，逐渐添加限制条件，得到阿贝尔群，再借此得到环和域的定义，只认为颇具数学之美。有趣的事，在查阅资料的过程中，发现这些东西都来自于数学系的《抽象代数》，虽没学过，但看名字就知道不会简单，每念及之，无不佩服于数学的强大和泛用性。

3.1 代数系统和群

代数系统

定义 3.1. 一个非空集合 A 连同若干定义在 A 上的运算 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 所组成的系统，称为代数系统，记作 $\langle A, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle$

> 值得一提的是，这里的定义中运算 f 并非代数运算，似乎有些文章中代数系统的定义会要求 f 满足封闭性，本文不要求，特此说明。

广群

定义 3.2.

$$\text{代数系统 } \langle S, * \rangle \text{, 是广群，当且仅当 } * \text{ 是代数运算}$$

半群

定义 3.3.

$$\text{广群 } \langle S, * \rangle \text{ 是半群，当且仅当 } * \text{ 满足结合律}$$

独异点

定义 3.4.

半群 $\langle S, * \rangle$ 是独异点（或含幺半群），当且仅当S关于 $*$ $\exists$幺元

群

定义 3.5.

独异点 $\langle G, * \rangle$ 是群，当且仅当$\forall x \in G, \exists x^{-1}$

阿贝尔群（交换群）

定义 3.6.

群 $\langle G, + \rangle$ 是阿贝尔群，当且仅当 $+$ 满足交换律

在我写完这个部分后，发现似乎2.3.1的内容应该放到代数空间里更为严谨，即在定义半群的同时定义幺元，定义独异点的同时定义逆元，定义阿贝尔群的同时定义交换律，等等。但我实在不愿破坏现在从广群到阿贝尔群的定义表述的连贯性，（我称其为语文之美）。故不作更改，特此说明。

3.2 环和域

环

定义 3.7.

代数系统 $\langle A, +, * \rangle$ 是一个环，当且仅当 $\langle A, + \rangle$ 是阿贝尔群，$\langle A, * \rangle$ 是半群

且 $*$ 对于 $+$ 是可分配的，即 $\forall x, y, z \in A$, $\begin{cases} x * (y + z) = x * y + x * z, \\ (y + z) * x = y * x + z * x. \end{cases}$

交换环

定义 3.8.

环 $\langle A, +, * \rangle$ 是交换环，当且仅当 $\langle A, * \rangle$ 是可交换的

含幺环

定义 3.9.

环 $\langle A, +, * \rangle$ 是含幺环，当且仅当 $\langle A, * \rangle$ 是独异点

整环

定义 3.10.

环 $\langle A,+,*\rangle$ 是整环，当且仅当 $\langle A,+,*\rangle$ 是含幺交换环

且 $\langle A,*\rangle$ 无零因子，即 $\forall x,y\in A,x\neq 0,y\neq 0\Rightarrow x*y\neq 0$

域

定义 3.11.

整环 $\langle A,+,*\rangle$ 是域，当且仅当 $\langle A-\{0\},*\rangle$ 是阿贝尔群

对于环的域这一节的表述没有群那一节那么美观，我已尽力简化，但依然无法一气呵成，可能是我能力不够吧。

4 线性空间

关于线性空间和向量空间的关系需要先说明一下。在蓝以中的教材中，先是定义了向量空间，再定义线性空间，并认为线性空间包含向量空间，这当然没有问题，毕竟线性空间的元素不一定是向量。而在丘维声的教材中，有这么一句话：**借助几何语言，把线性空间的元素称为向量，线性空间又可称为向量空间**。这种说法同样没有问题，毕竟二者也确实等价。在本文中，我并没有引入向量的概念，故采用后者的说法，即认为向量空间和线性空间是一个东西的两个名称。

4.1 八条公理

定义 4.1. 域 $\mathbb{F}$ 上的一个线性空间 V 由一个阿贝尔群 V 以及一个域 $\mathbb{F}$ 在 V 上的数乘运算构成

其中只用集合的符号，即单个大写字母表示群和域，特此声明。

我看到这个定义4.1是在《量子计算：一种应用方法》这本书中，作者是杰克-希德里，人民邮电出版社出版。我正是因为看了这本书，才萌生了写这篇文章的想法。用一句话便定义了线性空间，是如此的简洁优美。

再看看传统的定义是多么的丑陋。

定义 4.2.

设 V 是一个非空集合,K 是一个数域. 又设:

(i) 在V 中定义了一种运算, 称为加法. 即对V 中任意两个元素

$\alpha\ \beta$, 都按某一法则对应于V 内唯一确定的一个元素, 记之为$\alpha+\beta$;

(ii) 在 K 中的数与V 的元素间定义了一种运算,**称为数乘**.

即对V中任意元素α 和数域K 中任意数k,

都按某一法则对应于V 内唯一确定的一个元素, 记之为$k\alpha$.

如果加法与数乘满足下面列出的八条运算法则，那么称 V 是数域 K 上的一个线性空间.

加法和数乘满足下面的八条运算法则:

(i) 对任意$\alpha,\beta,\gamma\in V,\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma;$

(ii) 对任意$\alpha,\beta\in V,\alpha+\beta=\beta+\alpha;$

(iii) 存在一个元素$0\in V$, 使对一切$\alpha\in V$, 有$\alpha+0=\alpha,$

此元素 *0* 称为 V 的零元素;

(iv) 对任一$\alpha\in V$ 都存在$\beta\in V$, 使$\alpha+\beta=0,$

β称为α的一个负元素;

(v) 对数域中的数1, 有$1\bullet\alpha=\alpha;$

(vi) 对任意$k,l\in K,\alpha\in V$, 有$(kl)\alpha=k\,(l\alpha)\,;$

(vii) 对任意$k,l\in K,\alpha\in V,\bar{\lambda}$有$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha;$

(viii) 对任意$k\in K,\alpha,\beta\in V$, 有$k\,(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta.$

定义4.2来自于蓝以中的《高等代数》。为方便讨论，简写为下面的定理。

定理 4.3. 线性空间满足下列八条性质

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a} \tag{5}$$

$$\lambda\,(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\,\boldsymbol{a} \tag{6}$$

$$\lambda\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b} \tag{7}$$

$$(\lambda+\mu)\,\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a} \tag{8}$$

这个定理的表述是我直接从网上 *copy* 下来的。并不严格，比如压根没说 $a,b,c,+,*,\lambda,\mu$ 是什么，但这些都是我们很熟悉的东西，非常显然，在这里省略亦无伤大雅。

注意到定理4.3我用了**定理**而不是**公理**。那既然是**定理**当然需要证明了。而使用定义4.1证明定理4.3正是这篇文章的最终目的。

但在开始之前还有一个东西没有定义，即域 $\mathbb{F}$ 在 V 上的**数乘运算**。参考《量子计算》

定义 4.4. 域 $\mathbb{F}$ 在 V 上的**数乘运算**$*$ 是映射 $F\times V\to V$ 满足

- 分配律 *1*：$\forall a\in F,\forall u,v\in V$ 有

$$a*(u+v)=a*u+a*v$$

- *分配律 2*：$\forall a,b \in F, \forall v \in V$ 有

$$(a+b)*v = a*u + b*v$$

- *结合律*：$\forall a,b \in F, \forall v \in V$ 有

$$(ab)*v = a*(b*v)$$

- *存在单位元*：$\forall v \in V, \exists 1 \in F$ 有

$$1*v = v$$

值得注意的是，虽然我只使用了加法 $+$ 和数乘 $*$，但上述定义一共包含了四个运算，展开之后很容易理解

域 $\mathbb{F}$ 在 V 上的**数乘运算** $\Longleftrightarrow$ 域 $\langle F, +_1, \times \rangle$ 在阿贝尔群 $\langle V, +_2 \rangle$ 上的**数乘运算** $*$.

他们分别是 F 上的加法，F 上的乘法，V 上的加法，F 和 V 上的乘法。它们对应于不同的映射，完全不同，但性质又是如此相似，并能彼此联系在一起，构成一个具有强大泛用性的系统。在我看来这正是数学美的所在。

现在完事具备，只欠证明，事实上，定理4.3已经非常显然了。

证明. $\because$ 由 $\langle V, + \rangle$ 是阿贝尔群，由定义3.6直接得到前四条性质，其中 V 关于 $+$ 的逆元定义为负元。

由数乘运算的定义4.4，直接得到后四条性质。 □

最后，有一个非常有趣的问题

命题 4.5. *定义4.1与定义4.2不等价。*

这个命题的表述是我自己想的，可能不正确。不过丘维声的定义就不存在这个问题

证明. 因为定义4.1并没有要求域 $\mathbb{F}$ 是数域，而定义4.2要求。所以原命题得证。 □

至此，所有正文内容就结束了，后面是一些简单的性质和证明。也是对2.3.1的补充。

4.2 性质

命题 4.6. *零元是唯一的*

证明.

$$设\exists \mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2, \forall x \in V, 0_1 + x = x, 0_2 + X = X$$

那么

$$0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_1$$

所以零元唯一 □

命题 4.7. 负元是唯一的

命题 4.8.

$$\forall\alpha \in V, 0 * \alpha = 0$$

命题 4.9. *k*0=0*

证明.

$$\begin{aligned}
&k * 0 = k * (0 + 0) = k * 0 + k * 0 \\
&k * 0 + (-k * 0) = k * 0 + k * 0 + (-k * 0) \\
&0 = k * 0 + 0 \\
&0 = k * 0
\end{aligned}$$

□

命题 4.10.

$$k * \alpha = 0 \Longleftrightarrow k = 0\, or \alpha = 0$$

证明. $\Leftarrow$ 已证明

$\Rightarrow$

假设 $k! = 0$ and $\alpha! = 0$

$$\exists k^{-1}, k^{-1} * k = 1$$

then

$$\alpha = 1 * \alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k * \alpha) = 0$$

矛盾 □

命题 4.11.

$$(-1) * \alpha = -\alpha$$

证明.

$$\left\{\alpha + (-1) * \alpha = (1 + (-1)) * \alpha = 0 * \alpha = 0\right.$$

根据负元的定义，原命题得证 □

基变换

$$\text{对}\mathbf{R}^n\text{的两个基}$$
$$\mathrm{I}:\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$$
$$\mathrm{II}:\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$$
$$\text{构造两个基矩阵}$$
$$\boldsymbol{B}=\mathrm{def}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{F}=\mathrm{def}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \boldsymbol{f}_n\end{bmatrix}$$
$$\text{称}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{B}\text{为I到II的过渡矩阵，而}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{F}\text{为II到I的过渡矩阵，过渡矩阵关联式}$$
$$\boldsymbol{v_F}=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v_B}$$
$$\boldsymbol{v_B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{v_F}$$
$$\text{称为坐标变换公式}$$
$$\mathrm{II}:\{\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_n\}$$
$$\text{构造两个基矩阵}$$
$$\boldsymbol{B}=\mathrm{def}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{F}=\mathrm{def}\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \boldsymbol{f}_n\end{bmatrix}$$
$$\text{称}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{B}\text{为 I 到 II 的过渡矩阵，而}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{F}\text{为 II 到 I 的过渡矩阵，过渡矩阵关联式}$$
$$\boldsymbol{v_F}=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v_B}$$
$$\boldsymbol{v_B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{v_F}$$
$$\text{称为坐标变换公式}$$

基变换放在这里非常突兀，其实我在这里只是想借此表达一个观点，那就是**矩阵是通过基变换定义的**，再之后**行列式可以通过矩阵定义**。由此就能构建高等代数的体系。

> 而不是像几乎所有的教材上，一上来就定义行列式

5　后记

5.1　关于本文

事实上，本文中的大部分内容并非高等代数课上学到的，它们主要来自于本人在学习《量子计算：一种应用方法》和《离散数学》时的一些思考，正巧高代期末要写期末报告，便决定以此为主题。当然，在撰写文章的时候我也参考了蓝以中和丘维声的《高等代数》教材。我发现蓝以中和丘维声都对集合论，笛卡尔积，包括群（群只有蓝以中

的书中有）、环、域的概念有一些论述。但基本上都是运算法则的罗列，并没有像本文这样自底向上构建系统。当然，它们毕竟是《高等代数》而不是《抽象代数》，没必要这么“抽象”。我自然没想和他们比，而且我想几百年前肯定就有人做过我现在正在的事了。更何况丘维声也写了一本专门的《近世代数》，不过我并没有看过。不过，这个过程亦是有趣的。使用 LaTeX 书写文章和公式也颇具美感。乐亦在其中也。而且这应该是我人生中的第一篇像论文一样的文章吧，满满的成就感。

5.2 关于高代学习

我《高等代数》的学习充满艰辛与乐趣。沉迷于抽象的数学表达和逻辑证明，不是很喜欢机械的计算，比如高斯消元、行列式和特征值等。因为我觉得机械的计算都是可以通过计算机实现的，像 matlab、mathmatica 之类强大的软件，人算得好没有太大意义，再好也比不过计算机。但数学定理的证明，公理体系的建立却是非人类莫属的。（严谨一点，不得不提，计算机也能辅助证明，而且历史悠久，比如大名鼎鼎的四色问题，另外男神陶哲轩也写过一篇文章，做过一个报告，专门讲这个事）。最后将一个故事，我上个星期参加计算机学院组织的“挑战杯”程序设计算法竞赛时，遇到了一个题，就是计算一个普普通通的范德蒙行列式，很容易求出通解。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)$$

如果使用计算机直接套公式，在 n 太大的情况下，复杂度太高，会超时。但是如果经过一系列变形，写成一个递推的形式。再利用线段树这种高级数据结构，便能在规定的时间里计算出结果。具体算法这里不提。只想表达一个观点：

只会计算学不好数学，但不会计算更学不好数学。

5.3 发布地址

你能在下面的地址找到 LaTeX 源文件。

- GitHub: https://github.com/XeriChen/advanced_algebra_final_assignment

感谢您能看到最后。