

TRABAJO PRÁCTICO II

ECUACIONES DIFERENCIALES

Primer Cuat. 2015

ANÁLISIS NUMÉRICO I

Trabajo Práctico II Ecuaciones Diferenciales

Los modelos **depredador-presa** se desarrollaron de manera independiente en la primera parte del siglo XX, gracias al trabajo del matemático italiano Vito Volterra y del biólogo estadounidense Alfred Lotka. Estas ecuaciones se conocen como **las ecuaciones de Lotka-Volterra**. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las poblaciones de presas y predadores respectivamente. La razón de cambio de las presas es proporcional en cada instante al número de ellas menos la probabilidad de contacto entre presas y predadores es decir:

$\frac{dx(t)}{dt} = a_1x(t) - a_2x(t)y(t)$. De manera similar en ausencia de presas la población de predadores disminuye a una tasa proporcional al número de ellos y al incluir a las presas su población aumenta proporcionalmente a la posibilidad de contacto entre las presas y los predadores es decir.

$\frac{dy(t)}{dt} = -b_1y(t) + b_2x(t)y(t)$ Combinando estos dos factores tenemos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a_1x(t) - a_2x(t)y(t) & (1) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -b_1y(t) + b_2x(t)y(t) & (2) \end{cases}$$

Dónde:

$x(t)$ = número de presas e $y(t)$ = número de depredadores ,

a_1 es la razón de crecimiento de la presa,

b_1 es la razón de muerte del depredador,

a_2 y b_2 es la razón que caracteriza el efecto de interacción presa

– predador sobre la muerte de la presa y el crecimiento del depredador, respectivamente

Los términos que se multiplican (es decir los que involucran xy) hacen que las ecuaciones sean **no lineales**.

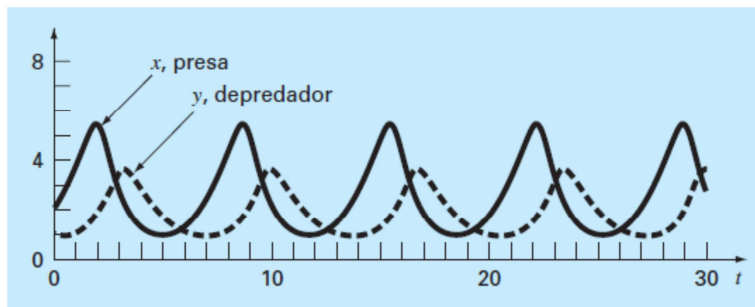
Se pide:

- 1) Utilice los siguientes valores de los parámetros para la simulación depredador-presa: $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.018$, $b_1 = 0.8$ y $b_2 = 0.023$.

Emplee como condiciones iniciales $x(0) = 30$ e $y(0) = 4$.

Integre desde $t = 0$ hasta $t = 30$. Utilice Runge-Kutta de orden cuatro con paso 0.1, para obtener las soluciones.

- 2) Grafique las soluciones obtenidas con un graficador deberá obtener un gráfico similar al siguiente:



En caso de ser necesario ajuste los puntos obtenidos con cuadrados mínimos

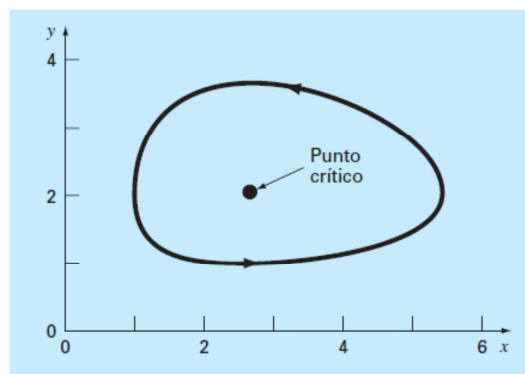
- 3) Observe que se obtiene un patrón cíclico. Así, como inicialmente la población del depredador es pequeña, la presa crece de manera exponencial. En cierto momento, las presas son tan numerosas que la población del depredador empieza a crecer. Después el aumento de depredadores causa que la presa disminuya. Esta disminución, a su vez, lleva a una disminución de los depredadores. Con el tiempo, el proceso se repite. Observe que, como se esperaba, el pico en la curva para el depredador se retrasa respecto al de la presa. Además, observe que el proceso tiene un periodo fijo; es decir, se repite cada cierto tiempo.

Determine el pico tanto para la presa como para el predador a partir del gráfico que realizó. Determine también el período.

- 4) Duplique el valor de los parámetros y repita lo realizado en 3).
¿Puede extraer alguna relación entre los parámetros y los picos encontrados?

Una representación estado-espacio es útil para distinguir la estructura fundamental del modelo. En lugar de graficar x e y versus t , se grafica y versus x . Esta gráfica ilustra la manera en que interactúan las variables de estado (x e y) y se la conoce como una *representación estado-espacio*.

- 5) Grafique la representación estado-espacio para los parámetros dados en 1), deberá obtener un gráfico como el que sigue:



La interacción entre el depredador y la presa define una órbita cerrada en sentido derecho. Observe que hay un punto crítico o de reposo en el centro de la órbita.

La localización exacta de este punto se determina poniendo las ecuaciones (1) y (2) en estado estacionario ($\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$) y resolviendo para el sistema.

Obtener las soluciones del sistema. $((x, y) =$

$(0,0)$ y $(c/d, a/b)$) La primera es el resultado trivial, si

empezamos sin predador y sin presa, no sucederá nada. La segunda es el resultado más interesante si las condiciones iniciales se consideran como $x = c/d$ e $y = a/b$ en $t = 0$, la derivada será

cero y las poblaciones permanecerán constantes.

6) Verificar lo anterior para el caso del ejercicio 1)

7) Realizar un ejecutable donde el usuario ingrese las condiciones iniciales y obtenga la solución para un intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ y $t = 30$.